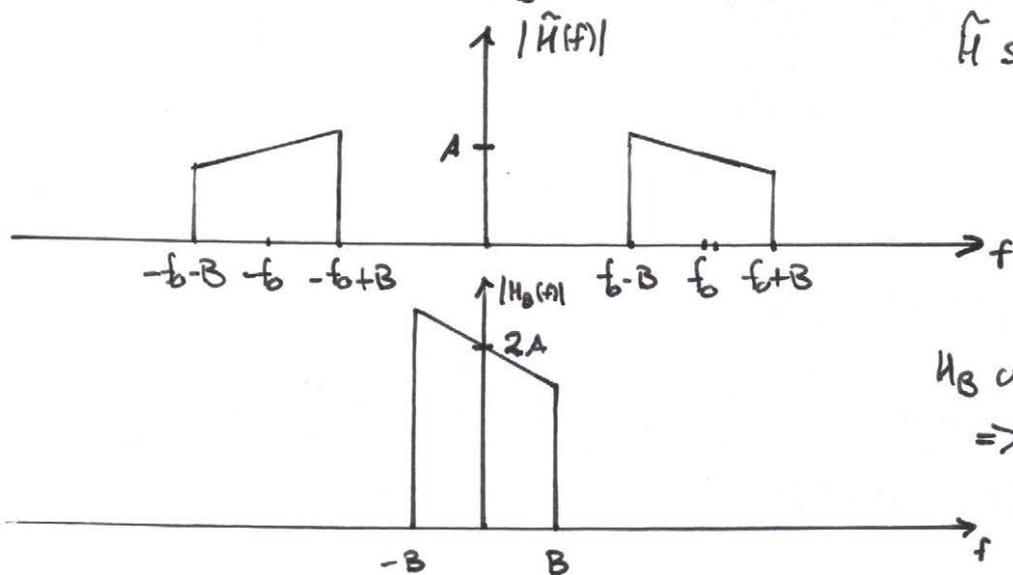


Beschreibung des Bandpasskanals durch eine von der Trägerfrequenz unabhängige komplexe Basisbandimpulsantwort

Bandpasskanal $\hat{h}(t) \longleftrightarrow \hat{H}(f)$

Basisbandkanal $h_B(t) \longleftrightarrow H_B(f)$



\hat{H} symmetrisch
 $\Rightarrow \hat{h}$ reell

H_B unsymmetrisch
 $\Rightarrow h_B$ komplex

$\Rightarrow h_B(t) = h_B'(t) + j \cdot h_B''(t)$ h_B', h_B'' reell

Zusammenhang im Zeitbereich

$$\begin{aligned} \hat{h}(t) &= \text{Re} \{ h_B(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \} = \text{Re} \{ (h_B'(t) + j \cdot h_B''(t)) \cdot e^{j\omega_0 t} \} \\ &= \text{Re} \{ [h_B'(t) + j h_B''(t)] [\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)] \} \\ &= h_B'(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - h_B''(t) \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$\omega_0 = 2\pi f_0$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &= \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \longleftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \\ \sin(\omega_0 t) &= \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \longleftrightarrow \frac{j}{2} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}(f) &= \frac{1}{2} [H_B'(f-f_0) + H_B'(f+f_0)] + \frac{j}{2} [H_B''(f-f_0) - H_B''(f+f_0)] \\ &= \frac{1}{2} [H_B'(f-f_0) + j H_B''(f-f_0)] + \frac{1}{2} [H_B'(f+f_0) - j H_B''(f+f_0)] \end{aligned}$$

Es gilt: $X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi f t} dt$, $X^*(f) = \int x(t) e^{j2\pi f t} dt$
 $\Rightarrow X(f) = X^*(-f)$

also kleine f, f_0

$$\Rightarrow \hat{H}(f) = \frac{1}{2} [H_B'(f-f_0) + j H_B''(f-f_0)] + \frac{1}{2} [H_B'^*(-f-f_0) - j H_B''^*(-f-f_0)]$$

$$= \frac{1}{2} H_B(f-f_0) + \frac{1}{2} H_B^*(-f-f_0)$$

Zusammenhang im Frequenzbereich

mit $H_B(f) = \operatorname{Re}\{H(f)\} + j \cdot \operatorname{Im}\{H_B(f)\} = H_B'(f) + j \cdot H_B''(f)$

ABER:

$$\operatorname{Re}\{H_B(f)\} \neq H_B'(f)$$

$$\underbrace{\operatorname{Im}\{H_B(f)\}}_{\text{reell}} \neq \underbrace{H_B''(f)}_{\text{komplex}}$$

Aufgabe 1

$$h_B(t) = j \cdot \operatorname{Si}(\pi t) \quad \text{für } f_0 = 10$$

$$\hat{h}(t) = \operatorname{Re}\{h_B(t) e^{j 2\pi f_0 t}\} = \operatorname{Re}\{j \cdot \operatorname{Si}(\pi t) \cdot e^{j 20\pi t}\}$$

$$= -\operatorname{Si}(\pi t) \sin(20\pi t)$$

!

$$\hat{H}(f) = +\operatorname{rect}(f) * \left(\frac{j}{2} \delta(f-f_0) - \frac{j}{2} \delta(f+f_0)\right)$$

$$= \frac{j}{2} \operatorname{rect}(f-10) - \frac{j}{2} \operatorname{rect}(f+10)$$

$$= \frac{1}{2} H_B(f-f_0) + \frac{1}{2} H_B^*(-f-f_0)$$

WSII: Hilbert-Transformation und analytisches Signal

Real- und Imaginärteil einer Spektralfunktion können derart vertauscht werden, dass sich wiederum ein reelles Zeitsignal ergibt \Rightarrow Symmetriebedingung für reelle Zeitsignale muss erhalten bleiben!

$x(t)$ reell, wenn $X(f)$ konj. komplex symmetrisch ($X(f) = X^*(-f)$)

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{X(f)\} = \operatorname{Re}\{X(-f)\} \quad \text{Realteil gerade}$$

$$\operatorname{Im}\{X(f)\} = -\operatorname{Im}\{X(-f)\} \quad \text{Imaginärteil ungerade}$$

$$X(f) = \operatorname{Re}\{X(f)\} + j \cdot \operatorname{Im}\{X(f)\}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{X}(f) = \operatorname{Im}\{X(f)\} \cdot \operatorname{sign}(f) - j \cdot \operatorname{Re}\{X(f)\} \operatorname{sign}(f)$$

\hat{X} ist Hilbert transformierte von X

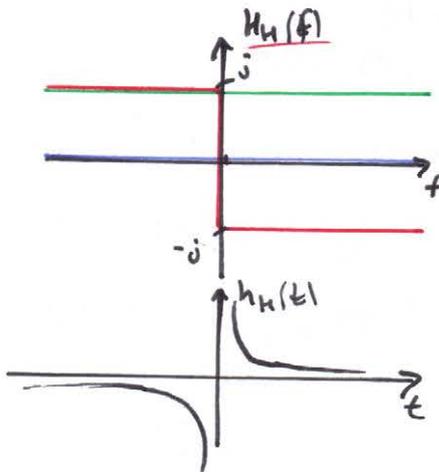
Hilberttransformation $H_H(f) = -j \cdot \operatorname{sign}(f)$

- konstante Phasendrehung von -90° im positiven Spektralbereich
 $+90^\circ$ im negativen Spektralbereich

- Symmetriebedingung ist erfüllt

\Rightarrow Impulsantwort des idealen Hilberttransformators
 $h_H(t)$ ist reell

$$H_H(f) = -j \cdot \operatorname{sign}(f)$$



$$|H_H(f)|$$

$$\operatorname{Re}\{H_H(f)\} = 0$$

$$h_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Anwendung: System in dem Real- und Imaginärteil
 zueinander Hilbert transformiert sind
 \Rightarrow Quadraturmodulation

Aus Vorlesung: $X(t) = \operatorname{Re}\{e_T \cdot e^{j\omega_0 t}\}$ $e_T =$ komplexe Einhüllende
 $= \operatorname{Re}\{X_a(t)\}$

X_a analytisches Signal:

$$X_a(t) = X(t) + j \cdot h_H(X(t)) = X(t) + j \cdot \hat{X}(t)$$

$$X_a(f) = X(f) + j \cdot \hat{X}(f) = X(f) + j \{-j \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot X(f)\}$$

$$= X(f) [1 + \operatorname{sign}(f)]$$

$$= \begin{cases} 2X(f) & \text{für } f \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

⇒ keine negativen Frequenzkomponenten mehr

Ein komplettes Zeitsignal, dessen Imaginärteil die Hilberttransformierte des Realteils ist, besitzt ein Spektrum, das für negative Frequenzen verschwindet.

Solche Signale werden analytische Signale genannt.

Aufgabe 2

$$x(t) = 2 \operatorname{si}(\pi t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$X_a(f) = X(f) + j \cdot \hat{X}(f)$$

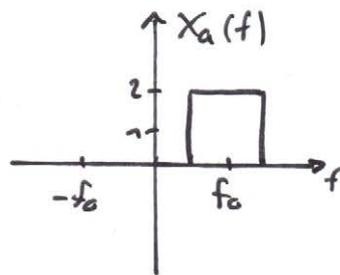
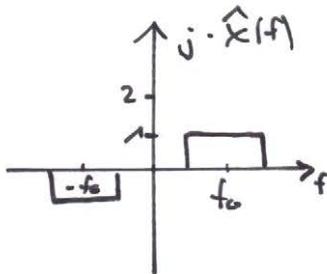
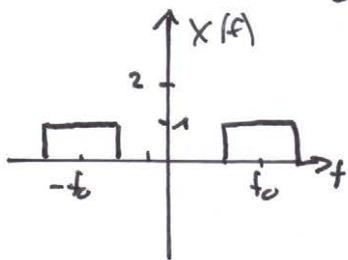
$$X(f) = \operatorname{rect}(f) * [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] = \operatorname{rect}(f-f_0) + \operatorname{rect}(f+f_0)$$

Hilberttransformierte

$$\hat{X}(f) = -j \cdot \operatorname{sign}(f) \cdot X(f)$$

$$\begin{aligned} j \cdot \hat{X}(f) &= j [-j \cdot \operatorname{sign}(f) (\operatorname{rect}(f-f_0) + \operatorname{rect}(f+f_0))] \\ &= \operatorname{rect}(f-f_0) - \operatorname{rect}(f+f_0) \end{aligned}$$

$$X_a(f) = X(f) + j \cdot \hat{X}(f) = 2 \cdot \operatorname{rect}(f-f_0)$$



UR
-1- Quadraturmodulation: Zerlegung des Empfangssignals $y(t)$ in Inphase- und Quadraturkomponente

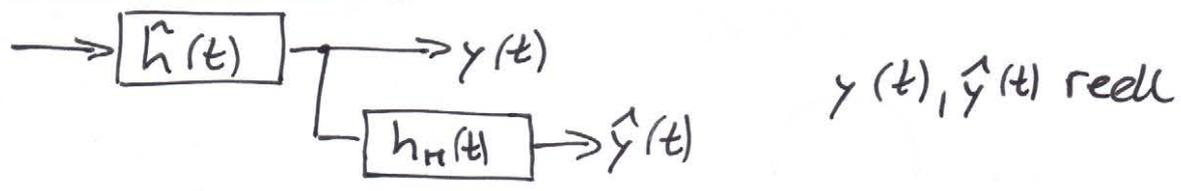
$$x(t) = \text{Re}\{e_r(t) \cdot e^{j\omega_c t}\} \rightarrow \hat{h}(t)$$

$$y(t) = \text{Re}\{e_r(t) \cdot e^{j\omega_c t}\}$$

mit $e_r(t) = x_I(t) + j y_Q(t)$

- Verfahren:
- Phasemethode (Hilberttransformation)
 - Filtermethode
 - Schaltermethode

a) Phasemethode



Analytisches Signal: $y_a(t) = y(t) + j \cdot \hat{y}(t) = e_r(t) \cdot e^{j\omega_c t}$

$$= [x_I(t) + j y_Q(t)] e^{j\omega_c t}$$

$x_I(t), y_Q(t)$ reell

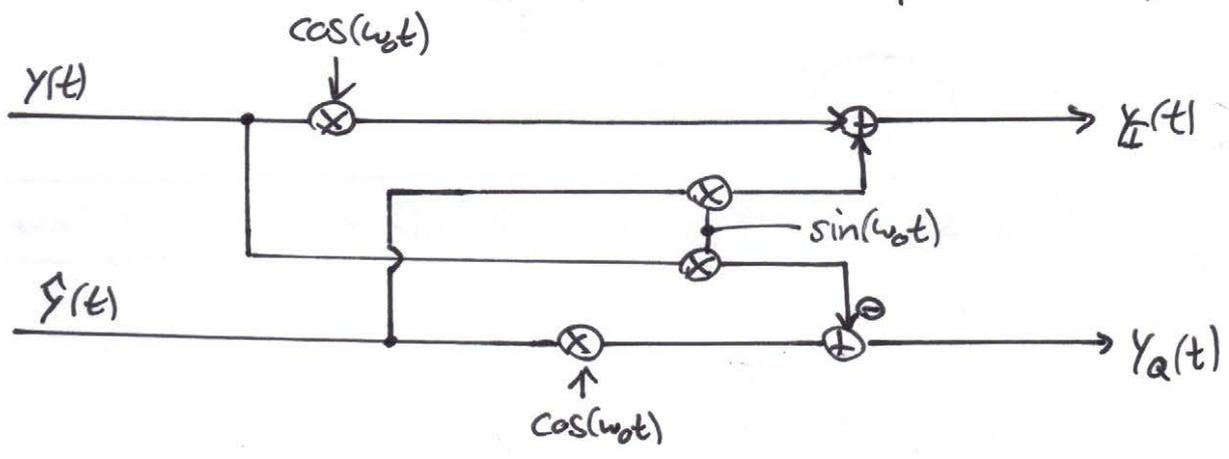
$$y_a(t) e^{-j\omega_c t} = x_I(t) + j y_Q(t)$$

