

## 1 Allgemeines

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx \quad \frac{dy(x(t))}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t)$$

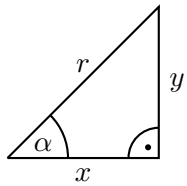
$$\frac{d \sin(x)}{dt} = \cos(x) \quad \frac{d \cos(x)}{dt} = -\sin(x) \quad \frac{d \tan(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \frac{d \ln(|x|)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$\cos(x) \approx 1$  und  $\sin(x) \approx x$  bei kleinem  $x$  in rad

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad j = \sqrt{-1} \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ und } z_1 \cdot z_1^* = |z_1|^2 \text{ mit } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cdot \cos(x) \quad e^{jx} - e^{-jx} = 2j \cdot \sin(x) \quad e^x + e^{-x} = 2 \cdot \cosh(x) \quad e^x - e^{-x} = 2 \cdot \sinh(x)$$

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b) \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \quad \log(a^b) = b \cdot \log(a)$$



$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r} \quad \sin(\alpha) = \frac{y}{r} \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{y}{x}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \quad \alpha_{grad} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha_{rad} \quad \alpha_{rad} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha_{grad}$$

$$\cos(x) = \cos(-x) \quad -\sin(x) = \sin(-x) \quad -\arctan(x) = \arctan(-x) \quad \operatorname{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b) \quad \sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} \cdot (\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \quad \cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \pm \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - c \cdot b \quad \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - c \cdot b} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Die Inverse einer symmetrischen Matrix ist auch symmetrisch.

Größenordnungen:

p	n	$\mu$	m		k	M	G	T
$10^{-12}$	$10^{-9}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$		$10^3$	$10^6$	$10^9$	$10^{12}$

<sup>1</sup>Wer Fehler findet teilt mir diese bitte über robert.uhl@rwth-aachen.de mit, damit ich diese korrigieren kann.

## 2 Wechselstromrechnung

Impedanz:  $\underline{Z} = R + j \cdot X = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$       Admittanz:  $\underline{Y} = G + j \cdot B = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$        $\omega = 2\pi \cdot f$

$\underline{Z}_R = R$        $\underline{Z}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = j \cdot \frac{-1}{\omega \cdot C} = j \cdot X_C$        $\underline{Z}_L = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot X_L$

Scheitelwert:  $\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{I}}$       Effektivwert:  $\underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}, \underline{I} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$       Phasenverschiebung:  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Reihenschaltung:  $\underline{Z}_{ges} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$  und  $\underline{Y}_{ges} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \left( \frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2} \right)^{-1}$

Parallelschaltung:  $\underline{Z}_{ges} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right)^{-1}$  und  $\underline{Y}_{ges} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$

komplexe Leistung:  $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + j \cdot Q$       Scheinleistung:  $S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$Q > 0$ : induktiv     $Q < 0$ : kapazitiv    Leistungsfaktor:  $\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$      $\tan(\varphi) = \frac{Q}{P}$      $\sin(\varphi) = \frac{Q}{S}$

Spannungsteiler:  $\underline{U}_1 = \underline{U}_{ges} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$       Stromteiler:  $\underline{I}_1 = \underline{I}_{ges} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

### 2.1 Drehstrom

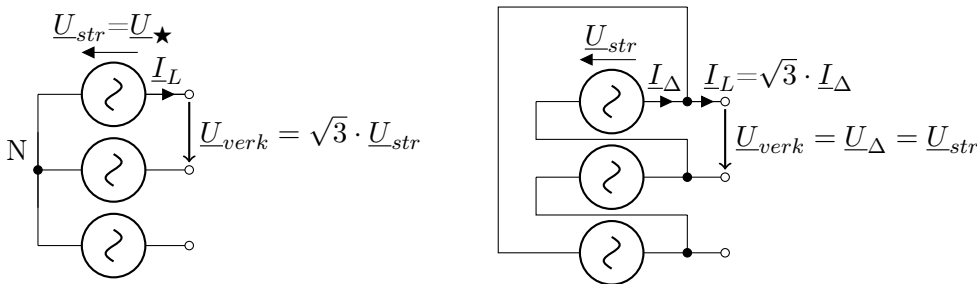
$\underline{S}_{ges} = 3 \cdot \underline{S}_R$        $\underline{a} = e^{j \cdot 120^\circ} = e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}}$  mit  $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$

$\underline{U}_R = U_R$      $\underline{U}_S = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_R$      $\underline{U}_T = \underline{a} \cdot \underline{U}_R$        $\underline{I}_R = I_R$      $\underline{I}_S = \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_R$      $\underline{I}_T = \underline{a} \cdot \underline{I}_R$

Dreieck-Stern-Umwandlung (symmetrisches System):  $\underline{Z}_\star = \frac{1}{3} \cdot \underline{Z}_\Delta$        $\underline{Y}_\star = 3 \cdot \underline{Y}_\Delta$

Nennspannung  $\underline{U}_n$  (z.B. 400kV) entspricht den Außenleiterspannungen  $\underline{U}_{verk} = \underline{U}_{RS}, \underline{U}_{ST}, \underline{U}_{RT}$

