
HöMa III Zusammenfassung

Vorlesung Prof. Behmelmans, WS 2011/12, zusammengefasst von Martin Gritzan

Gebietsintegrale

Gebietsintegrale sind Integrale über Funktionen, die von mehreren Parametern abhängen und bei denen stets über ein Gebiet (siehe unten) mehrdimensional integriert wird.

Gebiet

Ein Gebiet ist eine Teilmenge des R^n ohne ihren Rand (offene Menge), die zusammenhängend ist. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist ein Gebiet, das keine „Löcher“ hat. Ein Kreisring ist z.B. zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

Tipps zum Berechnen von Gebietsintegralen

Das äußere Integral darf keine der Laufvariablen der inneren Integrale mehr enthalten. Dazu muss man sich das Gebiet evtl. veranschaulichen und die Grenzen entsprechend definieren.

Will man die **Integrationsreihenfolge ändern**, so muss man sich evtl. das Gebiet veranschaulichen, um die Grenzen passend zur obigen Regel umzuformen. Wenn die Grenzen nicht von Laufvariablen der Integranden abhängen, kann man die Integrationsreihenfolge einfach tauschen.

Kurvenintegrale

Bei Kurvenintegralen wird eine Funktion, die von mehreren Parametern abhängig ist und deren Ergebnis ebenfalls mehrdimensional ist, über einen Weg integriert.

Formal gilt im Folgenden:
$$\int_{\Gamma} \vec{f} \, d\vec{x} = \int_{\Gamma} f_1 \, dx_1 + f_2 \, dx_2 + \dots + f_n \, dx_n$$

Allgemeine Herangehensweise

Sei Γ eine reguläre, doppelpunktfreie Kurve und sei $\gamma(t)$ eine stetig diff'bare Parametrisierung von Γ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} \vec{f} \, d\vec{x} = \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \vec{\gamma}'(t) \, dt$$

mit a, b als Grenzen des Definitionsbereiches der Parametrisierung.

Wegunabhängigkeit

Eine der für Ingenieure interessantesten Fragen zu Integralen über Vektorfelder.

formale Definition

Formal heißt ein Kurvenintegral in einem Gebiet wegunabhängig, wenn $\int_{\Gamma} \vec{f} \, d\vec{x}$ für jede Kurve Γ aus dem Gebiet den gleichen Wert liefert. Dies ist aufwändig zu zeigen, es gibt „Abkürzungen“ auf diesem Weg.

Der geschlossene Weg

Ein Kurvenintegral ist genau dann in einem Gebiet wegunabhängig, wenn $\oint_{\Gamma} \vec{f} \, d\vec{x} = 0$ für alle geschlossenen Wege Γ im Gebiet gilt.

Der 1. Hauptsatz über Kurvenintegrale

(eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des 2. HS der Differential- und Integralrechnung)

Das Kurvenintegral $\int_{\Gamma} \vec{f} \, d\vec{x}$ ist genau dann wegunabhängig, wenn es eine reell wertige Funktion $h(\vec{x})$ gibt, so dass gilt

$$\vec{f} = \nabla h(\vec{x})$$

Hat man dieses h einmal gefunden, kann man es außerdem zur Vereinfachung der Integration nutzen. Es gilt nämlich

$$\int_{\Gamma} \vec{f} \, d\vec{x} = h(P) - h(Q)$$

für jeden beliebigen Weg Γ von H nach Q . h ist aber u.U. nicht leicht zu finden. Einfacher anwendbar ist...

Der 2. Hauptsatz über Kurvenintegrale

Im R^2 gilt: Das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} A \, dx + B \, dy$$

ist genau dann in G wegunabhängig, wenn A, B stetig diff'bar und $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ für alle (x, y) aus G gilt.