$$= [y(t) + j \hat{y}(t)] [\cos(\omega_c t) - j \sin(\omega_c t)]$$

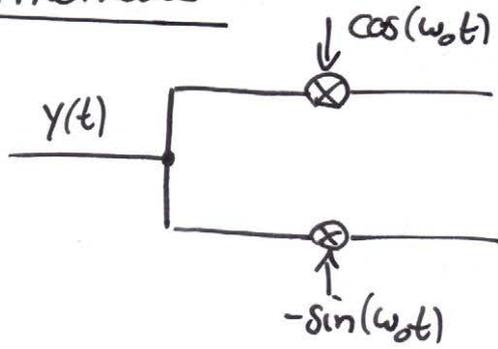
$$= y(t) \cos(\omega_c t) + \hat{y}(t) \sin(\omega_c t) + j [\hat{y}(t) \cos(\omega_c t) - y(t) \sin(\omega_c t)]$$

$$x_I(t) = \text{Re}\{y_a(t) e^{-j\omega_c t}\} = y(t) \cos(\omega_c t) + \hat{y}(t) \sin(\omega_c t)$$

$$y_Q(t) = \text{Im}\{y_a(t) e^{-j\omega_c t}\} = \hat{y}(t) \cos(\omega_c t) - y(t) \sin(\omega_c t)$$



b) Filtermethode



$$\begin{aligned}
 y(t) \cdot \cos(\omega_0 t) &= \text{Re} \left\{ (y_I(t) + j y_Q(t)) \cdot e^{j\omega_0 t} \right\} \cdot \cos(\omega_0 t) \\
 &= y_I(t) \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega_0 t) \right) - y_Q(t) \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) \right) \\
 &= \boxed{\frac{1}{2} y_I(t)} + \boxed{\frac{1}{2} y_I(t) \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{2} y_Q(t) \sin(2\omega_0 t)}
 \end{aligned}$$

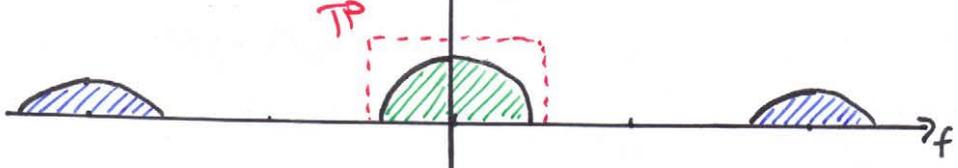
$|X(f)| \leftrightarrow x(t)$



$|Y(f)| \leftrightarrow y(t)$



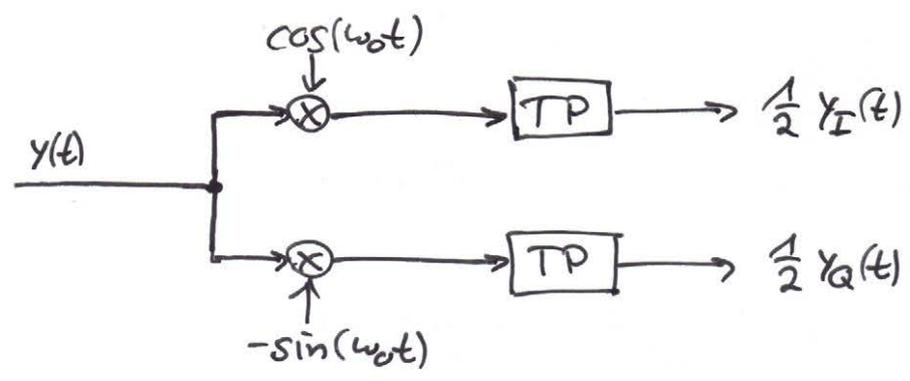
$\frac{1}{2} |Y(f+f_0) + Y(f-f_0)| \leftrightarrow y(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$



$|X_2(f)| \leftrightarrow x_2$



Analog für $-y(t) \cdot \sin(\omega_0 t) = \boxed{\frac{1}{2} y_Q(t)} - \boxed{\frac{1}{2} y_I(t) \sin(2\omega_0 t) - \frac{1}{2} y_Q(t) \cos(2\omega_0 t)}$

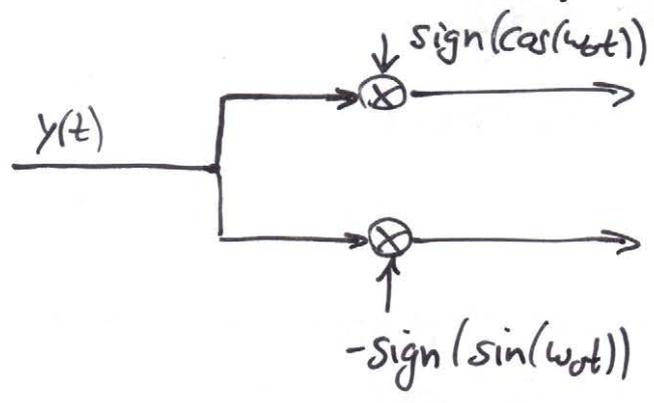


Eigenschaften des Tiefpasses:

$$f_g > B \quad f_g < 2f_0 - B \Rightarrow f_0 > \frac{1}{2}(f_g + B)$$

c) Schaltmethode

Substitution: Winkelfunktion durch Rechteckfunktion ersetzen (Systemvereinfachung)



$$y(t) \cdot \text{sign}(\cos(\omega_0 t)) = [y_I(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - y_Q(t) \sin(\omega_0 t)] \cdot \frac{4}{\pi} (\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) \dots)$$

Fourierreihenentwicklung

$$= \frac{4}{\pi} y_I(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{6} \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{6} \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{10} \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{10} \cos(6\omega_0 t) \dots \right]$$

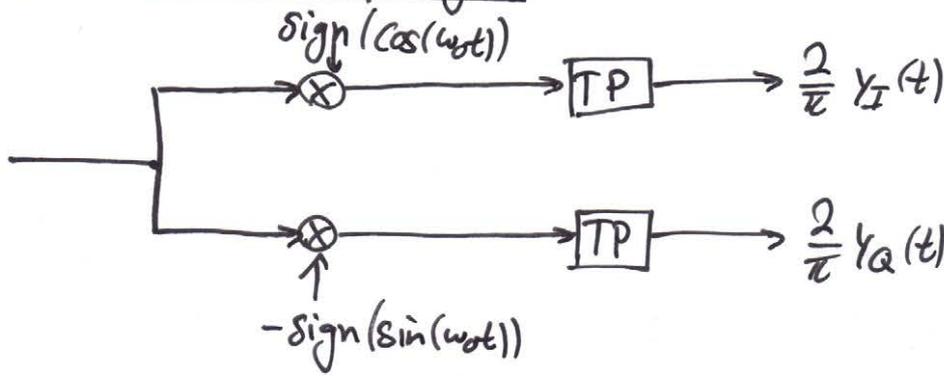
$$- \frac{4}{\pi} y_Q(t) \left[\frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{6} \sin(2\omega_0 t) - \frac{1}{6} \sin(4\omega_0 t) - \frac{1}{10} \sin(4\omega_0 t) + \frac{1}{10} \sin(6\omega_0 t) \dots \right]$$

$$\text{BP} = \boxed{\frac{2}{\pi} y_I(t)} + \boxed{y_I(t) \cdot [\dots] + y_Q(t) [\dots]}$$

mit BP weggefiltert

Analog für $-y(t)\text{sign}(\sin(\omega_0 t)) = \frac{2}{\pi} y_Q(t) + [\dots]$

Blockschaltbild Empfänger



Beispiel: Demodulation mit Filtermethode

Empfangensignal: mit Dopplerverschiebung $\Delta\omega$
 mit Verzögerung $\tau \Rightarrow y(t) \neq x(t)$
 ohne Mehrwegausbreitung

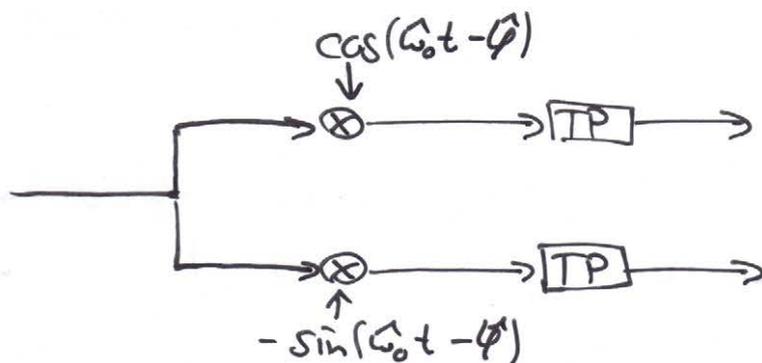
$$y(t) = \text{Re} \{ e_T(t-\tau) e^{j[\omega_0(t-\tau) + \Delta\omega t]} \}$$

$$= x_I(t-\tau) \cos(\hat{\omega}_0 t - \varphi) - x_Q(t-\tau) \sin(\hat{\omega}_0 t - \varphi)$$

mit $\hat{\omega}_0 = \omega_0 + \Delta\omega$
 $\varphi = \omega_0 \cdot \tau$

Problem: $\hat{\omega}_0$ (Trägerfrequenz) und φ (Phase) sind unter Umständen nicht exakt bekannt \Rightarrow Schätzung

aber: $\hat{\omega}_0 \approx \omega_0$ und $\hat{\varphi} \approx \varphi$



Signal nach TP-Filterung (Unterdrückung von Spektralanteilen bei $\hat{\omega}_0 + \omega_0 \approx 2\omega_0$)

$$\frac{1}{2} y_I(t) = \frac{1}{2} x_I(t-\tau) \cos(\underbrace{(\hat{\omega}_0 - \omega_0) \cdot t - (\varphi - \hat{\varphi})}_{=: \Phi}) - \frac{1}{2} x_Q(t-\tau) \sin(\Phi)$$

$$\frac{1}{2} y_Q(t) = -\frac{1}{2} x_I(t-\tau) \sin(\Phi) + \frac{1}{2} x_Q(t-\tau) \cos(\Phi)$$

MSK
Ü2
-3- Bei guter Schätzung von $\hat{\omega}_0$ und $\hat{\varphi}$:

$$\Phi \approx 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y_I(t) \approx \frac{1}{2} x_I(t - \tau)$$

$$\frac{1}{2} y_Q(t) \approx \frac{1}{2} x_Q(t - \tau)$$

Aufgabe 3

a) Informationsbits pro Unterträger

$$n_B = r_{RS} \cdot r_p \cdot I = \frac{188}{204} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 2,46$$

Länge des OFDM-Symbols mit cyclic Prefix

$$T_S = T_u + \frac{1}{4} T_u = 1120 \mu s$$

Durchsatz (max. Datenrate):

$$R_{max} = 6048 \cdot \frac{n_B}{T_S} = 6048 \cdot \frac{2,46}{1120 \mu s} \approx 13,3 \text{ Mbit/s}$$

$$b) B < f_g < 2f_0 - B \Rightarrow 8 \text{ MHz} < f_g < 1020 \text{ MHz}$$

Aufgabe 4

$$a) P_R = \frac{P_T}{r^2} + \frac{P_I}{r^2} = \frac{2P_T}{r^2}$$

$$P_R = -115 \text{ dB} \hat{=} 3,38 \cdot 10^{-12}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{2P_T}{P_R}} = 35 \sqrt{2 \cdot \frac{10000}{3,38 \cdot 10^{-12}}} \hat{=} 32 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \text{Abstand: } 2r = 64 \text{ km}$$

