

DSV 1: G'Sang 2

26.10.2011

Aufgabe 1.3

$$f_0 = 80 \text{ Hz}$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 12,5 \text{ ms}$$

Aufg. 1.4

- a) Π Sprache, da viele Signalanteile an den O-Punkt scheitern (Laplace Stoch. Übergang)
- b) Π , da Π -Anteile bei Sprache hohe Korrelation aufweisen

DSV 1: Übung 3

02.11.201

Thema 2.1

$$p(x, t) = [P_1 \cdot e^{-j\omega \frac{x}{c}} + P_2 \cdot e^{+j\omega \frac{x}{c}}] e^{+j\omega t} \cdot Z$$

$$u(x, t) = [P_1 \cdot e^{-j\omega \frac{x}{c}} - P_2 \cdot e^{+j\omega \frac{x}{c}}] e^{+j\omega t}$$

$$Z_{in} = \frac{p(0, t)}{u(0, t)} = \frac{P_1 + P_2}{P_1 - P_2} \cdot Z$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{Z_{in} + Z}{Z_{in} - Z} \cdot P_2} \quad (1)$$

Verwendung der Randbedingung

$$Z_L = \frac{p(l, t)}{u(l, t)} = \frac{P_1 \cdot e^{-j\omega T} + P_2 \cdot e^{+j\omega T}}{P_1 e^{+j\omega T} - P_2 \cdot e^{+j\omega T}} \cdot Z$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 \cdot e^{-j\omega T} = \frac{Z_L + Z}{Z_L - Z} \cdot P_2 \cdot e^{+j\omega T}} \quad (2)$$

Einsetzen von (1) in (2) liefert:

$$\frac{Z_{in} + Z}{Z_{in} - Z} \cdot \cancel{P_2} = \frac{Z_L + Z}{Z_L - Z} \cdot \cancel{P_2} \cdot e^{+j2\omega T}$$

⋮

$$Z_{in} = Z \cdot \frac{Z_L (e^{-j\omega T} + e^{+j\omega T}) + Z (e^{+j\omega T} - e^{-j\omega T})}{Z (e^{-j\omega T} + e^{+j\omega T}) + Z_L (e^{+j\omega T} - e^{-j\omega T})}$$

$$\boxed{= Z \cdot \frac{Z_L \cdot \cos(\omega T) + jZ \cdot \sin(\omega T)}{Z \cdot \cos(\omega T) + jZ_L \sin(\omega T)}}$$

Spezialfälle:

02.11.2017

1) Röhre offen ($Z_L = 0$).

$$\boxed{Z_m = Z_0 \tan(\omega T)}$$

2) Röhre geschlossen ($Z_L = \infty$)

$$\boxed{Z_m = -j Z_0 \cot(\omega T)}$$

Aufg. 2.2

$$Y_a + Y_u + Y_L = 0 \quad (\text{verlustfreies System})$$

a) Schalter geschlossen

$$Z_a = \infty \quad \text{Röhre geschlossen} \rightarrow Y_a = j \frac{\tan(\omega T_a)}{Z_0}$$

$$Z_L = 0 \quad \text{Röhre geöfnet} \rightarrow Y_L = -j \frac{\cot(\omega T_L)}{Z_0}$$

$$\text{These: } Y_a + Y_L = 0$$

$$\Rightarrow j \frac{\tan(\omega T_a)}{Z_0} - j \frac{\cot(\omega T_L)}{Z_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan(\omega T_a) - \cot(\omega T_L) = 0$$

$$\text{mit } \omega = 2\pi f \text{ und } T_{\text{Lig}} = \frac{l}{c} = \frac{8,5 \text{ m}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{1}{4000} \text{ s}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{2\pi f}{4000} \text{ s}\right) - \cot\left(\frac{2\pi f}{4000} \text{ s}\right) = 0$$

aus FBS: l dy

$$f_1 = 500 \text{ Hz} \quad f_2 = 1500 \text{ Hz} \quad f_3 = 2500 \text{ Hz}$$

b)

Schaltk off.

$$Z_n = 0 \rightarrow \text{Röhre o/h} \rightarrow Y_n = -j \frac{\cot \omega T_n}{\ell}$$

$$\text{Ansatz: } Y_a + Y_n + Y_e = 0$$

$$\tan \omega T_a - \cot \omega T_n - \cot \omega T_e = 0$$

aus Abbildung:

$$f_1 = 540 \text{ Hz}, f_2 = 1180 \text{ Hz}, f_3 = 1640 \text{ Hz}$$

Aufg. 2.3

a) (a) $\hat{=} |a|$

(b) $\hat{=} |i|$

(c) $\hat{=} \text{Prüfung}$

$$b) \frac{P_1}{P_2} = \tan^2(\omega T) \Rightarrow \left| i = \frac{c}{2\ell} \arctan \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \right|$$

$$c) \frac{P_1}{P_2} = 1 - \tan^2(\omega T) \Rightarrow \left| i = \frac{2c-1}{4} \cdot \frac{c}{2\ell} \right|$$

d)

i	1	2	3	4
i_{He}	500	1500	2500	3500

DSV1 - 6. Jan 4

29.11.2011

Aufg. 2.6

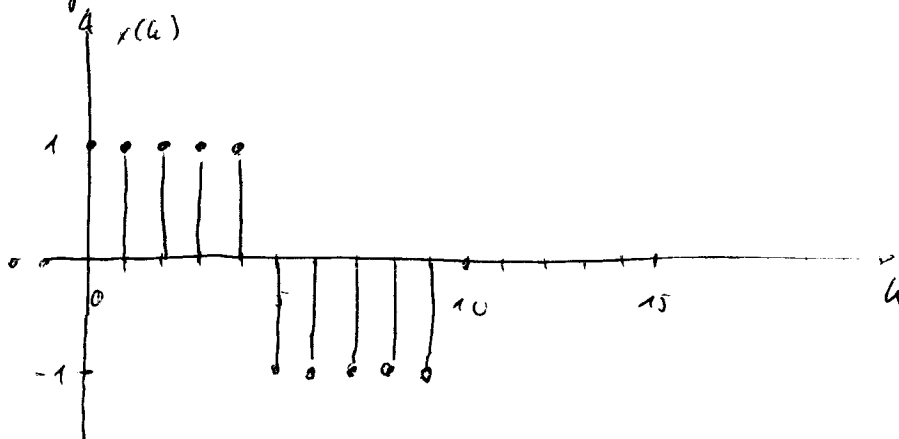
c) 8, 5

d) 18 dB

c) Frequenzgruppe $\Theta = 2$ verdeckt $\Theta = 3$
Frequenzgruppe $\Theta = 4$ verdeckt $\Theta = 5$

Aufg. 3.2

Bsp. $r = 4$



a) Theoret. Sprungfunktion $u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$x(k) = u(k) - 2u(k-r-1) + u(k-2r-2)$$

mit

$$u(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$
$$\mathcal{Z}\{u(k-n)\} = z^{-n} U(z)$$

(verschiebungssatz)

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - z \cdot z^{-(r+1)} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-(2r+2)} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \quad 09.11.2011$$

$$= \frac{1 - z \cdot z^{-(r+1)} + z^{-(2r+2)}}{1-z^{-1}} \cdot \frac{z}{z}$$

$$= \frac{z - z \cdot z^{-r} + z^{-(2r+1)}}{z-1}$$

$$= \frac{z^{-(2r+1)} [z^{2r+2} - z \cdot z^{r+1} + 1]}{z-1}$$

$$= \frac{(z^{r+1} - 1)^2}{z^{2r+1} \cdot (z-1)}$$

5) Nullstellen $\leftarrow$ z -fache Nullstelle

$$(z^{r+1} - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow z^{r+1} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow z = \sqrt[r+1]{1} = 1^{\frac{1}{r+1}} = e^{j \frac{2\pi \cdot i}{r+1}}$$

Lösung sind die $(r+1)$ -fache Wurzeln der Zahl 1

$$\Rightarrow z_{0,i} = e^{j \frac{2\pi i}{r+1}} \quad i=0,1,\dots,r$$

Polstellen

$$(z-1) \cdot z^{2r+1} = 0$$

$$1\text{-fache Polstelle } z_{\infty,1} = 1$$

$$(2r+1)\text{-fache Polstelle } z_{\infty,\mu} = 0$$

Aufg. 3.3

$$\sinh(\ell_0 h) = \frac{1}{2j} (e^{j\ell_0 h} - e^{-j\ell_0 h})$$



$$\frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\ell_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\ell_0}} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{z(z - e^{-j\ell_0}) - z(z - e^{j\ell_0})}{z^2 - z(e^{j\ell_0} + e^{-j\ell_0}) + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{z(e^{j\ell_0} - e^{-j\ell_0})}{z^2 - 2z \cdot \cos(\ell_0) + 1}$$

$$= \frac{z \cdot \sinh(\ell_0)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\ell_0) + 1}$$

Aufg. 3.7

$$X_\mu = \sum_{k=0}^{N-1} (x_1(k) + j x_2(k)) e^{-j \frac{2\pi}{N} k \mu}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (x_1(k) + j x_2(k)) \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{x_1(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{\text{gerade Teil}} + \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{x_2(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{\text{ungerade m } \mu}$$

$$+ j \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{x_2(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{\text{gerade in } \mu} + j \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{-x_1(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{\text{ungerade m } \mu}$$

Es ist

$$X_{\mu} = \underbrace{\sum x_1(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{X_{rg}} + j \underbrace{\sum -x_1(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{X_{ia}}$$

$$\boxed{X_{\mu} = X_{rg\mu} + j X_{ia\mu}} \quad (1)$$

bzw.