Nennspannung, Bemessungsspannung (rated):  $\underline{U}_r, \underline{U}_n$        $\underline{U}_\Delta = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_\star$  und  $\underline{I}_L = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_\Delta$



komplexe Drehstromleistung:  $\underline{S} = 3 \cdot \underline{U}_R \cdot \underline{I}_R^*$

$P = \sqrt{3} \cdot U_r \cdot I_r \cdot \cos(\varphi)$        $Q = \sqrt{3} \cdot U_r \cdot I_r \cdot \sin(\varphi)$

Bemessungsscheinleistung:  $S_r = 3 \cdot \frac{U_r}{\sqrt{3}} \cdot I_r = \sqrt{3} \cdot U_r \cdot I_r$

z.B. Industriebetrieb: ( $R_B$  und  $X_B$  parallel)

$R_B = \frac{U_n^2}{P_B}$  mit verketteter Spannung  $U_n$

$X_B = \frac{U_n^2}{Q_B} = \frac{U_n^2}{P_B \cdot \tan(\arccos(\cos(\varphi_B)))}$

Blindstrom abgeben:  $C$  (übererregter Generator)

Blindstrom aufnehmen:  $L$  (untererregter Generator)

induktiver Verbraucher:  $\varphi_L > 0, Q_L > 0$

kapazitiver Verbraucher:  $\varphi_C < 0, Q_C < 0$

### 3 Transformator

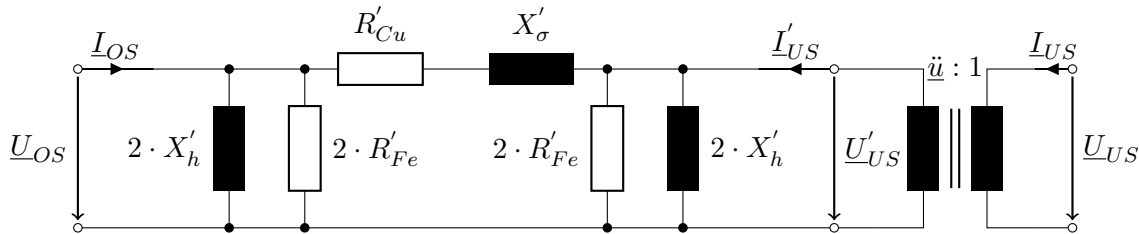
Schaltgruppe	Übersetzung $\underline{\ddot{u}}$
Yy0	$\frac{w_{OS}}{w_{US}} \cdot e^{j0^\circ}$
Dy5	$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{w_{OS}}{w_{US}} \cdot e^{j150^\circ}$
Yd5	$\sqrt{3} \frac{w_{OS}}{w_{US}} \cdot e^{j150^\circ}$
Yz5	$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{w_{OS}}{w_{US}} \cdot e^{j150^\circ}$

Windungszahlverhältnis (Strangspannungen):  $\underline{\ddot{u}}_{str} = \frac{U_{OS, str}}{U_{US, str}} = \frac{w_{OS}}{w_{US}}$

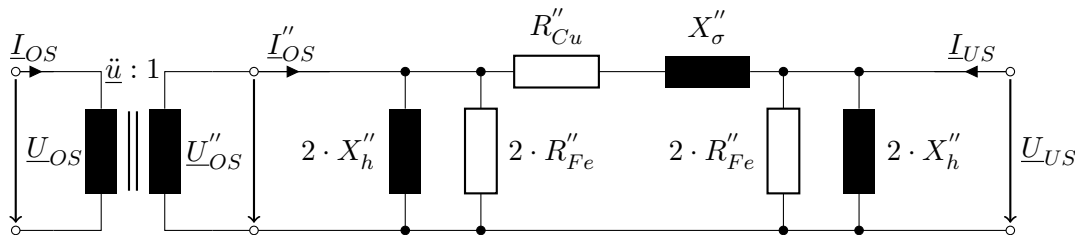
komplexes Übersetzungsverhältnis (Klemmenspannungen):

$$\underline{\ddot{u}} = \frac{U_{OS}}{U_{US}} = \underline{\ddot{u}} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{6}} \quad \frac{I_{OS}}{I_{US}} = \frac{1}{\underline{\ddot{u}}^*} \quad \frac{Z_{OS}}{Z_{US}} = \underline{\ddot{u}}^2$$

$\pi$ -Ersatzschaltbild (auf die Primärseite bezogen): *Klemmenspannungen und Außenleiterströme*



$\pi$ -Ersatzschaltbild (auf die Sekundärseite bezogen): *Klemmenspannungen und Außenleiterströme*



Elemente des Ersatzschaltbildes:

- Hauptreaktanz:  $X_h$
- Streureaktanz/Kurzschlussreaktanz:  $X_\sigma$
- Eisenwiderstand  $R_{Fe}$
- Wicklungswiderstand  $R_{Cu}$