Gaußscher Satz über Kurvenintegrale

Sei G ein Gebiet und ∂G sein Rand, welcher sich durch Aneinanderreihung der Kurven Γ_1 bis Γ_n doppelpunktfrei ausdrücken lässt. Außerdem **sei der Durchlaufsinn des Randes so gewählt, dass G stets zur Linken liegt**. Sei \vec{n} in jedem Punkt des Randes seine von G wegzeigende (d.h. äußere) Normale. Dann gilt nach dem Satz von Gauß:

$$\oint_{\partial G} \vec{f} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_G \nabla \cdot \vec{f} \, dx \, dy$$

oder anders ausgedrückt:

$$\iint_G \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_{\partial G} a \, dy - b \, dx = \sum_{i=1}^k \oint_{\Gamma_i} a \, dy - b \, dx$$

Mithilfe dieses Satzes lassen sich also Kurvenintegrale über den Rand eines Gebietes auf Gebietsintegrale zurückführen (und umgekehrt). Dabei darf der Rand des Gebietes auch in Abschnitte zerlegt werden, wenn's die Rechnung einfacher macht.

Durchlaufsinn ändern:

Es gilt $\int_{\Gamma} \vec{f} \, d\vec{x} = - \int_{-\Gamma} \vec{f} \, d\vec{x}$. Um den Durchlaufsinn von Γ zu wechseln, muss man sich die Kurve veranschaulichen und eine neue Parametrisierung festlegen. Das ergibt entweder einen neuen Integranden oder andere Grenzen für die Integration.

Flächenintegrale

Hier geht es nun um die Integration eines Vektorfeldes im Raum über eine durch das Vektorfeld schneidende Fläche. Dazu muss sich zunächst die Fläche darstellen lassen.

Parameterdarstellung der Fläche

Man kann sich die Fläche F als Ergebnis einer Abbildung aus der (u, v) -Ebenen D in den Raum vorstellen. Dann sind u und v die Parameter und es gilt

$$\vec{x}(u, v) \text{ mit } x = x(u, v); y = y(u, v); z = z(u, v); (u, v) \in D$$

heißt Parameterdarstellung der Fläche $F = \{\vec{x}(u, v)\}$

Oberflächenberechnung

Will man den Flächeninhalt einer Fläche berechnen, so kann man ausnutzen, dass für jede reguläre Fläche F , deren Parameterdarstellung $\vec{x}: D \rightarrow R^3$ bekannt ist, gilt:

$$A(F) = \int_D \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| du dv = \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right)^2} du dv$$

ist der Flächeninhalt von F . Da D ein Gebiet im R^2 ist, lässt sich zur Lösung des Integrals der gesamte Erfahrungsschatz aus den vorhergehenden Kapiteln anwenden.

Ist die Fläche gar in der Form $F = \{\vec{x} \in R^3 | z = f(x, y); (x, y) \in G \in R^2\}$ gegeben, so kann man

sofort sagen: $A(F) = \int_G \sqrt{1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2} dx dy$ ist der Flächeninhalt.

Die Berechnung der Flächen ist im Grunde eine Integration über das 1-Vektorfeld. Will man andere Vektorfelder integrieren, braucht es mehr.

allgemeine Flächenintegrale

Hier geht es um die Berechnung von $\int_F \vec{f}(\vec{x}) d\sigma$, also wenn eine Fläche F und ein Vektorfeld f gegeben sind. Für Flächen in Parameterdarstellung gilt

$$\int_F \vec{f}(\vec{x}) d\sigma = \int_D f(x, y, z) \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| du dv$$

Für Flächen, die als Graph einer Funktion definiert sind

($F = \{\vec{x} \in R^3 | z = h(x, y); (x, y) \in G \in R^2\}$) gilt vereinfacht

$$\int_F \vec{f}(\vec{x}) d\sigma = \iint_G f(x, y, z) \sqrt{1 + \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right|^2} dx dy$$

Gaußscher Satz über Flächenintegrale

Vom [Gaußschen Satz über Kurvenintegrale](#) gibt es eine 3D-Variante, die genutzt wird, um die dreidimensionale Integration über einen Raum auf eine Integration über seinen Rand zurückführt. Der Rand eines Volumens besteht aus (bestenfalls endlich vielen) Flächen.

Der Gaußsche Satz über Flächenintegrale in seiner kompaktesten Form lautet

$$\iiint_G \operatorname{div}(\vec{f}) \, dx \, dy \, dz = \oint_{\partial G} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

wobei G nun ein Gebiet im \mathbb{R}^3 ist und ∂G sein Rand, welcher eine geschlossene, reguläre Fläche ist. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \oint_{\partial G} (a n_x + b n_y + c n_z) \, d\sigma$$

wobei die n die Komponenten des nach außen zeigenden Normalenvektorfeldes auf ∂G ist.