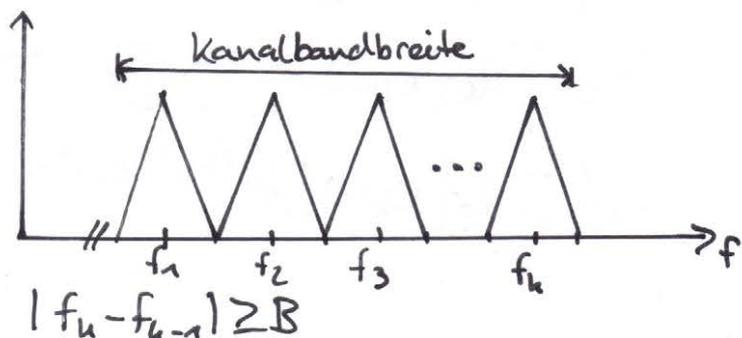
$$b) \text{Guard Intervall } \Delta t = \frac{T_u}{4} = \frac{896 \mu s}{4} = 224 \mu s$$

$$\Delta x = c \cdot \Delta t = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 224 \mu s = 67 \text{ km} > 64 \text{ km}$$

\Rightarrow Guardintervall ausreichend

Frequenzmultiplex und Superheterodyn-Empfänger

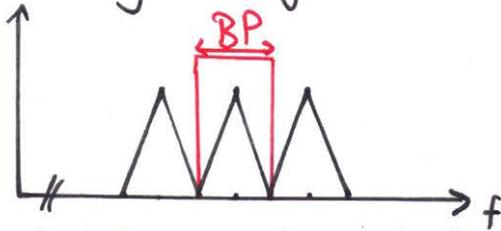
Frequenzmultiplex:



- Verschiebung in den Bandpassbereich mittels unterschiedlicher Trägerfrequenzen
- Aufteilung der Gesamtbandbreite in überlappungsfreie Einzelkanäle (Beispiel: UKW)

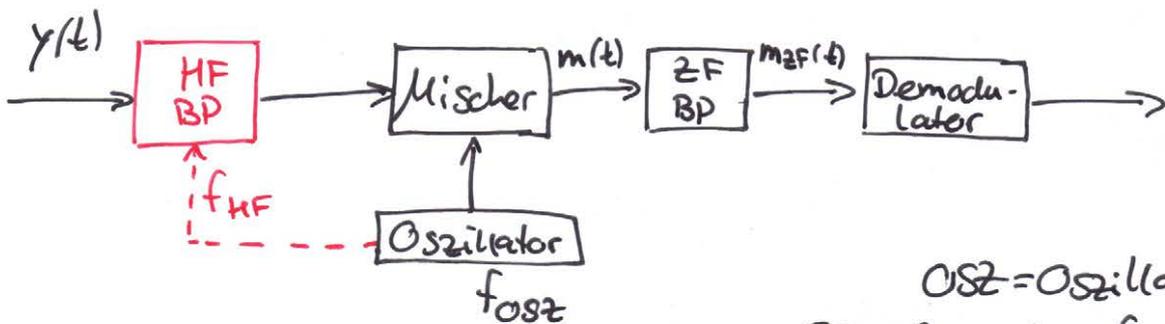
Geradeempfänger

- Einsatz eines Bandpassfilters mit variabler Mittelfrequenz zur Filterung des gewünschten Kanals



Problem: hohe Selektivität, Abstimmbarkeit und Genauigkeit im HF-Bereich erforderlich

Lösung: Superheterodyn-Empfänger (ca. 1930)



OSZ = Oszillator
ZF = Zwischenfrequenz

- ein fester Bandpassfilter mit herabgesetzter Frequenz (Zwischenfrequenz f_{ZF})
- spektrale Verschiebung des Empfangssignals in den Durchlassbereich des ZF-Filters

$$y(t) = \sum_k \operatorname{Re} \{ e_k(t) e^{j\omega_k t} \}$$

$$m(t) = y(t) \cdot \cos(\omega_{osz} \cdot t)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \operatorname{Re} \{ e_k(t) e^{j\omega_k t} \} \cdot [e^{j\omega_{osz} t} + e^{-j\omega_{osz} t}]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \operatorname{Re} \{ e_k(t) [e^{j(\omega_k + \omega_{osz})t} + e^{j(\omega_k - \omega_{osz})t}] \}$$

MSK
Ü 2
-4-

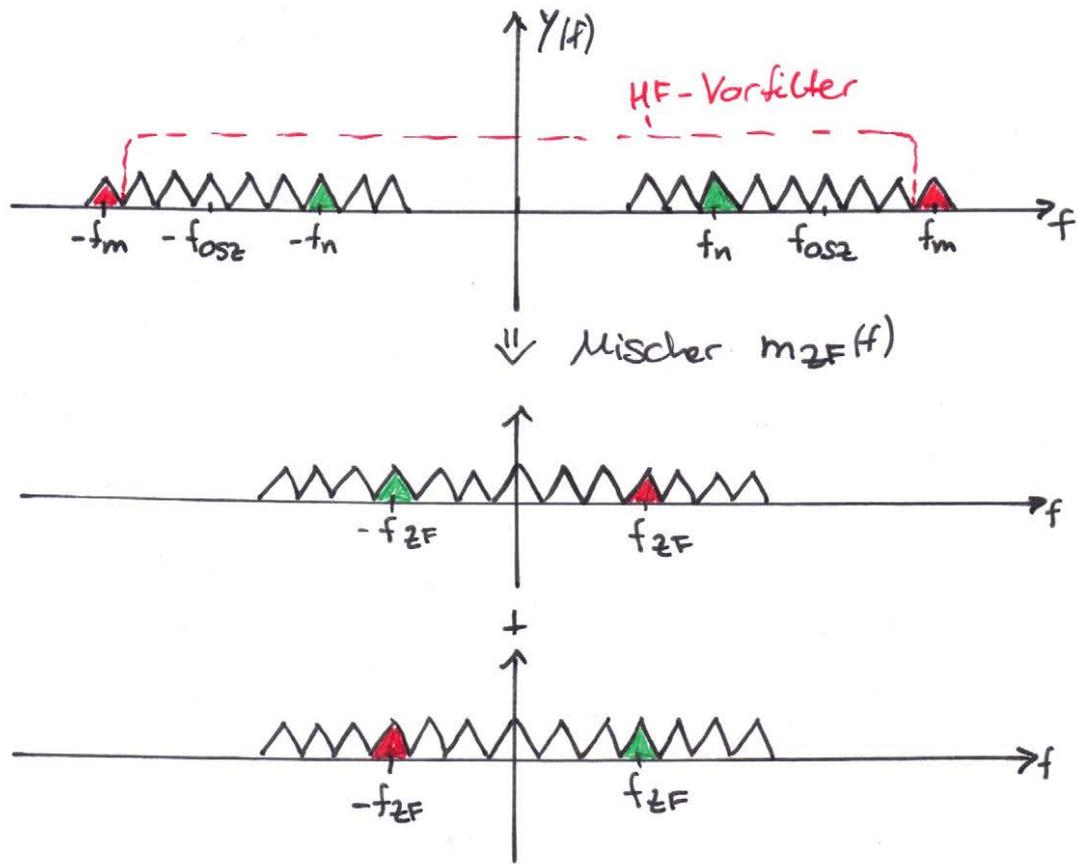
27.04.2012

Bei idealem Bandpass: zwei Teilsignale fallen
in den Durchlassbereich des ZF-Filters

$$\omega_{osz} - \omega_m = \omega_{ZF} \quad \text{und} \quad -\omega_{osz} + \omega_m = +\omega_{ZF}$$

$$\Leftrightarrow \omega_{osz} - \omega_m = -\omega_{ZF}$$

$$\Rightarrow m_{ZF}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e_n^*(t) + e_m(t) \cdot e^{j\omega_{ZF}t} \right\}$$



Unterdrückung der Spiegel frequenzen:
Vorfilterung mittels Bandpass

$$B_{HF} \leq 4f_{ZF} - B$$

Realisierung unproblematisch, üblicherweise $f_{ZF} \gg B$

Aufgabe 5

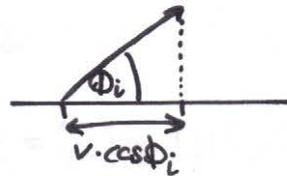
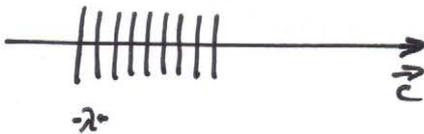
a) I) $f_{osz} = f_{ZF} + f_{AC} = 109,8 \text{ MHz}$
 $f_s = f_{ZF} + f_{osz} = 120,5 \text{ MHz} > 108 \text{ MHz}$
 II) $f_{osz} = f_{AC} - f_{ZF} = 88,4 \text{ MHz}$
 $f_s = f_{osz} - f_{ZF} = 177,7 \text{ MHz} < 87,5 \text{ MHz}$

b)

Rayleigh Fading bei Mehrwegeausbreitung und Ausfallwahrscheinlichkeit

Das Empfangssignal $y(t)$ lässt sich bei Mehrwegeausbreitung und Bewegung beschreiben durch (ohne Sichtverbindung):

$$y(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=0}^N A_i e^{j2\pi(f_0 + f_0 \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos(\Phi_i))t} \right\}$$



Analytisches Signal:

$$y_a(t) = \sum_{i=0}^N A_i \cdot e^{j2\pi f_0 \frac{v}{c} \cos(\Phi_i) \cdot t} \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Θ_i

jeder Pfad Θ_i mit bestimmter Phase hier durch den Dopplereffekt verursacht

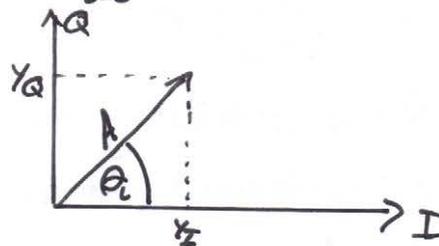
$$= \left[\sum_{i=0}^N A_i \cdot \cos \Theta_i + j \cdot \sum_{i=0}^N A_i \sin \Theta_i \right] \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

$$= A \cdot e^{j\Theta} e^{j2\pi f_0 t} = [y_I(t) + j \cdot y_Q(t)] \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

mit $A = \sqrt{\left(\sum_{i=0}^N A_i \cos \Theta_i \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^N A_i \sin \Theta_i \right)^2}$

$$= \sqrt{y_I^2(t) + y_Q^2(t)}$$

mit $\arctan \left(\frac{y_Q(t)}{y_I(t)} \right)$



In der Praxis ist es unmöglich alle Amplituden A_i und Phasen θ_i der Einzelwellen zu bestimmen. Daher werden A_i und θ_i als Zufallsgrößen behandelt.

Eine Größe, die aus einer Summe von Zufallsgrößen besteht, ist selbst eine Zufallsgröße, d.h.:

$$Y_I = \sum_i Y_{Ii} ; Y_Q = \sum_i Y_{Qi}$$

Aus zentralem Grenzwertsatz folgt:

$$P_{Y_I}(Y_I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot e^{-\frac{Y_I^2}{2\sigma^2}}$$

$$P_{Y_Q}(Y_Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot e^{-\frac{Y_Q^2}{2\sigma^2}}$$

Außerdem gilt wegen der statistischen Unabhängigkeit:

$$P_{Y_I, Y_Q}(Y_I, Y_Q) = P_{Y_I}(Y_I) \cdot P_{Y_Q}(Y_Q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(Y_I^2 + Y_Q^2)}{2\sigma^2}}$$

→ Variablentransformation von P_{Y_I, Y_Q} nach $P_{A, \theta}$ mit:

$$P_{A, \theta}(A, \theta) = P_{Y_I, Y_Q}(Y_I, Y_Q) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{dY_I}{dA} & \frac{dY_Q}{dA} \\ \frac{dY_I}{d\theta} & \frac{dY_Q}{d\theta} \end{vmatrix}}_{\text{Jacobische Determinante } J}$$

$$\text{und } Y_I + jY_Q = A \cdot e^{j\theta}$$

$$\Rightarrow Y_I = A \cdot \cos\theta, Y_Q = A \cdot \sin\theta$$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -A\sin\theta & A\cos\theta \end{vmatrix} = A$$

$$\Rightarrow P_{A, \theta}(A, \theta) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}$$

über die Randverteilung von $P_{A, \theta}(A, \theta)$ lassen sich die Verteilungsdichtefunktionen der Phase θ_i und der Amplitude A berechnen:

$$P_{\Theta}(\theta) = \int_0^{\infty} P_{A,\Theta}(A,\theta) dA = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} dA$$

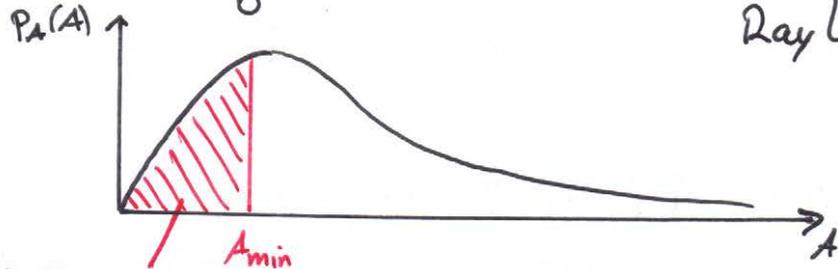
mit P.I.

$$= -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi}$$

⇒ Signale kommen aus allen Richtungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit

$$P_A(A) = \int_0^{2\pi} P_{A,\Theta}(A,\theta) d\theta = \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}$$

Rayleigh-Verteilung auf $[0, \infty)$

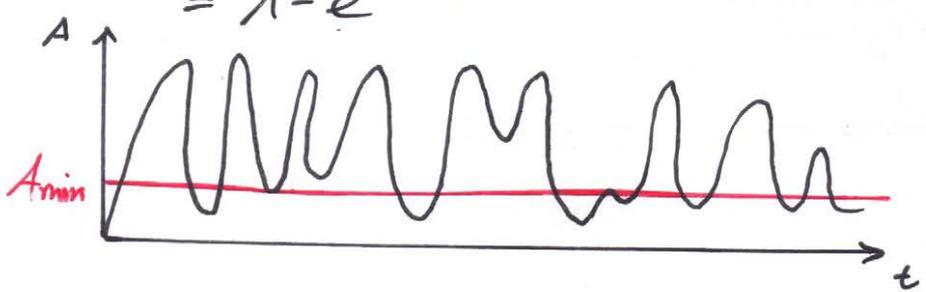


Ausfallwahrscheinlichkeit

Die Ausfallwahrscheinlichkeit (DP, dropout probability) bei der der zum Empfang mindestens erforderliche Pegel A_{min} ($P_{min} = \frac{A_{min}^2}{2}$) unterschritten wird, ist:

$$DP = \int_0^{A_{min}} \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} dA = -e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^{A_{min}} = 1 - e^{-\frac{A_{min}^2}{2\sigma^2}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{P_{min}}{\sigma^2}}$$



Dopplerspektrum eines Fading-Kanals

Bei Mehrwegeausbreitung eines ohne dominanten Pfad, ist die Amplitude A des Empfangssignals $y(t)$ Rayleigh- und die Phase θ gleichverteilt.