$$j X_{2\mu} = j \underbrace{\sum x_2(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{X_{ig}} + \underbrace{\sum x_2(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{X_{ra}}$$

$$\boxed{j X_{2\mu} = X_{ra\mu} + j X_{ig\mu}} \quad (2)$$

→ simultane Berechnung der DFTs von 2 reellen Folgen
in einer einzigen komplexen DFT (FFT) und Aufspaltung
der Transformierten X_{μ} in geraden und ungeraden Teil
bzw. Real- und Imaginärteil gemäß Gleichungen
(1) und (2)

⇒ Aufwandsschneidung ca. 50%

$$a) X_\mu = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} k \mu}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cos\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{\text{gerade}} - \underbrace{x(k) \cdot j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} k \mu\right)}_{\text{ungerade}}$$

$$b) X_\mu^{(N)} = \sum_{k=0}^{N-1} x_N(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} k \mu}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} k \mu}$$

Hinweis
 $g = e^{-j \frac{2\pi}{N} \mu}$

$$= \left| \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot N \mu}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} \mu}} \right|$$

DSV: Übung 5

23.11.2011

Aufg. 3.11

a) M komplexe Mult. für x_μ
 $M \leq \dots$ für alle x_μ

b) (i) $x(h) = 0$ für $h \leq 0$
 $\Rightarrow x(2h) = f(h) = 0$ für $h \leq 0$
 $\Rightarrow x(2h+1) = g(h) = 0$ für $h \leq 0$

$$x(M) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{M}{2}\right) = 0$$

$$x(M+1) = 0 \Rightarrow g\left(\frac{M}{2}\right) = 0$$

$$(ii) \quad x_\mu = \sum_{h=0}^{M-1} x(h) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu h}$$

1) Zerlegung von $x(h)$ in $x(2h)$ und $x(2h+1)$

$$x_\mu = \sum_{h=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2h) e^{-j \frac{2\pi}{M} \cdot 2h \cdot \mu} + \sum_{h=0}^{\frac{M}{2}-1} x(2h+1) e^{-j \frac{2\pi}{M} (2h+1) \mu}$$

2) Mit $f(h) = x(2h)$ und $g(h) = x(2h+1)$

sowie Ausklammern in $e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu}$

$$x_\mu = \underbrace{\sum_{h=0}^{\frac{M}{2}-1} f(h) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} \cdot \mu \cdot h}}_{\tilde{F}_\mu} + e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu} \cdot \underbrace{\sum_{h=0}^{\frac{M}{2}-1} g(h) e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu \cdot h}}_{\tilde{G}_\mu}$$

$$= \text{DFT}\{f(h)\}_{\frac{M}{2}} + e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu} \text{DFT}\{g(h)\}_{\frac{M}{2}}$$

$$(iii) \hat{F}_{\mu + \frac{M}{2}} = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} f(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} k (\mu + \frac{M}{2})}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} f(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} k \mu} \cdot e^{-j 2\pi k} = 1$$

$$= F_{\mu} \quad \text{analog für } G_{\mu}$$

(iv) Berechnung von einem Wert $F_{\mu} \approx \frac{M}{2}$ komplexe Multiplikationen

$$\text{---} \quad \quad \quad G_{\mu} \approx \frac{M}{2} \quad \text{---}$$

Auf Grund der Periodizität bzgl. μ werden nicht M , sondern nur $M/2$ Terme für F_{μ} und G_{μ} benötigt. Multiplikation mit Faktor $e^{j \frac{2\pi}{M} k \mu}$ ist M -mal durchzuführen.

$$\Rightarrow M + 2 \left(\frac{M}{2} \right)^2$$

c) $M = M^2$ komplexe Multiplikationen 1 DFT M

Reisparaly $\sim$ 2 DFTs der Länge $\frac{M}{2}$ $M + 2 \cdot \left(\frac{M}{2} \right)^2$ 2 DFTs $\frac{M}{2}$

$$\frac{M}{4} \cdot M + 2 \left[\frac{M}{4} + 2 \cdot \left(\frac{M}{8} \right)^2 \right] \quad \text{4 DFTs } \frac{M}{4}$$

$$\frac{M}{8} \cdot M + 2 \left[\frac{M}{8} \right] \dots$$

⋮

$$\frac{M}{32} \cdot \underbrace{M + M + M + M}_{\text{Anzahl der Phasenkorrekturterme}} + 32 \frac{M}{32} \quad \text{32 DFTs } \frac{M}{32}$$

Anzahl der Phasenkorrekturterme

DFT der Länge 1 benötigt keine Multiplikation

$\Rightarrow$ Mult. der letzten (kleinsten) DFT der Länge 1 enthalten

$$\Rightarrow 5 \cdot M = M \cdot \text{let } M$$

$$M = 32$$

M	32	256	1024	4096
DFT (M ²)	1024	65536	1048576	16777216
FFT M del M	160	2048	10240	49152
Einsparung	15,6%	3,1%	0,98%	0,29%

$$\begin{aligned}
 d) \quad X_\mu &= \sum_{h=0}^{M-1} x(h) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} \cdot \mu \cdot h} \\
 &= \sum_{h=0}^{\frac{M}{3}-1} x(3h) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu \cdot 3h} + \sum_{h=0}^{\frac{M}{3}-1} x(3h+1) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu (3h+1)} + \sum_{h=0}^{\frac{M}{3}-1} x(3h+2) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu (3h+2)} \\
 &= \underbrace{\sum_{h=0}^{\frac{M}{3}-1} x_1(h) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M/3} \mu \cdot h}}_{\text{DFT } \{x_1(h)\}_{M/3}} + e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu} \underbrace{\sum_{h=0}^{\frac{M}{3}-1} x_2(h) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M/3} \mu \cdot h}}_{\text{DFT } \{x_2(h)\}_{M/3}} + e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu \cdot 2} \underbrace{\sum_{h=0}^{\frac{M}{3}-1} x_3(h) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M/3} \mu \cdot h}}_{\text{DFT } \{x_3(h)\}_{M/3}}
 \end{aligned}$$

Rechenaufwand:

1. Schritt: 3 DFTs der Länge $\frac{M}{3} + M \cdot 2$

2. Schritt: 9 DFTs der Länge $\frac{M}{9} + M \cdot 2 + M \cdot 2$

⋮

M DFTs der Länge 1 + $2 \cdot M \cdot \log_3 M$

keine Multiplikation

Bsp.: FFT der Länge 27 $\Rightarrow 2 \cdot 27 \cdot 3 = 162$ Multi.

FFT der Länge 32 $\Rightarrow 32 \cdot 5 = 160$ Multipl.

e) Jetzt $M = \prod_{i=1}^R p_i$ mit p_i Primzahlen

e.B. $M = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Idee: Wir spalten DFT auf, wie zuvor, jedoch die unterschiedliche Phasenterme

d.h. aufteilen in 2, dann 3, dann 5

$$\Rightarrow \frac{M}{2} \Rightarrow \frac{M}{2 \cdot 3} \Rightarrow \frac{M}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

1) 1 DFT

$$x(h) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} x_{\mu} \cdot e^{j \frac{2\pi}{M} h \cdot \mu}$$

← ausgetauscht

zusätzl. Faktor

← Vorzeichen

Unterschiede zur DFT
„nicht relevant“ für die
NFFT Berechnung

$$x(h) = \frac{1}{M} \left(\sum_{\mu=0}^{M/2-1} F_{\mu} e^{j \frac{2\pi}{M} h \cdot \mu} + e^{j \frac{2\pi}{M} h} \cdot \sum_{\mu=0}^{M/2-1} G_{\mu} e^{j \frac{2\pi}{M} h \cdot \mu} \right)$$

ÜSV 1: A" Aug 6

30.11.2011

Aufg. 3.14

$$Y(z) = \delta_0 \cdot z^{-1} \cdot X(z) + \delta_1 \cdot X(z) - c_0 \cdot z^{-1} Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\delta_0 \cdot z^{-1} + \delta_1}{c_0 + z^{-1} + 1} = \frac{\delta_0 + \delta_1 \cdot z}{c_0 + z}$$

Polstelle $z_{\infty} = -1 \Rightarrow c_0 = 1$

Nullstelle $\delta_0 + \delta_1 \cdot z_0 = 0 \Rightarrow -\delta_0 / \delta_1 = z_0 = 0$
 $\Rightarrow \delta_0 = 0, \delta_1 \neq 0$

Aufg. 3.15

a) Polstelle

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

$$\Rightarrow z_{00,1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 3 \vee 2$$

$$z_{00,1} = 3 \quad z_{00,2} = 2$$

da $|z_{00,i}| > 1 \Rightarrow$ Syst. ist instabil

b) Forderung: $|H_0(e^{j\omega})| = |H_1(e^{j\omega})|$

Satz: $H_1(z) = c \cdot H_0(z) \cdot \overbrace{H_R(z)}$

Allpass mit $|H_R(e^{j\omega})| = \text{const.} = \frac{1}{c}$

$$H_1(z) = c \cdot \underbrace{\frac{\delta_2 \cdot z^2 + \delta_1 z + \delta_0}{(z-3)(z-2)}}_{H_0(z)} \cdot \underbrace{\frac{(z-3)(z-2)}{(z-1/3)(z-1/2)}}_{H_R(z)}$$

$$H_1(z) = c \cdot \frac{\delta_2 z^2 + \delta_1 z + \delta_0}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