#### 3.1 Bestimmung der Elemente des Ersatzschaltbildes

**Leerlaufversuch:**

mit Bemessungsspannung  $U_{r, OS}$ , liefert Eisenverlustleistung  $P_{Fe, r}$  und Leerlaufstrom  $I_{0, OS}$

$$R'_{Fe} \approx \frac{U_{r, OS}^2}{P_{Fe, r}} \quad R''_{Fe} \approx \frac{U_{r, US}^2}{P_{Fe, r}}$$

$$X'_h \approx \frac{U_{r, OS}}{\sqrt{3} \cdot I_{0, OS}} \quad X''_h \approx \frac{U_{r, US}}{\sqrt{3} \cdot I_{0, US}}$$

Bei  $X_h \ll R_{Fe}$  ist diese Näherung zulässig, sonst:

$$X'_h \approx \left( \sqrt{\frac{3 \cdot I_{0, OS}^2}{U_{r, OS}^2} - \frac{1}{(R'_{Fe})^2}} \right)^{-1} \quad X''_h \approx \left( \sqrt{\frac{3 \cdot I_{0, US}^2}{U_{r, US}^2} - \frac{1}{(R''_{Fe})^2}} \right)^{-1}$$

**Kurzschlussversuch:**

Bemessungsstrom  $I_r$  in kurzgeschlossener Wicklung durch an anderer Wicklung angelegte Bemessungskurzschlussspannung  $U_{kr}$  mit relativer Kurzschlussspannung  $u_{kr} = \frac{U_{kr}}{U_r} \cdot \sqrt{3}$  und Kurzschlussverlusten  $P_{Cu,r}$

$$R'_{Cu} \approx P_{Cu,r} \cdot \left( \frac{U_{r,OS}}{S_r} \right)^2 \quad R''_{Cu} \approx P_{Cu,r} \cdot \left( \frac{U_{r,US}}{S_r} \right)^2$$

$$X'_\sigma \approx u_{kr} \cdot \frac{U_{r,OS}^2}{S_r} \quad X''_\sigma \approx u_{kr} \cdot \frac{U_{r,US}^2}{S_r}$$

Bei  $X_\sigma \gg R_{Cu}$  ist diese Näherung zulässig, sonst:

$$X'_\sigma \approx \sqrt{\left( u_{kr} \cdot \frac{U_{r,OS}^2}{S_r} \right)^2 - (R'_{Cu})^2} \quad X''_\sigma \approx \sqrt{\left( u_{kr} \cdot \frac{U_{r,US}^2}{S_r} \right)^2 - (R''_{Cu})^2}$$

**Zwei Transformatoren im Parallelbetrieb:**

Doppelte Eisen- und halbe Kupferverluste

$$\text{Eisen: } P_{Fe,r} \sim U^2 \quad \text{Kupfer: } P_{Cu,r} \sim I^2$$

$$\frac{I_{OS,T1}}{I_{OS,T2}} = \frac{u_{kr,T2}}{u_{kr,T1}} \cdot \frac{S_{r,T1}}{S_{r,T2}} \quad (u_{kr} \text{ sollten möglichst gleich sein!})$$

Übertragungsverluste:

$$P_{V,2 \text{ Trafos}} = 2 \cdot P_{Fe,r} + \frac{1}{2} \cdot P_{Cu,r} \cdot \left( \frac{S}{S_r} \right)^2$$

$$P_{V,1 \text{ Trafos}} = P_{Fe,r} + P_{Cu,r} \cdot \left( \frac{S}{S_r} \right)^2$$

$$\text{Bemessungscheinleistung: } S_r = \sqrt{3} \cdot U_{r,OS} \cdot I_{r,OS} = \sqrt{3} \cdot U_{r,US} \cdot I_{r,US}$$

**Transformator mit Stufenschalter:**

Einprägen einer variablen Zusatzspannung

Winkel der Zusatzspannung:

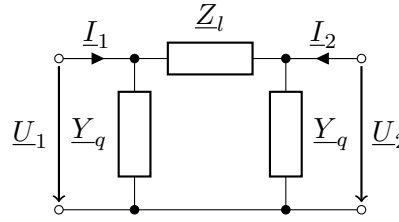
- Längsregelung:  $\alpha = 0^\circ$
- Schrägregelung:  $\alpha = 60^\circ$
- Querregelung:  $\alpha = 90^\circ$

## 4 Freileitungen und Kabel

### Modell der Drehstromleitung:

Leitungskenngrößen:

- Widerstandsbelag  $R'$
- Ableitbelag  $G'$
- Induktivitätsbelag  $L'$
- Kapazitätsbelag  $C'$



Ausbreitungskoeffizient:  $\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j \cdot \omega \cdot L') \cdot (G' + j \cdot \omega \cdot C')} = \alpha + j \cdot \beta$

Wellenwiderstand:  $\underline{Z}_W = \sqrt{\frac{R' + j \cdot \omega \cdot L'}{G' + j \cdot \omega \cdot C'}}$   $G' = \frac{P'_{V,ab}}{U_n^2}$   $\left[ \frac{\text{S}}{\text{km}} \right]$

Längsimpedanz:  $\underline{Z}_l = \underline{Z}_W \cdot \sinh(\underline{\gamma} \cdot l)$