Berücksichtigt man zusätzlich, dass der Empfänger (die Mobilstation) sich bewegt, dann erfährt das übertragene Signal eine Frequenzverschiebung infolge des Dopplereffekts:

$$\Rightarrow \text{Dopplerverschiebung } \Delta f_i = \underbrace{f_0 \cdot \frac{v}{c}}_{f_D} \cdot \cos(\varphi_i) \\ = f_D \cdot \cos(\varphi_i)$$

wobei f_D die maximale Dopplerverschiebung ist.

Die maximale Dopplerverschiebung $|\Delta f_i| = f_0 \cdot \frac{v}{c}$ ergibt sich für einen Sender sich auf den Sender zubewegenden Empfänger, d.h. $\varphi_i = 0$ bzw. für einen sich vom Sender fortbewegenden Empfänger, d.h. $\varphi_i = \pi$.

Die Dopplerverschiebung verschwindet für Signale, die senkrecht zur Bewegungsrichtung einfallen.

Der Einfallswinkel φ_i ist im Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichverteilt.

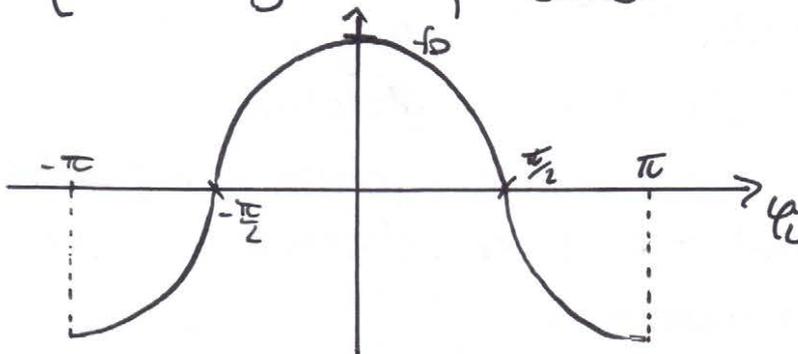
Durch Variablentransformation lässt sich die Verteilung der Frequenzverschiebung $\Delta f_i = f_D \cdot \cos(\varphi_i)$ beschreiben als:

$$P_{\Delta f_i}(f) = P_{\varphi_i}(\varphi_i) \cdot \left| \frac{d\varphi_i}{df} \right|; \quad \varphi_i = \arccos\left(\frac{\Delta f_i}{f_D}\right) \\ = P_{\varphi_i}(\varphi_i) \cdot \left| \frac{d \arccos\left(\frac{\Delta f_i}{f_D}\right)}{df} \right| = P_{\varphi_i}(\varphi_i) \cdot \left| \frac{-\frac{1}{f_D}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_D}\right)^2}} \right|$$

$$= P_{\varphi_i}(\varphi_i) \cdot \frac{1}{\sqrt{f_D^2 - f^2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{f_D^2 - f^2}} & ; \quad -\pi \leq \varphi_i \leq \pi \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{f_D^2 - f^2}} & ; \quad |f| \leq f_D \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$



MSK
Ü3
-3-

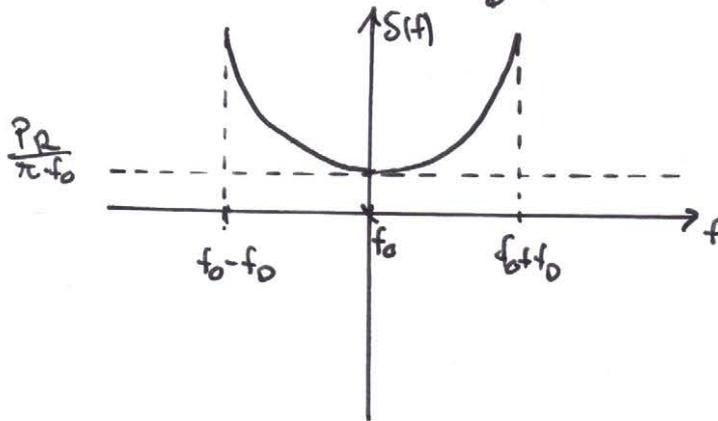
Die Parameter der verschiedenen Ausbreitungspfade sind voneinander unabhängig. 11.05.2012

⇒ Verteilungsdichte $P_{\Delta f_i}(f)$ gibt auch die spektrale Verteilung der Leistung am Empfänger an.

$$S(f) = \begin{cases} P_R \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{f_D^2 - f^2}} & ; |f| \leq f_D \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Empfangsleistung $P_R = \sigma^2$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{f_D^2 - f^2}} ; |f| \leq f_D$$



Aufgabe 6

a) Pfadlänge: 1. Pfad: s_0

2. Pfad: $2s_1 - s_0$

Delay Spread $\Delta \tau$: Vereinfachung: Differenz zwischen 1. und letzter Mehrwegkomponente

$$\text{kohärenzbandbreite } B_c = \frac{1}{\Delta \tau} = \frac{c}{2s_1 - s_0 - s_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{100\text{m}} = 3 \text{ MHz} \gg 200 \text{ kHz}$$

⇒ keine Intersymbolinterferenz (ISI), nicht frequenzselektiv, flat-fading

b) Dopplerverschiebung $\Delta f = f_0 \cdot \frac{v}{c} = 41,7 \text{ Hz}$

Beide Pfade besitzen die gleiche Dopplerverschiebung

⇒ Dopplerspread = 0

Zellulärer Netzaufbau

Mögliche Zellformen

- gleichschenklige Dreiecke
- Rechtecke
- Sechsecke (Hexagon)

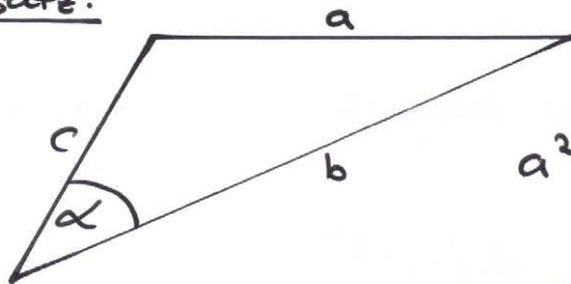
Üblicherweise: Hexagon als Grundelement

- bestmögliche Annäherung an Kreis (bzw. Ausbreitung von rundstrahlenden Antennen)
- Natürliche Handvergrenze

Herleitung von Clustergröße k und Wiederverwendungsabstand D

Berechnung der Entfernung $d_{1,2}$ zwischen zwei Koordinatenpaaren (u_1, v_1) und (u_2, v_2) in einem schiefwinkligen Koordinatensystem mit dem Kosinussatz

Kosinussatz:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_{1,2} &= (u_1 - u_2)^2 + (v_2 - v_1)^2 - 2(u_1 - u_2)(v_2 - v_1) \cdot \underbrace{\cos(60^\circ)}_{= \frac{1}{2}} \\ &= (u_1 - u_2)^2 + (v_2 - v_1)^2 - (u_1 - u_2)(v_2 - v_1) \end{aligned}$$

Benachbarte Zellen können zu Gruppen (Clustern) zusammengefasst werden, so dass diese von einem flächengleichen Sechseck umrahmt werden.

Die Mittelpunkte dieser neuen Hexagone (i, j) lassen sich ebenfalls mit dem neu eingeführten Koordinatensystem angeben. Die Entfernung D der „Überhexagone“ (außer bezogen auf $(0, 0)$)

$$D = \sqrt{3} \cdot R \sqrt{i^2 - ij + j^2} \quad (1)$$

Anzahl der Zellen in einem „Überhexagon“:

Flächenverhältnis

$$A = \frac{3}{2} \sqrt{3} R^2$$

$$A' = \frac{3}{2} \sqrt{3} R'^2 = \frac{3}{2} \sqrt{3} \left(\frac{D}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$k = \frac{A'}{A} = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{3} \left(\frac{D}{\sqrt{3}} \right)^2}{\frac{3}{2} \sqrt{3} R^2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \left(\sqrt{3} R \sqrt{i^2 - ij + j^2} \right)^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow k = i^2 - ij + j^2 \quad \text{Clustergröße} \quad i, j \in \mathbb{N}$$

! auswendig können!

Wiederverwendungsabstand D

$$D = \sqrt{3k} \cdot R$$

Mittleres $\frac{C}{I}$ für hexagonale Zellen und Rundstrahlantennen

Gleichkanalstörabstand (Carrier-to-Interference ratio)

$$\frac{C}{I} = \frac{d_0^{-\alpha}}{\sum_{i=1}^N d_i^{-\alpha}}$$

gleiche Sendeleistung bei allen MS (Mobilstationen)

Bei ausschließlicher Betrachtung der Störer im „1. Ring“ gilt näherungsweise:

$$\frac{C}{I} \approx \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{R}{D} \right)^{-\alpha} = \frac{1}{6} \left(\frac{D}{R} \right)^{\alpha}$$

Der Störabstand $10 \log \left(\frac{C}{I} \right)$ wird besser bei

- steigendem α
- steigendem $\left(\frac{D}{R} \right)$, d.h. Cluster werden größer

Beispiel: $F=3 \Rightarrow k=3$

F: Anzahl der Frequenzen

$$D = \sqrt{3k} \cdot R \Rightarrow \frac{D}{R} = \sqrt{3k}$$

$$\Rightarrow 10 \log \left(\frac{C}{I} \right) = 10 \log \left(\frac{1}{6} \cdot (\sqrt{3 \cdot 3})^{\alpha} \right) = 8,918 \text{ dB} \quad \text{für } \alpha = 3,5$$

z.B. GSM: Mindest $\frac{C}{I}$: 9 dB

\Rightarrow größere Cluster

\Rightarrow Sektorisierung

$$\frac{C}{I} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3k})^{-\alpha}}$$

$$P_R \approx P_T \cdot \frac{1}{d^{\alpha}} = P_T \cdot d^{-\alpha}$$

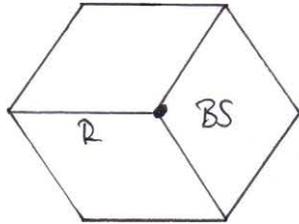
MSK $\frac{C}{I}$ für sektorisierte Zellen

Ü4
-2-

Um in Gebieten mit großer Nutzerdichte ausreichende Kapazitäten zur Verfügung stellen zu können, werden Mobilfunkzellen in diesen Gebieten sektorisiert.

Üblich ist eine Unterteilung in 3 Sektoren.

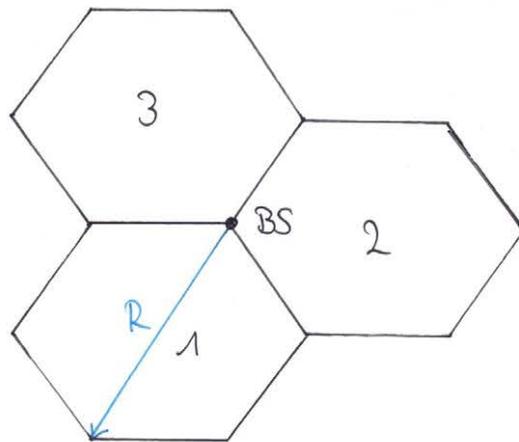
Ausgehend von einer hexagonalen Zelle ergeben sich Sektoren in Form von Dreiecken.