Forderung: $|H_0(e^{j\Omega})| = |H_1(e^{j\Omega})|$

z.B. auch für $\Omega = 0$ bzw. $z = 1$

$$|H_0(1)| = \left| \frac{b_2 + b_1 + b_0}{2} \right|$$

$$|H_1(1)| = \left| c \cdot \frac{b_2 + b_1 + b_0}{1 - \frac{5}{6} + \frac{1}{6}} \right| = \left| c \cdot 6 \cdot \frac{b_2 + b_1 + b_0}{2} \right|$$

$$\Rightarrow c = 1/6 //$$

Prob. 3.16

$$a) \quad Y_1(z) = X(z) \cdot v + X_3(z) \quad (1)$$

$$X_2(z) = (b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}) \cdot X_1(z) \quad (2)$$

$$X_3(z) = (a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}) \cdot X_1(z) \quad (3)$$

$$I_1) \quad Y(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

$$= v \cdot X(z) + \overbrace{(a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}) \cdot X_1(z)}^{(3)} + \overbrace{(b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}) \cdot X_1(z)}^{(2)}$$

$$= v \cdot X(z) + (a_1 \cdot z^{-1} + b_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + b_2 \cdot z^{-2}) \cdot X_1(z) \quad (4)$$

$$II.) \quad Y(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

$$= X_1(z) (1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2})$$

$$\Leftrightarrow X_1(z) = \frac{Y(z)}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}$$

$$\Rightarrow Y(z) = v \cdot X(z) + \frac{a_1 \cdot z^{-1} + b_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}} \cdot Y(z)$$

$$\Leftrightarrow Y(z) \left(\frac{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2}}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}} \right) = v \cdot X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = v \cdot \frac{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2}}$$

$$b) \quad H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = v \cdot \frac{1 + \delta_1 + \delta_2}{1 - a_1 - a_2} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{1 - a_1 - a_2}{1 + \delta_1 + \delta_2} //}$$

c)

$$H(z) = v \cdot \frac{1 + \delta_1 \cdot z^{-1} + \delta_2 \cdot z^{-2}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$$

$$\text{mit } a_1 = \delta_2 = 0; \quad a_2 = 1/4; \quad \delta_1 = 1$$

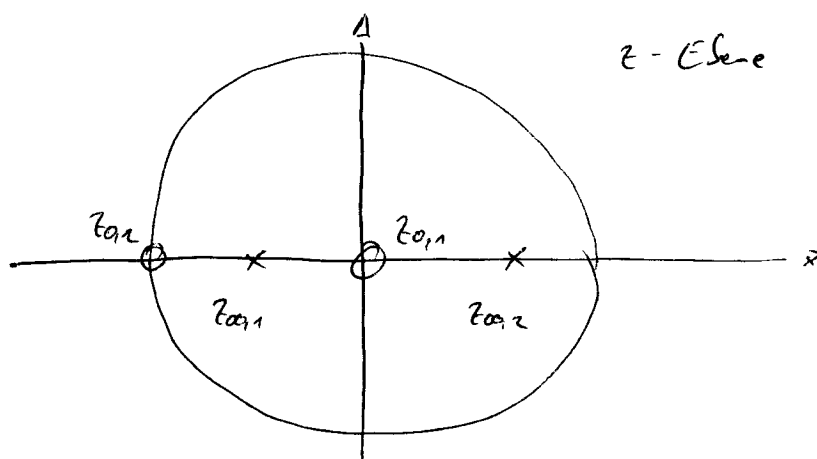
$$= v \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - 1/4 \cdot z^{-2}} = v \cdot \frac{z^2 + z}{z^2 - 1/4} = v \cdot \frac{z(z+1)}{z^2 - 1/4}$$

Polstellen: $z^2 - 1/4 = 0$

$$\Leftrightarrow z_{0,1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

Nulstellen: $z_{0,1} = 0 \quad z_{0,2} = -1$

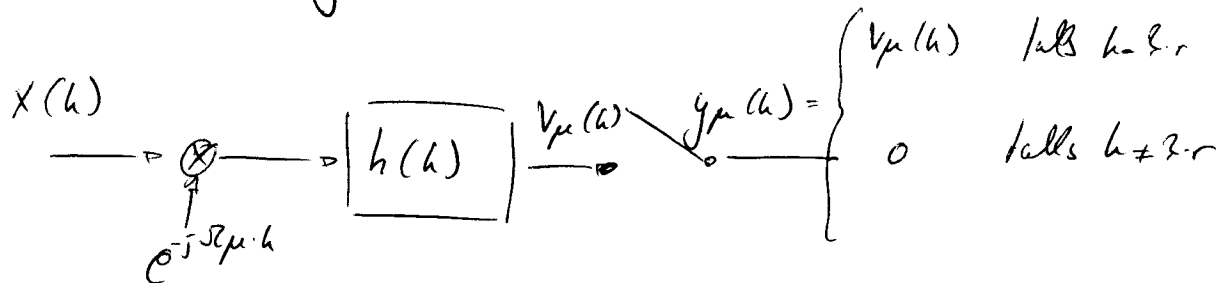
$$\Rightarrow H(z) = v \cdot \frac{z(z+1)}{(z - 1/2)(z + 1/2)}$$



$\Rightarrow$ stabil, da Polstellen innerhalb des EK

Aufg. 4.3

a) Kurzzeit Spektralanalyse durch Modulation und Tiefpassfilterung



$$v_\mu(h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(h-n) \cdot x(n) \cdot e^{-j\Omega_\mu \cdot n}$$

↓

$$v_\mu(\Omega) = X(\Omega + \Omega_\mu) \cdot H(\Omega)$$

vereinfachte Schreibweise $X(\Omega) \hat{=} X(e^{j\Omega})$

$$v_\mu(h) \xrightarrow{\cdot g_\mu(h)} y_\mu(h) = \begin{cases} v_\mu(h) & \text{für } h = 3 \cdot r \\ 0 & \text{für } h \neq 3 \cdot r \end{cases}$$

Schaltfunktion

$$g_\mu(h) = v_\mu(h) \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(h - 3 \cdot r)$$

$$= v_\mu(h) \left(\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{r-1} e^{j\frac{2\pi}{r} \cdot h \cdot n} \right)$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{r-1} v_\mu(h) \cdot e^{j\frac{2\pi}{r} \cdot n \cdot h}$$

↓

$$y_\mu(\Omega) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{r-1} v_\mu(\Omega - \frac{2\pi}{r})$$

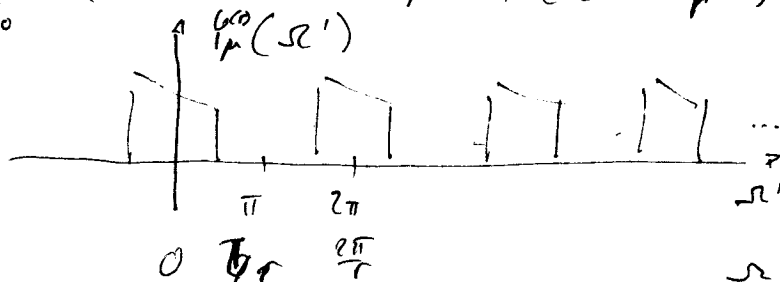
$$= \frac{1}{r} \sum_{h=0}^{r-1} X(\Omega - \frac{2\pi}{r} \cdot h + \Omega_\mu) \cdot H(\Omega - \frac{2\pi}{r} \cdot h)$$

$$y_{\mu}^{(r)}(z) = y_{\mu}(z \cdot r) = v_{\mu}(z \cdot r) \quad \text{da } h = z \cdot r$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(z \cdot r - n) \cdot x(n) \cdot e^{-j\Omega_{\mu} n}$$

6

$$y_{\mu}^{(r)}(\Omega') = \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{r-1} x\left(\Omega' - \frac{2\pi \cdot n}{r} + \Omega_{\mu}\right) \cdot H\left(\Omega' - \frac{2\pi n}{r}\right)$$



$$\Omega' = \Omega \cdot r$$

Begründung für "neue" Frequenz Ω'

$$y_{\mu}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\mu}(k) \cdot e^{-j\Omega k} \quad \text{Subst. } k = z \cdot r$$

$$= \sum_{z=-\infty}^{\infty} y_{\mu}(z \cdot r) \cdot e^{-j\Omega z \cdot r}$$

$$= \sum_{z=-\infty}^{\infty} \underbrace{y_{\mu}(z \cdot r)}_{= y_{\mu}^{(r)}(z)} \cdot e^{-j\Omega z \cdot r} \quad \text{mit } \Omega \cdot r = \Omega'$$

$$= \sum_{z=-\infty}^{+\infty} y_{\mu}^{(r)}(z) \cdot e^{-j\Omega' z} = y_{\mu}^{(r)}(\Omega')$$

d.h. für die Fouriertransformierte von $y_{\mu}^{(r)}(k)$ erhält man das gleiche Ergebnis wie für $y_{\mu}(k)$ nur mit einer anderen Skalierung der Frequenzachse

b) $r=M$, verschobene Zeitpunkte an denen abgetastet wird 07.12.2014
mit $h = 2 \cdot M - 1$

$$y_M^{(M)}(z) = y_M(2 \cdot M - 1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2 \cdot M - 1 - n) \cdot x(n) \cdot e^{-j \Omega_M \cdot n}$$

Länge der Impulsantwort: $L \cdot M$
 $\Rightarrow$ Summationsgrenzen

$$0 \leq 2 \cdot M - 1 - n < L \cdot M$$

Substitution von $2 \cdot M - 1 - n = L \cdot M - 1 - v$
mit $v = L \cdot M - 2 \cdot M + n$

$\Rightarrow$ Summationsgrenzen: $0 \leq L \cdot M - 1 - v < L \cdot M$ mit $v \in \{0, 1, \dots, L \cdot M - 1\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_M^{(M)}(z) &= y_M(2 \cdot M - 1) \\ &= \sum_{v=0}^{L \cdot M - 1} h(L \cdot M - 1 - v) \cdot x(v - L \cdot M + 2 \cdot M) \cdot e^{-j \Omega_M (v - L \cdot M + 2 \cdot M)} \end{aligned}$$

$\underbrace{e^{-j \Omega_M \cdot v}}_{\text{mit } \Omega_M = \frac{2\pi}{M}}$

c) Substitution $v = L \cdot M + k$
 $k = 0, 1, \dots, L-1$
 $\ell = 0, 1, \dots, M-1$

