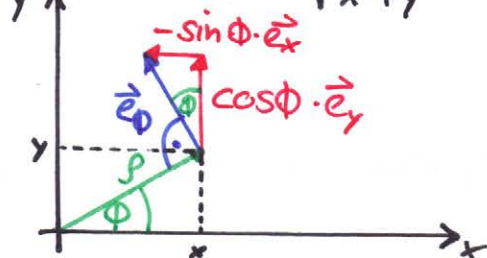


Aufgabe 1

a) $\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\phi$

$$\vec{B}_{1\phi}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



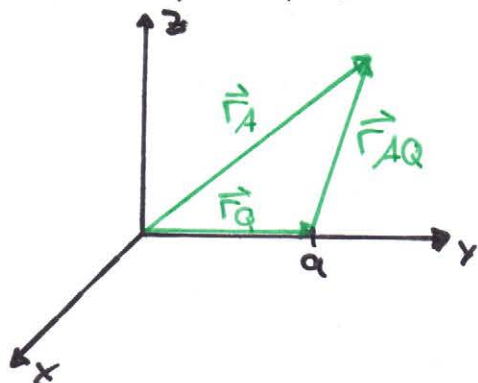
$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(\vec{r}) &= \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\phi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{e}_y \right] \\ &= \frac{1}{x^2+y^2} [-y \cdot \vec{e}_x + x \cdot \vec{e}_y] \end{aligned}$$

b) $\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r$ N.R. $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r \Leftrightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

c) $\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{1}{r_{AQ}^2} \cdot \vec{e}_{r_{AQ}}$ mit $\vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_y$

($\vec{r}_A$: Aufpunkt, $\vec{r}_Q$: Quellpunkt)

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q$$

$$\vec{e}_{r_{AQ}} = \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}}$$

In kartesischen Koordinaten (allgemein):

$$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{e}_x + y_A \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_Q = x_Q \cdot \vec{e}_x + y_Q \cdot \vec{e}_y + z_Q \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = (x_A - x_Q) \cdot \vec{e}_x + (y_A - y_Q) \cdot \vec{e}_y + (z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z$$

hier (mit $\vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_y$)

$$= x_A \cdot \vec{e}_x + (y_A - a) \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3} = \frac{x_A \cdot \vec{e}_x + (y_A - a) \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z}{(x_A^2 + (y_A - a)^2 + z_A^2)^{3/2}}$$

⚠ (*) nur in kartesischen Koordinaten erlaubt

(*) komponentenweise Subtraktion von Ortsvektoren
 ist nur in kartesischen Koordinaten erlaubt
 (wegen konstanter Einheitsvektoren)

Bsp. Kugelkoordinaten:

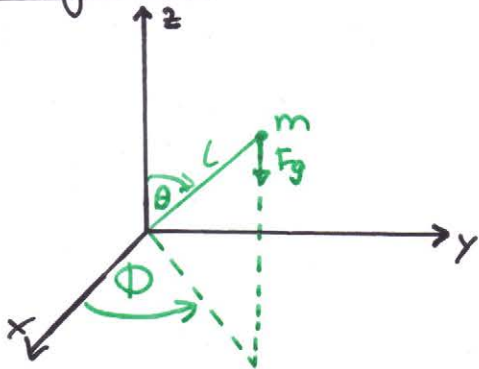
$$\vec{r}_A = r_A \cdot \vec{e}_{r_A} \quad \vec{r}_Q = r_Q \cdot \vec{e}_{r_Q}$$

im Allg.
 $\vec{e}_{r_A} \neq \vec{e}_{r_Q}$

Aber Addition/Subtraktion von Vektorfeldern an
 einem eindeutigen Aufpunkt ist in allen drei
 Koordinatensystemen komponentenweise erlaubt.
 (Einheitsvektoren eindeutig!)

z.B. $\vec{F}_1(\vec{r}_A) + \vec{F}_2(\vec{r}_A)$
 $= (F_{1r} + F_{2r})\vec{e}_{r_A} + (F_{1\theta} + F_{2\theta})\vec{e}_{\theta_A} + (F_{1\phi} + F_{2\phi})\vec{e}_{\phi_A}$

Aufgabe 2



Ort der Masse: $\vec{r} = \vec{l} = l \cdot \vec{e}_r$

$$\vec{F}_g = \underbrace{F_{g,z}}_{>0} \cdot \vec{e}_z = -m \cdot g \cdot \vec{e}_z$$

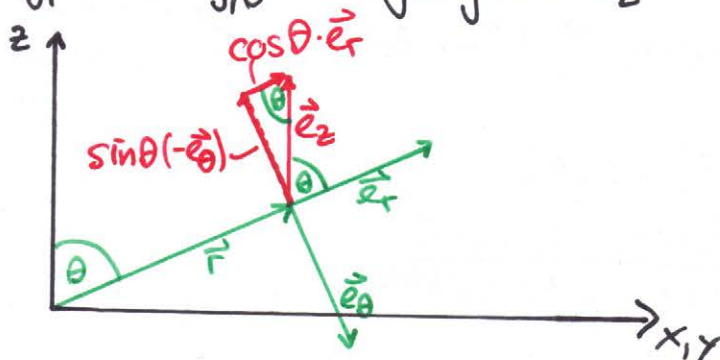
$\vec{F}_g$ in Kugelkoordinaten:

1) Wegen $\vec{e}_z \perp \vec{e}_{\phi}$, d.h. $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{\phi} = 0$:

$$F_{g,\phi} = \vec{F}_g \cdot \vec{e}_{\phi} = 0$$

Projektion von $\vec{F}_g$ auf $\vec{e}_{\phi}$ -Richtung

2) $F_{g,r}$ und $F_{g,\theta}$: Zerlegung von $\vec{e}_z$:



$$\vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{Insgesamt: } \vec{F}_g = \underbrace{-m \cdot g \cdot \cos \theta}_{F_{g,r}} \vec{e}_r + \underbrace{m \cdot g \cdot \sin \theta}_{F_{g,\theta}} \vec{e}_\theta$$

- Zugkraft auf den Stab:

$$F_c = \vec{F}_g \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{F}_g \cdot \vec{e}_r = F_{g,r} = -m \cdot g \cdot \cos \theta$$

Anmerkung: $F_L < 0$ für $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ bzw. $z > 0 \Rightarrow$ Druckkraft
 $F_L > 0$ für $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ bzw. $z < 0 \Rightarrow$ Saugkraft

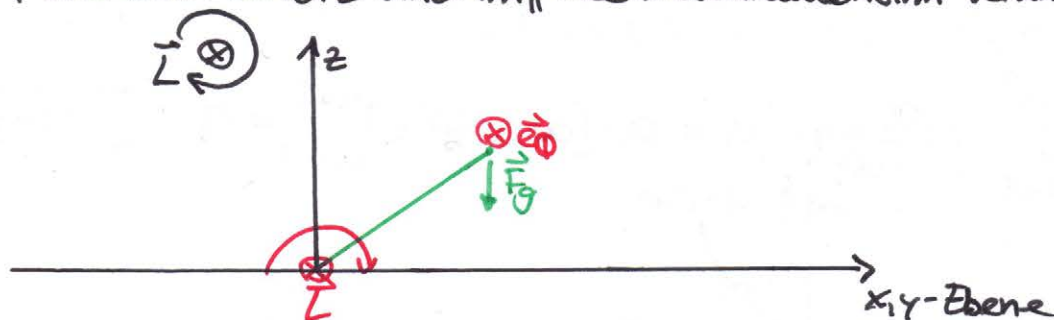
$F_1 > 0$ für $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ bzw. $z < 0 \hat{=}$ Zugkraft

- Drehmoment:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L} \times \vec{F}_g = (L \cdot \vec{e}_r) \times (-m g \cdot \cos \theta \vec{e}_r + m g \cdot \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ &= (-L \cdot m g \cdot \cos \theta) \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_r)}_{=0} + (L \cdot m g \cdot \sin \theta) \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta)}_{=\vec{e}_\phi}\end{aligned}$$

$$\vec{L} = L \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta \vec{e}_\phi$$

Anm.: Der Betrag von $\vec{L}$ gibt die Größe des Drehmoments an, die Richtung von $\vec{L}$ die Drehachse (Drehsinn und $\vec{L}$ sind im „Rechtsschraubensinn“ verknüpft).



„Merke regel“ für rechtshändige Einheitsvektorsysteme:

$$x, y, z \quad (\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y)$$

$$g, \Phi, z \quad (e_\Phi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\theta)$$

$$r, \theta, \phi \quad (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta)$$

Andererseits: $\vec{e}_\phi \times \vec{e}_\theta = -\vec{e}_z$ 

Aufgabe 3

a) Kurve S mit Kurvenparameter x :

$$S: \{(x, y, z) \mid x \in [-a, a], y = \sqrt{a^2 - x^2}, z = 0\}$$

$$l = \int ds$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y(x) \cdot \vec{e}_y = x \cdot \vec{e}_x + \sqrt{a^2 - x^2} \vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{e}_x + \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \vec{e}_y$$

$$d\vec{s} = d\vec{r} = \left(\vec{e}_x - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \vec{e}_y \right) dx$$

$$ds = |d\vec{s}| = \sqrt{1 + \underbrace{\frac{x^2}{a^2 - x^2}}_{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \cdot \underbrace{|dx|}_{dx, \text{ falls } dx \geq 0}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx$$

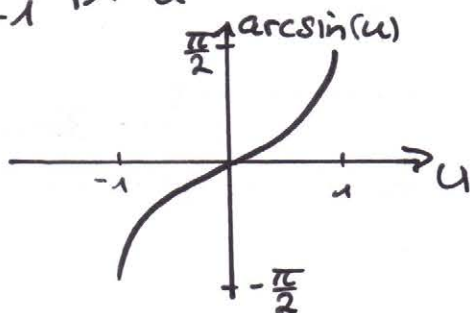
$$L = \int_s ds = \int_{x=-a}^a \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx \geq 0 \quad \checkmark$$

(bei $|dx| < 0$ hätte man $\int_a^{-a}$
 $\Rightarrow |dx| = -dx$)

$$u = \frac{x}{a}$$

$$du = \frac{dx}{a} \quad x = \pm a \Leftrightarrow u = \pm 1$$

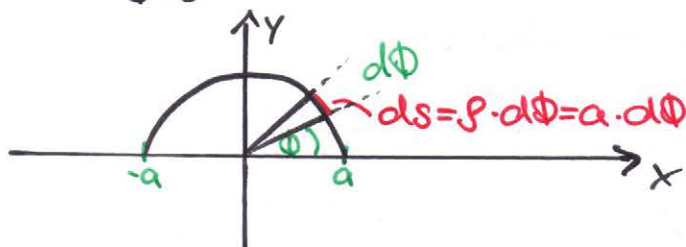
$$L = \int_{u=-1}^1 \frac{a}{\sqrt{1-u^2}} du = a \cdot [\arcsin(u)]_{u=-1}^{u=1} = a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = a \cdot \pi$$



b) Kurve S mit Kurvenparameter Φ :

$$S: \{ (s, \Phi, z) \mid s=a, \Phi \in [0, \pi], z=0 \}$$

$$L = \int_s ds = \int_{\Phi=0}^{\pi} a \cdot d\Phi = a \cdot [\Phi]_{\Phi=0}^{\Phi=\pi} = a \cdot \pi$$



ET 3

Ü 2

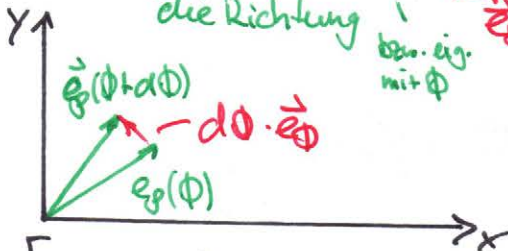
Aufgabe 4 (orientiertes Kurvenintegral)

-3- Kurve $S: \vec{r}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho + z(t) \vec{e}_z$ mit $\Phi(t) = \pi \cdot t, t \in [0, 2]$

$$= a(t+1) \vec{e}_\rho + at \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt} \vec{e}_\rho + \rho(t) \cdot \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{e}_z$$

Produktregel beachten,
 $\vec{e}_\rho$ ändert mit t
 die Richtung
 bzw. eig. mit Φ

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\Phi} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\Phi} \cdot \pi$$


[oder $\vec{e}_\rho = \cos\Phi \vec{e}_x + \sin\Phi \vec{e}_y$ ableiten]

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = a \cdot \vec{e}_\rho + a(t+1)\pi \vec{e}_\Phi + a \cdot \vec{e}_z$$

$$d\vec{s} = d\vec{r} = (a \cdot \vec{e}_\rho + a(t+1)\pi \cdot \vec{e}_\Phi + a \cdot \vec{e}_z) dt$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = F_0 \left(\frac{a}{\rho(t)} \vec{e}_\rho + \frac{\Phi(t)}{\pi} \vec{e}_z \right)$$

$$= F_0 \left(\frac{1}{t+1} \vec{e}_\rho + t \cdot \vec{e}_z \right)$$

$\vec{e}_\Phi$ Komponente entfällt, da $F_\Phi = 0$ & Vektorskalarpunkt
 $\begin{pmatrix} \dots & \vec{e}_\rho \\ 0 & \vec{e}_\Phi \\ \dots & \vec{e}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \vec{e}_\rho \\ - & \vec{e}_\Phi \\ \dots & \vec{e}_z \end{pmatrix}$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{s} = \left(F_0 \cdot \frac{1}{t+1} \cdot a + F_0 \cdot t \cdot a \right) dt$$

$$W = \int_S \vec{F} d\vec{s} = F_0 \cdot a \cdot \int_{t=0}^2 \left(\frac{1}{t+1} + t \right) dt$$

$$= F_0 \cdot a \cdot \left[\ln|t+1| + \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=2} = F_0 \cdot a \cdot [\ln(3) + 2]$$

Aufgabe 5

a) wegen Rotationssymmetrie bzgl. der z-Achse hier sinnvoll: Zylinderkoordinaten

Aufpunktvektor: $\vec{r}_A = b \cdot \vec{e}_z$

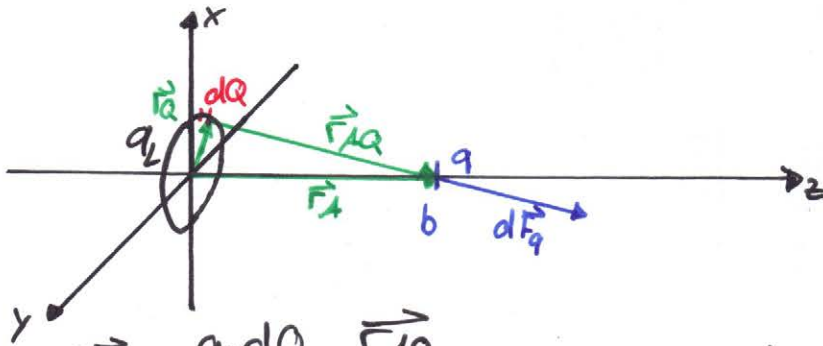
Quelpunktvektor: $\vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_{\rho_Q}$ (abhängig von Φ_Q !)