Spezialfall V1 (Satz 6.1)

In diesem Spezialfall betrachten wir Gebiete des \mathbb{R}^3 mit der Form

$$G = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y) < z < \psi(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

mit $\varphi(x, y) < \psi(x, y)$ beide stetig diff'bar in \mathbb{R}^2 . Solche Gebilde sind anschaulich Säulen mit beliebig geformtem Deckel, Boden und Grundriss, deren Seitenwände überall parallel mit der z-Achse verlaufen.

Für solche Gebiete gilt dann

$$\iiint_G \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \oint_{\partial G} (c n_z) \, d\sigma$$

Dabei ist zu beachten, dass für den Rand Boden und Deckel der Säule getrennt betrachtet werden müssen, da auf diesen Ebenen die z-Komponenten der nach außen zeigenden Normalenvektoren zumindest unterschiedliche Vorzeichen haben werden.

Integralsatz von Stokes

Eine andere Verallgemeinerung des Satzes von Gauß ist der Satz von Stokes. Hier geht es um die Integration eines Vektorfeldes f über eine Fläche F im Raum. Dabei gilt

$$\int_F \operatorname{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{t} \, ds = \int_{\Gamma} \vec{f} \, dx \, dy \, dz$$

wobei Γ die Randkurve von F und t die Tangente daran ist. **Γ und n müssen eine Rechtsschraube bilden!**

Intelligenter Weise beginnt man bei der Lösung solcher Aufgaben damit, den Rand der Fläche zu parametrisieren und achtet dabei auf den Durchlaufsinne der Parametrisierung. Wählt man ihn passend zum gegebenen Normalenvektor, kann man sofort weiterrechnen.

Formel für die Rotation: Skript S. 53 unten.

Normale berechnen

Ist eine Fläche der Form $F = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid z = h(x, y); (x, y) \in G \in \mathbb{R}^2 \}$ gegeben, dann kann man das Normalenfeld auf diese Fläche mit positiver z-Komponente berechnen durch

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_y h \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz über implizite Funktionen

Hier wird die Auflösbarkeit einer Funktion $f(x, y)=0$ untersucht, also die Nullstellenmenge der Funktion.

Anleitung: Stelle $f(x, y)=0$ ein Mal nach x und ein Mal nach y um, differenziere f außerdem je nach x und nach y . Dann setze den Ausdruck für x in d/dx und den Ausdruck für y in d/dy ein. Wenn beide Ableitungen i.A. ungleich 0 sind, ist die Gleichung auflösbar.

Exakte Differentialgleichungen

Zu diesem Thema sollte noch die Aufstellung über Lösungsansätze für DGLs aus dem 2. Semester wiederholt werden. Die nachfolgenden Erläuterungen bauen darauf auf.

Exaktheit einer DGL

Eine DGL der Form $a(x, u) + b(x, u)u' = 0$ heißt exakt, wenn es eine Funktion $h(x, y)$ gibt mit

$$\nabla h = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$$

h heißt dann Stammfunktion der DGL und es gilt: **Die Lösungsgesamtheit der DGL besteht dann aus allen $u(x)$, die $h(x, u) = \text{const.}$ erfüllen.**

Eine notwendige Bedingung, damit es ein solches h überhaupt geben kann, ist $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}$.

In der Praxis testet man zuerst die notwendige Bedingung, wenn man noch nicht weiß, dass die DGL exakt ist. Anschließend macht man sich auf die Suche nach einem konkreten h : Man bestimmt zu a (oder b , je nachdem was einfacher ist) die entsprechende Stammfunktion. Anschließend versucht man, die Integrationskonstante so festzulegen, dass die Ableitung in die andere Richtung das gewünschte Ergebnis liefert. In den relevanten Aufgaben sollte das der Fall sein.