Summation über v wird durch 2 Summationen ersetzt

$$\begin{aligned} y_M^{(M)}(z) &= y_M(2 \cdot M - 1) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{L-1} h((L-\ell) \cdot M - 1 - k) \cdot x((3-L+\ell) \cdot M + k)}_{= \tilde{x}(k)} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} \cdot M \cdot k} \quad \left(\text{da } e^{-j \frac{2\pi}{M} \cdot L \cdot M} = 1 \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{x}(k) e^{-i \frac{2\pi}{M} \mu \cdot k}$$

$$= \text{DFT}_M \{ \tilde{x}(k) \}$$

Interpretation von $\tilde{x}(k)$

$$\tilde{x}(k) = \sum_{l=0}^{L-1} h((L-l) \cdot M - 1 - k) \cdot x((l-L) \cdot M + k)$$

Bsp. $k=0$

$$\tilde{x}(0) = \sum_{l=0}^{L-1} h((L-l) \cdot M - 1) \cdot x((l-L) \cdot M)$$

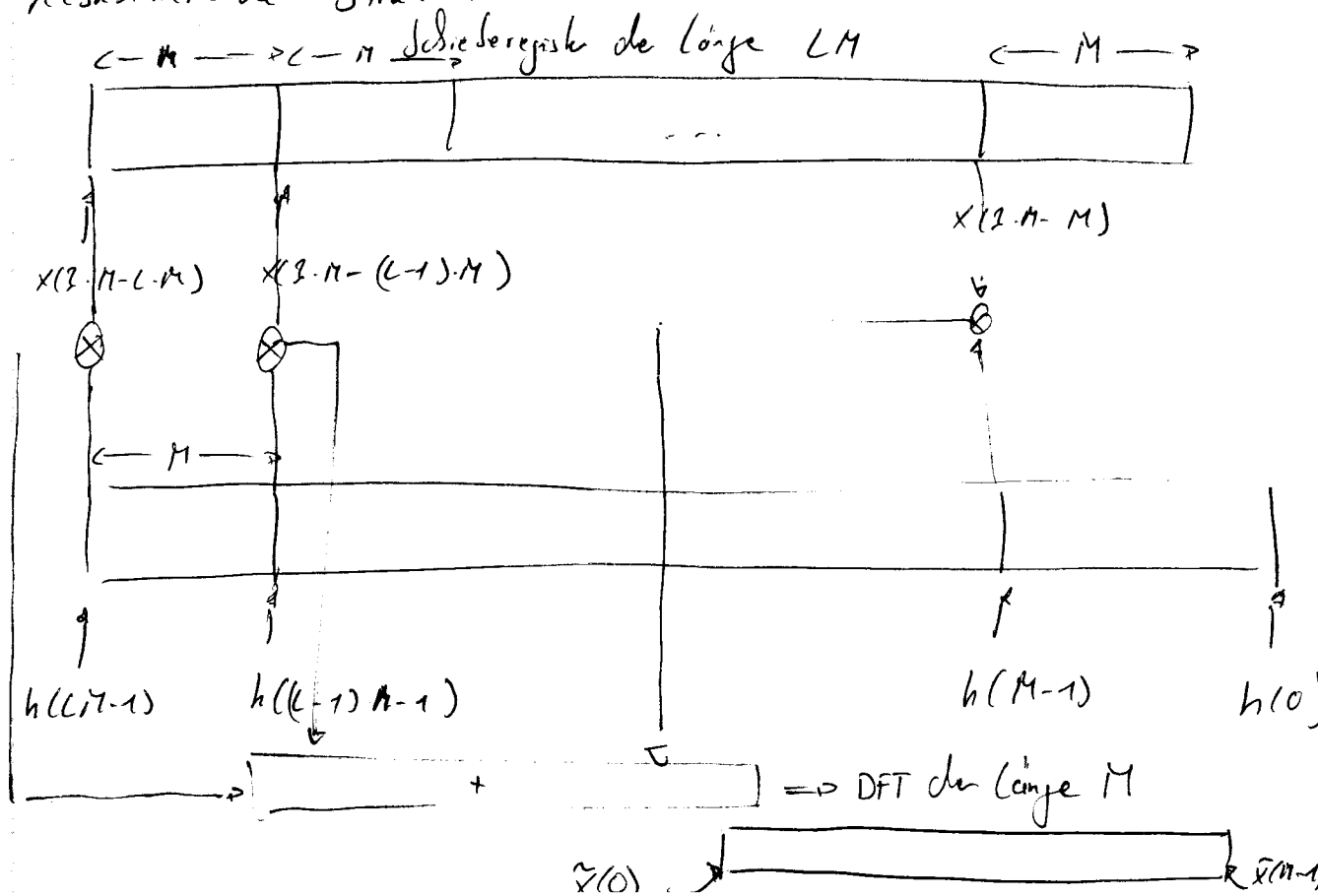
$$= h(LM - 1) \cdot x(0 \cdot M - L \cdot M)$$

$$+ h((L-1) \cdot M - 1) \cdot x(1 \cdot M - (L-1) \cdot M)$$

⋮

$$+ h(M-1) \cdot x(1 \cdot M - M)$$

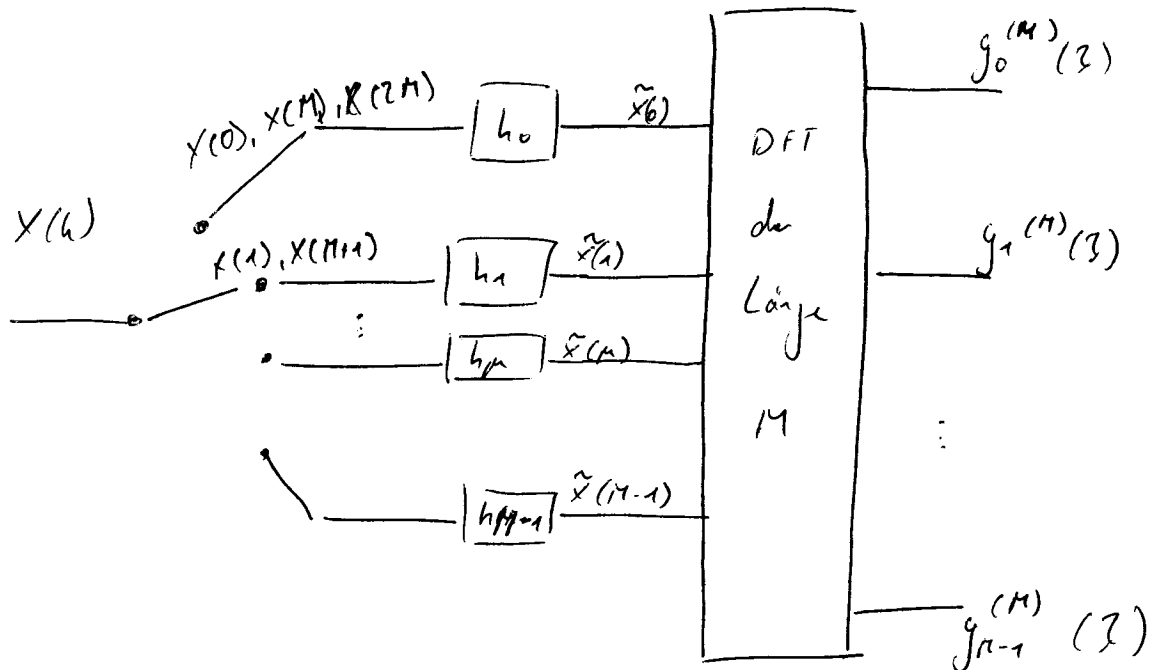
Resultierende Struktur:



d) Menge leitete Strahlen entspricht einer sog.

DFT Polyplose (Mehrfache) Filterbank

Die Filter $h_0, h_1, \dots, h_{M-1}$ werden jeweils aus Überabtastung der ursprünglichen Filter gewonnen



$$h_0 \triangleq h(0) + h(M) + h(2M)$$

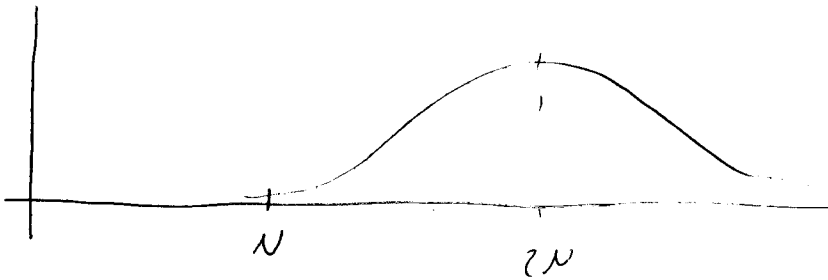
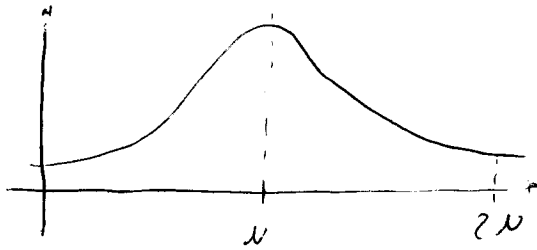
$$h_1 \triangleq h(1) + h(M+1) + \dots$$

Erhebliche Reduktion des Rechenaufwandes, da Netzwerke mit geringerer Filterbreite gebaut werden und DFT (meist) durch effiziente FFT berechnet werden kann.