Queradmittanz:  $\underline{Y}_q = \frac{1}{\underline{Z}_W} \cdot \tanh(\underline{\gamma} \cdot \frac{l}{2})$

**Verlustlose Leitung:** (bei Hochspannungsleitungen  $110\text{kV} \leq U_n \leq 380\text{kV}$ )  
es gilt  $G' \ll \omega \cdot C'$  und  $R' \ll \omega \cdot L'$

Ausbreitungskoeffizient:  $\underline{\gamma} \approx j \cdot \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} = j \cdot \beta$   $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{km}} \right]$  bzw.  $\left[ \frac{\circ}{\text{km}} \right]$

Wellenwiderstand:  $\underline{Z}_W \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$   $[\Omega]$

Längsimpedanz:  $\underline{Z}_l \approx j \cdot \underline{Z}_W \cdot \sin(\beta \cdot l)$

Queradmittanz:  $\underline{Y}_q \approx \frac{j}{\underline{Z}_W} \cdot \tan(\beta \cdot \frac{l}{2})$

bei  $l \ll 1500 \text{ km}$ :  $\underline{Z}_l$  induktiv und  $\underline{Y}_q$  kapazitiv

**Verhältnis Spannungen:**  $\frac{U_2}{U_1} = \left( \sqrt{\cos^2(\beta \cdot l) + n^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot l)} \right)^{-1}$  bei  $P_{Last} = 3 \cdot n \cdot P_{nat}$

**Ferranti-Effekt:** (lange leerlaufende Leitung)  $U_2 = U_1 \cdot \frac{1}{\cos(\beta \cdot l)} > 1$   
kompensiert durch Querinduktivität oder Längskapazität (besser, da  $P_{nat}$  vergrößert)

**elektrisch kurze Leitung:** (Freileitung  $< 400 \text{ km}$ , Kabel,  $\gamma \cdot l \ll 1$ ,  $\underline{Y}_q \ll \underline{Y}_l$ )

Längsimpedanz:  $\underline{Z}_l \approx \underline{Z}_W \cdot \underline{\gamma} \cdot l = (R' + j \cdot \omega \cdot L') \cdot l$

Queradmittanz:  $\underline{Y}_q \approx \frac{1}{\underline{Z}_W} \cdot \underline{\gamma} \cdot \frac{l}{2} = (G' + j \cdot \omega \cdot C') \cdot \frac{l}{2}$

Schwachlast (Leerlauf): Längselemente vernachlässigen, kapazitiv

Starklast (Kurzschluss): Querelemente vernachlässigen, induktiv

**Eingangsimpedanzen:**  $\underline{Z}_W = \sqrt{\underline{Z}_{10} \cdot \underline{Z}_{1k}}$

Leerlaufeingangsimpedanz:  $\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_W}{\tanh(\underline{\gamma} \cdot l)}$

Kurzschlussingangsimpedanz:  $\underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_W \cdot \tanh(\underline{\gamma} \cdot l)$

### Natürliche Leistung:

Leitung überträgt nur die durch den Abschluss mit  $\underline{Z}_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$  geforderte Wirkleistung,  $Q = 0$

$$\underline{S}_{nat} = \frac{U_n^2}{\underline{Z}_W^*} \quad P_{nat} = \frac{U_n^2}{\underline{Z}_W} = U_n^2 \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}}$$

### Übertragungsgrenzen:

- Spannungsunterschied (Blindleistungsfluss):  $\Delta U = U_1 - U_2 \leq \Delta U_{max} = \pm 10\%$
- Leitungswinkel (Wirkleistungsfluss):  $\Delta \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 \leq \Delta \vartheta_{max} = 20^\circ$
- thermische Strombelastbarkeit:  $|\underline{I}| = I_w^2 + I_b^2 \leq I_{therm}^2$

### Allgemeine Wirk- und Blindleistungsübertragung:

$$P \approx \frac{U_1 \cdot U_2}{X_L} \cdot \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad Q \approx \frac{U_1}{X_L} \cdot (U_1 - U_2) \quad \text{verkettete Spannungen } U_1, U_2 \text{ und } \frac{R}{X} \ll 1$$

**Blindleistungsbedarf:**  $\Delta Q = Q_{ind} - Q_{kap}$  ausgeglichen bei übertragener Leistung  $\underline{S}_L = P_{nat}$

$$Q_{ind} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{S_L^2}{P_{nat}} \cdot \sin(2 \cdot \beta \cdot l) \quad Q_{kap} \approx \frac{1}{2} \cdot P_{nat} \cdot \sin(2 \cdot \beta \cdot l)$$

**Ladeleistung:** im Leerlauf aufgenommene kapazitive Blindleistung

$$Q_{kap} \approx 3 \cdot U^2 \cdot \omega \cdot C' \cdot l$$

### Kompensationseinrichtungen:

Ziel: Leitung mit ausgeglichener Blindleistungsbilanz betreiben, also  $P_{nat}$  der Leitung an die zu übertragende Leistung  $\underline{S}_L$  anpassen, indem die Leitungsinduktivität und -kapazität angepasst werden.