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_{\rho_Q}$$

(Quellengebiet: $S_Q = a$, $0 \leq \Phi_Q < 2\pi$, $z_Q = 0$)

Kraftbeitrag eines Ladungselements dQ

$$dQ = q_L \cdot ds:$$

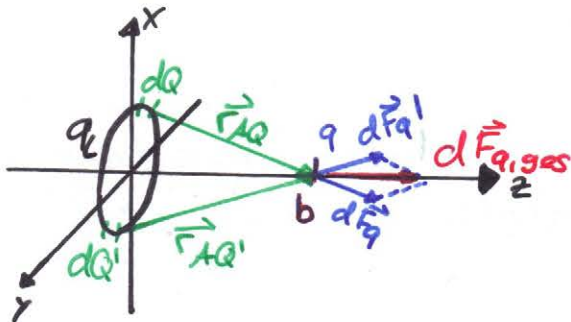


$$d\vec{F}_Q = \frac{q \cdot dQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3} \quad \text{mit } r_{AQ} = |\vec{r}_{AQ}| = \sqrt{b^2 + a^2},$$

$$\text{also } d\vec{F}_Q = \frac{q \cdot dQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b\vec{e}_z - a\vec{e}_{\phi_0}}{\sqrt{b^2 + a^2}^3}$$

(Anm.: $d\vec{F}_Q$ hat keine Φ -Komponente)

Kraftbeitrag eines spiegelsymmetrisch zu dQ angeordneten Ladungselements dQ' :



Insgesamt folgt aus der Rotationssymmetrie der Anordnung:

$$\vec{F}_Q(0,0,b) = F_{Q,z}(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_Q(0,0,b) = \int_S dF_{Q,z}(0,0,b) \vec{e}_z$$

$$\text{mit } dF_{Q,z} = \frac{q \cdot dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}^3} \quad \text{und } dQ = q_L \cdot ds = q_L \cdot a \cdot d\Phi_Q$$

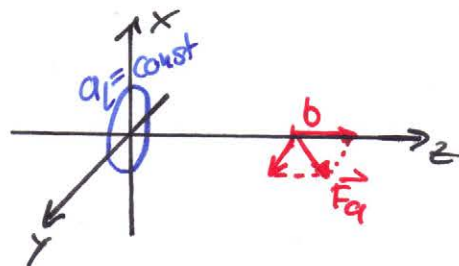
$$\vec{F}_Q(0,0,b) = \frac{q \cdot q_L}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b}{(b^2 + a^2)^{3/2}} \cdot a \cdot \int_{\Phi=0}^{2\pi} d\Phi_Q \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{q \cdot q_L}{2\epsilon_0} \cdot \frac{a \cdot b}{(b^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_z$$

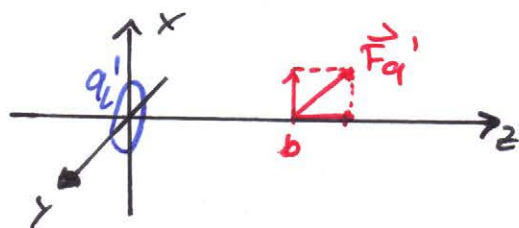
Andere Symmetrie-Überlegung:

18.10.2011

- Annahme: $\vec{F}_q(0,0,b)$ hat auch eine Komponente $\perp$ zur z-Achse (z.B. y-Richtung)



- Drehung der Anordnung um die z-Achse z.B. um den Winkel $-\pi/2$ ergibt



- Beobachtung

$$\left. \begin{array}{l} 1) q_L'(\vec{r}) = q_L(\vec{r}) \\ 2) \vec{F}_q' \neq \vec{F}_q \end{array} \right\} \text{Widerspruch}$$

$\Rightarrow \vec{F}_q(0,0,b)$ kann keine Komponente $\perp$ zur z-Achse haben

(Gilt hier, da $q_L(\vec{r})$ rotationssymmetrisch zur z-Achse ist und der Aufpunkt in der Symmetrieachse liegt.)

Ergänzung zu Aufgabe 5:

28.10.2011

„Fernfeld“ (entlang der z-Achse) d.h. $b \gg a$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{\vec{F}_q(0,0,b)}{q} = \frac{q_L \cdot b \cdot a}{2\epsilon_0 \sqrt{b^2 + a^2}^3} \vec{e}_z$$

$$\approx \sqrt{b^2}^3 = |b|^3 = b^3 \quad (b > 0)$$

$$\approx \frac{q_L \cdot a}{2\epsilon_0 b^2} \cdot \vec{e}_z$$

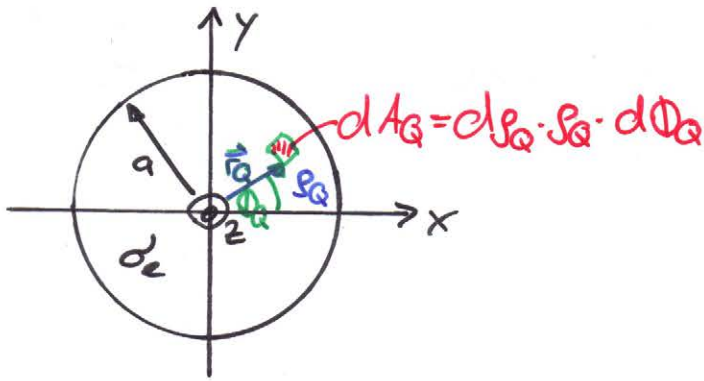
Mit $Q = 2\pi a q_L$ (Gesamtladung der Linienladung):

$$\vec{E}(0,0,b) \approx \frac{q_L \cdot a \cdot 2\pi}{2\pi \cdot 2 \cdot \epsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z = \frac{q_L \cdot 2\pi a}{4\pi \epsilon_0 b^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 b^2} \cdot \vec{e}_z \quad (b > 0)$$

entspricht dem Feld einer Punktladung Q im Ursprung.

Aufgabe 6

a)



$$dQ = \sigma_z \cdot dA_Q = \sigma_z \cdot ds_Q \cdot s_Q \cdot d\Phi_Q$$

$$\vec{r}_Q = s_Q \cdot \vec{e}_{s_Q} \quad (\text{abhängig von } \Phi_Q)$$

$$\vec{r}_A = b \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = b \vec{e}_z - s_Q \vec{e}_{s_Q}$$

Quellengebiet: $0 \leq s_Q \leq a$

$0 \leq \Phi_Q < 2\pi$

$z_Q = 0$

→ Integrationsgrenzen

$$b) \vec{F}_Q(0,0,b) = \int_{s_Q=0}^a \int_{\Phi_Q=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{q \cdot dQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}}_{d\vec{F}_Q}$$

Aus Rotationssymmetrie folgt (vgl. A5)

$$\vec{F}_Q(0,0,b) = \vec{F}_{Q,z}(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

$$d\vec{F}_{Q,z}(0,0,b) = dF_Q(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

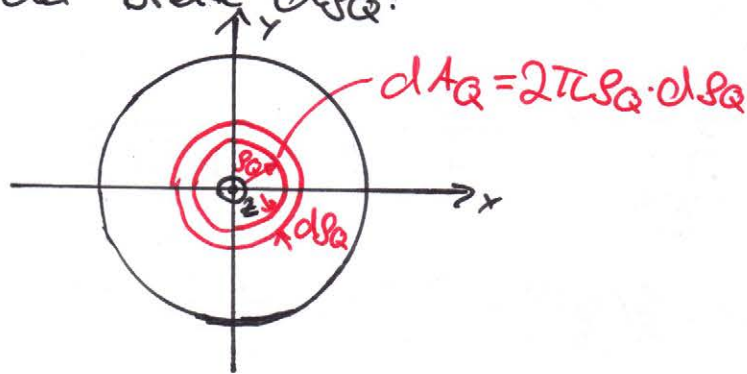
$$= \underbrace{\frac{\vec{r}_{AQ} \cdot \vec{e}_z}{r_{AQ}^3}}_b \cdot \frac{q \cdot \sigma_z \cdot s_Q \cdot d\Phi_Q \cdot ds_Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\frac{b}{(s_Q^2 + b^2)^{3/2}}$$

Die Teilintegration über Φ_Q ist trivial (2π):

$$F_{Q,z}(0,0,b) = \frac{q \cdot \sigma_z \cdot b}{4\pi\epsilon_0} \int_{s_Q=0}^a \frac{s_Q ds_Q}{(s_Q^2 + b^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\Phi_Q}_{2\pi}$$

Ansatz mit dem Ergebnis aus Aufgabe 5b),
angewandt auf einen Kreistring mit dem Radius
 s_Q und der Breite ds_Q :



$$dQ = \sigma_e \cdot dA_Q$$

Annäherung durch ringförmige Linienladung mit dem
Radius s_Q und dem Ladungsbelag dq_L

$$dQ = \sigma_e \cdot 2\pi \cdot s_Q \cdot ds_Q \stackrel{!}{=} dq_L \cdot 2\pi s_Q$$

$$\Rightarrow dq_L = \sigma_e \cdot ds_Q$$

$$(\text{Einheiten: } [dq_L] = \frac{\text{As}}{\text{m}}, [\sigma_e \cdot ds_Q] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \cdot \text{m})$$

Ersetze in Aufgabe 5b):

$$F_{q,z}(a, a, b) \text{ durch } dF_{q,z}(a, a, b)$$

$$q_L \text{ durch } dq_L$$

$$a \text{ durch } s_Q$$

Damit:

$$dF_{q,z}(a, a, b) = \frac{q \cdot dq_L}{2 \epsilon_0} \cdot \frac{b \cdot s_Q}{[b^2 + s_Q^2]^{3/2}}$$

$$F_{q,z}(a, a, b) = \frac{q \cdot \sigma_e \cdot b}{2 \epsilon_0} \cdot \int_{s_Q=0}^a \frac{s_Q \cdot ds_Q}{(b^2 + s_Q^2)^{3/2}} \quad \text{mit } dq_L = \sigma_e \cdot ds_Q$$

$$c) F_{q,z}(a, a, b) \stackrel{\text{HINWEIS}}{=} \frac{q \cdot \sigma_e \cdot b}{2 \epsilon_0} \left[-\frac{1}{(s_Q^2 + b^2)^{1/2}} \right]_{s_Q=0}^{s_Q=a}$$

$$\vec{F}_q(a, a, b) = F_{q,z}(a, a, b) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{q \cdot \sigma_e \cdot b}{2 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{|b|} \right] \vec{e}_z$$

$\underbrace{\frac{1}{|b|}}_{b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b}}$

• Fernfeld: $b \gg a$

HINWEIS₂: $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ für $|x| \ll 1$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{\vec{F}_q(0,0,b)}{q} = \frac{\sigma_e \cdot b}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}_{\ll 1}}} + 1 \right] \cdot \vec{e}_z$$

HINWEIS₂ mit $x = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

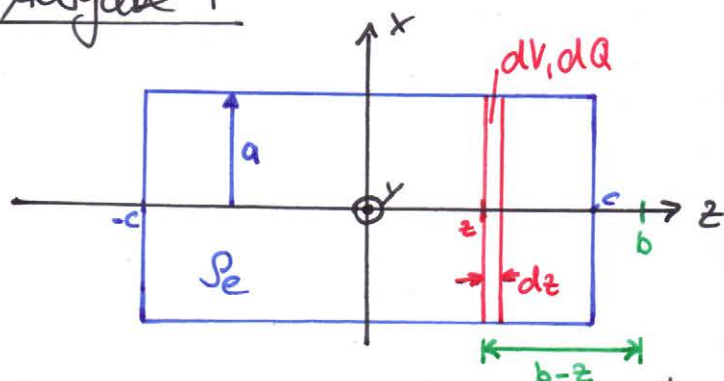
$$\approx \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \underbrace{\left[-\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right) + 1 \right]}_{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2} \vec{e}_z = \frac{\sigma_e \cdot a^2 \cdot \pi}{4\epsilon_0 b^2 \cdot \pi} \cdot \vec{e}_z$$

Mit Gesamtladung $Q = \sigma_e \cdot \pi \cdot a^2$

$$\vec{E}(0,0,b) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{für } b > 0, b \gg a)$$

(auch hier näherungsweise das Fernfeld einer Punktladung)

Aufgabe 7



a) $dQ = \rho_e \cdot dV = \rho_e \cdot \pi \cdot a^2 dz \stackrel{!}{=} d\sigma_e \cdot \pi a^2$

$\Rightarrow \underline{d\sigma_e = \rho_e \cdot dz}$

Ersetze im Ergebnis aus Aufgabe 6c) (mit $\vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q}$)

$\vec{E}(0,0,b)$ durch $d\vec{E}(0,0,b)$

σ_e durch $d\sigma_e$

b durch $b-z$

In Aufgabe 6c): $b > 0$, hier: $b-z > 0$, also $b > c \geq z$

$$d\vec{E}(0,0,b) = \frac{d\sigma_e (b-z)}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}} + \underbrace{\frac{1}{|b-z|}}_{\substack{b \geq z \\ \frac{1}{b-z}}} \right] \vec{e}_z$$

b) $\vec{E}(0,0,b) = \int_{z=-c}^c d\vec{E}(0,0,b)$ beachte $d\sigma_z = \rho_e dz$ (aus a))

$$= \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \int_{z=-c}^c \left[-\frac{b-z}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}} + 1 \right] dz \cdot \vec{e}_z$$

$\frac{d}{dz} (\sqrt{a^2 + (b-z)^2})$

wegen $\frac{d}{dx} \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$

$$= \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \left(\left[\sqrt{a^2 + (b-z)^2} \right]_{z=-c}^{z=c} + 2c \right) \vec{e}_z$$

$\uparrow$
 $c - (-c)$

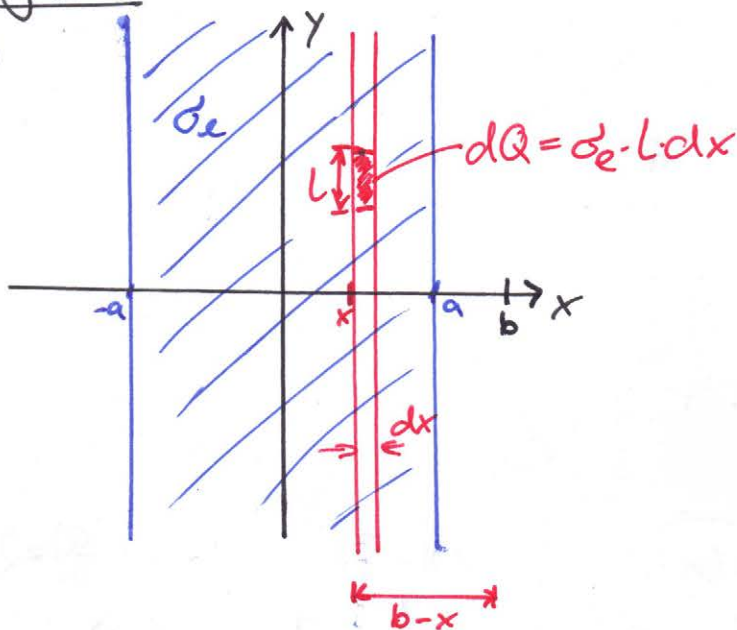
$$= \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + (b-c)^2} - \sqrt{a^2 + (b+c)^2} + 2c \right) \cdot \vec{e}_z$$

für $b > c$

Anmerkung: Das Ergebnis gilt nicht für $b < c$.
z.B. $\vec{E}(0,0,b=0) = 0$ aus Symmetrie

Aufgabe 8

a)



$$dQ = \underbrace{\sigma_e}_{\text{Originalladung}} \cdot L \cdot dx \stackrel{!}{=} \underbrace{dq_L}_{\text{Ersatzladung}} \cdot L$$

$$\Rightarrow dq_L = \sigma_e \cdot dx$$

b) Aus der Vorlesung, für Linienladung q_L in der z -Achse:

$$\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\rho$$

Ersetze:

- ρ durch $b-x$
- $\vec{e}_\rho$ durch $\vec{e}_x$
- q_L durch dq_L
- $\vec{E}$ durch $d\vec{E}$

$$dE_x = \frac{dq_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{b-x}$$

$$d\vec{E} = \frac{dq_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{b-x} \cdot \vec{e}_x$$

$$c) \vec{E}(b, 0, 0) = \int_{x=-a}^a d\vec{E} = \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_{x=-a}^a \underbrace{\frac{dx}{b-x}}_{-\frac{dx}{x-b} = -\frac{d}{dx} \ln(|x-b|) \cdot dx} \cdot \vec{e}_x$$