DSV 1: Übung 8

16.12.2014

Aufg. 1



Ansatz: $\alpha(v(h) + v(h+N)) \stackrel{!}{=} 1$

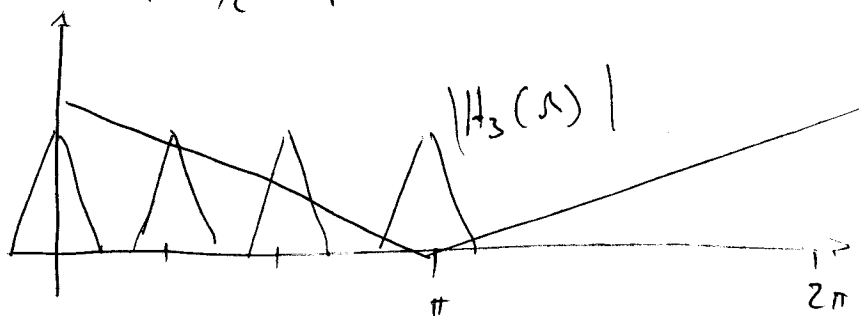
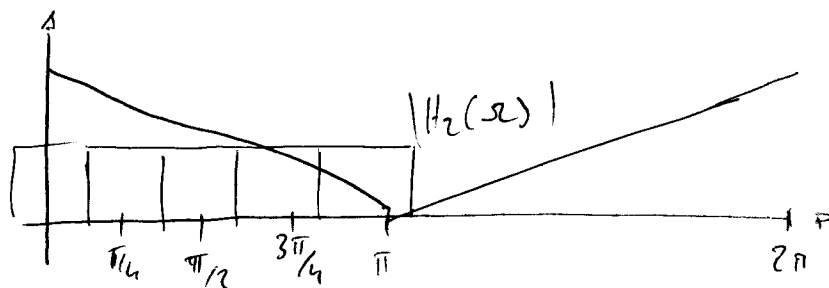
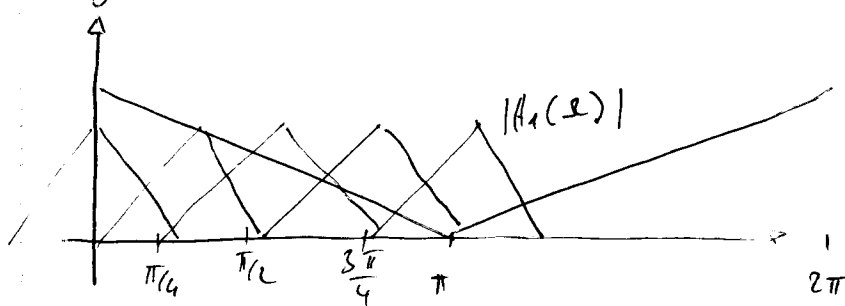
$$\alpha \left(0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi h}{2N}\right) + \left(0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi(h+N)}{2N}\right)\right) \right) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \alpha \left(1,08 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi h}{2N}\right) - \underbrace{0,46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi h}{2N} + \pi\right)}_{= \cos\left(\frac{2\pi h}{2N}\right)} \right) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot 1,08 \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{1,08}}$$

Aufg. 4.2

 $N=8$ Kanäle

$\Rightarrow H_3(\omega)$, da mit $N=8$ Kanälen nur die Hälfte des Spektrums erfasst werden kann

Aufg. 4.5

a)

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x(k)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	...			
$y_0(k)$	$x(0)$	0	$x(2)$	0	$x(4)$	0	$x(6)$	0
$y_1(k)$	$x(-1)$	0	$x(1)$	0	$x(3)$	0	$x(5)$	0
$\tilde{x}(k)$	$x(-1)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$

b)

$$g_0(h) = x(h) \cdot p(h)$$

$$= \frac{1}{2} x(h) + \frac{1}{2} (-1)^h \cdot x(h)$$

$$g_1(h) = x(h-1) \cdot p(h-1)$$

$$= \frac{1}{2} x(h-1) + \frac{1}{2} (-1)^{h-1} \cdot x(h-1)$$

$$= \frac{1}{2} x(h-1) - \frac{1}{2} (-1)^h \cdot x(h-1)$$

$$c) \quad \varphi_0(z) = \frac{1}{2} X(z) + \frac{1}{2} X(-z)$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2} X(z) \cdot z^{-1} - \frac{1}{2} X(-z) \cdot z^{-1}$$

$$d) \quad \tilde{X}(z) = \varphi_0(z) \cdot z^{-1} + \varphi_1(z)$$

$$= X(z) \cdot z^{-1}$$

1) Skizze Übung 8

21.12.2011

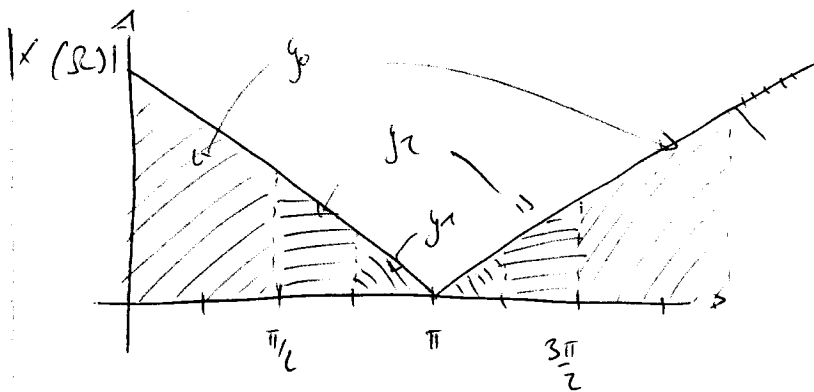
Nachtrag A 4.5

$$b) \quad y_1(h) = x(h-1) \cdot p(h)$$

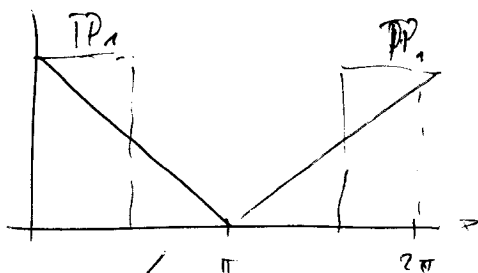
$$= \frac{1}{2} x(h-1) + \frac{1}{2} (-1)^h x(h-1)$$

$$= \frac{1}{2} x(h-1) - \frac{1}{2} (-1)^{h-1} x(h-1)$$

Aufg. 6

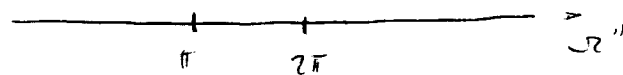
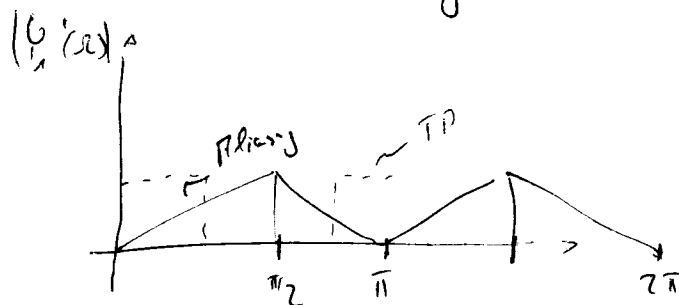
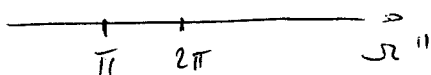
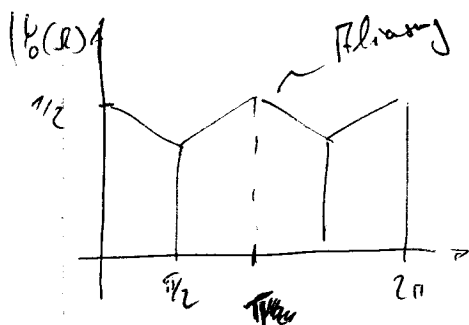


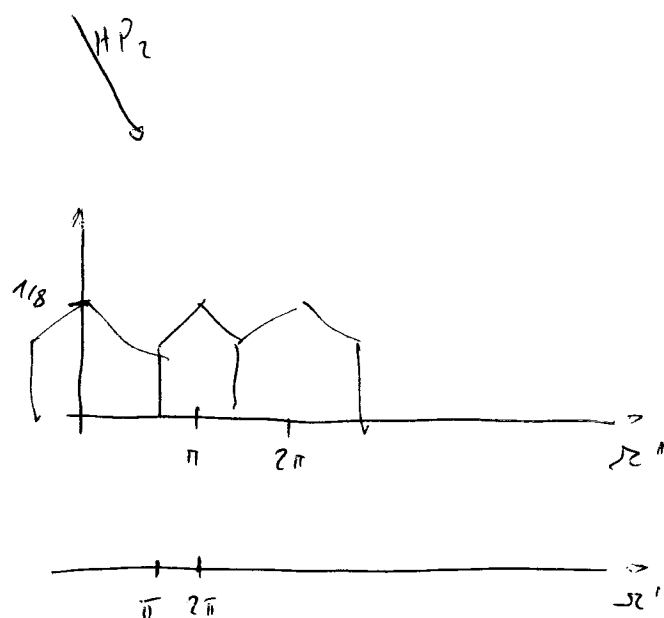
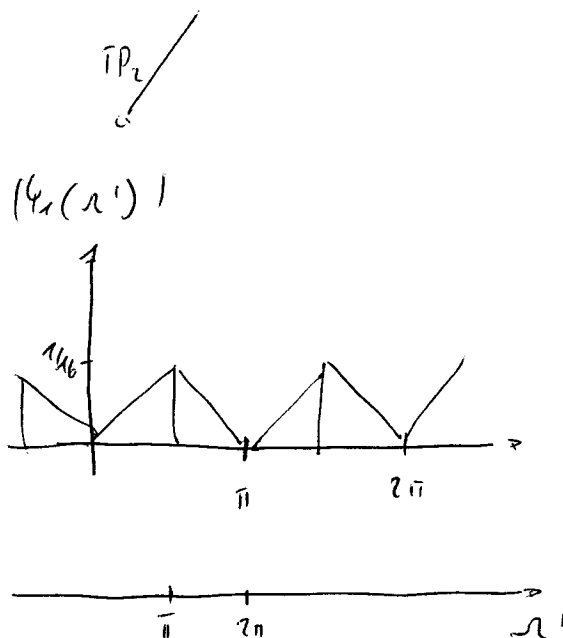
Begründung



