Lösungsansätze für DGLs

Es wird stets davon ausgegangen, dass y, v von x abhängen. Alle durch Kleinbuchstaben repräsentierten Variablen hängen ebenfalls von x ab. Großbuchstaben sind Konstanten.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Homogen

Die homogene DGL

$$y' + ay = 0$$

wird nach dem Exponentialansatz gelöst von

$$y = C \cdot e^{\left(-\int a\,\mathrm{d}x\right)};\ \text{C} \in \text{R oder bei Anfangswertproblemen durch } y = y_0 \cdot e^{\left(-\int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}x\right)}$$

Inhomogen

Die inhomogene DGL

$$y' + ay = f(x)$$

wird nach dem Exponentialansatz mit Variation der Konstanten gelöst von

$$y = e^{\left(-\int a\,\mathrm{d}x\right)} \int e^{\int a\,\mathrm{d}k} f x \,\mathrm{d}x$$

oder als Anfangswertproblem durch

$$y = e^{\left(-\int_{x_0}^{x} a(\mu)\,\mathrm{d}\mu\right)} \left(\int\limits_{x_0}^{x} e^{\int_{k_0}^{k} a\,\mathrm{d}k} f(\mu)\,\mathrm{d}\mu + u_0 \right)$$

Bei den AWP kommt die unbekannte Konstante beim Integrieren dazu.

Separabel

Separable DGLs können auf die Gestalt

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

gebracht werden und lassen sich durch Umformen der Gleichung

$$\int g(\eta)\,\mathrm{d}\eta\Big|_y = \int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ bzw. bei AWP } \int_{y_0}^{y} g(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

nach y lösen. Dabei muss geprüft werden, ob mit dem Anfangswert anschließend g(y) ungleich 0 gilt.

Bernoulli-DGL

DGLs der Form

$$y' + ay = by^{\alpha}$$

heißen Bernoulli-DGL und lassen sich nach dem Ansatz

$$y = v^{\beta} \text{mit } v \text{ als Lösung von } v' + \frac{a}{\beta} v = \frac{b}{\beta} \text{ und } \beta = \frac{1}{1-\alpha}$$

lösen. Bei einem AWP wird $v_0 = y_0^{\beta}$ als Anfangswert für den Lösungsansatz benutzt.

Riccati-DGL

(nicht lineare) Differentialgleichungen der Form

$$y' + ay = b + cy^2$$

lassen sich auf ein lineares Problem runterbrechen, wenn eine partikuläre Lösung $\phi(x)$ bekannt ist. Dann löst man die DGL

$$v' + (2c\phi - a)v = -c$$

und bildet anschließend zur Lösung der ursprünglichen DGL noch

$$y = \phi + \frac{1}{v}$$

Dies geht aber nur, wenn eine partikuläre Lösung bekannt ist. Man kann $\phi(x)$ aber auch durch Probieren finden. Die triviale Lösung $v(x) = 0$ ist desweiteren offensichtlich nicht zulässig.

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

werden i.A. auf DGL-Systeme erster Ordnung transformiert und über die Matrix-Exponentialfunktion gelöst. Dies wird, wenn nicht verlangt, auch nicht mehr explizit ausgeschrieben. Man beschränkt sich auf das Wesentliche und löst die zeitfressenden Aufgaben mittels „Koeffizientenvergleich“.

Die Koeffizienten a,b hängen i.A. nicht von x ab!

Homogen

Eine DGL der Form

$$y'' + \mathrm{a}y' + by = 0$$

wird gelöst, indem man das charakteristische Polynom der Matrix, die bei der Transformation in ein DGL-System erster Ord. entstehen würde, direkt aus der DGL abliest:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

Mit der PQ-Formel löst man $P(\lambda) = 0$ und erhält damit die Eigenwerte der Matrix. Jetzt kann man sofort (und ohne Berechnung der Eigenvektoren) ein Fundamentalsystem der DGL angeben:

1. Fall: Die Eigenwerte sind reell und verschieden.
2. Fall: Die Eigenwerte sind komplex konjugiert.
3. Fall: Das Polynom hat eine doppelte Nullstelle.

Im ersten Fall ist $\varphi_1 = e^{\lambda_1 x}, \varphi_2 = e^{\lambda_2 x}$ ein FS,

im zweiten Fall ist es $\varphi_1 = e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)x}, \varphi_2 = e^{Im(\lambda_1)x}$, bei einer doppelten Nullstelle ist $\varphi_1 = e^{\lambda_1 x}, \varphi_2 = \mathrm{x}e^{\lambda_1 x}$ ein FS.

Die homogene Lösung wird dann gegeben durch $y = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2;\ C \in R$

Analog kann man für DGLs höherer Ordnung verfahren. Dann besteht das FS aus mehr Gleichungen, die an die homogene Lösung dranaddiert werden.

Inhomogen

Bei einer inhomogenen DGL höherer Ordnung, z.B.

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

findet man zunächst wie oben beschrieben die homogene Lösung, also die Lösung zu

$$y_h'' + ay_h' + by_h = 0$$

Anschließend bestimmt man eine partikuläre Lösung der inhomogene DGL. Dazu kann man entweder raten oder einen **Ansatz vom Typ der rechten Seite** machen.

Dazu wählt man beispielsweise

$$y_p = Ax^5 + Bx^4 + \cdots + F$$

wenn f(x) ein Polynom 5. Grades ist oder

$$y_p = A\sin(x) + B\cos(x)$$

wenn f(x) eine Sinusschwingung ist oder

$$y_p = e^{Gx}[Ax^5 + Bx^4 + \cdots + F]$$

wenn f(x) eine Verkettung aus einer e-Funktion und einem Polynom 5. Grade ist und so weiter.

Anschließend errechnet man die Ableitungen von y_p und setzt sie in die inhomogene DGL ein. Jetzt kann man die Koeffizienten A bis G durch Koeffizientenvergleich bestimmen und hat eine partikuläre Lösung gefunden.

Ein anderer Ansatz für eine partikuläre Lösung ist möglich, nachdem man die homogene Lösung schon berechnet hat. Man berechnet

$$W(x) = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x)$$

mit φ_1, φ_2 als Fundamentalsystem der homogenen Lösung. Wenn $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in Def(y)$ gilt, kann man weiterrechnen und

$$y_p = \varphi_1 \int_1 \frac{-f\varphi_2}{w}\mathrm{dx} + \varphi_2 \int_1 \frac{-f\varphi_1}{w}\mathrm{dx}$$

ist eine partikuläre Lösung.

Die allgemeine Lösung der DGL ist dann

$$y = y_h + y_p$$