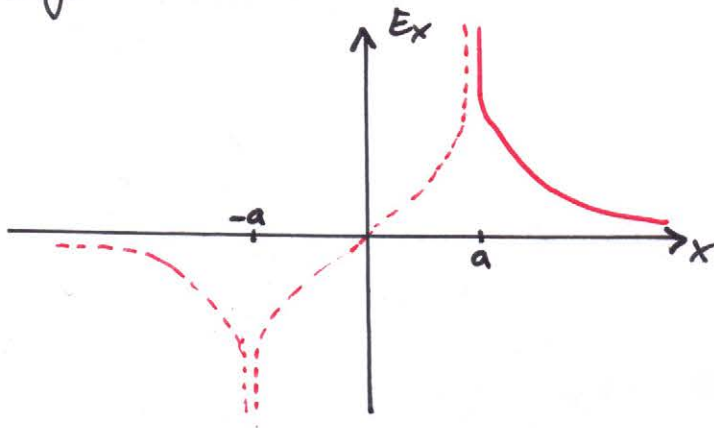
$$= \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \left[-\ln|x-b| \right]_{x=-a}^{x=a} \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} [\ln|a-b| - \ln|a-b|] \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{|1-a-b|}{|a-b|}\right) \right] \vec{e}_x$$

$$\stackrel{b>a}{=} \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a+b}{b-a}\right) \vec{e}_x$$

Anmerkung:



d) Fernfeld ($b \gg a$):

$$\vec{E}(b, 0, 0) = \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\frac{a}{b} + 1}{1 - \frac{a}{b}}\right) \vec{e}_x$$

$$\stackrel{b \gg a}{=} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) - \ln\left(1 - \frac{a}{b}\right) \approx \frac{a}{b} - \left(-\frac{a}{b}\right) = 2 \frac{a}{b}$$

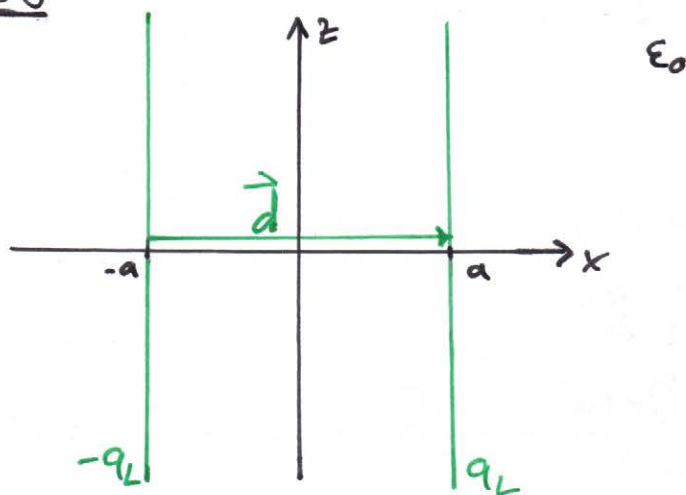
$$\vec{E}(b, 0, 0) \stackrel{b \gg a}{=} \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot 2 \frac{a}{b} \vec{e}_x = \frac{\sigma_e}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a}{b} \cdot \vec{e}_x \stackrel{!}{=} \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \vec{e}_x$$

$$\text{mit } q_L = \underbrace{2 \cdot a \cdot \sigma_e}_{\text{Breite des Streifens}}$$

Breite des Streifens

→ Feld einer Linienladung in der y-Achse

Aufgabe 9



Linien Dipolmoment:

$$\vec{p}_L = q_L \cdot \vec{d} = \text{const} \quad (\text{auch für } d \rightarrow 0)$$

Bekannt: Feld einer Linienladung q_L in der z -Achse
in Zylinderkoordinaten

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_z}{\rho}$$

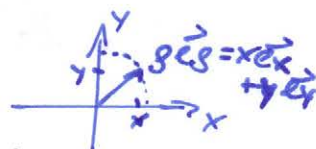
Hier: Zwei Linienladungen parallel zur z -Achse, um $\pm a \cdot \vec{e}_x$
verschoben

→ keine zylindersymmetrische Anordnung

→ Zylinderkoordinaten ungeeignet!

Zunächst Koordinatentransformation:

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho \vec{e}_\rho}{\rho^2} \quad (\text{erweitert, damit der Zähler "angenehmer" bei der Rechnung ist})$$



Dann Verschiebung:

1) q_L bei $x=a$:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x-a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{(x-a)^2 + y^2}$$

(vgl. $\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q$, deswegen $-a$ bei $"a"$)

2) $-q_L$ bei $x=-a$:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{-q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x+a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{(x+a)^2 + y^2}$$

Superposition:

$$\vec{E}_{\text{ges}}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$$

x -komponente:

$$E_{\text{ges},x}(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

mit Abkürzungen:

$$(x-a)^2 + y^2 =: \rho_1^2$$

$$(x+a)^2 + y^2 =: \rho_2^2$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{ges,x}(\vec{r})}{\frac{q_L}{2\pi\epsilon_0}} &= \frac{(x-a)[(x+a)^2 + y^2] - (x+a)[(x-a)^2 + y^2]}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} \\ &= \frac{\overbrace{(x-a)(x+a)}^{x^2-a^2} \underbrace{[(x+a)-(x-a)]}_{=2a}}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} + \frac{y^2 \underbrace{[(x-a)-(x+a)]}_{=-2a}}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} \\ &= \frac{(x^2 - a^2 - y^2) \cdot 2a}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} \end{aligned}$$

mit $p_L = q_L \cdot d = q_L \cdot 2a$ (*)

$$E_{ges,x} = \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 - a^2 - y^2)}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{ges,y}(\vec{r})}{\frac{q_L}{2\pi\epsilon_0}} &= \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \\ &= \frac{y[(x+a)^2 + y^2] - y[(x-a)^2 + y^2]}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} = \frac{y \overbrace{[(x+a)^2 + y^2 - (x-a)^2 - y^2]}^{x^2+2ax+a^2 - x^2+2ax-a^2}}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} \\ &= \frac{y \cdot 4 \cdot x \cdot a}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} \quad (*) \end{aligned}$$

$$E_{ges,y}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2xy}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

Grenzübergang: $d \rightarrow 0$, d.h. $a \rightarrow 0$

$q_L \rightarrow \infty$ mit $p_L = \text{const}$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_1^2 = x^2 + y^2$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_2^2 = x^2 + y^2$$

Damit

$$\lim_{a \rightarrow 0} E_{ges,x}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} E_{ges,y}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{Also: } \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \vec{E}_{\text{ges}}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 - y^2)\vec{e}_x + 2xy \cdot \vec{e}_y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Aufgabe 10

„Ebenes Problem“: keine Abhängigkeit von z , keine z -komponente

Feldliniengleichung: $\frac{E_x}{dx} = \frac{E_y}{dy}$



→ Zylinderkoordinaten

Hier: $d\vec{s} = ds \vec{e}_s + \rho d\phi \vec{e}_\phi$

$$\vec{E} = E_\rho \cdot \vec{e}_\rho + E_\phi \cdot \vec{e}_\phi$$

Feldliniengleichung: $\frac{E_\rho}{ds} = \frac{E_\phi}{\rho \cdot d\phi}$

In jedem Punkt der Feldlinien gilt $d\vec{s} \parallel \vec{E}$

a) Transformation von $\vec{E}(\vec{r})$ aus Aufgabe 9 in Zylinderkoordinaten

mit: $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$

$$\vec{e}_x = \cos \phi \vec{e}_\rho - \sin \phi \vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_y = \sin \phi \vec{e}_\rho + \cos \phi \vec{e}_\phi$$

$$\frac{\vec{E}(\vec{r})}{\frac{p_L}{2\pi\epsilon_0}} = \left[(\rho^2 \cos^2 \phi - \rho^2 \sin^2 \phi) (\cos \phi \vec{e}_\rho - \sin \phi \vec{e}_\phi) + 2\rho^2 \cos \phi \sin \phi (\sin \phi \vec{e}_\rho + \cos \phi \vec{e}_\phi) \right] \cdot \frac{1}{\rho^4}$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \left[(\cos^3 \phi - \sin^2 \phi \cos \phi + 2 \cos \phi \sin^2 \phi) \vec{e}_\rho + (-\cos^2 \phi \sin \phi + \sin^3 \phi + 2 \cos^2 \phi \sin \phi) \vec{e}_\phi \right]$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \left[\underbrace{(\cos^3 \phi + \cos \phi \sin^2 \phi)}_{\cos \phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \cos \phi} \vec{e}_\rho + \underbrace{(\sin^3 \phi + \cos^2 \phi \sin \phi)}_{\sin \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \sin \phi} \vec{e}_\phi \right]$$

$$= \frac{1}{\rho^2} [\cos \Phi \vec{e}_\rho + \sin \Phi \vec{e}_\Phi]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{P_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho^2} [\cos \Phi \vec{e}_\rho + \sin \Phi \vec{e}_\Phi]$$

b) DGL (umgeformt)

$$\frac{d\rho}{\rho d\Phi} = \frac{E_\rho}{E_\Phi} = \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi}$$

(für $\rho > 0$ und $0 < \Phi < 2\pi, \Phi \neq \pi$)

Trennung der Variablen:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi} d\Phi$$

Integration:

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi} d\Phi \quad \left| \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \right.$$

$$\ln \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) = \ln |\sin \Phi| + C_2 \quad 1 \cdot e^{(\dots)}$$

↑
statt Integrationskonstante C_1

[Anmerkung: $|\rho| = \rho$ wegen $\rho > 0$]

$$\frac{\rho}{\rho_1} = |\sin \Phi| e^{C_2}$$

$$\rho = |\sin \Phi| \underbrace{e^{C_2 \cdot \rho_1}}_{=: C} \quad (\text{Einheit: 1m})$$

Ü5

14.11.2011

entspricht einer parametrischen Beschreibung der Feldlinien (jeder Feldlinie ist eine konstante $C > 0$ zugeordnet)

$$\rho = C \cdot |\sin \Phi|$$

(für $\rho > 0$ und $0 < \Phi < 2\pi, \Phi \neq \pi$)

c) Transformation in kartesische Koordinaten:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C \cdot \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$$

$$x^2 + y^2 = C \cdot |y|$$

zu zeigen:

Diese Gleichung entspricht einer Kreisgleichung.

Allgemein gilt für Kreise in der x-y-Ebene

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Mittelpunkt: (x_M, y_M) ; Radius: R

Hier:

$$x^2 + y^2 - C \cdot |y| = 0$$

|quadratische Ergänzung

$$x^2 + y^2 - C \cdot |y| + \left(\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2 = R^2 \quad \text{bzw. } \frac{C}{2} = R$$

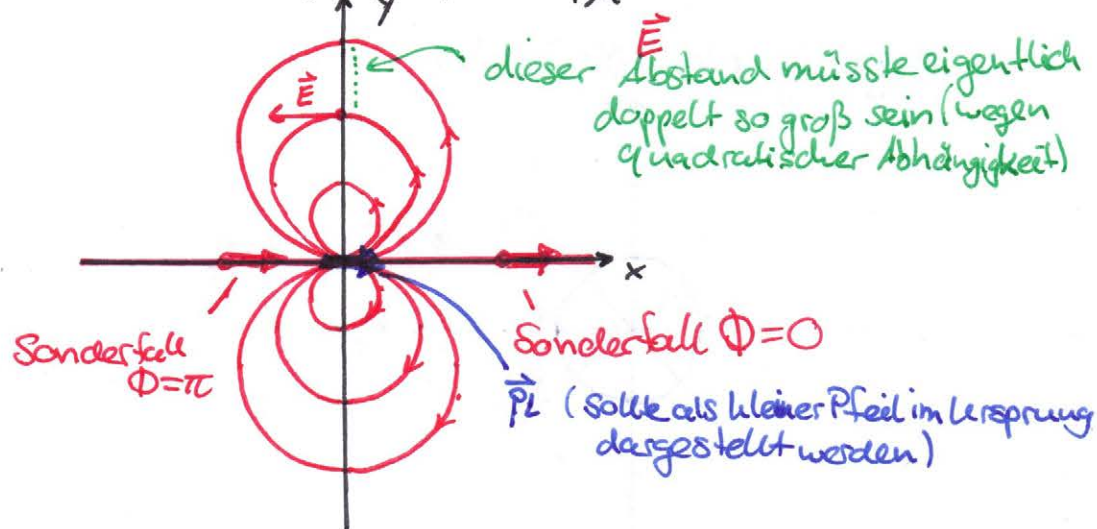
$$= (|y| - \frac{C}{2})^2$$

Also:

$$x^2 + (|y| - R)^2 = R^2$$

 $\hat{=}$ Kreisgleichung für Kreise in der x-y-Ebenemit dem Radius R und den Mittelpunktskoordinaten

$$x_M = 0 \text{ und } |y_M| = R, \text{ d.h. } y_M = \pm R$$

Orientierung der Feldlinien z.B. aus $\vec{E}(\vec{r})$ für konkrete Koordinaten,

$$\text{z.B.: } g = g_0 > 0, \Phi = \frac{\pi}{2}: \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{g^2} \cdot \vec{e}_\Phi$$

Anm.: Die Feldlinien sind nicht geschlossen, sondernbeginnen bei $x = +0$ und enden bei $x = -0$ $\text{rot } \vec{E} = 0$ ist erfüllt

Anmerkung zum Liniendipolfeld:

$$|E_L(\vec{r})| \sim \frac{1}{r^2}$$

Zum Vergleich: Feld einer einzelnen Linienladung:

$$|\vec{E}_L(\vec{r})| \sim \frac{1}{r}$$

Aufgabe 11

a) Hausaufgabe 2: Kugelförmige, homogene Raumladungsverteilung ρ_e mit Radius a

Gesucht: $\vec{D}(\vec{r})$ bzw. $\vec{E}(\vec{r})$ für $|\vec{r}| \geq a$, d.h. 3 skalare Unbekannte

Ansatz: $\oint_H \vec{D} d\vec{A} = \iiint_V \rho_e dV$ (H berandet V)

$\hat{=}$ einer skalaren Gleichung

und Symmetrieüberlegungen

- $\rho_e(\vec{r})$ ist kugelsymmetrisch

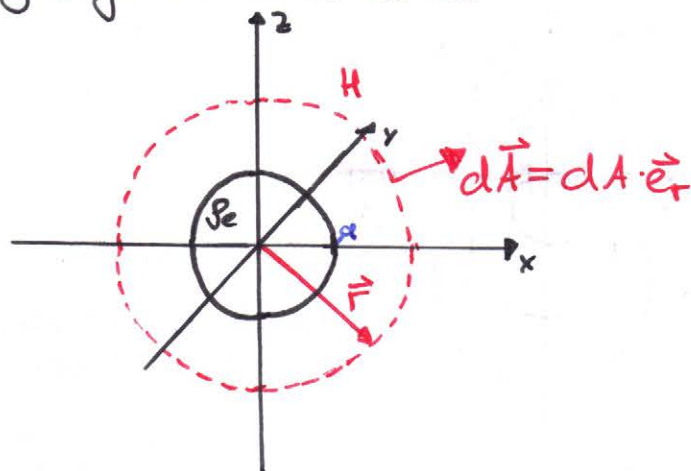
(gilt allgemeiner auch für $\rho_e = \rho_e(r)$)

$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r})$ muss auch kugelsymmetrisch sein

$$D_\theta = 0, D_\phi = 0, \vec{D}_r(\vec{r}) = D_r(r), \text{ also } \vec{D}(\vec{r}) = D_r(r) \cdot \vec{e}_r$$