$TP_1 + \text{unverändert}$

$HP_1 + \text{unverändert}$





Aufg. 4.7

a) Hier wird nur die gleichphasige MSK-Schaltung (wie in der Literatur üblich)

$$X_T(z) = X(z) \cdot H_T(z)$$

$$\Rightarrow \tilde{X}_T(z) = \frac{1}{2} [H_T(z^{1/2}) \cdot X(z^{1/2}) + H_T(-z^{1/2}) \cdot X(-z^{1/2})]$$

$$X_H(z) = X(z) \cdot H_H(z)$$

$$\Rightarrow \tilde{X}_H(z) = \frac{1}{2} [H_H(z^{1/2}) \cdot X(z^{1/2}) + H_H(-z^{1/2}) \cdot X(-z^{1/2})]$$

$$Y(z) = \tilde{X}_T(z^2) \cdot G_T(z) + \tilde{X}_H(z^2) \cdot G_H(z)$$

$$= \frac{G_T(z)}{2} \cdot [H_T(z) \cdot X(z) + H_T(-z) \cdot X(-z)]$$

$$+ \frac{G_H(z)}{2} [H_H(z) \cdot X(z) + H_H(-z) \cdot X(-z)]$$

$$= \frac{X(z)}{2} \underbrace{[H_T(z) G_T(z) + H_H(z) G_H(z)]}_{= A(z) \text{ (distortion free filter)}}$$

$$+ \frac{X(-z)}{2} \underbrace{[H_T(-z) G_T(z) + H_H(-z) G_H(z)]}_{= B(z) \text{ (aliasing component)}}$$

$$b) \text{ je } J_z: H_H(z) = H_T(-z) \\ G_T(z) = H_T(z)$$

21.12.2011

$$\text{Einspeisen in a)}$$

$$\Rightarrow B(z) = H_T(z) \cdot H_T(z) + H_T(-z) \cdot G_H(z)$$

$$\Rightarrow B(z) = H_T(-z) \cdot H_T(z) + H_T(z) \cdot G_H(z)$$

Perfekte Aliasing Kompensation

$$B(z) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow G_H(z) = -H_T(-z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \left(H_T(z^*) \right)^2 - \left(H_T(-z^*) \right)^2$$

c)

$$H_T(z) = F(z) z^{-\frac{N-1}{2}} \quad \text{einsetzen in } H(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(F(z) \right)^2 - \left(F(-z) \right)^2 (-1)^{-(N-1)} \right] z^{-(N-1)}$$

$$\Rightarrow H(z = e^{j\Omega}) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left[F(e^{j\Omega})^2 - F(e^{j(\Omega-\pi)})^2 \right]}_{= |F(e^{j\Omega})|^2 - |F(e^{j(\Omega-\pi)})|^2} \cdot \underbrace{e^{-j\Omega(N-1)}}_{= e^{-j\varphi(\Omega)}}$$

da N gerade und $F(e^{j\Omega})$ nullplatzig ist.
ergibt sich für die Phase

$$\varphi(\Omega) = (N-1) \Omega$$

Aufg. 5.1

a) $\hat{\phi}_{xx}(z) = 0$ für $z \geq N$ und $z \leq -N$
 weil $x(k)$ endl. Folge der Länge N

$\hat{\phi}_{xx}(z) \neq 0$ für $-N < z < N$

b) $\hat{\phi}_{xx}(z) = \frac{1}{N} \left(x(z) * x(-z) \right) = \hat{\phi}_{xx}(-z)$

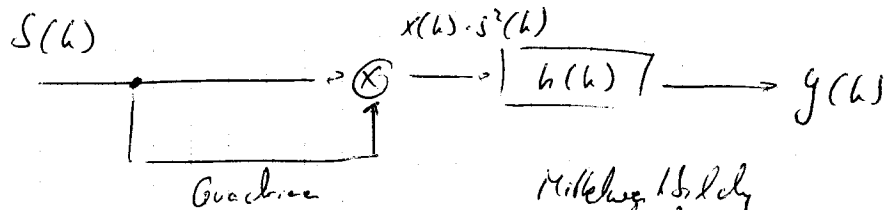
c) $\hat{\phi}_{xx}(z) = \frac{1}{N} \left(x(z) \cdot x(z^*) \right)$

DSV: a'ung 9

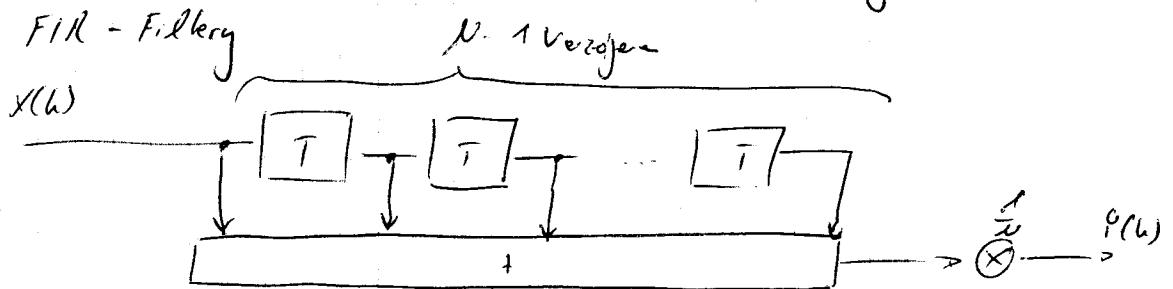
11.01.2012

17.1.5.2

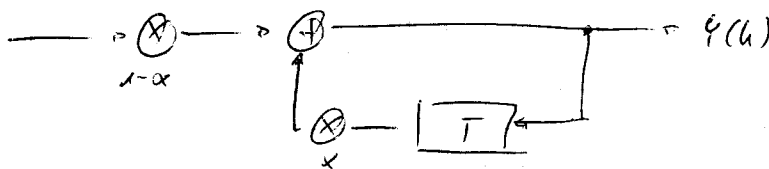
a) Generelles Blockschaltbild zur Bestimmung der Kurzzeitleistung



Mittelwertbildung
durch
FIR- oder IIR-Filter



IIR-Filter



b) Kurzlosung

$$\alpha = \frac{N-1}{N+1}$$

(siehe VL

a) Lösung der Normalgleichung

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1/3$$

$$a_2 = 1/3$$

b) Alternativ: Berechnung mittels Gauss-Jordan Rekursion

c) siehe Vorlesung bzw. Buch

d)

$$e(h) = d(h) - \beta \cdot d(h - h_0)$$

$$E\{e^2(h)\} = E\{(d(h) - \beta \cdot d(h - h_0))^2\}$$

$$\frac{\partial E\{e^2(h)\}}{\partial \beta} = 2 E\{(d(h) - \beta \cdot d(h - h_0)) \cdot (-d(h - h_0))\}$$

$$= 2 \varphi_{dd}(h_0) - 2 \cdot \beta \cdot \varphi_{dd}(0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \beta_{\text{opt}} = \frac{\varphi_{dd}(h_0)}{\varphi_{dd}(0)}$$

Bem. $|\beta_{\text{opt}}| \leq 1$, da $\varphi_{dd}(0) \geq \varphi_{dd}(h \neq 0)$

e) Ablesung: $h_0 = 50$, $\varphi_{dd}(50) = 12$

$$\Rightarrow |\beta_{\text{opt}}| = \frac{12}{20} = 0,6$$

Aufg. 6.3

11.01.2012

$$a) \quad a = \frac{\varphi_{xx}(1)}{\varphi_{xx}(0)}$$

$$G_p = \frac{\varphi_{xx}(0)}{\varphi_{dd}(0)}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \varphi_{dd}(0) &= E\{x(h) - a \cdot x(h-1)\}^2 \\ &= E\{x^2(h) - 2a \cdot x(h) \cdot x(h-1) + a^2 x^2(h-1)\} \\ &= \varphi_{xx}(0) - 2a \cdot \varphi_{xx}(1) + a^2 \varphi_{xx}(0) \\ &= (1-a^2) \varphi_{xx}(0) - 2a \cdot \varphi_{xx}(1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_p = \frac{\varphi_{xx}(0)}{(1-a^2) \varphi_{xx}(0) - 2a \cdot \varphi_{xx}(1)}$$

$$= \frac{1}{1-a^2 - 2a \cdot \frac{\varphi_{xx}(1)}{\varphi_{xx}(0)}} = \frac{1}{1-a^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\varphi_{xx}(1)}{\varphi_{xx}(0)}\right)^2}$$

$$\hookrightarrow G_p = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^2} = 1,246 \hat{=} 0,96 \text{ dB}$$

$$b) \quad \frac{\Delta SNR}{\text{dB}} = 10 \cdot \log \frac{\varphi_{xx}(0)}{\varphi_{xx}(0)} - 10 \log \frac{\varphi_{dd}(0)}{\varphi_{xx}(0)}$$

Betrachte nochmal!

$$\varphi_{dd}(e^{j\Omega}) = \varphi_{xx}(e^{j\Omega}) \cdot |1 - A(e^{j\Omega})|^2 = \text{const} \cdot \varphi_{dd}(0)$$

$$\Rightarrow \varphi_{xx}(e^{j\Omega}) = \varphi_{dd}(0) \cdot \frac{1}{|1 - A(e^{j\Omega})|^2}$$

$$\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{xx}(e^{j\Omega}) d\Omega$$

$$= \varphi_{dd}(0) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 - A(e^{j\Omega})|^2} d\Omega$$

$$\Rightarrow G_P = \frac{\varphi_{rr}(0)}{\varphi_{dd}(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 - H(e^{j\omega})|^2} d\omega$$

$$\begin{aligned} \varphi_{rr}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{dd}(e^{j\omega}) \cdot \frac{1}{|1 - H(e^{j\omega})|^2} d\omega \\ &= \varphi_{dd}(0) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 - H(e^{j\omega})|^2} d\omega}_{G_P} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_{rr}(0) = \varphi_{dd}(0) \cdot G_P$$