Der Gleichkanalstörrabstand $\frac{C}{I}$ kann im Uplink (MS \rightarrow BS) für eine Clustergröße $k=3$ und $F=3 \cdot 3=9$ wie folgt angegeben werden (Vorlesung):

$$\frac{C}{I} = \frac{R^{-\alpha}}{(3^{-\alpha} + 2(\sqrt{3})^{-\alpha})R^{-\alpha}} = 11,33 \hat{=} 10,6 \text{ dB} ; \alpha = 3,5$$

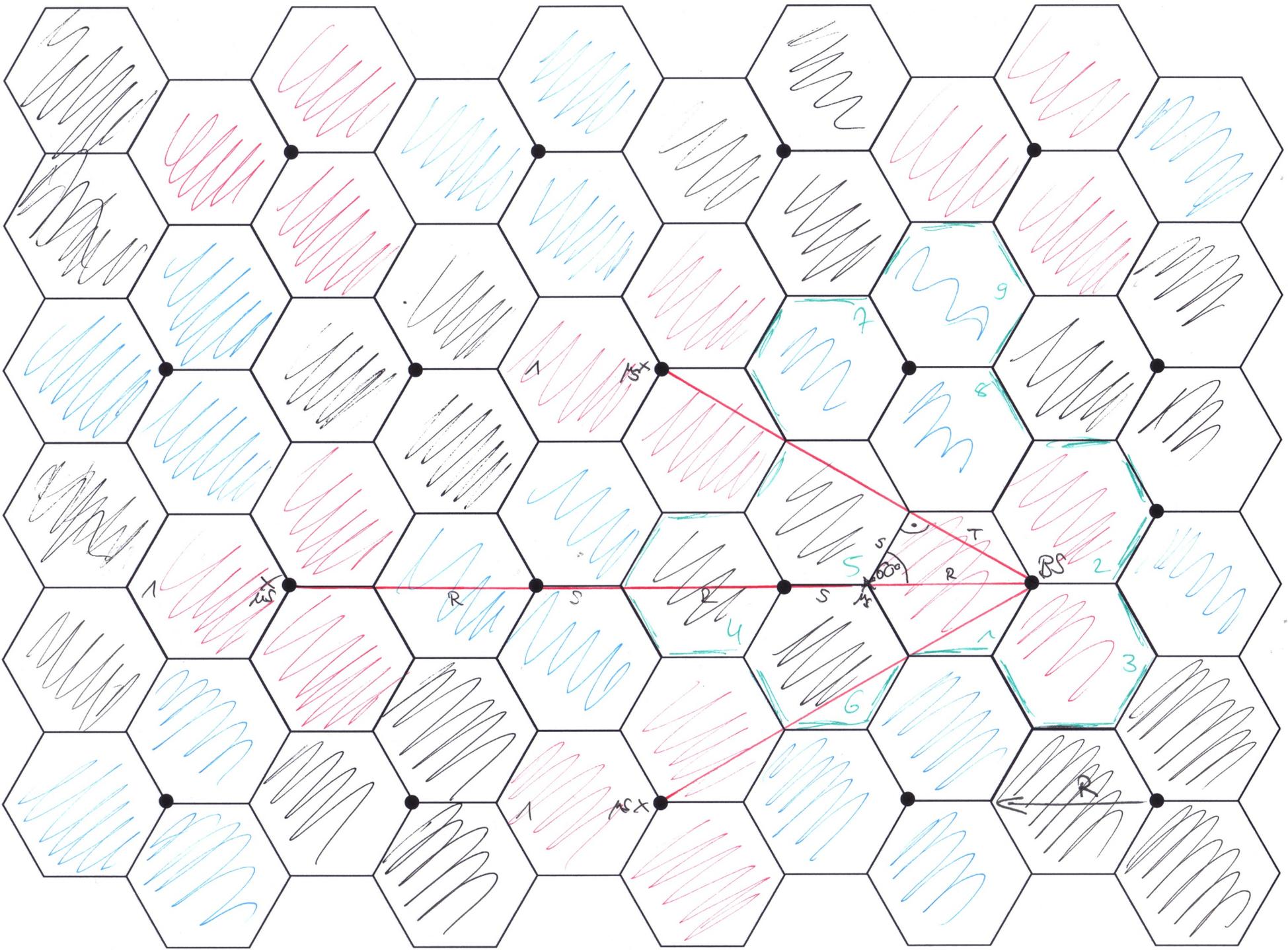
Aufgrund der Sendee- und Empfangscharakteristiken von Sektorantennen werden bei Netzplanung und -darstellung die einzelnen Sektoren als Hexagon dargestellt.



Beispiel: $k=3$, $F=3 \cdot 3=9$

$$\frac{T}{R} = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$S = \frac{R}{2}$$



$$\Rightarrow \frac{C}{H} = \frac{R^{-\gamma}}{2(3T)^{-\gamma} + (9S)^{-\gamma}}$$

$$= \frac{R^{-\gamma}}{2\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}R\right)^{-\gamma} + \left(\frac{9}{2}R\right)^{-\gamma}} = \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^{-\gamma} + \left(\frac{9}{2}\right)^{-\gamma}} = 13,17$$

$$\hat{=} 11,20 \text{ dB für } \gamma = 3,5$$

Aufgabe 17: Hexagonale Netze

a) $F=4, k=4$

$$D = \sqrt{3k} \cdot R = 3,46R$$

Siehe eingezeichnetes
im Aufgabenblatt

b) $C = P_T \cdot \underline{d_0}^{-\gamma} = P_T \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^{-\gamma}$

$$d_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R$$

$$I_1 = P_T \cdot d_1^{-\gamma} = P_T \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}R\right)^{-\gamma}$$

$$d_2 = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}R\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}R^2 + \frac{27}{4}R^2} = \sqrt{7}R$$

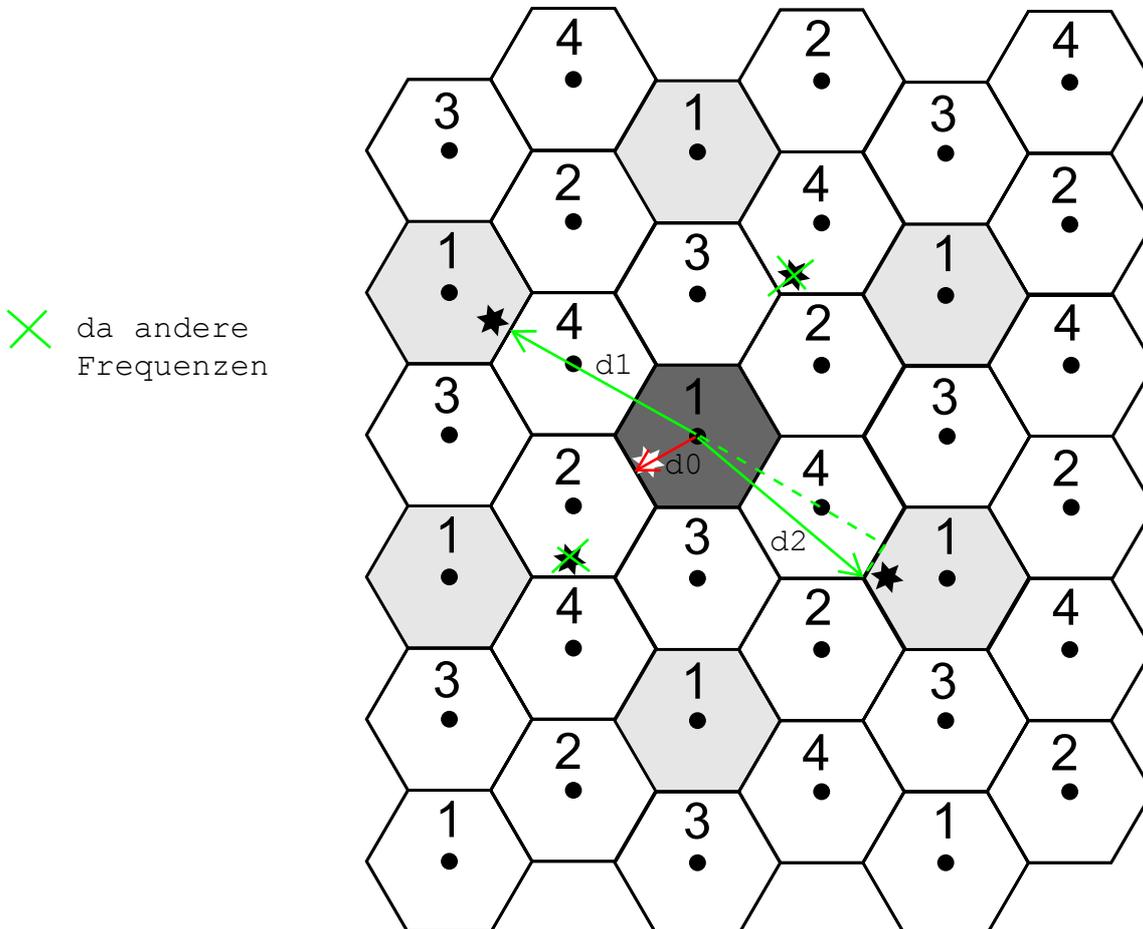
$$I_2 = P_T \cdot d_2^{-\gamma} = P_T \cdot \left(\sqrt{7}R\right)^{-\gamma}$$

$$\frac{C}{I} = \frac{C}{I_1 + I_2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-\gamma}}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{-\gamma} + \left(\sqrt{7}\right)^{-\gamma}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{27} + \frac{1}{7}} = 4,58$$

$$10 \log\left(\frac{C}{I}\right) = 6,6 \text{ dB}$$

Aufgabe 7 (Hexagonale Netze)

Gegeben ist das in der Abbildung gegebene hexagonale zelluläre Netz.



- Berechnen Sie die Cluster-Größe K , den *frequency reuse factor* F sowie die *reuse distance* D in Abhängigkeit des Zellradius R .
- Eine Mobilstation (\star) kommuniziert im Uplink mit der zentralen Basisstation (dunkelgraue Zelle). Im Netzwerk befinden sich 4 weitere Mobilstationen (\star), die mit anderen Basisstationen verbunden sind. Alle Mobilstationen befinden sich am Zellrand und senden mit gleicher Sendeleistung P_T . Für alle Mobilstationen wird Freiraumausbreitung mit $\gamma = 2$ angenommen. Berechnen Sie die *Co-Channel Interference* $\frac{C}{I}$ unter der Annahme omnidirektionaler Antennen.

Hinweis: Beachten Sie, dass hier nicht die Näherungsformel für die *Co-Channel Interference* verwendet werden kann.

MSK
Ü5
-1-Aufgabe 8

a) Dateigröße: $2,5 \text{ MB} = 20 \text{ Mbit}$

Bandbreite pro Nutzer $B' = 4 \text{ MHz}$

Datenrate: $R = \eta \cdot B' = 8 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$

Übertragungsdauer: $T = \frac{20 \text{ Mbit}}{R} = 2,5 \text{ s}$

b) Datenrate: $R = \eta \cdot B = 38 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$

Übertragungsdauer: $T' = \frac{20 \text{ Mbit}}{R} = 0,5 \text{ s}$

Übertragungsdauer bezogen auf Frame:

$$T = \frac{T'}{t_s} \cdot (4t_s + 4\Delta t) = \frac{0,5 \text{ s}}{200 \text{ ms}} (4 \cdot 200 \text{ ms} + 4 \cdot 1 \text{ ms}) = 2 \text{ s}$$