(nur noch eine skalare Unbekannte)

- geeignete Hüllfläche



(zunächst $|\vec{r}| \geq a$)

$\Rightarrow \vec{D} \parallel d\vec{A}$ und $D_r = \text{const.}$ wegen $r = \text{const.}$ in H

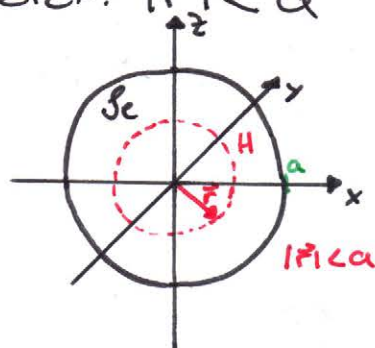
$$\oint_H \vec{D} d\vec{A} = \oint_H D_r(r) dA = D_r \cdot \underbrace{\oint_H dA}_{= 4\pi r^2} \stackrel{!}{=} Q_{\text{ein}} = \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \rho_e$$

$$\Rightarrow D_r(r) = \frac{a^3 \rho_e}{3 r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} D_r(r) \cdot \vec{e}_r = \frac{a^3 \rho_e}{3 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{für } |\vec{r}| \geq a$$

$$\left[= \frac{a^3 \rho_e}{3 \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right]$$

• Jetzt: $|\vec{r}| < a$

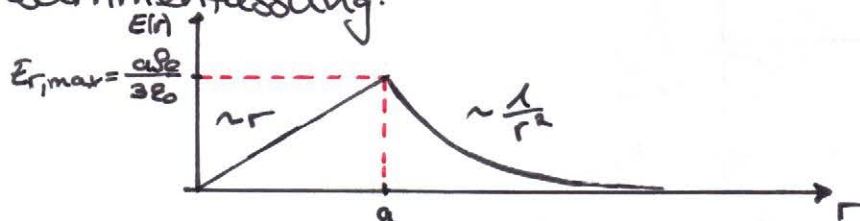


$$\oint_H \vec{D} d\vec{A} = D_r(r) \cdot 4\pi r^2 \quad (\text{wie zuvor})$$

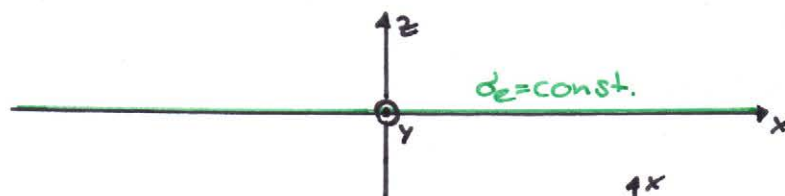
$$= \iiint_V \rho_e dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e$$

$$\Rightarrow D_r(r) = \frac{\rho_e \cdot r}{3} \quad \text{und} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\rho_e \cdot r}{3\epsilon_0}}_{\text{unabhängig von } a} \cdot \vec{e}_r \quad \text{für } |\vec{r}| < a$$

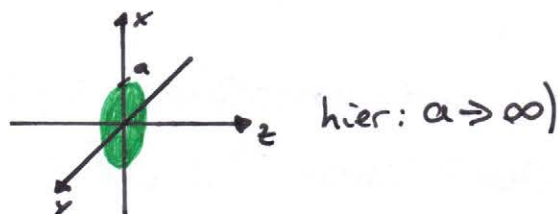
Zusammenfassung:



b)



(Vgl. Aufgabe 6:



• Symmetrie:

Die Ladungsverteilung und damit die elektrische Flussdichte $\vec{D}(\vec{r})$ sind

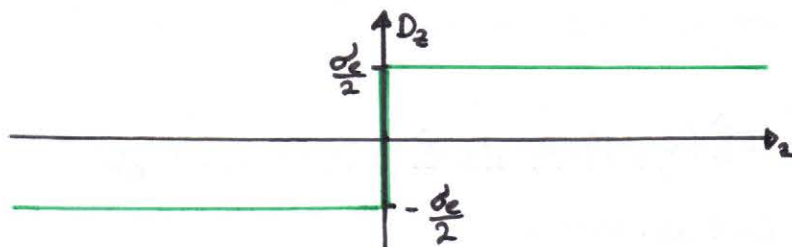
- invariant bzgl. einer Rotation um die z-Achse (und zu jeder zur z-Achse parallelen Achse)
- invariant bzgl. einer Verschiebung in x- oder y-Richtung $\Rightarrow D_z(\vec{r}) = D_z(z) \neq D_z(x, y)$
- Symmetrisch zur x-y-Ebene $\Rightarrow D_z(-z) = -D_z(z)$ (ungerade Funktion)

$$\oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} = D_z(z_0) \cdot A_0 - \underbrace{D_z(-z_0) \cdot A_0}_{= -D_z(z_0) \text{ da ungerade Funktion}} = 2 \cdot D_z(z_0) \cdot A_0$$

$$2 \cdot D_z(z_0) \cdot A_0 \stackrel{!}{=} Q_{\text{ein}} = \sigma_e \cdot A_0 \quad (\text{für beliebige } z_0 > 0)$$

Insgesamt:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{2} \cdot \vec{e}_z & \text{für } z > 0 \\ -\frac{\sigma_e}{2} \cdot \vec{e}_z & \text{für } z < 0 \end{cases}$$



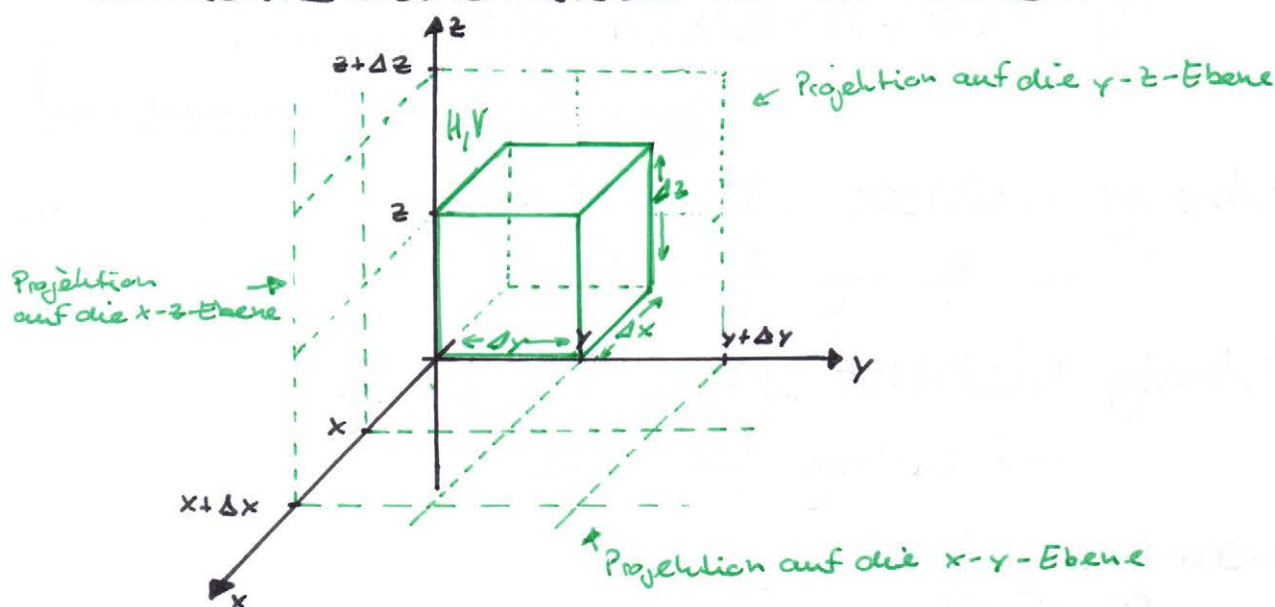
Einschub (1): Divergenz

$$\oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{ein}} \triangleq \text{Quellenstärke von } \vec{D} \text{ im von } H \text{ berandeten Gebiet}$$

lokal: $\text{div } \vec{D} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \cdot \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} \right) \triangleq \text{Quellendichte von } \vec{D} \text{ in einem Punkt}$

Berechnung in kartesischen Koordinaten:

Betrachte kleinen Quader mit Oberfläche H

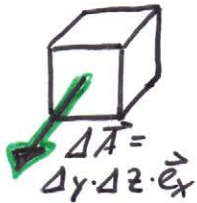


Fluss aus dem Quader heraus:

$$\oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

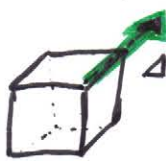
1) Teilflüsse in x-Richtung (durch Vorder- und Rückseite)

(i) $\Delta \vec{A} = \Delta y \cdot \Delta z \cdot \vec{e}_x$ (bei $x + \Delta x$)



$$\vec{D} \cdot \Delta \vec{A} \approx \vec{D}(x + \Delta x, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \vec{e}_x = D_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z$$

(ii) $\Delta \vec{A} = \Delta y \cdot \Delta z \cdot (-\vec{e}_x)$ (bei x)



← von der Rückseite aus

$$\vec{D} \cdot \Delta \vec{A} \approx -\vec{D}(x, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \vec{e}_x = -D_x(x, y, z) \Delta y \Delta z$$

Beiträge (i) und (ii) zusammen:

$$\underbrace{\left[D_x(x + \Delta x, y, z) - D_x(x, y, z) \right]}_{\Delta x} \cdot \underbrace{\Delta y \Delta z \cdot \Delta x}_{\checkmark} \triangleq \text{Differenzenquotient}$$

Ü6

$$\Delta \psi_x = \frac{D_x(x + \Delta x, y, z) - D_x(x, y, z)}{\Delta x} \cdot V$$

$$\frac{\Delta \psi}{V} \xrightarrow{V \rightarrow 0} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

22.11.2011

(oder mit Taylor:

$$D_x(x + \Delta x, y, z) \approx \underbrace{D_x(x, y, z)}_{\text{würde sich mit } -D_x(x, y, z) \text{ aufheben}} + \frac{\partial}{\partial x} D_x(x, y, z) \Delta x$$

würde sich mit $-D_x(x, y, z)$ aufheben

2) Analog: Teilflüsse $\Delta \psi_y$ in y-Richtung

... Beitrag $\frac{\Delta \psi_y}{V} = \frac{\partial D_y}{\partial y}$

3) Analog: Teilflüsse $\Delta \psi_z$ in z-Richtung

... Beitrag $\frac{\Delta \psi_z}{V} = \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Zusammengefasst:

$$\frac{\oint_H \vec{D} d\vec{A}}{V} \approx \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\Delta \psi_x + \Delta \psi_y + \Delta \psi_z}{V}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \cdot \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} \right) = \frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z$$

Deutung als Skalarprodukt:

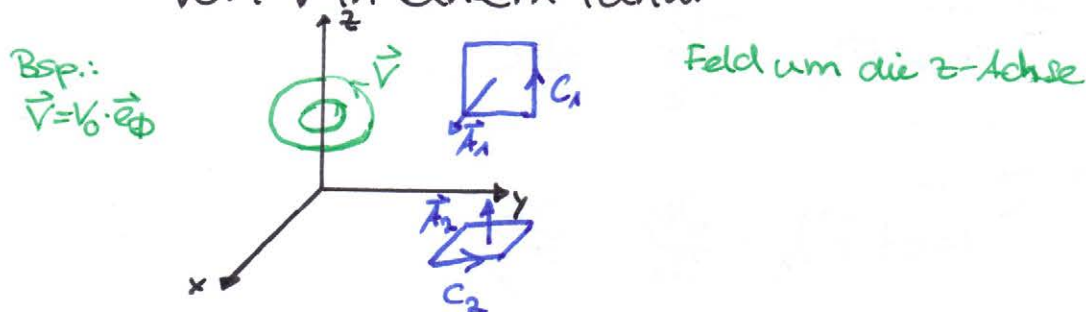
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot (D_x \vec{e}_x + D_y \vec{e}_y + D_z \vec{e}_z) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \end{aligned}$$

Einschub (2): Rotation

$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \triangleq$ Wirbelstärke von $\vec{V}$ im von C berandeten Gebiet

$$\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{V} = \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{1}{A} \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \right)$$

$\triangleq$ Komponente in Richtung $\vec{n}$ der Wirbeldichte von $\vec{V}$ in einem Punkt

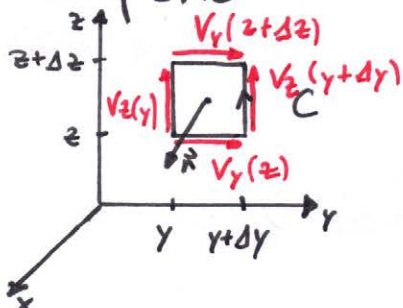


$$\oint_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \oint_{C_2} \vec{V} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

kartesisch:

$$\operatorname{rot} \vec{V} = (\operatorname{rot} \vec{V})_x \cdot \vec{e}_x + (\operatorname{rot} \vec{V})_y \cdot \vec{e}_y + \underbrace{(\operatorname{rot} \vec{V})_z \cdot \vec{e}_z}_{\vec{e}_z \cdot \operatorname{rot} \vec{V}}$$

1) x-Komponente



! Komponenten teilweise entgegen C

$$A = \Delta y \cdot \Delta z, \quad \vec{n} = \vec{e}_x$$

Umlaufsinn von C im Rechtsschraubensinn mit $\vec{n}$ verknüpft

$$(\text{rot } \vec{V})_x = \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{1}{A} \oint_C \vec{V} d\vec{s} \right)$$

$$\frac{1}{A} \cdot \oint_C \vec{V} d\vec{s} \approx \frac{1}{\Delta y \cdot \Delta z} \cdot \left[(V_y(z) - V_y(z + \Delta z)) \Delta y + (V_z(y + \Delta y) - V_z(y)) \Delta z \right]$$

$$= - \frac{V_y(z + \Delta z) - V_y(z)}{\Delta z} + \frac{V_z(y + \Delta y) - V_z(y)}{\Delta y}$$

$$\xrightarrow[\Delta z \rightarrow 0]{\Delta y \rightarrow 0} = - \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}$$

$$\text{Also: } \lim_{A = \Delta y \cdot \Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{A} \oint_C \vec{V} d\vec{s} \right) = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$|| = \det$

2) Analog ...

$$(\text{rot } \vec{V})_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

3) Analog ...

$$(\text{rot } \vec{V})_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

Zusammenfassung:

$$\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

Aufgabe 12

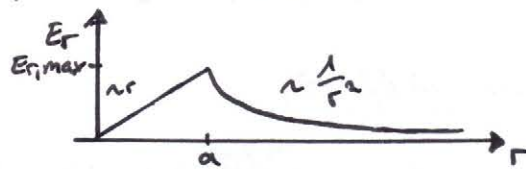
Elektrostatisches Potential allgemein:

$$\varphi_e(P) = \varphi_e(P_0) - \int_{P_0}^P \vec{E} d\vec{s} \quad (\text{entlang beliebiger Kurve})$$

↑ Bezugspunkt
Bezugspotential (meist $\varphi_e(P_0) := 0$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_{r,\max} \cdot \vec{e}_r \cdot \begin{cases} \frac{r}{a} & \text{für } r \leq a \\ \frac{a^2}{r^2} & \text{für } r > a \end{cases}$$

mit $E_{r,\max} = \frac{\rho_e \cdot a}{3 \epsilon_0}$



a) $d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r + \underbrace{r \cdot d\theta \vec{e}_\theta + r \cdot \sin\theta d\phi \vec{e}_\phi}_{\text{wird wegen } \vec{E} \parallel \vec{e}_r \text{ hier nicht benötigt}}$

Hier: $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_r(r) \cdot dr$ (gewöhnliches Integral)