Damit folgt:

$$\frac{ASNR}{dB} = 10 \cdot \log \left(\underbrace{\frac{\varphi_{rr}(0)}{\varphi_{dd}(0) \cdot G_P} \cdot \frac{\varphi_{dd}(0)}{\varphi_{dd}(0)}}_{=1} \right) = 0 \text{ dB}$$

↳ Noise shaping

$$c) a = \frac{\varphi_{rr}(x)}{\varphi_{rr}(0)} = \frac{\frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 x(k) \cdot x(k+1)}{\frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 x^2(k)}$$

$$= \frac{x(0) \cdot x(1) + x(1) \cdot x(2)}{x^2(0) + x^2(1) + x^2(2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x(2)}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + x^2(2)} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow x^2(2) = \frac{9}{16} x^2(2) + \frac{1}{32} = 0$$

$$\hookrightarrow x_{in}(1) = \frac{9}{32} + \sqrt{\frac{81}{32^2} - \frac{1}{32}} = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{16}$$

July 6.4

11.01.2012

$$a) d(h) = x(h) - a_3 \cdot x(h-3) - a_1 \cdot x(h-1)$$

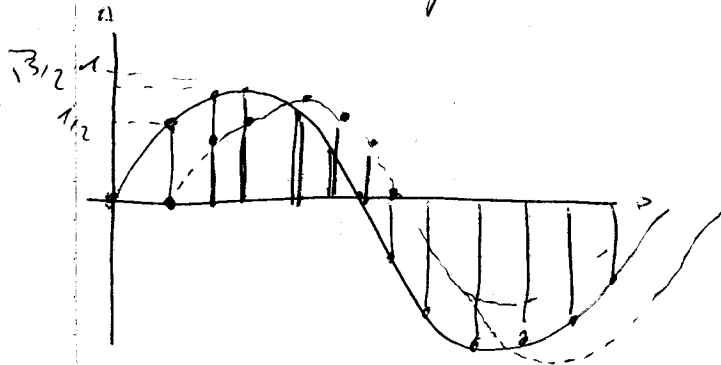
$$\begin{aligned} b) E\{d^2(h)\} &= E\{x^2(h) - 2a_3 x(h) \cdot x(h-3) - 2a_1 x(h) \cdot x(h-1) \\ &\quad + a_3^2 x^2(h-3) + 2a_1 a_3 x(h-1) \cdot x(h-3) + a_1^2 x^2(h-1)\} \\ &= \varphi_{xx}(0) - 2a_3 \varphi_{xx}(3) - 2a_1 \varphi_{xx}(1) \\ &\quad + a_3^2 \varphi_{xx}(0) + 2a_1 a_3 \varphi_{xx}(2) + a_1^2 \varphi_{xx}(0) \\ &= (1 + a_1^2 + a_3^2) \varphi_{xx}(0) - 2a_1 \varphi_{xx}(1) + 2a_1 a_3 \varphi_{xx}(2) \\ &\quad - 2a_3 \varphi_{xx}(3) \end{aligned}$$

$$c) \frac{\partial E\{d^2(h)\}}{\partial a_1} = 2a_1 \varphi_{xx}(0) - 2\varphi_{xx}(1) + 2a_3 \varphi_{xx}(2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial E\{d^2(h)\}}{\partial a_3} = 2a_3 \varphi_{xx}(0) - 2a_1 \varphi_{xx}(1) - 2\varphi_{xx}(3) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\varphi_{xx}(1) \cdot \varphi_{xx}(0) - \varphi_{xx}(3) \cdot \varphi_{xx}(2)}{\varphi_{xx}^2(0) - \varphi_{xx}^2(1)}$$

$$a_3 = \frac{\varphi_{xx}(3) \varphi_{xx}(0) - \varphi_{xx}(1) \cdot \varphi_{xx}(2)}{\varphi_{xx}^2(0) - \varphi_{xx}^2(1)}$$

DSV 1: Übung 10Aufg. 6.5a) Eingangssignal $x(t) = \sin(2\pi \frac{t}{12})$ Kabelnänge $l = 120$ $\Rightarrow 10$ SinusperiodenPKF für $l = 0$

$$r_0 = 10 \left[4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 2 \cdot 1^2 \right] = 60$$

$$r_1 = 10 \left[4 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = 51,96$$

$$r_2 = 10 \left[4 \left(\frac{1}{2} \right) + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] - \left(-\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = 30,25$$

 $\Rightarrow$ normierte PKF Koeffizienten

$$r_0' = 1 \quad r_1' = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad r_2' = \frac{1}{2}$$

b) Normalgleichung für $n = 2$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 \\ r_1 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 = 1,11 \quad a_2 = -0,39$$

c) Idee: Ermitteln der Beziehung über Koeffizientenvergleich
Differenzial für die direkte Strahlung 18.01.2017

$$d(k) = x(k) - a_1 x(k-1) - a_2 x(k-2) \quad (1)$$

Differenzial für die indirekte Strahlung

$$\begin{aligned} d(k) &= x(k) + h_1 x(k-1) + h_1 \cdot h_2 x(k-2) + h_2 \cdot x(k-2) \\ &= x(k) + h_1 (1+h_2) x(k-1) + h_2 x(k-2) \end{aligned} \quad (2)$$

Vgl. von (1) und (2) liefert die Beziehung

$$\begin{aligned} -a_1 &= h_1 (1+h_2) \\ -a_2 &= h_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad -a_1 = h_1 (1-a_2)$$

$$\Rightarrow h_1 = -\frac{a_1}{1-a_2}$$

$$\Rightarrow h_1 = 0,4 \quad ; \quad h_2 = 0,71$$

Aufg. 6.6

$$a) \quad x(k) \Big|_{k_0=\pi} = A \cdot \cos(\pi k) = \{\dots, A, -A, A, -A\}$$

$$\Rightarrow \varphi_{xx}(0) = A^2 \quad ; \quad \varphi_{xx}(1) = -A^2$$

$$\Rightarrow \text{opt. Prädiktionkoeffizient} \quad a = \frac{\varphi_{xx}(1)}{\varphi_{xx}(0)} = -1$$

Bemerkung: $d(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_r \rightarrow \infty$

b)

$$H(e^{j\omega}) = 1 - a e^{j\omega}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$

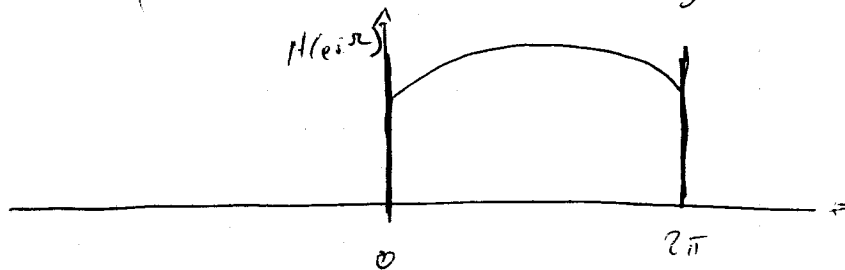
$$a=0,5 \rightarrow \sqrt{\frac{5}{4} - \cos \omega}$$

$|H(e^{j\omega})|$ wird minimal für $\Omega_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$$x(h) = \tilde{A} \cos(\Omega_0 \cdot h)$$

0

$$X(e^{j\omega}) = \left(\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \right) \cdot \tilde{A}$$



Da $X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega})$ wird das Kosinussignal $d(h)$ bzw. dessen Leistung $\tilde{A}^2/2$ minimal für $\Omega_0 = 2\pi n$ und der Produktionsgewinn dementsprechend maximal

c) Signalleistung von $d(h)$ (Kosinussignal)

$$S = \frac{\tilde{A}^2}{2}$$

Leistung des weißen gleichverteilten Quantisierungsrausches

$$N = \frac{Ad^2}{12} \text{ mit } Ad = \frac{2\tilde{A}}{2^w} \quad (\text{Sch. Theorie})$$

$$\Rightarrow N = \frac{4\tilde{A}^2}{12 \cdot 2^{2w}} = \frac{\tilde{A}^2}{3 \cdot 2^{2w-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{N} = \frac{\tilde{A}^2/2}{\tilde{A}^2/(3 \cdot 2^{2w-1})} = 3 \cdot 2^{2w-1} \stackrel{w=3}{=} 96 \hat{=} 19,83 \text{ dB}$$

($\hat{=} 3 \text{ dB pro Bit Regel}$)

Aufg. 7.1

$$x(t) \rightarrow \boxed{Q} \rightarrow \hat{x}(t) = x(t) \rightarrow \oplus \xrightarrow{e(t)} \hat{x}(t)$$

$$\frac{S}{N} = \frac{E\{x^2(t)\}}{E\{e^2(t)\}}$$

$$S = E\{x^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

$$= \int_0^A x^2 \cdot \frac{1}{A} dx = \left. \frac{1}{3A} x^3 \right|_0^A = \frac{A^2}{3}$$

$$N = \frac{A x^2}{12} \quad \text{mit} \quad \Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{h} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^w} = \frac{A}{2^w}$$

$$= \frac{(A/8)^2}{12} = \frac{A^2}{64 \cdot 12}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{N} = \frac{A^2/3}{A^2/64 \cdot 12} = \frac{64 \cdot 12}{3} = 64 \cdot 4 = \underline{\underline{256}}$$

$$\hookrightarrow SNR = 10 \cdot \lg(256) = \underline{\underline{24 \text{ dB}}}$$