Längskompensationsgrad (in Reihe):  $k_l$       Querkompensationsgrad (Parallel):  $k_q$

$$\tilde{P}_{nat} = P_{nat} \cdot \sqrt{\frac{1-k_q}{1-k_l}} \quad \tilde{\beta} = \beta \cdot \sqrt{(1-k_q) \cdot (1-k_l)} \quad \text{Vorsicht mit rad und } ^\circ!$$

- übernatürliche belastete Leitung ( $S_L > P_{nat}$ ):  $k_l > 0$ , Längskapazität
- unternatürliche belastete Leitung ( $S_L < P_{nat}$ ):  $k_q > 0$ , Querinduktivität

### Spannungsstabilität:

Die Spannung am Ende einer Leitung sinkt mit zunehmender zu übertragender Wirk- und vor allem induktiver Blindleistung ab. Eine Leitung hat bei einer Spannung  $U_1$  eine von der Länge bestimmte physikalische Grenzübertragungsfähigkeit, eine höhere Übertragungsleistung ist physikalisch wegen fehlender Spannungsstabilität nicht möglich (instabile Betriebszustände).

$$\text{maximal übertragbare Leistung: } P_{L,max} = \frac{P_{nat}}{\sin(2 \cdot \beta \cdot l)} \cdot \frac{\cos(\varphi_L)}{1 + \sin(\varphi_L)}$$

bei  $P_L = P_{L,max}$ :  $U_2 \approx \frac{U_1}{\sqrt{2}}$  (viel zu niedrig!)

### Berechnung des Kapazitätsbelages:

Einleitersystem:  $C' = \frac{Q'}{\underline{U}} = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0}{\ln(\frac{2 \cdot h}{\rho})}$  mit mittlerer Höhe  $h \approx h_m - 0,7 \cdot f_m$

Aufhänghöhe Mast  $h_m$ , Durchhang in Feldmitte  $f_m$ , Radius des Einzelleiters  $\rho$

symmetrische Freileitung:  $C' = \frac{Q'}{\underline{U}} = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0}{\ln(\frac{d}{\rho})}$  mit mittlerem Leitungsabstand  $d = \sqrt[3]{d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{31}}$

Ersatzradius Bündelleiter:  $\rho_B = \sqrt[n]{n \cdot \rho \cdot R^{n-1}}$  mit Bündelradius  $R$ , Anzahl Teilleiter  $n$

**Berechnung des Induktivitätsbelages:**

Einleitersystem mit Rückleitung in Luft: (Leiterschleife in Luft)

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \left( \frac{D}{\rho \cdot e^{-\frac{1}{4}}} \right) \text{ mit Abstand Hin- und Rückleiter } D$$

$$\text{Einleitersystem mit Rückleitung in Erde: } L' = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \left( \frac{\delta_E}{\rho \cdot e^{-\frac{1}{4}}} \right)$$

Erdstromtiefe: (Abstand eines fiktiven Rückleiters in Luft der zur gleichen Induktivität führt)

$$\delta_E = \frac{1,85}{\sqrt{\mu_0 \cdot \omega \cdot \kappa_E}} \text{ mit Bodenleitfähigkeit } \kappa_E$$

$$\text{Widerstandsbelag der Erde: } R'_E = \frac{\mu_0 \cdot \omega}{8}$$

$$\text{symmetrische Freileitung: } L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln \left( \frac{d}{\rho \cdot e^{-\frac{1}{4}}} \right)$$

$$\text{Reduktion von Bündelleitern bei symmetrischer Freileitung: } L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln \left( \frac{d}{\rho_B \cdot e^{-\frac{1}{4n}}} \right)$$

## 5 Synchrongenerator

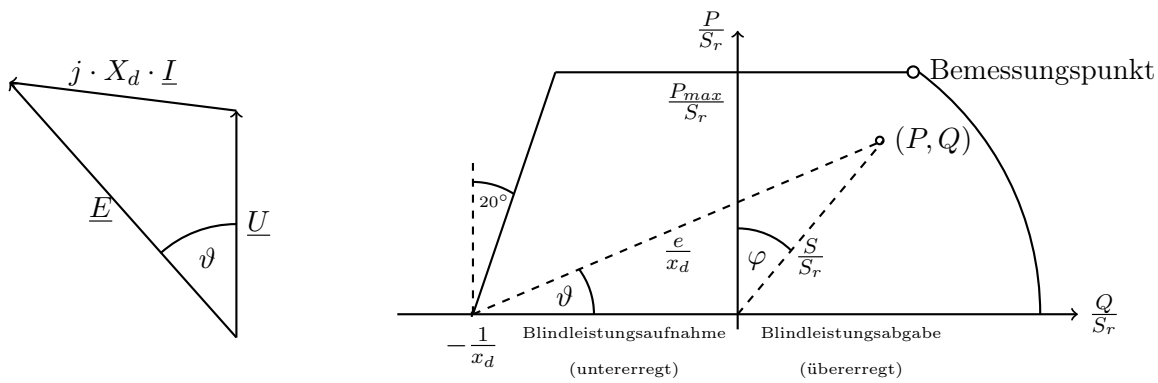
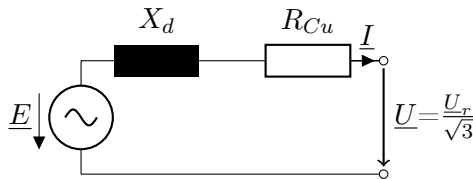
belastungsunabhängige Drehzahl  $n$ , Polpaarzahl  $p$ , Netzfrequenz  $f$  mit  $f = n \cdot p$

bei Beschleunigung wird der Polradwinkel  $\vartheta$  größer!