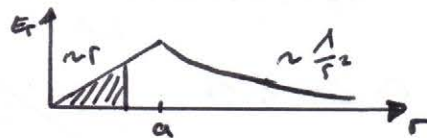
$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(r)$ (kugelsymmetrisches Potential)

P_0 im Ursprung $\hat{=} r_0 = 0$

$\varphi_e(r=0) = 0$

Also $\varphi_e(r) = \underbrace{\varphi_e(r=0)}_{=0} - \int_{r'=0}^r E_r(r') dr'$

(i) innen: $0 \leq r \leq a$



$$\varphi_e(r) = -E_{r,\max} \cdot \int_{r'=0}^r \frac{r'}{a} \cdot dr' = -\frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot r^2$$

(ii) außen: $r > a$



$$\varphi_e(r) = \varphi_e(r=0) - \underbrace{\int_{r'=0}^a E_r(r') dr'}_{\text{I}} - \underbrace{\int_a^r E_r(r') dr'}_{\text{II}}$$

$= \varphi_e(r=a)$ (i) mit a als obere Grenze

$$= -\frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot a^2 - \int_{r'=a}^r E_{r,\max} \cdot \frac{a^2}{r'^2} dr'$$

$$= -\frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot a^2 - E_{r,\max} \cdot \left[-\frac{1}{r'} \right]_{r'=a}^{r'=r} \cdot a^2$$

$$= -\frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot a^2 - E_{r,\max} \cdot a^2 \cdot \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right)$$

$$\varphi_e(r) = \frac{E_{r,\max}}{2a} \left[-a^2 + 2a^3 \cdot \frac{1}{r} - 2a^2 \right] = \frac{E_{r,\max}}{2a} \left[2 \frac{a^3}{r} - 3a^2 \right]$$

Zusammenfassung, $0 \leq r < \infty$:

$$\varphi_e(r) = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \cdot \begin{cases} -r^2 & 0 \leq r \leq a \\ 2 \cdot \frac{a^3}{r} - 3a^2 & a < r < \infty \end{cases}$$

b) $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_e(\vec{r})$

mit $\text{grad } \varphi_e = \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \vec{e}_r + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \phi} \vec{e}_\phi}_{=0}$

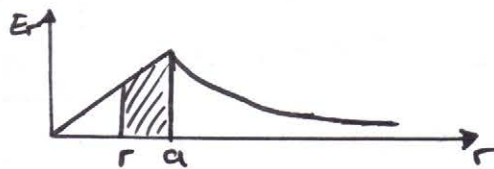
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \vec{e}_r \cdot \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r}(r^2) & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\partial}{\partial r}(2 \frac{a^3}{r} - 3a^2) & a < r < \infty \end{cases}$$

$$= -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \vec{e}_r \cdot \begin{cases} -2r & 0 \leq r \leq a \\ -2 \frac{a^3}{r^2} & a < r < \infty \end{cases} \quad \checkmark$$

(Stimmt mit dem Ausdruck aus 11 a) überein)

c) Jetzt $r_0 = a, \varphi_e(r=a) = 0$

(i) innen, $0 \leq r \leq a$



Von a nach r integrieren!

Anmerkung: wieder $d\vec{s} = dr \vec{e}_r + \dots$

(nicht $d\vec{s} = -dr \vec{e}_r + \dots$ verwenden!)

Das richtige Vorzeichen ergibt sich durch die Wahl der Integrationsgrenzen:

Untere Grenze $\hat{=}$ Kurvenanfang

Obergrenze $\hat{=}$ Kurvenende

Ü17

$$\begin{aligned} \varphi_e(r) &= \underbrace{\varphi_e(r=a)}_{=0} - \int_{r'=a}^r E_r(r') dr' \\ &= -E_{r,\max} \int_{r'=a}^r \frac{r'}{a} dr' = \frac{E_{r,\max}}{2a} [a^2 - r^2] \end{aligned}$$

29.11.2011

(ii) außen, $a < r < \infty$



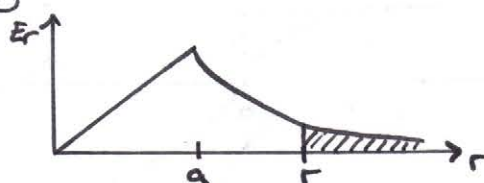
$$\varphi_e(r) = \underbrace{\varphi_e(r=a)}_{=0} - E_{r,\max} \int_{r'=a}^r \frac{a^2}{r'^2} dr' = \frac{E_{r,\max}}{2a} \left[2 \frac{a^3}{r} - 2a^2 \right]$$

Zusammenfassung: $0 \leq r < \infty$

$$\varphi_e(r) = \frac{\varphi_e}{6\epsilon_0} \cdot \begin{cases} a^2 - r^2 & 0 \leq r \leq a \\ 2 \frac{a^3}{r} - 2a^2 & a < r < \infty \end{cases}$$

Jetzt $r_0 \rightarrow \infty$, $\varphi_e(r \rightarrow \infty) = 0$

(i) außen: $a \leq r < \infty$



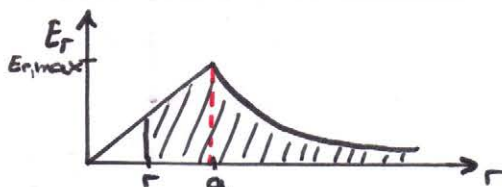
$$\varphi_e(r) = \underbrace{\varphi_e(r \rightarrow \infty)}_{=0} - \int_{r'=\infty}^r E_r(r') dr'$$

(wieder: $d\vec{s} = dr \vec{e}_r + \dots$)

$$= -E_{r,\max} \cdot \int_{r'=\infty}^r \frac{a^2}{r'^2} dr' = -E_{r,\max} \cdot a^2 \cdot \frac{2a}{2a} \cdot \left[-\frac{1}{r'} \right]_{r'=\infty}^{r'=r}$$

$$= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot 2 \frac{a^3}{r}$$

(ii) innen: $0 \leq r < a$



$$\varphi_e(r) = \underbrace{\varphi_e(r \rightarrow \infty)}_{=0} - \int_{r'=\infty}^a E_r(r') dr' - \int_{r'=a}^r E_r(r') dr'$$

$\varphi_e(r=a)$; (i) für $r=a$

$$\varphi_e(r=a) = \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot 2a^2$$

$$= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot 2a^2 - E_{r,\max} \int_{r'=a}^r \frac{r'}{a} dr'$$

$$= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot 2a^2 - \frac{E_{r,\max}}{a} \cdot \left[\frac{1}{2} r'^2 \right]_{r'=a}^{r'=r}$$

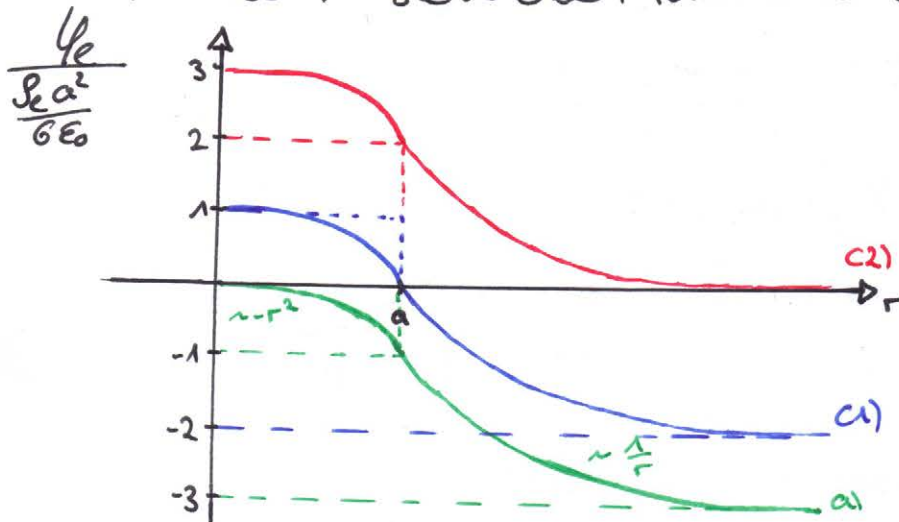
$$= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot 2a^2 - \frac{E_{r,\max}}{2a} [r^2 - a^2]$$

$$= \frac{E_{r,\max}}{2a} [3a^2 - r^2]$$

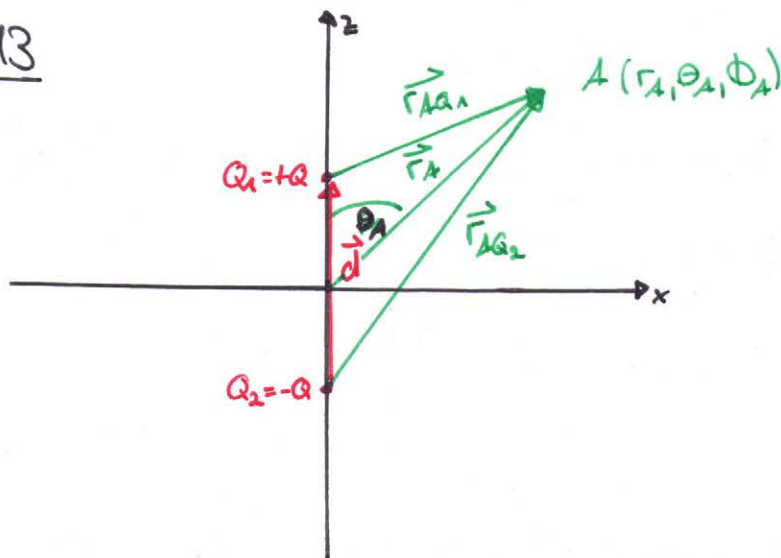
Zusammenfassung: $0 \leq r < \infty$

$$\varphi_e(r) = \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} \cdot \begin{cases} 3a^2 - r^2 & 0 \leq r < a \\ 2 \frac{a^3}{r} & a \leq r < \infty \end{cases}$$

d) $|\vec{E}|$ über r : siehe oben (die kleinen Skizzen)



Aufgabe 13



a) $r_{AQ_1} = |\vec{r}_{AQ_1}|$, $r_{AQ_2} = |\vec{r}_{AQ_2}|$

$$\varphi_{e1}(r_{AQ_1}) = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{AQ_1}} + \underbrace{\varphi_{e1,\infty}}_{(=0) \text{ f\"ur } r_{AQ_1} \rightarrow \infty}$$

$$\varphi_{e2}(r_{AQ_2}) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{AQ_2}} + \underbrace{\varphi_{e2,\infty}}_{\text{f\"ur } r_{AQ_2} \rightarrow \infty}$$

Wichtig: Gleicher Bezugspunkt für φ_{e1} , φ_{e2} und damit für φ_e !

Hier: $\varphi_{e1,\infty} = \varphi_{e2,\infty} = \varphi_{e,\infty} := 0$

Superposition:

$$\begin{aligned}\varphi_e(r_{AQ_1}, r_{AQ_2}) &= \varphi_{e1}(r_{AQ_1}) + \varphi_{e2}(r_{AQ_2}) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{AQ_1}} - \frac{1}{r_{AQ_2}} \right)\end{aligned}$$

b) Eliminierung von r_{AQ_1} und r_{AQ_2} durch Ersetzen von $\frac{1}{r_{AQ_1}}$ und $\frac{1}{r_{AQ_2}}$ durch $f_{1,2}(\frac{1}{r_A}, \theta_A)$.

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$



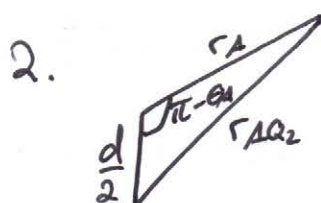
$$r_{AQ_1}^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r_A^2 - 2 \frac{d}{2} r_A \cos \theta_A$$

$$\frac{1}{r_{AQ_1}} = \frac{1}{r_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{d}{r_A}\right)^2 + 1 - \frac{d}{r_A} \cos \theta_A}}$$

$\underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{d}{r_A}\right)^2}_{(d \ll r_A) \Rightarrow \frac{d}{r_A} \ll 1}$
 $\underbrace{- \frac{d}{r_A} \cos \theta_A}_{|\cos \theta_A| \leq 1}$

HINWEIS

$$\approx \frac{1}{r_A} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r_A} \cos \theta_A \right)$$



$$r_{AQ_2}^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r_A^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} r_A \underbrace{\cos(\pi - \theta_A)}_{= -\cos(\theta_A)}$$

$$\frac{1}{r_{AQ_2}} = \frac{1}{r_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{d}{r_A}\right)^2 + 1 + \frac{d}{r_A} \cos \theta_A}}$$

$\ll \frac{d}{r_A} \ll 1$

HINWEIS

$$\approx \frac{1}{r_A} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d}{r_A} \cos \theta_A \right)$$

c) Dipolmoment: $p = Q \cdot d = \text{const}$ $\vec{p} = Q \cdot d \cdot \vec{e}_z$

$$\begin{aligned} \varphi_e(r_A, \theta_A) &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r_A} \cos \theta_A - 1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r_A} \cos \theta_A \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d}{r_A^2} \cos \theta_A = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A^2} \cos \theta_A \end{aligned}$$

Punktdipol: $d \rightarrow 0$, $p = \text{const}$

$$\varphi_{\text{ED}}(r_A, \theta_A) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A^2} \cos \theta_A$$

Anmerkung: Dieser Ausdruck gilt nur für $\vec{p} = p \cdot \vec{e}_z$ und $\vec{r}_Q = 0$
 Verallgemeinerung (mit $\cos \theta_A = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_{r_A} \stackrel{\text{hier}}{=} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_{r_{AQ}}$ kann

$p \cdot \cos \theta_A$ als Skalarprodukt gedeutet werden:

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_{r_{AQ}} = p \cdot \cos \theta_A$$

$$\varphi_{\text{ED}}(\vec{r}_A) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_{r_{AQ}}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{AQ}^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_{AQ}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{AQ}^3}$$

d) Im Folgenden: $\vec{r}$ statt $\vec{r}_A$ (da eindeutig)

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_{\text{ED}}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} &= -\left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi_{\text{ED}} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_{\text{ED}} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \phi} \varphi_{\text{ED}}}_{=0} \vec{e}_\phi \right) \\ &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[-2 \cdot \frac{\cos \theta}{r^3} \vec{e}_r - \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta \right] \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta] \end{aligned}$$

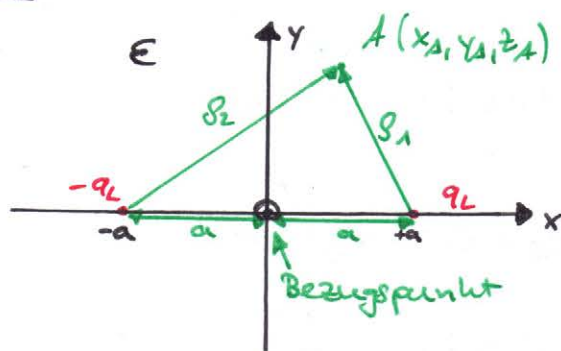
Vergleich der r -Abhängigkeiten:

$$\varphi_{\text{ED}} \sim \frac{1}{r^2}, \quad |\vec{E}_D| \sim \frac{1}{r^3}$$

Punktladung:

$$\varphi_e \sim \frac{1}{r}, \quad |\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$$

Aufgabe 14



a) Potential einer Linienladung q_L in der z-Achse:

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(s) = \underbrace{\varphi_e(s=s_0)}_{=0} - \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$$

$s_0 \hat{=}$ Abstand des Bezugspunktes von der Linienladung

Hier: $\varphi_{e1}(s_1) = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{s_1}{a}\right)$ Abstand der Linienladung vom Bezugspunkt

$$\varphi_{e2}(s_2) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{s_2}{a}\right)$$