Entspricht nicht der „6 dB pro Bit Regel“ ($6w = 18 \text{ dB}$), da keine symmetrische Verteilungsfunktion des Nutzsignals vorliegt.

$$\frac{SNR}{\text{dB}} = 0,602 + 10 \cdot \lg(3F)$$

(F = Form- oder Auskennungsfehler)

$$= 0,602 + 10 \cdot \lg(3) + 10 \cdot \lg(F)$$

$$\Rightarrow F \approx \underline{\underline{1,3}}$$

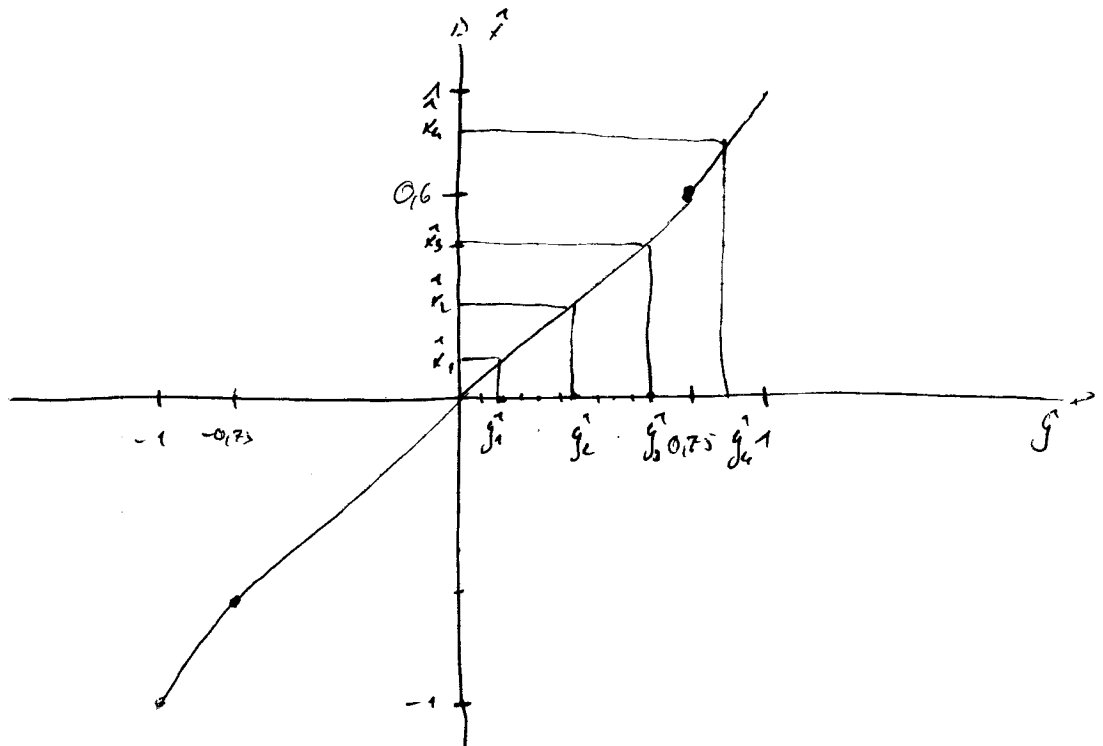
Aufg. 7.4

$$a) E\{e^2(h)\}E = \frac{\Delta g^2}{12} = \frac{1}{192}$$

$$\text{mit } \Delta g = \frac{g_{\max}}{2^{\omega}} \quad \text{und } g_{\max} = 1 \quad \text{folgt}$$

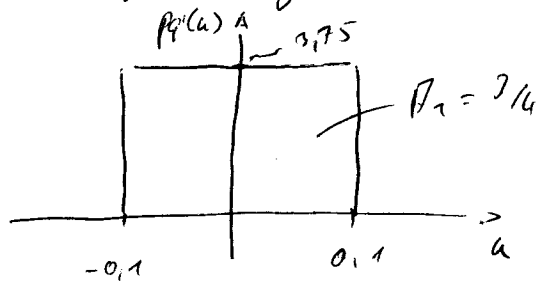
$$\frac{\left(\frac{1}{2^{\omega}}\right)^2}{12} = \frac{1}{192} \quad \Rightarrow \quad \omega = \log_2 \sqrt{\frac{192}{12}} + 1 = \underline{\underline{3.61}}$$

b)



$$c) \Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f_3 = 0.1$$

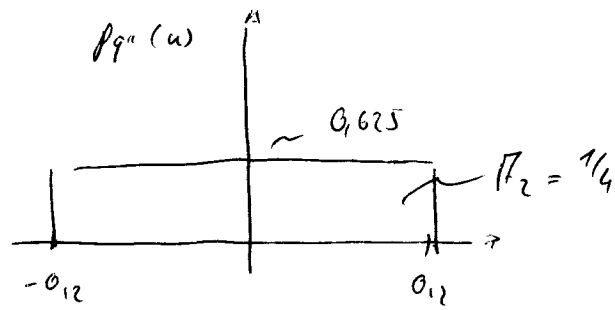
(Nach Kompression liegt 75% ($3/4$) in 1. Bereich der Kennlinie)



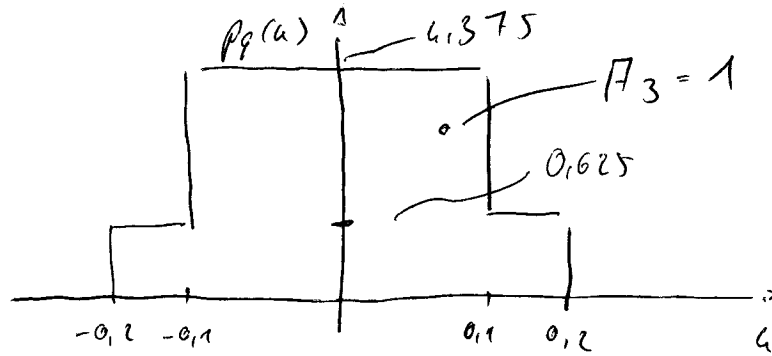
$$\frac{P_1}{\Delta f_1} = \frac{3/4}{0.2} = 3.75$$

der Werte

II)



$$\frac{\pi_2}{\pi_4} = 0.625$$

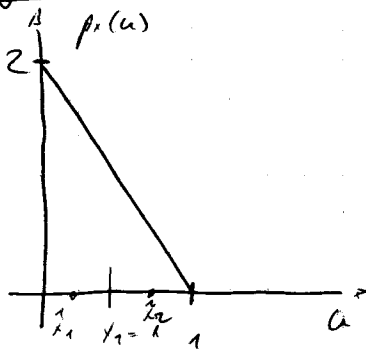


$$\pi_3 = 1$$

DSV1: Übung

01.02.2012

Aufg. 7.6



$$p_x(u) = -2u + 2$$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\int_0^x u(-2u+2) du}{\int_0^x (-2u+2) du} = \frac{-\frac{2}{3}u^3 + u^2 \Big|_0^x}{-u^2 + 2u \Big|_0^x} = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + x^2}{-x^2 + 2x}$$

$$= \frac{x \left(-\frac{2}{3}x - 1 \right)}{x - 2}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\int_{1/4}^1 u(-2u+2) du}{\int_{1/4}^1 (-2u+2) du} = \frac{-\frac{2}{3}u^3 + u^2 \Big|_{1/4}^1}{-u^2 + 2u \Big|_{1/4}^1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1}{1^2 - 2 \cdot 1 + 1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1}{1^2 - 2 \cdot 1 + 1}$$

$$= \frac{1}{3} (2 \cdot 1 + 1) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{3}$$

$$\mu = \frac{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{2} = \frac{x \left(\frac{2}{3}x - 1 \right)}{x - 2} + \frac{2 \cdot 1 + 1}{3}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = 0,38$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_1 = 0,1751$$

$$\hat{\mu}_2 = 0,5867$$

Aufg. 7.7

a) Notwendige Bedingungen:

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_h} \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_{h+1}} \stackrel{!}{=} 0$$

b) ges: optimales Intervall zwischen x_{h-1} und x_{h+1}

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_h} = \frac{\int_{x_{h-1}}^{x_h} \underbrace{(x_h - u)^2}_{g_1(u)} p_x(u) du}{\partial x_h} + \frac{\int_{x_h}^{x_{h+1}} \underbrace{(x_{h+1} - u)^2}_{g_2(u)} p_x(u) du}{\partial x_h}$$

Substitution liefert:

$$= \frac{\int_{x_{h-1}}^{x_h} g_1(u) du}{\partial x_h} + \frac{\int_{x_h}^{x_{h+1}} g_2(u) du}{\partial x_h}$$

$$= \frac{\partial G_1(u) \Big|_{x_{h-1}}^{x_h}}{\partial x_h} + \frac{\partial G_2(u) \Big|_{x_h}^{x_{h+1}}}{\partial x_h}$$

$$= \frac{\partial (G_1(x_h) - G_1(x_{h-1}))}{\partial x_h} + \frac{\partial (G_2(x_{h+1}) - G_2(x_h))}{\partial x_h}$$

$$= \frac{\partial G_1(x_h)}{\partial x_h} - \frac{\partial G_2(x_h)}{\partial x_h} \quad \left(da \quad \frac{\partial G_1(x_{h-1})}{\partial x_h} = 0 \quad da \quad \frac{\partial G_2(x_{h+1})}{\partial x_h} = 0 \right)$$

$$= g_1(x_h) - g_2(x_h)$$

$$= (x_h - x_h)^2 p_x(x_h) - (x_{h+1} - x_h)^2 p_x(x_h) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_h = \frac{x_h + x_{h+1}}{2}$$