### 5.1 Vollpolmaschine/Turbogenerator

$p \in \{1, 2\}$ , hohe Drehzahlen (z.B. Dampfturbine)

$\underline{U} = \underline{E} - j \cdot X_d \cdot \underline{I} = E \cdot e^{j \cdot \vartheta} - j \cdot X_d \cdot \underline{I}$  Polradspannung  $\underline{E}$ , Polradwinkel  $\vartheta$ , Längsreaktanz  $X_d$



**Betriebspunkt zulässig:**  $\cos(\varphi) > \cos(\varphi_r) \iff \varphi < \varphi_r$

(fiktive) Bemessungsreaktanz:  $X_r = \frac{U_r}{\sqrt{3} \cdot I_r} = \frac{U_r^2}{S_r}$

bezogene synchrone Reaktanz:  $x_d = \frac{X_d}{X_r} (\approx 2 \dots 3)$   $X_d = x_d \cdot \frac{U_r^2}{S_r}$

auf Primärseite eines Transformators bezogen:  $X_d = \ddot{u}^2 \cdot x_d \cdot \frac{U_r^2}{S_r}$

$$P_{max} = S_r \cdot \cos(\varphi_r)$$

$$\frac{P}{S_r} = \frac{1}{x_d} \cdot \frac{E \cdot U}{\left(\frac{U_r}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \sin(\vartheta) = \frac{e \cdot u}{x_d} \cdot \sin(\vartheta)$$

$$\frac{Q}{S_r} = \frac{1}{x_d} \cdot \frac{E \cdot U}{\left(\frac{U_r}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \cos(\vartheta) - \frac{U^2}{\left(\frac{U_r}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{e \cdot u}{x_d} \cdot \cos(\vartheta) - \frac{u^2}{x_d}$$

$$P_G(\vartheta) = \frac{\sqrt{3} \cdot E \cdot U_r}{X_d} \cdot \sin(\vartheta)$$

### 5.2 Schenkelpolgenerator

hohe Polpaarzahl, geringe Drehzahl (z.B. Wasserkraftwerke), deutlich asymmetrischerer Aufbau als Turbogenerator, zusätzlich Querreaktanz  $X_q$

Reluktanzmoment: Leistungsabgabe auch ohne Erregung möglich ( $\underline{E} = 0$ )

$$\frac{P}{S_r} = \frac{e \cdot u}{x_d} \cdot \sin(\vartheta) + \frac{u^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \cdot \sin(2 \cdot \vartheta)$$

$$\frac{Q}{S_r} = \frac{e \cdot u}{x_d} \cdot \cos(\vartheta) - \frac{u^2}{x_d} - \frac{u^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \cdot (1 - \cos(2 \cdot \vartheta))$$



### 5.3 Kriterium für stabilen Generatorbetrieb

$$\left. \frac{dP(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} > 0 \quad \text{stationärer Zustand } \vartheta_0$$

Turbogenerator:  $\left. \frac{dP(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} = S_r \cdot \frac{e \cdot u}{x_d} \cdot \cos(\vartheta_0) > 0$  für  $\vartheta_0 < 90^\circ$  erfüllt

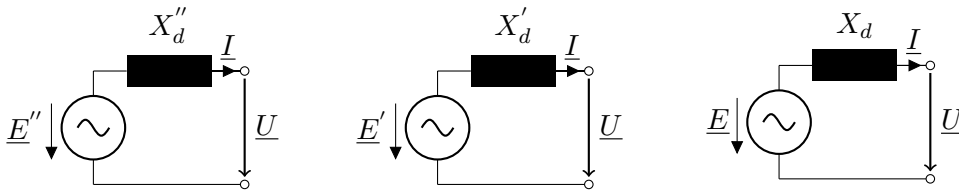
Schenkelpolgenerator:  $\left. \frac{dP(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} = S_r \cdot \frac{e \cdot u}{x_d} \cdot \cos(\vartheta_0) + S_r \cdot u^2 \cdot \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \cdot \cos(2 \cdot \vartheta_0) > 0$

#### 3 Grenzen:

- Wirkleistung ( $P$ )
- Erwärmung der Erregerwicklung ( $Q > 0$ )
- Stabilität ( $Q < 0$ )

### 5.4 Generatormodell Kurzschluss

- subtransient:  $\underline{E}'' = \underline{U} + j \cdot X_d'' \cdot \underline{I}$
- transient:  $\underline{E}' = \underline{U} + j \cdot X_d' \cdot \underline{I}$
- stationär:  $\underline{E} = \underline{U} + j \cdot X_d \cdot \underline{I}$