Aufgabe 9

a) Siehe Aufgabenblatt

b) Nutzer A: $S_A = r \cdot C_A = [-1 \ -3 \ -1 \ -1 \ +3 \ -1 \ +1 \ +1]$

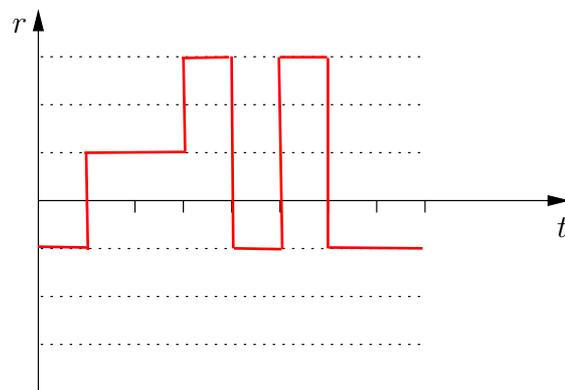
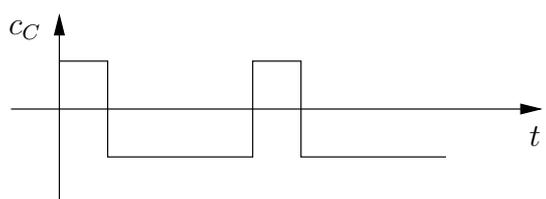
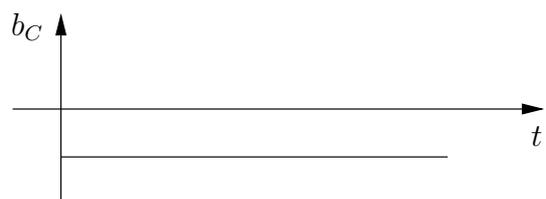
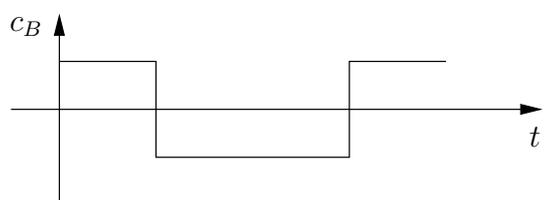
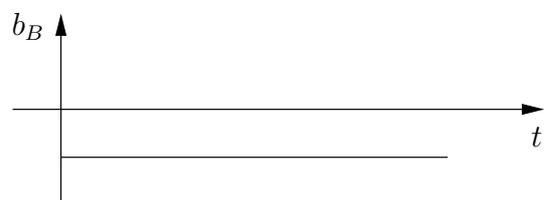
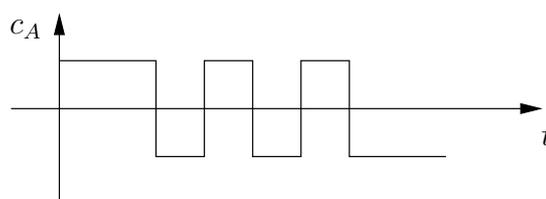
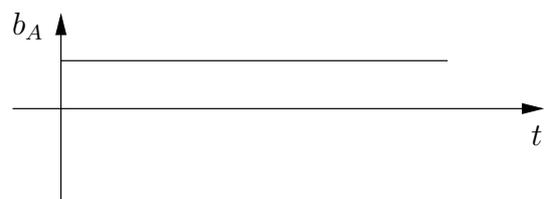
$$b_A = \text{sign}\{\|S_A\|_1\} = \text{sign}\{-8\} = -1$$

Nutzer B: $S_B = r \cdot C_B = [-1 \ -3 \ -1 \ +1 \ -3 \ +1 \ -1 \ -1]$

$$b_B = \text{sign}\{\|S_B\|_1\} = \text{sign}\{-8\} = -1$$

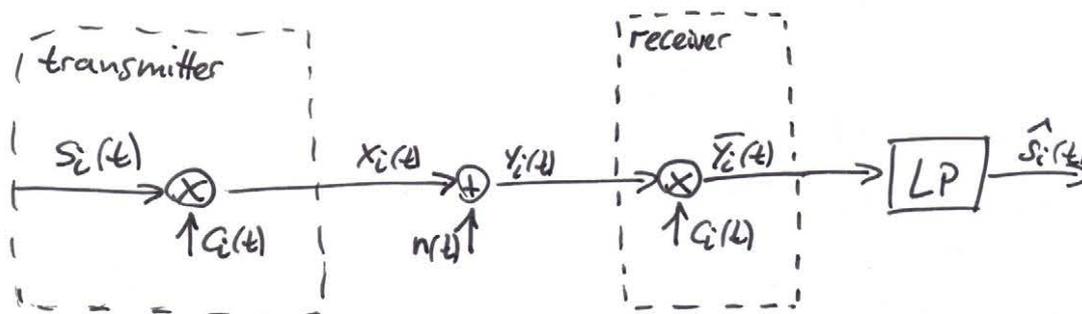
Nutzer C: $S_C = r \cdot C_C = [-1 \ +3 \ -1 \ +1 \ +3 \ +1 \ +1 \ +1]$

$$b_C = \text{sign}\{\|S_C\|_1\} = \text{sign}\{8\} = 1$$



Aufgabe 10 (Codesequenzen für DS-CDMA: m-Sequenzen und Gold-Codes)

Beim sogenannten "Direct Sequence - Code Division Multiple Access" nutzen alle Teilnehmer gleichzeitig das gleiche Frequenzband. Die Separierung der einzelnen Signale erfolgt mit Hilfe von den Teilnehmern individuell zugeordneten Pseudo-Zufallssignalen.



Die Pseudo-Zufallssignale sollten näherungsweise unkorreliert sein, d.h. es sollte gelten:

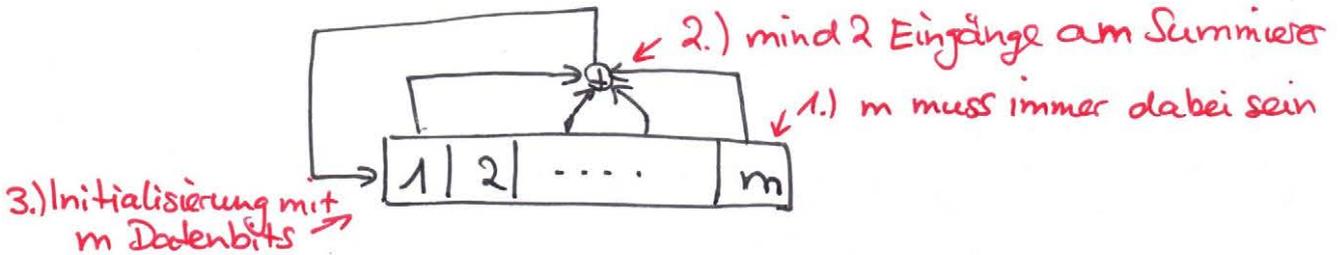
$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T c_i(t) c_j(t) dt \right| = \begin{cases} 1 & i = j \\ \Delta_{ij} \ll 1 & i \neq j \end{cases}$$

Bei der Generierung der Pseudo-Zufallsfolgen sind daher vor allem die Korrelationseigenschaften zu betrachten.

Mit Hilfe von m-stufigen rückgekoppelten Schieberegistern lassen sich auf einfache Weise Codefolgen $c_i(t)$ erzeugen.

Maximum-Length Shift Register Codes, kurz: m-Sequenzen

Die Ausgangssignale mehrer Schieberegister werden modulo-2 addiert und auf den Eingang zurückgeliefert.



Die so erzeugte Folge darf sich spätestens dann periodisch wiederholen, wenn das Schieberegister alle möglichen Zustände durchlaufen hat (ohne Nullzustand). Die maximale Sequenzlänge $l = 2^m - 1$ wird jedoch nur dann erreicht, wenn ganz bestimmte Stufen des Schieberegisters rückgeführt werden. Man spricht in diesem Fall von m-Sequenzen ("maximum-length sequences").

Beispiel: $m = 4$

primitive Polynome

$z^3 + 1$ $\zeta = \{1, 3\}$	$z + 1$ $\zeta = \{3, 4\}$	$z^2 + 1$ $\zeta = \{2, 4\}$
1000 1100 1110 1111 0111 1011 0101 1010 1101 0110 0011 1001 0100 0010	1000 0100 0010 1001 1100 0110 1011 0101 1010 1101 1110 1111 0111 0011	1000 0100 1010 0101 0010 (0001) wdh. 1000

$l = 2^4 - 1 = 15$
 \Rightarrow keine m-Sequenz

$l = 2^4 - 1 = 15$
 \Rightarrow m-Sequenz

$l = 2^4 - 1 = 15$
 \Rightarrow m-Sequenz

Anmerkung: Beim DS-CDMA Verfahren, d.h. bei der "direkten" Multiplikation der Datenfolge $s_i(t)$ mit der Spreizfolge $c_i(t)$, eignet sich eine bipolare Beschreibung ($\{-1, +1\}$) für die Folgen besser als eine unipolare Beschreibung ($\{0,1\}$).

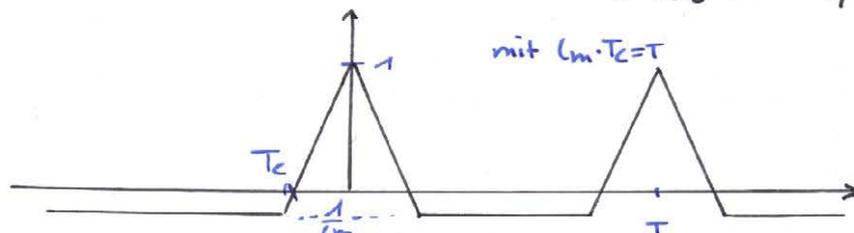
Umrechnung mittels:

$$-2 \cdot c_{\text{unipolar}} + 1 = c_{\text{bipolar}} \quad \begin{matrix} 1 \rightarrow -1 \\ 0 \rightarrow 1 \end{matrix}$$

Besonders wichtig für Codemultiplex-Anwendungen sind die Korrelationseigenschaften der Pseudo-Zufallssignale. Die Autokorrelationsfunktion spielt eine entscheidende Rolle für die Synchronisation des am Empfänger zugesetzten Zufallssignals und für die Unterdrückung von Kanalechos im Falle frequenzselektiver Kanäle. Die Kreuzkorrelation ist entscheidend für die Unterdrückung fremder Teilnehmersignale.

Im Falle einer m-Sequenz der Länge $l = 2^m - 1$ gilt für die AKF (ohne Beweis)

$$R_{c_i c_i}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T c_i(t) c_i(t + \tau) dt = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{1}{l_m}) \cdot \frac{|\tau|}{T_C} & \text{für } |\tau| \leq T_C \\ -\frac{1}{l_m} & \text{für } T_C \leq \tau \leq T - T_C \\ R_{c_i c_i}(\tau + n \cdot T), n \in \{\pm 1, \pm 2\} & -\infty \leq \tau \leq \infty \end{cases}$$



Die AKF ist periodisch entsprechend der Periodizität der Spreizfolge und hat aufgrund der Rechteckimpulse einen dreieckigen Verlauf. Wegen der ungeraden Sequenzlänge, d.h. der unterschiedlichen Anzahl Einsen ($2^{m-1} - 1$) und -Einsen (2^{m-1}), verschwindet sie im Intervall $T_C \leq \|\tau\| \leq T - T_C$ nicht.

Trotz der guten Autokorrelationseigenschaften sind m-Sequenzen nur bedingt für Code-multiplex-Übertragungen geeignet, da sie erhebliche Korrelation zwischen Codesequenzen aufweist und somit fremde Teilnehmersignale nur unzureichend unterdrückt.

m	Sequenzlänge $l = 2^m - 1$	Anzahl m-Sequenzen	maximaler Wert der Kreuzkorrelation
3	7	2	0.71
4	15	2	0.6
5	31	6	0.35
6	63	6	0.36
7	127	18	0.32
8	255	16	0.37
9	511	48	0.22
10	1023	60	0.37
11	2047	176	0.14
12	4095	144	0.34

Eine Möglichkeit, die Kreuzkorrelationseigenschaften zu verbessern, wäre eine Teilmenge der m-Sequenzen zu betrachten, die für sich genommen ein besseres Verhalten aufweisen. Diese Einschränkung ist für CDMA-Systeme aber nicht sinnvoll. (Es gibt nicht genügend verschiedene m-Sequenzen.) Eine andere Möglichkeit sind die sogenannten Gold-Sequenzen.

Gold-Sequenzen

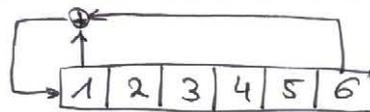
Von Gold wurde gezeigt, dass für alle Sequenzlängen bestimmte Paare von Codes $(c_i(t), c_j(t))$ existieren, deren Kreuzkorrelierte nur drei verschiedene Werte aufweist:

$$R_{c_i c_j}(k \cdot T_c) \in \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L_m} \left\{ -1, -2^{\frac{m+1}{2}}, -1, 2^{\frac{m+1}{2}} \right\} \text{ für } m \text{ ungerade} \\ \frac{1}{L_m} \left\{ -1, -2^{\frac{m+2}{2}}, -1, 2^{\frac{m+2}{2}} \right\} \text{ für } m \text{ gerade} \end{array} \right\}$$

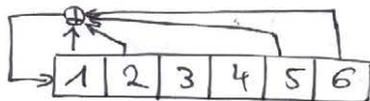
Solche Paare von ausgewählten Codes werden als "Muttercodes" bezeichnet:

Beispiel: $m=6$

$$i_1 = \{1, 6\}$$



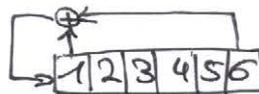
$$i_2 = \{1, 2, 5, 6\}$$



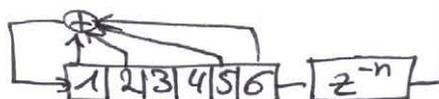
$$\Rightarrow R_{c_i c_j} \in \left\{ -\frac{1}{63}, -\frac{17}{63}, \frac{15}{63} \right\} = \left\{ -0,016, -0,27, 0,238 \right\}$$

Aus den Muttercode-Paaren lassen sich $2^m - 1$ Codes mit gleich günstigen Kreuzkorrelations-Eigenschaften ableiten. Hierzu werden die Muttercodes unter sämtlichen möglichen Zeitversätzen $n \cdot T_c$ modulo-2 addiert. Diese Codes heißen "Gold-Codes".