Eigenwertproblem

Eine von einem Parameter λ abhängige DGL mit Randbedingungen heißt Eigenwertproblem. Ein EWP löst man, in dem man die DGL für verschiedene λ löst und anschließend die Randbedingungen einsetzt und so die Konstanten bestimmt. Kommen Lösungen ungleich der Nullfunktion heraus, dann ist λ ein Eigenwert und die Lösung eine Eigenfunktion des Problems.

uneigentliche Parameterintegrale

sind uneigentliche Integrale, die jedoch noch von einem Parameter t abhängen.

gleichmäßige Konvergenz (Satz 6.1)

Das uneigentliche Parameterintegral

$$\int_a^{\infty} f(x, t) dx$$

heißt gleichmäßig konvergent, wenn f stetig ist und es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\beta(\varepsilon) < b$ gibt, so dass für alle t gilt

$$\left| \int_b^{\infty} f(x, t) dx \right| < \varepsilon$$

Diese formale Definition ist unhandlich nachzuweisen. Daher benutzt man besser das „Majorantenkriterium“.

Majorantenkriterium (Satz 6.2)

Seien f, g stetige Funktionen und $\int_a^\infty g(x) dx$ gleichmäßig konvergent (siehe HöMa II). Wenn

$$|f(x, t)| \leq g(x)$$

dann ist auch f gleichmäßig konvergent.

Integrationsreihenfolge (Satz 6.4)

Wenn f gleichmäßig konvergent ist, darf eine Integration über den Parameter vor oder nach der Bildung des Grenzwertes erfolgen.

Differentiation nach dem Parameter (Satz 6.5)

Wenn alle Bedingungen

- $f(x, t)$ stetig
- $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$ stetig
- $\int_a^\infty f(x, t) dx$ gleichmäßig konvergent
- $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$ gleichmäßig konvergent

erfüllt sind, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^\infty f(x, t) dx = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

Funktionenreihen

punktweise Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz

Funktionsfolgen

punktweise Konvergenz nachweisen: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ bilden. Existiert der GW, dann ist er die Grenzfunktion und f_n konvergiert punktweise dagegen.

gleichmäßige Konvergenz nachweisen: Weise punktweise Konvergenz nach, anschließend zeige dass $\varepsilon > 0$ aus $|f_n - f_\infty| < \varepsilon$ nicht mehr von x abhängt (sondern nur noch von n). Gilt dies, so ist die Folge gleichmäßig konvergent gegen f_∞ .

Funktionenreihen

punktweise bzw. gleichmäßig ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen $S_N = \sum_{n=1}^N f_n(x)$ punktweise bzw. gleichmäßig konvergent ist. Diese Definition ist als Beweismethode unhandlich.

In der Praxis sucht man eine Folge $M_n \geq |f_n(x)|$, die insbesondere von x unabhängig ist. Außerdem muss $\sum_{n=1}^\infty M_n$ konvergieren. Dann konvergiert die Funktionenfolge und sogar die Folge der Beträge von f_n gleichmäßig. (Majorantenkriterium)

Ableitungen und Integrale von Funktionenreihen

Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergent ist und f, f_n stetig und integrierbar sind, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ wenigstens punktweise konvergent und f_n stetig diff'bar. Ist dann die Reihe der Ableitungen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ gleichmäßig konvergent, so kann man Summation und Differentiation vertauschen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum f_n = \sum \frac{\partial}{\partial x} f_n$$

Fourierreihen

Fourierreihen sind besondere Funktionenreihen. Eine beliebige 2π -periodische Funktion f lässt sich als durch eine Reihe von periodischen Funktionen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

oder

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

ausdrücken, die gegen f konvergiert.

Die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n, c_n lassen sich berechnen nach den Vorschriften

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \sin(nx) dx,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot e^{-ikx} dx.$$

Die Koeffizienten lassen sich auch ineinander umrechnen:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-k} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Dabei müssen die Integrationsgrenzen nicht unbedingt 0 und 2π sein. Wichtig ist, dass stets über eine volle Periode von 2π integriert wird. Häufig werden auch $-\pi$ und π als Grenzen verwendet. Es hängt davon ab, wie die Funktion f definiert ist.

Rechenregeln

Fourierreihen weisen einige interessante Eigenschaften auf:

- $f(x) = f(-x)$, also f symmetrisch zur y -Achse: Alle $b_n = 0$.
- $f(x) = -f(-x)$, also f symmetrisch zum Ursprung: Alle $a_n = 0$.