## 6 Lastflussberechnung

**komplexe Knotenadmittanzmatrix:**  $\vec{I} = \underline{Y} \cdot \vec{U}$

**Nebendiagonalelemente:**  $\underline{Y}_{ij} = - \sum_{m \in ij} \underline{Y}_{l,m}$  (Längsadmittanzen zwischen Knoten  $i$  und  $j$ )

**Hauptdiagonalelemente:**  $\underline{Y}_{ii} = \sum_{m \in i} (\underline{Y}_{q,m} + \underline{Y}_{l,m})$  (Admittanzen vom Knoten  $i$  wegführend)

Verbraucher mit konstanter Impedanz: in die Knotenadmittanzmatrix integrieren

Verbraucher mit konstanter Leistung oder passive Knoten: PQ-Knoten ( $U_k$  und  $\vartheta_k$  unbekannt)

Generatoren mit Spannungsregelung: PU-Knoten ( $Q_k$  und  $\vartheta_k$  unbekannt)

Slack-Knoten: Generator oder Netzeinspeisung mit  $\vartheta_S = 0^\circ$  gewählt ( $P_S$  und  $Q_S$  unbekannt)

**Lastflussgleichungen:**  $\vec{S} = 3 \cdot \text{diag}(\vec{U}) \cdot \vec{I}^* = 3 \cdot \text{diag}(\vec{U}) \cdot \underline{Y}^* \cdot \vec{U}^*$

### 6.1 Gleichstromlastfluss/Wirklastflussberechnung:

kleine Phasenwinkeldifferenzen, gleiche Knotenspannungen

Lineares Gleichungssystem:  $\mathbf{B}' \cdot \vec{\vartheta} = \frac{1}{U_b^2} \cdot \vec{P}$  mit  $U_i \approx \frac{U_b}{\sqrt{3}}$  und  $\vartheta_i$  in rad

**Hauptdiagonalelemente:**  $B'_{ii} = \sum_{j \neq i} |\underline{Y}_{ij}|$  (addiere Nebendiagonalelemente der Zeile)

**Nebendiagonalelemente:**  $B'_{ij} = -|\underline{Y}_{ij}|$  (Längsadmittanzen zwischen Knoten  $i$  und  $j$ )

Slack-Zeile und Slack-Spalte in der Matrix und den Vektoren streichen.

**Wirkleistungsfluss von Knoten  $i$  zu Knoten  $k$ :**  $P_{ik} = \frac{U_b^2}{X_{ik}} \cdot (\vartheta_i - \vartheta_k)$

**maximal zulässiger Wirkleistungsfluss:**  $P_{max} = \sqrt{3} \cdot U_b \cdot I_{therm}$

## 7 symmetrische Kurzschlussstromberechnung

Kurzschlussstrom besteht aus Wechselstrom und auf Null abklingendem Gleichstrom

Anfangskurzschlusswechselstrom  $I_k''$  (subtransient)

Dauerkurzschlussstrom  $I_k$  (stationär)

generatornaher Kurzschluss:  $I_k < I_k''$

generatorferner Kurzschluss:  $I_k \approx I_k''$

Die Abklingzeitkonstante wird durch die Impedanz der Kurzschlussbahn bestimmt.

**Anfangskurzschlusswechselstromleistung/Kurzschlussleistung:**  $S_k'' = \sqrt{3} \cdot U_n \cdot I_k''$

Auswahl Transformator zwischen Spannungsebenen:  $1,1 \cdot \frac{S_r}{u_{kr}} < S_k''$

### 7.1 Vereinfachungen nach DIN VDE 0102

- Querglieder aller Zweige vernachlässigen
- Stufenschalter aller Transformatoren in Mittelstellung
- Wirkwiderstände in Längsgliedern bei  $U_n > 1 \text{ kV}$  vernachlässigen, wenn  $\frac{R}{X} \leq 0,3$  für die gesamte Kurzschlussimpedanz (also Impedanz aller einzelnen Netzzweige) gilt
- einheitliche Polradspannungen/Knotenspannungen:  
 $E'' = U_i = c \cdot \frac{U_n}{\sqrt{3}}$  mit  $c = 1,1$  bei  $U_n > 1 \text{ kV}$  und sonst  $c = 1,0$
- nur große motorische Verbraucher berücksichtigen; Asynchronmotoren vernachlässigen, wenn  $\frac{I_{k,nurAsync}''}{I_k'' - I_{k,nurAsync}''} \approx \frac{I_{k,nurAsync}''}{I_k''} < 0,05$
- nicht vernachlässigbare Systemumgebung (Nachbarnetz) als Ersatzgenerator mit  
 $X_N = \frac{1}{\tilde{u}^2} \cdot c \cdot \frac{U_n^2}{S_k''}$  (ggf. Impedanz Netzkuppeltransformatoren beachten!)
- Umwandlung Generator-ESB in Stromquelle  $\tilde{I}_G = \frac{E''}{j \cdot X_d''}$  parallel zu  $Y_d'' = \frac{1}{X_d''}$