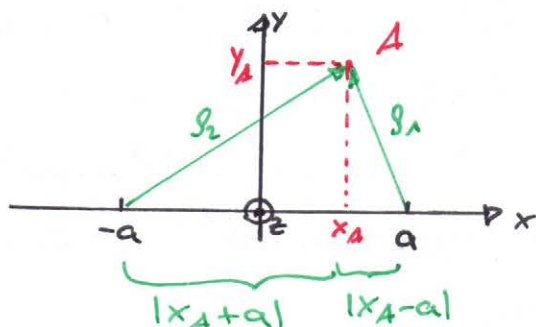
$$\begin{aligned} \varphi_e(s_1, s_2) &= \varphi_{e1}(s_1) + \varphi_{e2}(s_2) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \left[\ln\left(\frac{s_2}{a}\right) - \ln\left(\frac{s_1}{a}\right) \right] \\ &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right) \end{aligned}$$

b) Äquipotentialfläche: $\varphi_e(s_1, s_2) \stackrel{!}{=} \text{const}$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right) = \text{const} \quad | \ln \text{ ist streng monoton wachsend}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s_2}{s_1} =: k = \text{const}$$

c)



$$s_1^2 = (x_A - a)^2 + y_A^2 \quad s_2^2 = (x_A + a)^2 + y_A^2$$

$$k^2 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(x_A + a)^2 + y_A^2}{(x_A - a)^2 + y_A^2} = \text{const.}$$

$$d) (x_A + a)^2 + y_A^2 = k^2 (x_A - a)^2 + k^2 y_A^2$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + 2x_A a + a^2 + y_A^2 - k^2(x_A^2 - 2x_A a + a^2) - k^2 y_A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_A^2(1-k^2) + 2x_A a(1+k^2) + a^2(1-k^2) + y_A^2(1-k^2) = 0$$

falls $k^2 \neq 1$

06.12.2011

$$\Leftrightarrow x_A^2 + \underbrace{\frac{1+k^2}{1-k^2} 2a \cdot x_A}_{=: -2x_M} + a^2 + y_A^2 = 0$$

$$=: -2x_M \text{ d.h. } x_M = -\frac{1+k^2}{1-k^2} \cdot a = \frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot a$$

Quadratische Ergänzung:

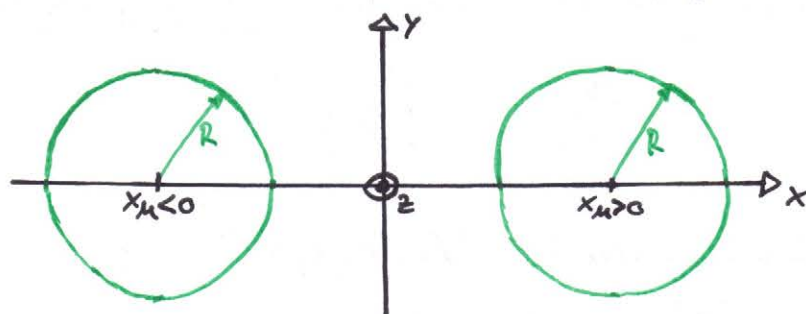
$$x_A^2 - 2x_M \cdot x_A + x_M^2 + a^2 + y_A^2 = x_M^2$$

$$\Leftrightarrow (x_A - x_M)^2 + y_A^2 = x_M^2 - a^2 =: R^2$$

$$R^2 = \left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \right)^2 \cdot a^2 - a^2 = \frac{(k^2+1)^2 - (k^2-1)^2}{(k^2-1)^2} \cdot a^2 = \frac{4k^2}{(k^2-1)^2} a^2$$

$$R = \sqrt{\frac{4k^2}{(k^2-1)^2} a^2} \stackrel{k>0, \text{ def.}}{=} \frac{2k}{|k^2-1|} \cdot a$$

e) (d) ergibt eine Gleichung für Kreise in der x - y -Ebene mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $x_M, y_M = 0$



(exzentrisch, nicht konzentrisch!
d.h. größeres $|x_M|$
 $\Rightarrow$ anderer Mittelpunkt)

mit $k := \frac{g_2}{g_1}$ und $g_1 > 0, g_2 > 0$: $k > 0 \Rightarrow R > 0$

$x_M > 0$, falls $k > 1$ (d.h. $g_2 > g_1$, „rechter Halbraum“)

$x_M < 0$, falls $k < 1$ (d.h. $g_2 < g_1$, „linker Halbraum“)

Die Kreise entsprechen Schnittlinien der Äquipotentialflächen mit der x - y -Ebene. Die Äquipotentialflächen sind zur z -Achse parallele Zylinderflächen.

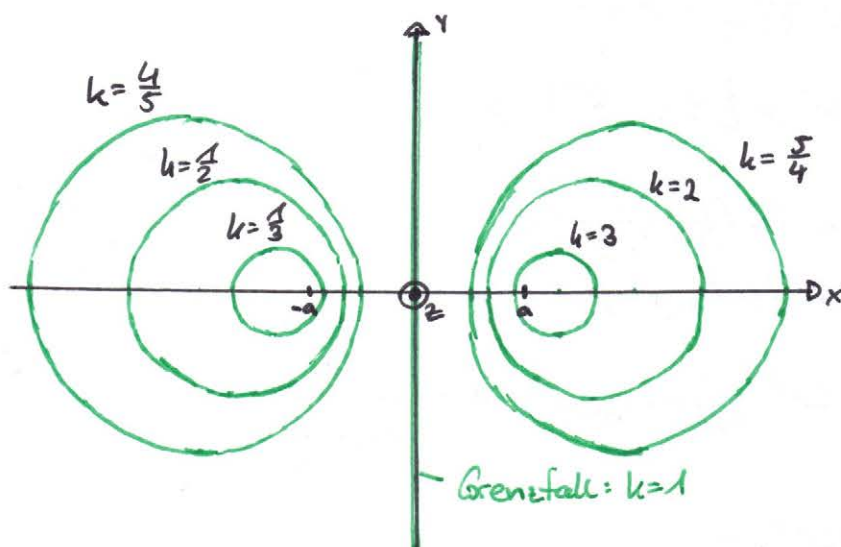
Anmerkung: Zwei Parameter k_1 und $k_2 = \frac{1}{k_1}$ repräsentieren zwei spiegelsymmetrische Äquipotentialflächen.

$$\text{wegen } k_2 = \frac{g_2}{g_1} \Big|_2 = \frac{1}{k_1} = \frac{g_1}{g_2} \Big|_1$$

Äquipot. Fläche 2 Äquipot. Fläche 1

Probe: $R = \frac{2 \cdot k_2}{|k_2^2 - 1|} \cdot a = \frac{2k_1}{|\frac{1}{k_1^2} - 1|} \cdot a = \frac{2k_1}{|1 - k_1^2|} \cdot a \quad \checkmark (\hat{=} R(k_1) = R(k_2))$

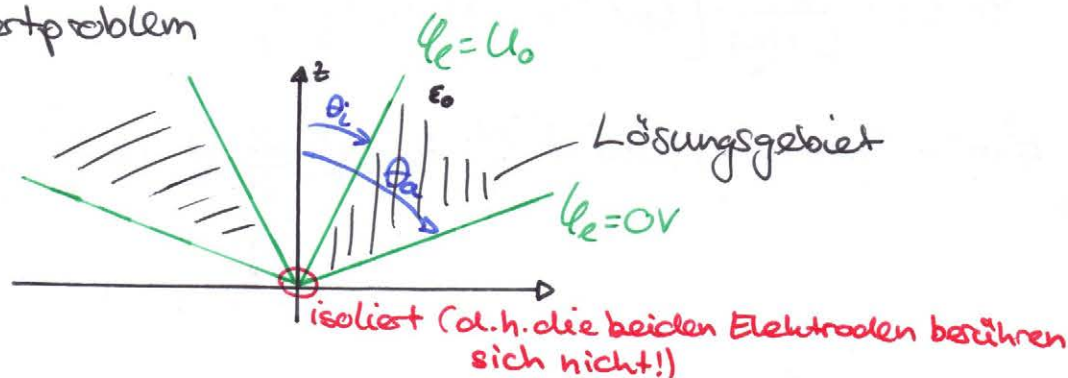
$x_{M,R} = \frac{k_2^2 + 1}{k_2^2 - 1} \cdot a = \frac{\frac{1}{k_1^2} + 1}{\frac{1}{k_1^2} - 1} \cdot a = \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} \cdot a = -x_M \quad \checkmark$



Sonderfall: $k=1 \Leftrightarrow S_1 = S_2$ beschreibt alle Punkte in der $y-z$ -Ebene ($\hat{=}$ Symmetrieebene der Ladungsverteilung)
 $\hat{=}$ Äquipotentialfläche

Aufgabe 15

Randwertproblem



a) Laplace - Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta \phi_e(r) \stackrel{\text{hier}}{=} \Delta \phi_e(\theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \phi_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial \varphi^2} \stackrel{!}{=} 0$$

da keine Ladungsverteilung im Lösungsraum

Also (für $r > 0, 0 < \theta_1 < \theta < \theta_2 < \pi \Rightarrow \sin \theta > 0$) (*)

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi_e}{\partial \theta} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi_e}{\partial \theta} \right) = 0$$

da $r \cdot \sin \theta \neq \text{für } (*)$

b) 1. Integration:

$$\sin \theta \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} = A \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} = \frac{A}{\sin \theta}} \quad (**)$$

2. Integration

$$\varphi_e(\theta) = A \cdot \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta + B$$

$$\varphi_e(\theta) \stackrel{\text{HINWEIS}}{=} A \cdot \ln \left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + B$$

$$(1) \varphi_e(\theta_i) = A \cdot \ln(k_i) + B = U_0$$

$$(2) \varphi_e(\theta_a) = A \cdot \ln(k_a) + B = 0V$$

$$(1) - (2) = A \cdot \ln\left(\frac{k_i}{k_a}\right) = U_0 \Leftrightarrow A = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{k_i}{k_a}\right)}$$

in (2) eingesetzt:

$$B = - \underbrace{A \cdot \ln(k_a)}_{= A \ln\left(\frac{1}{k_a}\right)} = U_0 \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{k_a}\right)}{\ln\left(\frac{k_i}{k_a}\right)}$$

Lösung für $\varphi_e(\theta)$:

$$\varphi_e(\theta) = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{k_i}{k_a}\right)} \cdot \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1}{k_a}\right) \right]$$

$$c) \vec{E}(r) = -\text{grad } \varphi_e(\theta) = - \left(\underbrace{\frac{\partial \varphi_e}{\partial r}}_{=0} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta}}_{(**)} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \underbrace{\frac{\partial \varphi_e}{\partial \phi}}_{=0} \vec{e}_\phi \right)$$

$= \frac{A}{\sin \theta} \text{ (vgl. b)}$

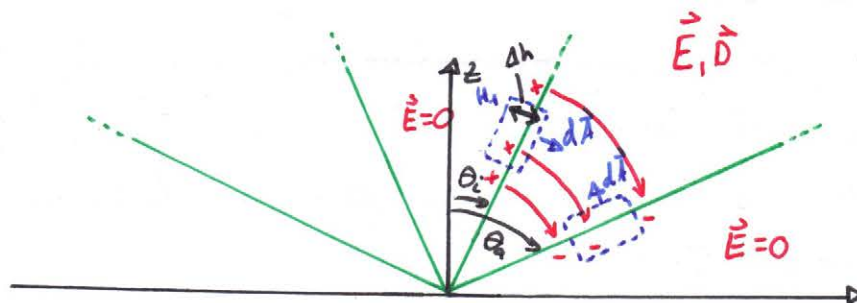
$$= - \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{U_0}{\ln\left(\frac{k_i}{k_a}\right)} \vec{e}_\theta$$

$\frac{k_i}{k_a} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{k_i}{k_a}\right) < 0$, d.h. insgesamt positiv

$$= \frac{1}{r \cdot \sin \theta \ln\left(\frac{k_a}{k_i}\right)} U_0 \vec{e}_\theta$$

(Feldlinien von oberer Elektrode zur unteren Elektrode)

σ_e : (siehe Kapitel 2.18)

 σ_e :

$$\oint_{H_1} \epsilon_0 \vec{E} d\vec{A} \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \iint_{\Delta A} (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E}}_{\hat{= "D_1"}} - \underbrace{0}_{\hat{= "D_2"}}) dA \underbrace{\vec{e}_\theta}_{\hat{= "e_n"}} = \iint_{\Delta A} \sigma_{ei} dA$$

$$\oint_{H_2} \epsilon_0 \vec{E} d\vec{A} \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \iint_{\Delta A} (\underbrace{0}_{\hat{= "D_1"}} - \underbrace{\epsilon_0 \vec{E}}_{\hat{= "D_2"}}) dA \underbrace{\vec{e}_\theta}_{\hat{= "e_n"}} = \iint_{\Delta A} \sigma_{ea} dA$$

Damit

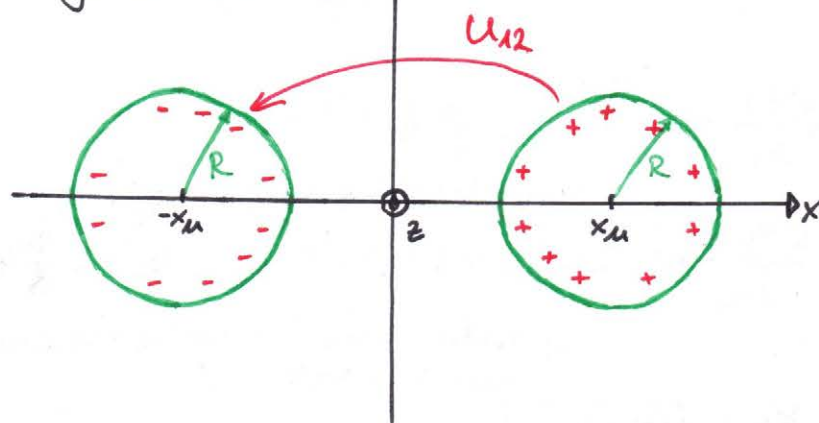
$$\sigma_{ei}(r) = + \epsilon_0 E_\theta(r, \theta_i) = \frac{\epsilon_0 U_0}{\ln\left(\frac{k_a}{k_i}\right)} \cdot \frac{1}{\sin \theta_i} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\sigma_{ea}(r) = - \epsilon_0 E_\theta(r, \theta_a) = - \frac{\epsilon_0 U_0}{\ln\left(\frac{k_a}{k_i}\right)} \cdot \frac{1}{\sin \theta_a} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} d) Q_{i,R} &= \iint_{A_{i,R}} \sigma_{ei}(r) dA \\ &= \frac{\epsilon_0 U_0}{\ln\left(\frac{k_a}{k_i}\right)} \cdot \frac{1}{\sin \theta_i} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{1}{r} \cdot \underbrace{r \cdot \sin \theta_i dr d\phi}_{dA} \\ &= \frac{\epsilon_0 U_0}{\ln\left(\frac{k_a}{k_i}\right)} \cdot 2\pi R \end{aligned}$$

Aufgabe 16 ϵ_0

13.12.2011



Die Ladungen unter/an der Mantelfläche sind nicht homogen verteilt.

Gesucht (zuerst): $\varphi_e(\vec{r})$ im Lösungsgebiet zwischen den Zylinderleitern. (Lösung der Laplace-Gleichung ist zu aufwändig)

Ansatz: Ersatzladungsverteilung, die im Lösungsgebiet das gleiche elektrostatische Feld erzeugt.