Anwendung auf Differentialgleichungen

$$au'' + bu' + cu = f(x)$$

sei eine Differentialgleichung, deren Koeffizienten a, b, c konstant seien. Dann lässt sich aus der Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ zu f die Fourierreihe der Lösung berechnen. Dazu wählt man $u(x) \sim \sum d_n e^{inx}$, berechnet die benötigten Ableitungen und setzt sie in die DGL ein. Dann kann man die Fourierkoeffizienten der Lösung durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Wahrscheinlichkeitsraum, in dem alle Elementarereignisse ω gleich wahrscheinlich sind und auf jeden Fall immer ein Elementarereignis eintritt, heißt „Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum“ und es gilt:

- $p(\omega_i) = \frac{1}{N}$, also die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis unter der Annahme, dass es N Ereignisse gibt.
- $p(\Omega) = 1 \Leftrightarrow p(\omega_i^{-1}) = 1 - p(\omega_i)$, die Wahrscheinlichkeit, dass „irgendwas“ passiert ist 1, also ist die Gegenwahrscheinlichkeit für ein gegebenes Ereignis 1 minus seine Wahrscheinlichkeit.
- Sei A ein Ereignis, welches sich aus n laplaceschen Elementarereignissen zusammensetzt, dann gilt $p(A) = \frac{n}{N}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit „die Anzahl der Fälle in A durch die Gesamtzahl der Fälle im Wahrscheinlichkeitsraum“.

Bernoulli-Verteilung

Bestehe ein Experiment aus der N-fachen Wiederholung eines Experimentes, welches nur zwei Mögliche Ergebnisse hat ($p(\text{Erfolg})=p$, $p(\text{Misserfolg})=1-p$), dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, k Einzelerfolge bei N Experimenten erzielt zu haben

$$p^k \cdot (1 - p)^{N-k}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien A, B Ereignismengen im gleichen Wahrscheinlichkeitsraum, dann ist die Wahrscheinlichkeit für A, gegeben dass B eingetreten ist:

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$$

Dabei sei $\#(\dots)$ die Mächtigkeit einer Menge. Man benutzt, was einfacher zu berechnen ist.

stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse heißen stochastisch unabhängig, wenn $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ gilt. Das bedeutet insbesondere, dass die „bedingte Wahrscheinlichkeit“ $p(A / B) = p(A)$ gar keine bedingte ist.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Eine vollständige Ereignisdisjunktion besteht aus einer Menge $\{A_1, \dots, A_N\}$ von Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen. Dann besagt der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$p(B) = \sum_{i=1}^N p(B / A_i) \cdot p(A_i)$$

und die Bayessche Formel

$$p(A_k / B) = \frac{p(B / A_k) \cdot p(A_k)}{p(B)} = \frac{p(B / A_k) \cdot p(A_k)}{\sum_{i=1}^N p(B / A_i) \cdot p(A_i)}$$

Zufallsvariable, Erwartungswert

Eine Zufallsvariable $X(\omega)$ ist definiert durch eine Zuordnung, die dem Ereignis ω eine Zahl zuordnet, zum Beispiel einen Gewinn.

Der Erwartungswert gibt dann an, wie groß der zu erwartende Gewinn (allgemein: Die Summe der durch die Zufallsvariable erzeugten Werte) ist. Er wird berechnet als

$$E(X) = \sum_{\forall \omega} p(\omega) \cdot X(\omega)$$

Varianz, Streuung

$Var(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$ ist die Varianz und $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ die Streuung (Standardabweichung) von X .

HINWEIS

Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und formale oder inhaltliche Korrektheit. Sie soll das Lernen vor der Klausur erleichtern und bietet eine Auswahl an Formeln und Verfahren an, die sich möglicherweise ganz gut auf dem Formelzettel machen ;-)

Für eine umfassende Klausurvorbereitung empfehle ich jedoch die Lektüre von Prof. Behrmans' Skript und das Anfertigen einer eigenen Zusammenfassung.

Sollte ein Leser oder eine Leserin einen mathematischen Fehler finden, so möge er/sie mich bitte unter martin.gritzan@web.de kontaktieren.