#### Asynchronmotor:

Anlass-/Kurzschlussstrom  $I_{an}$  größer als der Betriebsstrom

$$I_{r,Mot} = \frac{P_{Mot,ges}}{\sqrt{3} \cdot U_{r,Mot} \cdot \cos(\varphi) \cdot \eta}$$

$$X_{Mot} = \frac{1}{\frac{I_{an}}{I_{r,Mot}}} \cdot \frac{U_{r,Mot}^2}{S_{r,Mot}} = \frac{1}{\frac{I_{an}}{I_{r,Mot}}} \cdot \frac{U_{r,Mot}}{\sqrt{3} \cdot I_{r,Mot}} = \frac{1}{\frac{I_{an}}{I_{r,Mot}}} \cdot \frac{U_{r,Mot}^2}{P_{Mot,ges}} \cdot \cos(\varphi) \cdot \eta$$

## 7.2 Superpositionsverfahren

(Spannung am Fehlerort wird mit der Lastflussberechnung ermittelt)

Vermeidung der mehrfachen Inversion von  $\underline{\mathbf{Y}}_F^{-1} = \underline{\mathbf{Z}}_F$

$\underline{\mathbf{Y}}$  und  $\underline{\mathbf{Z}}$  einmalig aus Netz, Generatoren und Verbrauchern aufstellen

Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln, diese streichen/ Spannungsquellen kurzschließen

Knotenspannung vorhergehender Normalbetriebszustand:  $\underline{\vec{U}}^V$

fehlerbedingte Änderung:  $\Delta \underline{\vec{U}}$

Knotenspannung im Fehlerfall:  $\underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U}}^V - \Delta \underline{\vec{U}}$

**Kurzschlussstrom am Fehlerort:**  $\underline{I}_{k,j}'' = \frac{\underline{U}_j^V}{\underline{Z}_{jj} + \underline{Z}_F}$  mit i.d.R. Fehlerimpedanz  $\underline{Z}_F = 0$

Zweigstrom vorhergehender Normalbetriebszustand:  $\underline{I}_{ik}^V$

fehlerbedingte Stromänderung (Fehler am Knoten  $j$ ):  $\Delta \underline{I}_{ik} = -\underline{Y}_{ik} \cdot \frac{\underline{Z}_{ij} - \underline{Z}_{kj}}{\underline{Z}_{jj} + \underline{Z}_F} \cdot \underline{U}_j^V$

mit  $\Delta \underline{I}_{ik} = -\Delta \underline{I}_{ki}$

Teilkurzschlussströme:  $\underline{I}_{k,ik}'' = \underline{I}_{ik}^V - \Delta \underline{I}_{ik}$  von Knoten  $i$  zu Knoten  $k$

## 7.3 Ersatzspannungsquellenverfahren

(Spannung am Fehlerort approximiert)

keine Überlagerung mit Zweigströmen des Normalbetriebszustandes

Vernachlässigung aller Lastadmittanzen  $\underline{\mathbf{Y}}_L$

einheitlich an allen Knoten  $\underline{U}_j^V = c \cdot \frac{U_n}{\sqrt{3}}$  wählen

**Kurzschlussstrom am Fehlerort:**  $\underline{I}_{k,j}'' = \frac{\underline{U}_j^V}{\underline{Z}_{jj} + \underline{Z}_F}$  mit i.d.R. Fehlerimpedanz  $\underline{Z}_F = 0$

synchrone Reaktanzen der Generatoren in den Hauptdiagonalelementen von  $\underline{\mathbf{Y}}$  berücksichtigen

Teilkurzschlussströme:  $\underline{I}_{k,ik}'' = \underline{Y}_{ik} \cdot \frac{\underline{Z}_{ij} - \underline{Z}_{kj}}{\underline{Z}_{jj} - \underline{Z}_F} \cdot c \cdot \frac{U_n}{\sqrt{3}}$  von Knoten  $i$  zu Knoten  $k$

**Schritte:**

1. ESB (Generatoren und Einspeisungen entfallen,  $X$  bleibt bestehen) mit umgekehrter Ersatzspannungsquelle an der Fehlerstelle mit  $U_F = c \cdot \frac{U_n}{\sqrt{3}}$  und  $I_k''$  aus dem Netz
2. Elemente ( $X$  und  $R$ ) des ESB berechnen, Bezug auf eine Spannungsebene
3.  $\frac{R}{X}$ -Verhältnis aller Netzzweige auf  $\frac{R}{X} < 0,3$  prüfen.  
Wenn gültig, Wirkwiderstände vernachlässigen!
4. Gesamtadmittanz aus allen Zweigimpedanzen berechnen:  $Y_{ges} = \frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_n}$
5. Anfangswechselstrom:  $I_k'' = c \cdot \frac{U_n}{\sqrt{3}} \cdot Y_{ges}$
6. Teilkurzschlussstrom:  $I_{k,Zweig}'' = \frac{c}{\sqrt{3}} \cdot \frac{U_n}{X_{Zweig}}$
7. Asynchronmotoren vernachlässigbar bei  $\frac{I_{k,nurAsync}''}{I_k'' - I_{k,nurAsync}''} \approx \frac{I_{k,nurAsync}''}{I_k''} < 0,05$