Dazu müssen die Randbedingungen und $\varphi_e = 0$ im Lösungsgebiet erfüllt sein.

a) aus Aufgabe 14: Äquipotentialflächen zweier paralleler

Linienladungen $\pm q_L$ bei $x = \pm a$ sind Zylinderflächen:

$$(x_A - x_M)^2 + y_1^2 = R^2 \text{ mit } x_M = \frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot a, R = \frac{2k}{|k^2-1|} \cdot a$$

$$k = \frac{\rho_2}{\rho_1} > 0$$

$$k > 1 \Leftrightarrow x_M > 0$$

$$k < 1 \Leftrightarrow x_M < 0$$

Jetzt bekannt: x_M, R

(Im Folgenden $x_M > 0$, Mittelpunktskoordinaten sind $\pm x_M$)

Gesucht: k_1, k_2 ; a unbekannt

(i) rechter Zylinder: $k_1 > 1$

$$x_M = \frac{k_1^2+1}{k_1^2-1} \cdot a > 0, R = \frac{2k_1}{k_1^2-1} \cdot a$$

da $|k_1^2-1| > 0$

(ii) linker Zylinder: $k_2 < 1$

$$-x_M = \frac{k_2^2+1}{k_2^2-1} \cdot a < 0, R = \frac{2k_2}{-(k_2^2-1)} \cdot a$$

da $|k_2^2-1| < 0$

Aus (i): $\frac{x_M}{R} = \frac{k_1^2+1}{2k_1} \Leftrightarrow k_1^2 - 2 \frac{x_M}{R} \cdot k_1 + 1 = 0$
(quadratische Gleichung)

Aus (ii): $\frac{+x_M}{R} = \frac{k_2^2+1}{+2k_2} \Leftrightarrow 2k_2 x_M = R \cdot k_2^2 + R \Rightarrow 0 = k_2^2 - 2 \frac{x_M}{R} k_2 + 1$
(gleiche quadratische Gleichung, nur k_2 statt k_1)

Lösung: $k_{1,2} = \frac{x_M}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{x_M}{R}\right)^2 - 1}$

$$" + " \triangleq k_1, " - " \triangleq k_2$$

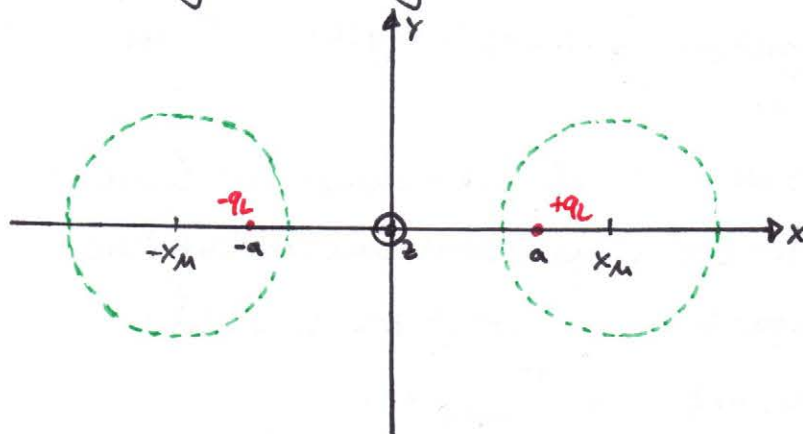
Anmerkung 1: 3. binomische Formel liefert

$$k_1 \cdot k_2 = \left(\frac{x_M}{R}\right)^2 - \left[\left(\frac{x_M}{R}\right)^2 - 1\right] = 1$$

Anmerkung 2: Mit Definition aus Aufgabe 14

$$R^2 := x_M^2 - a^2, \text{ also } a = \sqrt{x_M^2 - R^2}$$

Ersatzladungsverteilung:



b) aus Aufgabe 14

$$\varphi_e(r) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{\underbrace{r_1}_{=:k}}\right) = \varphi_e(k)$$

$$U_{12} = \varphi_e(k_1) - \varphi_e(k_2) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\underbrace{\ln(k_1) - \ln(k_2)}_{2 \cdot \ln(k_1)} \right] = \frac{q_L}{\pi\epsilon_0} \ln(k_1) = \frac{q_L}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{x_M}{R} + \sqrt{\left(\frac{x_M}{R}\right)^2 - 1}\right)$$

Anmerkung: $\varphi_e(k_2) = -\varphi_e(k_1)$

Diese Symmetrie folgt aus der Wahl des Referenzpunktes in der z-Achse.

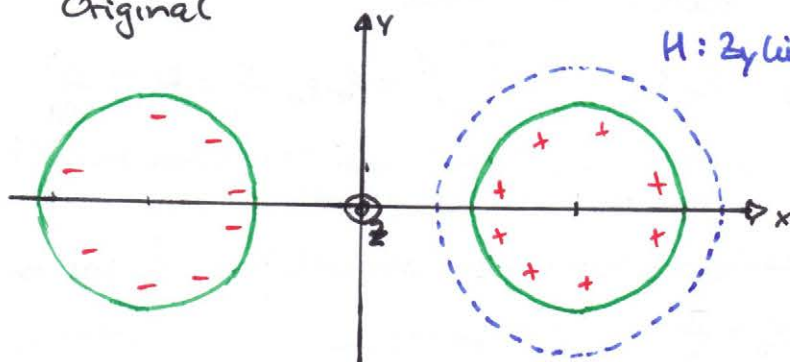
Zylinderladung pro Länge ΔL :

$$\pm \Delta Q = \pm q_L \cdot \Delta L$$

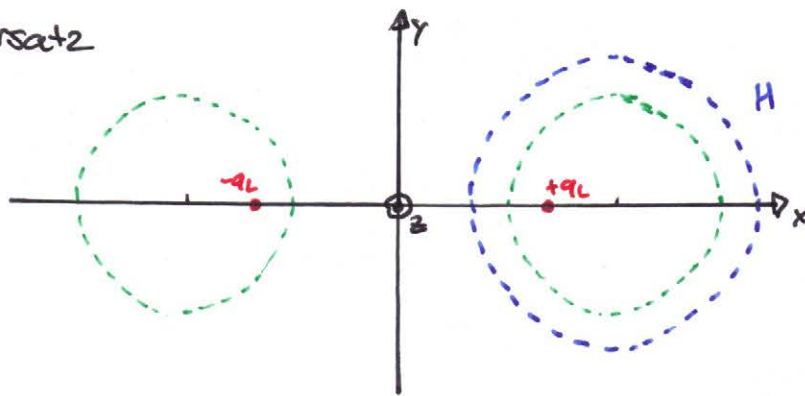
(Längenabschnitt in z-Richtung)

ergibt sich mit dem Gauß'schen Satz:

Original

H: Zylinder mit Länge ΔL

Ersatz



Gleiches $\vec{D}$ im Lösungsgebiet, gleiches $H \Rightarrow$ gleiches Q_{ein}
 $\hookrightarrow$ außerhalb von $\odot$

(Anmerkung: Innerhalb der Zylinderleiter entspricht $\vec{D}$ nicht der Ersatzanordnung. Deckel- und Bodenfläche liefern aber keinen Beitrag zu $\oint_H \vec{D} d\vec{A}$)

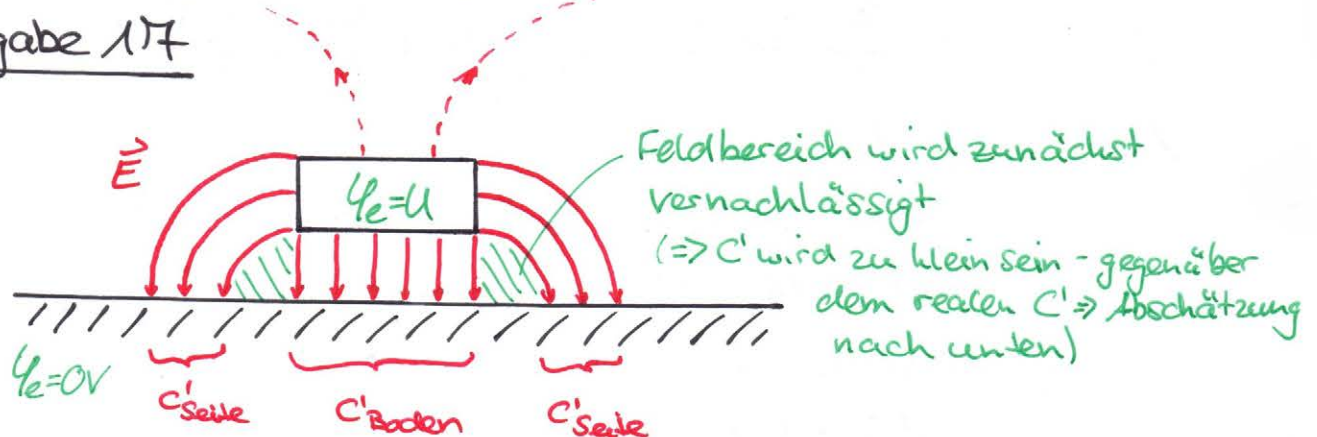
Originalanordnung: $\vec{D}_{\text{innen}} = 0$

Ersatzanordnung: $\vec{D}_{\text{innen}} \neq \perp \vec{E}_z$

$$c) \quad C' = \frac{\Delta C}{\Delta l} = \frac{\Delta Q}{U_{12} \Delta l} = q_L$$

$$C' = \frac{q_L}{\frac{q_L}{\pi \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{x_M}{R} + \sqrt{\left(\frac{x_M}{R}\right)^2 - 1}\right)} = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{x_M}{R} + \sqrt{\left(\frac{x_M}{R}\right)^2 - 1}\right)}$$

Aufgabe 17



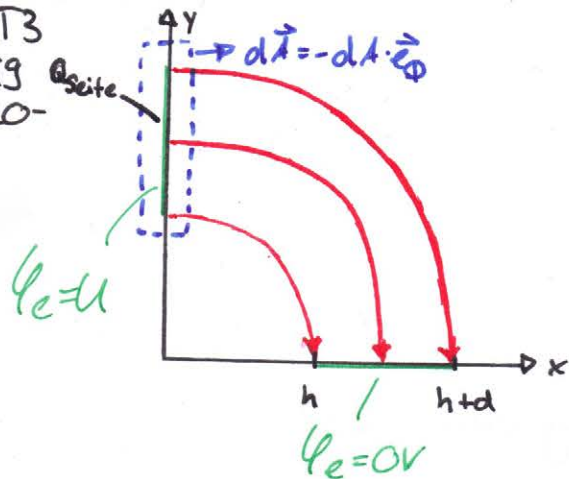
Näherung: $C' \approx C'_{\text{Boden}} + 2 C'_{\text{Seite}}$

$$C'_{\text{Boden}} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{w \cdot \Delta l}{h} \cdot \frac{1}{\Delta l} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{w}{h} = 56,7 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

ganz normale Formel eines Plattenkondensators, nur auf die Länge Δl bezogen

C'_{Seite} entspricht einem Winkelkondensator mit

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Vgl. Vorlesung - für die Herleitung der Formel})$$



$$\vec{E}_{\text{Seite}} = - \frac{U}{\frac{\pi}{2} \cdot g} \vec{e}_D \quad \vec{D}_{\text{Seite}} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}_{\text{Seite}}$$

$$\Delta Q_{\text{Seite}} = \oint_H \vec{D}_{\text{Seite}} \cdot d\vec{A} = \int_{g=h}^{h+d} (-\epsilon_r \epsilon_0 \cdot \frac{2U}{\pi} \cdot \frac{1}{g} \vec{e}_D) \cdot \underbrace{(-\Delta L \cdot dg \vec{e}_D)}_{d\vec{A}}$$

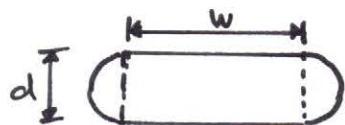
$$= \epsilon_r \epsilon_0 \frac{2U}{\pi} \Delta L \cdot \ln\left(\frac{h+d}{h}\right)$$

$$C'_{\text{Seite}} = \frac{\Delta Q_{\text{Seite}}}{\Delta L \cdot U} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{h+d}{h}\right) = 15,6 \frac{pF}{m}$$

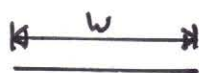
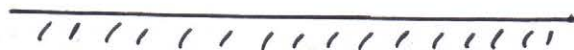
$$C' \approx C'_{\text{Boden}} + 2 \cdot C'_{\text{Seite}} = 88 \frac{pF}{m}$$

(wegen Vernachlässigung von Feldanteilen: Abschätzung nach unten)

b)



$\approx$



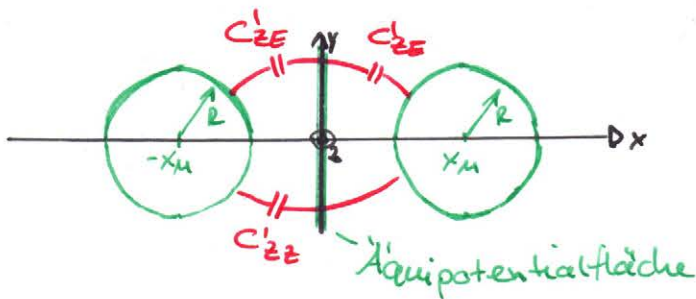
(Abschätzung von C' nach oben)

Aus Aufgabe 16c) bekannt:

C'_{22} zwischen zwei Zylinderleitern mit Achsenabstand $2x_u$

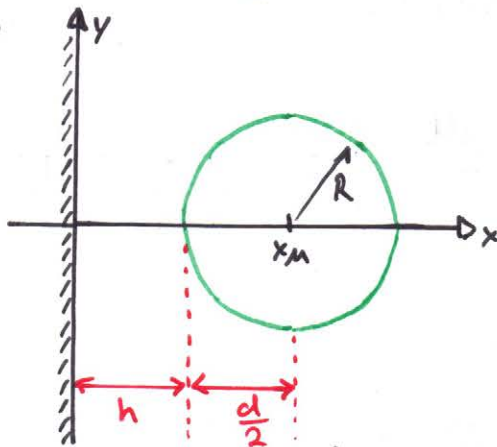
Gesucht:

C'_{2E} zwischen einem Zylinderleiter und einer leitenden Ebene
vom Zylinder zur Ebene



C_{zz}' entspricht der Reihenschaltung zweier C_{zE}' ,
also $C_{zz}' = \frac{1}{2} C_{zE}' \Leftrightarrow C_{zE}' = 2 C_{zz}'$

Hier:



$$R = \frac{d}{2}, \quad x_M = h + \frac{d}{2}$$

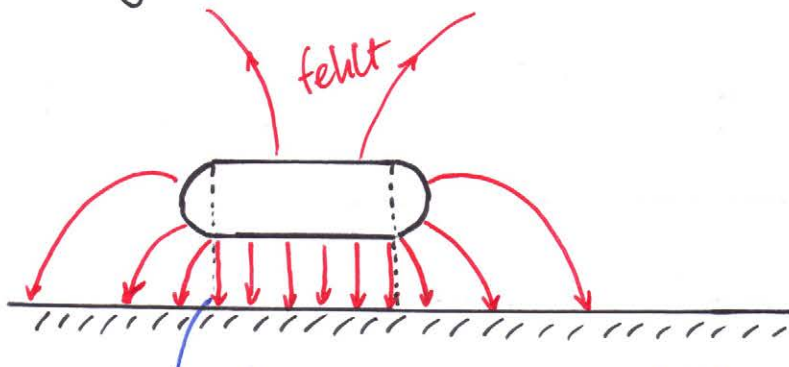
Damit: $\frac{x_M}{R} = \frac{h + \frac{d}{2}}{\frac{d}{2}} = 2 \cdot \frac{h}{d} + 1$

$$C_{zE}' = 2 \cdot \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left[\left(2 \cdot \frac{h}{d} + 1\right) + \sqrt{\left(2 \cdot \frac{h}{d} + 1\right)^2 - 1}\right]} = 126 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \hat{=} 2 \cdot C'_{\text{Seite}}$$

c) Insgesamt:

$$C' \approx C'_{\text{Boden}} + C_{zE}' = 183 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

Anmerkung: Das Feld der Ersatzladungen wird nicht exakt modelliert.