Muttercode 1



Muttercode 2



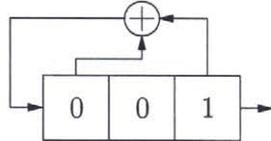
Gold-Code

m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
maximaler Betragswert der Kreuzkorrelation	0.71	0.6	0.29	0.27	0.13	0.13	0.06	0.06	0.03	0.03

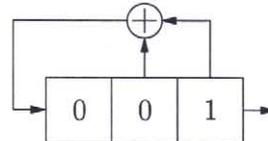
Lösung zu Aufgabe 11

a) Schieberegister für p_1 und p_2 :

$$p_1(z) = z^2 + 1$$



$$p_2(z) = z + 1$$



b)

$$c_1 = 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0$$

$$c_2 = 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1$$

c)

	c_1							c_1							
	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	
$c_2 =$	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1								$+\frac{3}{7}$
		-1	+1	+1	-1	+1	-1								$-\frac{1}{7}$
			-1	+1	+1	-1	+1								$-\frac{1}{7}$
				-1	+1	+1	-1								$-\frac{5}{7}$
					-1	+1	+1								$+\frac{3}{7}$
						-1	+1								$+\frac{3}{7}$
							-1								$-\frac{1}{7}$
															$+\frac{3}{7}$

Kreuzkorrelierte weist nur drei verschiedene Werte auf $R_{1,2} \in \{-\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, +\frac{3}{7}\}$

$\Rightarrow (c_1, c_2)$ ist Muttercode eines Gold-Codes

Reduktion der Ausfallwahrscheinlichkeit bei Übertragung mit Diversität

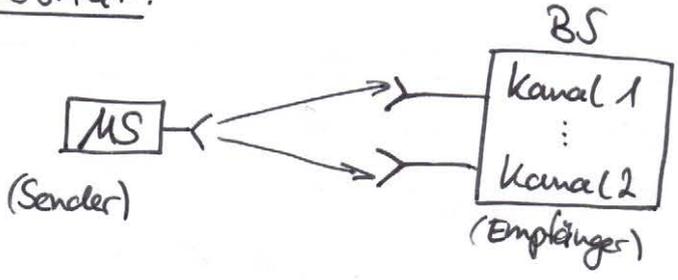
Diversitätsverfahren: Reduktion von Einflüssen der Mehrwegeausbreitung

Annahme: durch Rayleigh-Fading hervorgerufene Signaleinbrüche treten selten auf 2 (oder mehr) unkorrelierten Ausbreitungspfaden gleichzeitig auf.

Unabhängigkeit der Fading-Prozesse

⇒ Reduktion der Ausfallwahrscheinlichkeit

Antennendiversität:



Möglichkeiten der Antennendiversität

- 1) Selection Combining: wähle immer Antenne mit höchstem Pegel
 - 2) Switched Combining: Antennen wechseln wenn Pegel unter Schwellwert fällt
 - 3) Maximum Ratio Combining: Antennen werden so gewählt, dass Signallüberlagerung einen bestmöglichen Pegel erreicht
- } ähnliche Performance

Frage: Reduktion der Ausfallwahrscheinlichkeit (Beispiel)

$M=4$ Kanäle (Empfangsantennen bei BS)

$\left(\frac{S}{N}\right)_{av} = 20 \text{ dB}$ mittlere Signal-Störabstand

$\left(\frac{S}{N}\right)_{min} = 10 \text{ dB}$ minimaler Signal-Störabstand

aus Übung 4: Ausfallwahrscheinlichkeit für Rayleigh-Fading-Kanal

$$DP = 1 - e^{-\frac{P_{min}}{\sigma^2}}$$

dabei: P_{min} : mindest erforderlicher Empfangspegel

σ^2 : mittlere Empfangsleistung

$$DP = 1 - e^{-\frac{P_{min}}{\sigma^2}} = 1 - e^{-\frac{P_{min}/N}{\sigma^2/N}} = 1 - e^{-\frac{(\frac{S}{N})_{min}}{(\frac{S}{N})_{av}}}$$

Ausgrund der Unabhängigkeit der $M=4$ Ausbreitungspfade

$$DP = \left(1 - e^{-\frac{(S/N)_{\min}}{(S/N)_{\text{av}}}}\right)^4$$

$$\text{mit } \frac{(S/N)_{\min}}{(S/N)_{\text{av}}} = \frac{10\text{dB}}{20\text{dB}} = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$\Rightarrow DP = (1 - e^{-0,1})^4 = 0,000082 \approx 0,0082\%$$

Ohne Berücksichtigung von Diversität

$$DP_{M=1} = (1 - e^{-0,1}) = 9,5\%$$

MIMO-Kanäle: Singulärwertzerlegung und Kapazitätsberechnung

Übertragung wird beschrieben durch eine Kanalmatrix

$$H(t, \tau) = \begin{pmatrix} h_{11}(t, \tau) & \dots & h_{1M_T}(t, \tau) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{M_R 1}(t, \tau) & \dots & h_{M_R M_T}(t, \tau) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

Sendeantennenindex

Empfangsantennenindex

Dimension: $M_R \times M_T$

M_R : # Empfangsantennen } Vereinfachung: $M_R = M_T = M$
 M_T : # Sendantennen

Ist der Kanal zeitinvariant und Frequenzflach, so vereinfacht sich die Kanalmatrix zu:

$$H(t, \tau) = H_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MM} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}, \dim M \times M$$

mit $a_{ij} := h_{ij} = h_{ij}(t, \tau)$ konstant für $1 \leq i, j \leq M$

An jeder Empfangsantenne i ($i=1, \dots, M$) erhält man zum Signal von Sendantennen $i=j$ zusätzliche Signalanteile der Sendantennen $j \neq i$. Diese überlagern sich und erschweren das Herausfiltern der gewünschten Signalanteile.

Eine Methode zur Separierung der Übertragungskanäle in M unabhängige Kanäle ist die Singulärwertzerlegung.

$H = U \cdot \Sigma \cdot V^{*T}$ wobei H : komplexe Matrix

U, V^{*T} : unitäre (komplexe) Matrizen

Σ : reelle Dreiecksmatrix

unitär
 $\Rightarrow U \cdot U^{*T} = V \cdot V^{*T} = I$ (Einheitsmatrix)

$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i > 0$ sind Singulärwerte der Matrix H

aus der Vorlesung: Kapazität des MIMO-Kanals ergibt sich zu:

$$C_{\text{MIMO}} = \sum_{i=1}^n B \cdot \log \left(1 + \frac{\lambda_i^2 \cdot S}{\mu \cdot N_0} \right)$$

Beispiel Kapazitätsberechnung: $\mu = \mu_R = \mu_T = 2$

Singulärwerte seien: $\lambda_1 = \sqrt{0,531}$, $\lambda_2 = \sqrt{0,049}$

Kapazität: $C_{\text{MIMO}} = B \cdot \log \left(1 + \frac{0,531}{2} \cdot \frac{S}{N_0} \right) + B \cdot \log \left(1 + \frac{0,049}{2} \cdot \frac{S}{N_0} \right)$

Spezialfall: keine Dämpfung bei Übertragung

d.h. $\lambda_i = 1$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow C_{\text{MIMO}_S} = 2 \cdot B \cdot \log \left(1 + \frac{S}{2N_0} \right)$

Zusätzliche Maßnahmen im Empfänger:

$$C_{\text{MIMO-max}} = 2 \cdot B \cdot \log \left(1 + \frac{S}{N_0} \right)$$

Idee zur Singulärwertzerlegung

$H = U \cdot \Sigma \cdot V^{*T}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ λ_i Singulärwerte von H

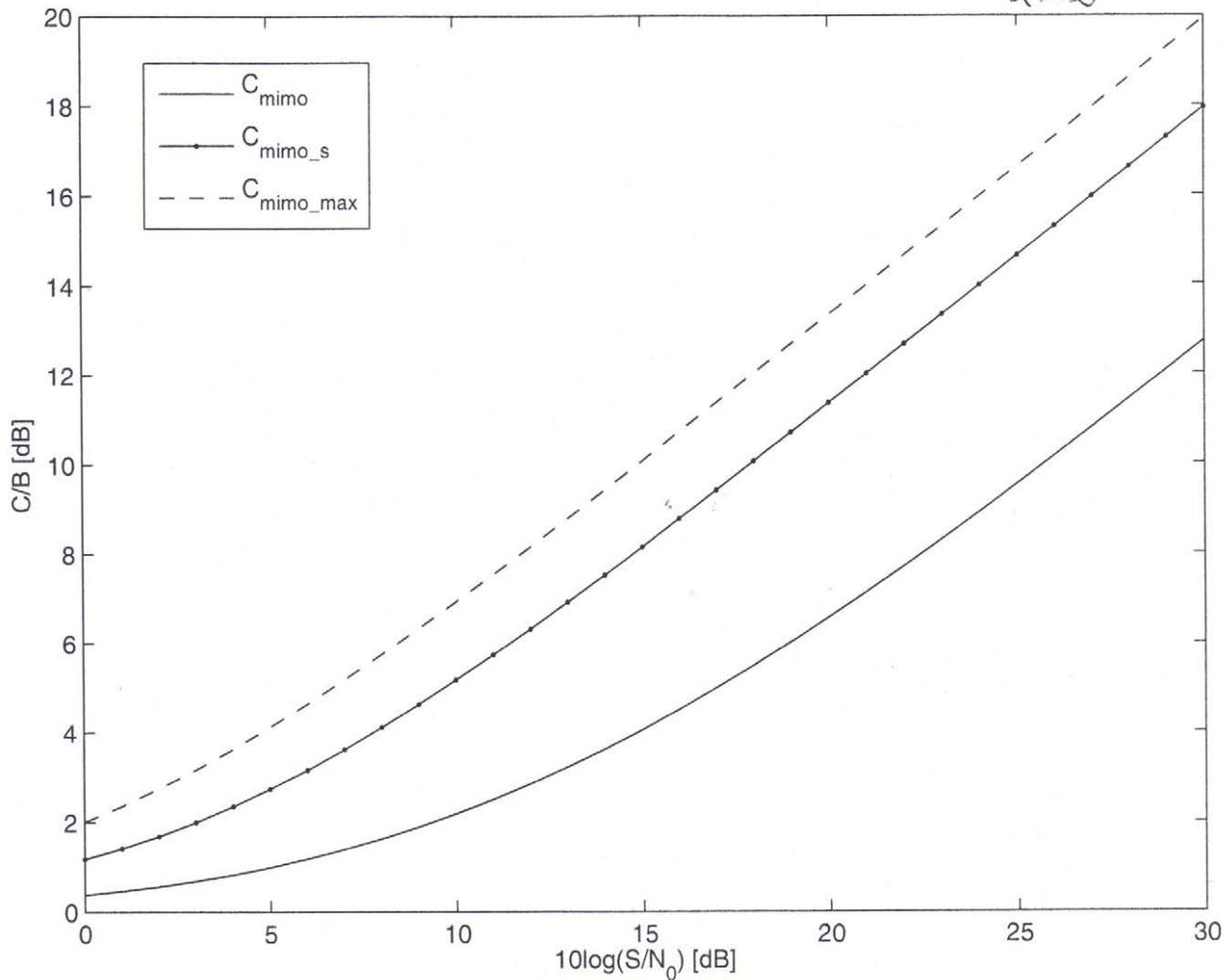
Es gilt: $H^{*T} H = (U \cdot \Sigma \cdot V^{*T})^{*T} \cdot (U \cdot \Sigma \cdot V^{*T})$
 $= V \cdot \Sigma^{*T} \cdot \underbrace{U^{*T} \cdot U}_{=I} \cdot \Sigma \cdot V^{*T}$
 $= V \cdot \Sigma^{*T} \cdot \Sigma \cdot V^{*T}$

$\Rightarrow H^{*T} H$ ist ähnlich zu $\Sigma^{*T} \Sigma$

\Rightarrow Die Wurzel der Eigenwerte σ_i^2 von $H^{*T} H$ sind genau die Singulärwerte λ_i von H

Blatt-1!

2x2



Vorgehensweise

1. Berechnung von $H^{*T}H$
2. Berechnung der Eigenwerte von $H^{*T}H$
3. Berechnung der Singulärwerte $\lambda_i = \sqrt{\sigma_i}$
4. Bestimmung Σ wird aus den Singulärwerten zusammengesetzt
5. Zusammensetzung der Matrix V aus den normierten Eigenvektoren σ_i von $H^{*T}H$
6. Bestimmung der Matrix U mit Hilfe von $H \cdot V = U \cdot \Sigma$

Aufgabe 12

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = U \cdot \Sigma \cdot V^{*T}$$

1. $H^{*T}H$

$$H^{*T} \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Eigenwerte $\det(H^{*T}H - dI) = 0$

$$\begin{aligned} \det(H^{*T}H - dI) &= (5-d)(5-d) - 0 \\ &= d^2 - 10d + 25 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = 5 \end{aligned}$$

3. Singulärwerte $\lambda = \sqrt{\sigma}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{5}$$

4. Σ

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

5. Eigenvektor $(H^{*T}H - dI) \cdot v = 0$

$$\left(\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) v = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allgemein: hier $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= 0 \\ cx_1 + dx_2 &= 0 \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. U

$$HV = U\Sigma$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$| \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

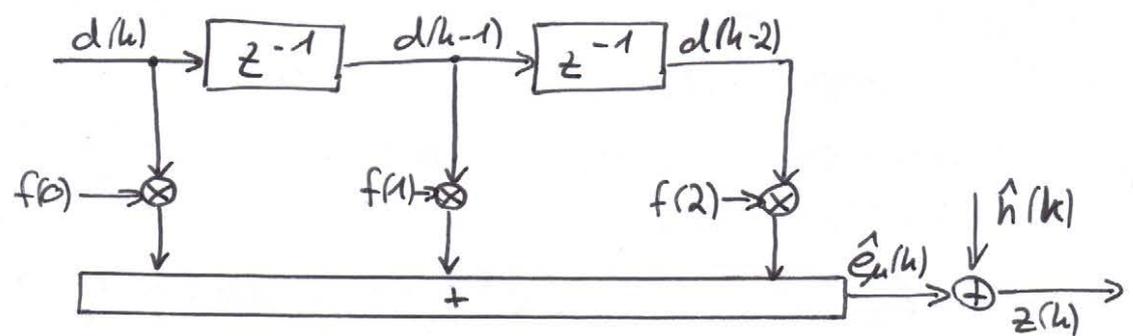
$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$\Rightarrow H = U \cdot \Sigma \cdot V^{*T} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{*T}$$

Klausur: keine Kofferklausur! Nur Stift, Taschenrechner usw. aber keine Unterlagen!

• sowohl Rechenaufgaben (wie Übung), als auch Wissensabfrage (wichtige Blockschaltbilder?)

Ersatzschaltbild für $L=2$ ($L \hat{=}$ Dispersionslänge des Kanals)



Optimierungskriterium: MLSE bzw. minimale euklidische Distanz

$$E_{\mu}(k) = \|z - \hat{e}_{\mu}\|^2 = \sum_{i=0}^k |z(i) - \hat{e}_{\mu}(i)|^2 = \sum_{i=0}^k |z(i) - \sum_{j=0}^L d_{\mu}(i-j) \cdot f(i-j)|^2$$

Koeffizienten der Ersatzimpulsantwort bestehend aus Sendefilter/Kanal/Matched Filter/Weißmacher

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^k |z(i) - d_{\mu}(i) * f(i)|^2 \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} |z(i) - d_{\mu}(i) * f(i)|^2 + |z(i) - d_{\mu}(i) * f(i)|^2_{i=k} \\ &= E_{\mu}(k-1) + |z(i) - d_{\mu}(k) * f(k)|^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Kanalzustand zum Zeitpunkt k wird durch den Inhalt des Speichers festgelegt.

$$S(k) = \{d(k-1), d(k-2)\}$$

$$\rightarrow S_0 = \{0, 0\}; S_1 = \{0, 1\}; S_2 = \{1, 0\}; S_3 = \{1, 1\}$$

d.h. $\hat{e}(k)$ berechnet sich in Abhängigkeit vom Zustand des Kanals $S(k)$ und vom Eingang $d(k)$ wie folgt (für $L=2$):

$$S_0 = d(k) = 0 \rightarrow \hat{e}_{00} = 0$$

Zustand des Kanals

Eingang $d(k)$

$$d(k) = 1 \rightarrow \hat{e}_{01} = f(0)$$

$$S_1: d(h)=0 \rightarrow \hat{e}_{10} = f(2)$$

$$d(h)=1 \rightarrow \hat{e}_{11} = f(0) + f(2)$$

$$S_2: d(h)=0 \rightarrow \hat{e}_{20} = f(1)$$

$$d(h)=1 \rightarrow \hat{e}_{21} = f(0) + f(1)$$

$$S_3: d(h)=0 \rightarrow \hat{e}_{30} = f(1) + f(2)$$

$$d(h)=1 \rightarrow \hat{e}_{31} = f(0) + f(1) + f(2)$$

Hiermit lassen sich acht euklidische Distanzen zum Empfangswert $z(h)$ bestimmen ($\hat{=}$ Pfadkosten einer Summenpfadkostenfunktion)

$$J_{Sd}(h) = |z(h) - \hat{e}_{Sd}(h)|^2, \text{ mit } S \in \{0, 1, 2, 3\}, d \in \{0, 1\}$$

Die rekursive Berechnungsvorschrift für die Summenpfadkosten lautet (vgl. (1)):

$$E_S(h) = \min_d \{ E_S(h-1) + J_{Sd}(h) \}$$

Im eingeschwungenen Zustand überlebt nur der Pfad mit den geringsten Kosten

Beispiel:

Die Kanalimpulsantwort lautet $f(h) = \{0,5; 1; 0,5\}$, der gestörte Empfangswert zum Zeitpunkt k beträgt $z(h) = 1,6$ und die „Kosten“ belaufen sich auf $E_0(h-1) = 1,3$; $E_1(h-1) = 0,9$; $E_2(h-1) = 0,2$ sowie $E_3(h-1) = 0,8$.

Die aus der Impulsantwort resultierenden Datenniveaus sind:

$$S_0: \hat{e}_{00}(h) = 0$$

$$\hat{e}_{01}(h) = 0,5$$

$$S_1: \hat{e}_{10}(h) = 0,5$$

$$\hat{e}_{11}(h) = 1$$

$$S_2: \hat{e}_{20}(h) = 1$$

$$\hat{e}_{21}(h) = 1,5$$

$$S_3: \hat{e}_{30}(h) = 1,5$$

$$\hat{e}_{31}(h) = 2$$

\Rightarrow Pfadkosten $J_{Sd}(h)$ sind dann:

$$J_{00}(h) = |z(h) - \hat{e}_{00}(h)|^2 = |1,6 - 0|^2 = 2,56$$

$$J_{01}(h) = 1,21$$

$$J_{10}(h) = 1,21$$

$$J_{11}(h) = 0,36$$

$$J_{20}(h) = 0,36$$

$$J_{21}(h) = 0,01$$

$$J_{30}(h) = 0,01$$

$$J_{31}(h) = 0,16$$

MSK ⇒ Die aktuellen Summenpfadkosten lauten dann:

$$\begin{array}{l}
 E_0(k-1) + S_{00}(k) = 3,86 \xrightarrow{\text{neuer Zustand}} S_0 \\
 E_0(k-1) + S_{01}(k) = 2,51 \longrightarrow S_2 \\
 E_1(k-1) + S_{10}(k) = 2,11 \longrightarrow S_0 \\
 E_1(k-1) + S_{11}(k) = 1,26 \longrightarrow S_2 \\
 E_2(k-1) + S_{20}(k) = 0,56 \longrightarrow S_1 \\
 E_2(k-1) + S_{21}(k) = 0,21 \longrightarrow S_3 \\
 E_3(k-1) + S_{30}(k) = 0,81 \longrightarrow S_1 \\
 E_3(k-1) + S_{31}(k) = 0,96 \longrightarrow S_3
 \end{array}$$

) jeweils vergleichen

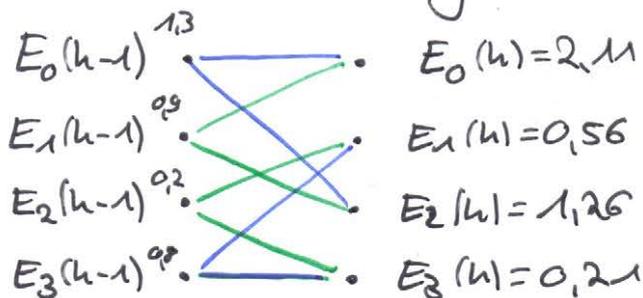
$$E_0(k) = \min \{ 3,86; 2,11 \} = 2,11$$

$$E_1(k) = \min \{ 0,56; 0,81 \} = 0,56$$

$$E_2(k) = \min \{ 2,51; 1,26 \} = 1,26$$

$$E_3(k) = \min \{ 0,21; 0,96 \} = 0,21$$

Zur Veranschaulichung:



- überlebende Pferde

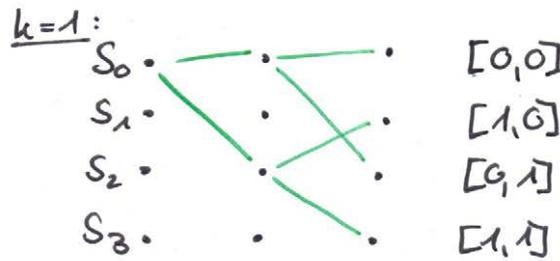
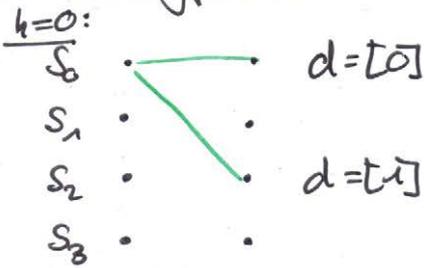
- nicht überlebende Pferde

Im eingeschwungenen Zustand wird nur der Pfad mit den geringsten Kosten (grüne Linien) weiterverwendet. In der Einschwing- bzw. Ausschwingphase werden alle Pferde berücksichtigt, die die definierten Start- bzw. Endzustände erreichen.

Die Beispielsituation beschreibe den Zeitpunkt $k=2$, die Einschwingphase benötige die Zeitalter $k=0$ und $k=1$, die Ausschwingphase die Talter $k=3$ und $k=4$, Start- bzw. Endzustand sei $S_0(0)$ bzw. $S_0(4)$

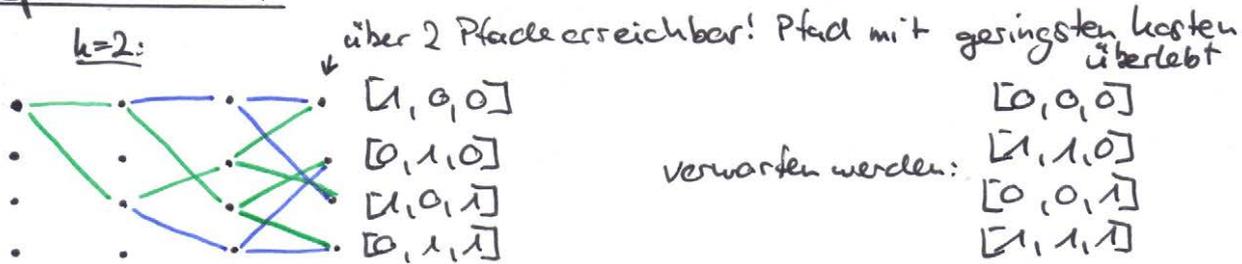
Damit ergibt sich eine Datenfolge $d(k)$:

Einschwingphase

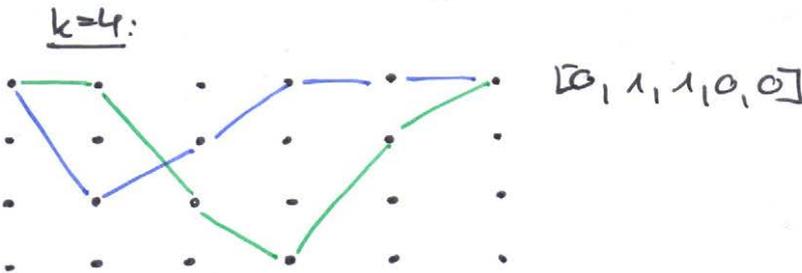
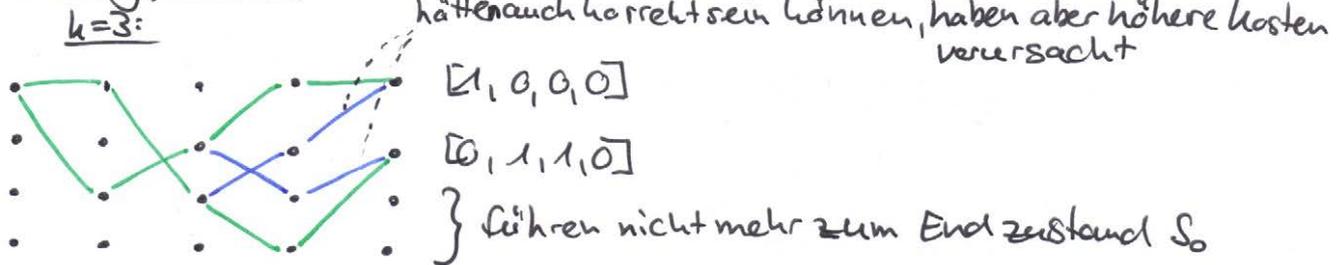


nach zwei Zeittakten sind alle Zustände erreichbar

Beispielsituation:



Ausschwingphase:



⇒ die Datenfolge mit den geringsten Kosten lautet $(0,1,1,0,0)$

Zur Klausur: ~ 50% wie Übungsaufgaben, ~ 50% Wissensabfrage

18.7 10-11 Uhr Sprechstunde im Institut

23.7 9 Uhr Klausur im Eph

2.8 14-16 Uhr Einsicht im Raum 46