E_z hier nicht korrekt stetig modelliert.

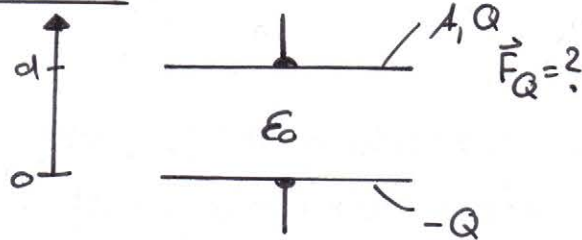
20.12.2011

zu a) Ergänzung

Der vernachlässigte Anteil der Leiterkante kann zu je $C'_{\text{kante}} \hat{=} 0,8 \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ abgeschätzt werden. Damit:

$$C'_{\text{korr.}} = C_{a1} + 2 \cdot 0,8 \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 = 88 \frac{\text{pF}}{\text{m}} + 57 \frac{\text{pF}}{\text{m}} = 145 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

Aufgabe 18



a) Gespeicherte Energie

$$W_C = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

Hier geeignet, wegen $Q = \text{const.}$:

$$W_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$\text{Kapazität: } C(z=d) = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{z} \Big|_{z=d}$$

$$W_C(z=d) = \frac{1}{2} \cdot Q^2 \cdot \frac{z}{\epsilon_0 \cdot A} \Big|_{z=d}$$

Methode der virtuellen Verschiebung:

Wenn die obere Elektrode um $\Delta \vec{s} = \Delta z \cdot \vec{e}_z$ verschoben wird,

wird aus dem elektrostatischen Feld die Arbeit $\Delta W_{\text{mech}} \approx \vec{F}_Q \cdot \Delta \vec{s} =$

$$= F_{Q,z} \cdot \Delta z \text{ gewonnen, d.h. } F_{Q,z} \approx \frac{\Delta W_{\text{mech}}}{\Delta z}$$

W_C muss um ΔW_{mech} abnehmen, d.h. $\Delta W_C = -\Delta W_{\text{mech}}$ und

$$F_{Q,z} \approx - \frac{\Delta W_C}{\Delta z} \text{ oder } F_{Q,z} = - \frac{dW_C}{dz}$$

$$\text{Hier: } \boxed{F_{Q,z} = - \frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{1}{\epsilon_0 \cdot A}} \neq f(z)$$

$$\vec{F}_Q = - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \vec{e}_z \text{ (Anziehung)}$$

b) Direkte Berechnung der Coulomb-Kraft auf Q im Feld von $-Q$:

Feldbeitrag der Ladung $-Q$ (vergleiche Aufgabe 11b))

$$\begin{aligned} \vec{D}_{-Q}(z>0) &= \frac{1}{2} \sigma_{-Q} \vec{e}_z \quad \leftarrow \text{homogen wegen Plattenkondensatornäherung} \\ &= \frac{1}{2} \frac{-Q}{A} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\vec{E}_{-Q}(z>0) = - \frac{1}{2} \frac{Q}{\epsilon_0 A} \vec{e}_z$$

(für $z \ll$ Plattenabmessungen)

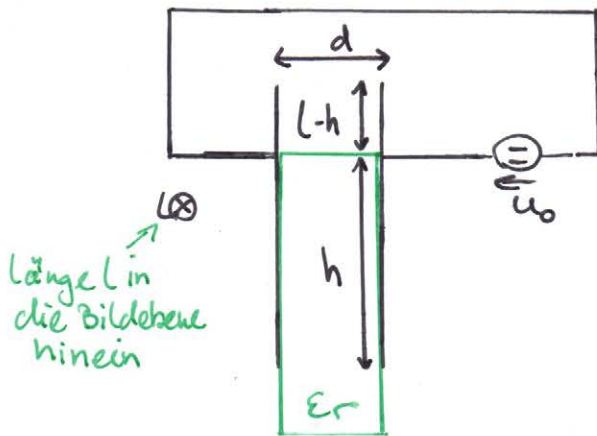
$\vec{E}_{-Q} = \text{const}$ in der gesamten oberen Platte

Coulomb-Kraft auf „Probekladung“ $+Q$:

$$\vec{F}_Q = Q \cdot \vec{E}_{-Q}(z=d) = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \cdot \vec{e}_z$$

Anmerkung: Der Feldbeitrag $\vec{E}_{+Q}$ der Probekladung darf bei der Berechnung der Coulomb-Kraft auf die Probekladung nicht eingesetzt werden. (denn die Probekladung wird auf sich selbst keine Kraft auswirken)

Aufgabe 19



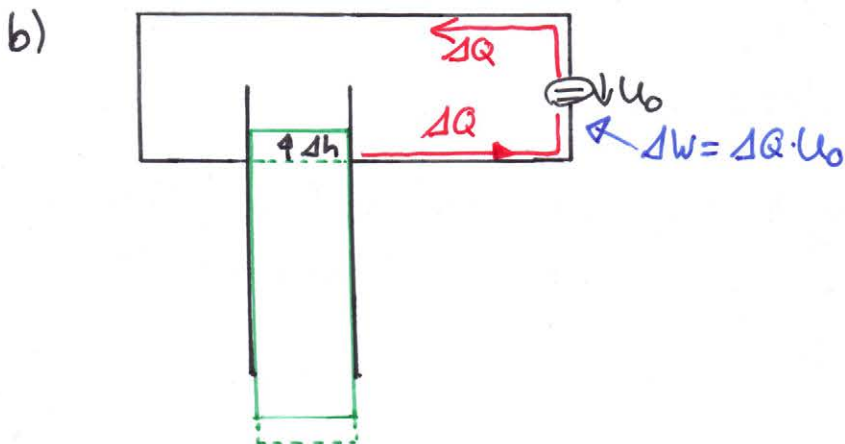
Gesucht: Kraft auf das Dielektrikum

a) Parallelschaltung zweier Kondensatoren (mit/ohne Dielektrikum):

$$C(h) = \epsilon_0 \cdot \frac{l \cdot (l-h)}{d} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{l \cdot h}{d} = \epsilon_0 \cdot \frac{l}{d} [l + (\epsilon_r - 1) \cdot h]$$

$$Q(h) = C(h) \cdot U_0$$

$$W_C(h) = \frac{1}{2} U_0^2 \cdot C(h) \quad \text{da } U_0 = \text{const dieses mal diese Form der Gleichung}$$



$$\Delta Q = Q(h + \Delta h) - Q(h) = U_0 \frac{\epsilon_0 \cdot l}{d} (\epsilon_r - 1) \Delta h$$

$$\Delta W_Q = -U_0 \cdot \Delta Q = -U_0^2 \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\epsilon_r - 1) \Delta h$$

↑
Quelle

ET3
Ü10
-22-
c) Energiebilanz des Systems mit zwei Energiespeichern:
Kondensator und Spannungsquelle

20.12.2011

$$(W_C + W_Q)|_{\text{nachher}} = (W_C + W_Q)|_{\text{vorher}} - \Delta W_{\text{mech}}$$

$$\Delta W_{\text{mech}} \approx \vec{F}_{\text{el}} \cdot \Delta \vec{s} = F_{\text{el}} \cdot \Delta h$$

$\vec{F}_{\text{el}}$: Kraft, die durch das elektrische Feld auf das Dielektrikum ausgeübt wird.

$$W_C(h + \Delta h) + \underbrace{W_Q(h + \Delta h)}_{W_Q(h) + \Delta W_Q} = W_C(h) + W_Q(h) - \Delta W_{\text{mech}}$$

$$\Delta W_{\text{mech}} = \underbrace{W_C(h) - W_C(h + \Delta h)}_{-\Delta W_C} - \Delta W_Q$$

$$= -\frac{1}{2} U_0^2 \frac{\epsilon_0 L}{d} (\epsilon_r - 1) \Delta h + U_0^2 \frac{\epsilon_0 L}{d} (\epsilon_r - 1) \Delta h$$

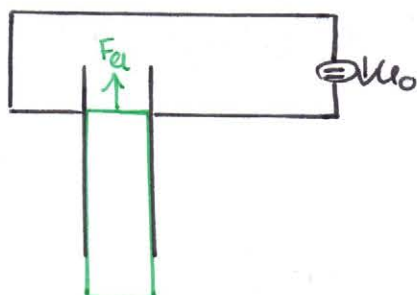
$$-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} U_0^2 \frac{\epsilon_0 L}{d} (\epsilon_r - 1) \Delta h > 0 \text{ für } \Delta h > 0$$

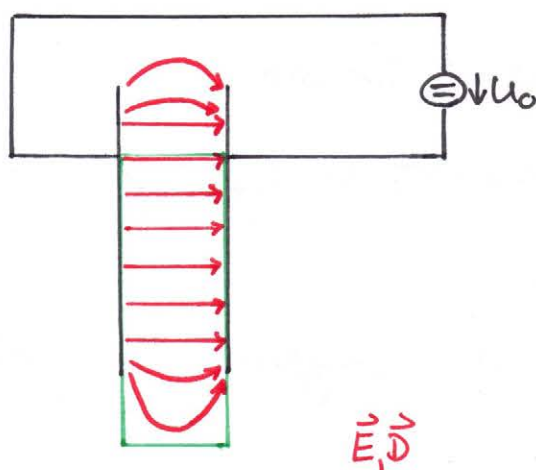
Anmerkung: Auch $\Delta W_C > 0$

d) Kraft auf das Dielektrikum (Prinzip der virtuellen Verschiebung)

$$F_{\text{el}} = - \frac{\Delta W_{\text{el}}}{\Delta h} = + \frac{\Delta W_{\text{mech}}}{\Delta h} = \frac{1}{2} U_0^2 \frac{\epsilon_0 L}{d} (\epsilon_r - 1)$$

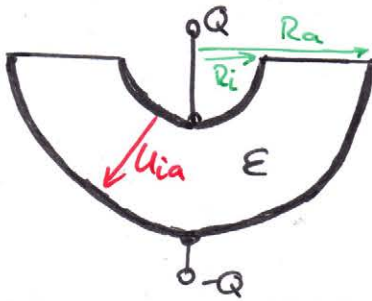


Anmerkung: Tatsächlich ist $\vec{E}$ nicht homogen und verläuft nicht überall senkrecht zu den Platten.



Aufgabe 20

a)



Ersatzladungsverteilung für $\vec{E}$ -Feld:

Linienladung $q_L = \frac{2 \cdot Q}{L}$ in der Zylinderachse (Q verteilt sich auf einem Halbzylinder $\hat{=} 2Q$ auf einem Vollzylinder).

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2 \frac{Q}{L}}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_s$$

$$U_{ia} = \int_{s=R_i}^{R_a} E_s(s) ds = \frac{Q/L}{\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)$$

$$C_{HZ} = \frac{Q}{U_{ia}} = \frac{\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$$

$$C_{HZ}' = \frac{C_{HZ}}{L} = \frac{\pi \cdot \epsilon}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$$

Anmerkung: Andere Möglichkeit $C_{HZ} = \frac{1}{2} C_{\text{Zylinder}}$

b) Analogie $C \leftrightarrow R$

$$C_{HZ} \cdot R_{HZ} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

$$\Rightarrow R_{HZ} = \frac{\epsilon}{\sigma} \cdot \frac{1}{C_{HZ}} = \frac{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}{\pi d \cdot L} \sim \frac{1}{L}$$

$$G_{HZ} = \frac{1}{R_{HZ}} = \frac{\pi d L}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} \sim L$$

$$R_{HZ}' = \frac{R_{HZ}}{L} \sim \frac{1}{L^2} \text{ nicht sinnvoll}$$

$$G_{HZ}' = \frac{G_{HZ}}{L} = \text{const analog zu } C_{HZ}' \checkmark$$

c) C_{HZ} und G_{HZ}



$\epsilon_c = \text{const}$

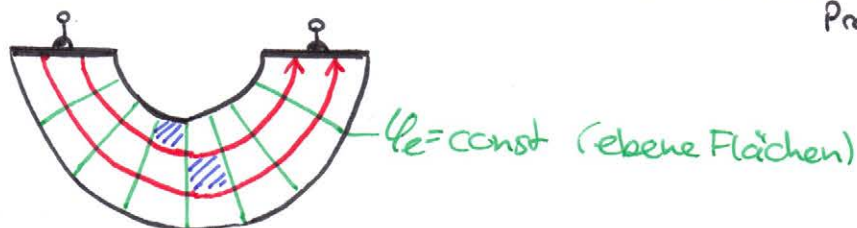
/// näherungsweise Quadrate

tatsächlich Halbzylinderflächen

Anmerkung: 1) Der Feldlinienabstand ist $\sim \frac{1}{|\vec{E}|}$

2) Bei geschickter „Eichung“ bilden $\vec{E}$ -Feldlinien und Äquipotentiallinien überall quadratische Felder.

d) Duale Struktur: $\vec{E}$ -Feldlinien und Äquipotentiallinien tauschen die Rollen (bei zweidimensionalen Problemen).



Bei geeigneter „Eichung“: Gleiche Geometrie wie vorher in c)

Duale Struktur: Winkel-kondensator C_W

Anschaulich: $|\vec{E}|$ hat in beiden Anordnungen (C_{HZ}, C_W) die gleiche Ortsabhängigkeit

e) Für die duale Struktur ($G_{\text{dual}} = G_W$) gilt:

$$\frac{C_{HZ}}{\epsilon \cdot l} = \frac{d \cdot l}{G_W}$$

nur von
Querschnittsgeometrie (und reziprok)
abhängig

Oder: $\frac{C_{HZ}'}{\epsilon} = \frac{d}{G_W}$

Also: $G_W = \frac{d \cdot \epsilon \cdot l^2}{C_{HZ}} = \frac{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}{\pi} \cdot d \cdot l$

oder noch schöner:

$$G_W' = \frac{d \epsilon}{C_{HZ}'} = \frac{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}{\pi} \cdot d$$

Aufgabe 21

10.01.2012
Ü11

Randwertproblem mit Ladungsverteilung

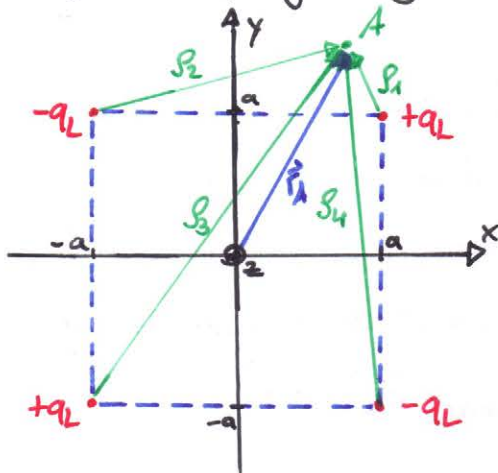
Gesucht: Elektrostatistisches Potential $\varphi_e(\vec{r})$

Ansatz: Zerlegung des Problems in einfachere Teilprobleme.

Anschließend Superposition der Teillösungen.

a) 1. Teilproblem: $\varphi_{e1} = 0$ auf dem gesamten Rand
+ q_L bei $x=y=a$

Lösung mit Spiegelungsmethode



$$\varphi_{e1}(\vec{r}_A) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{s_4}{s_3}\right)$$

$$\text{mit } s_1 = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - a)^2}$$

$$s_2 = \sqrt{(x_A + a)^2 + (y_A - a)^2}$$

$$s_3 = \sqrt{(x_A + a)^2 + (y_A + a)^2}$$

$$s_4 = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A + a)^2}$$

Probe bzgl. der Randbedingungen:

1) In der x - z -Ebene gilt:

$$s_1 = s_4, s_2 = s_3$$

$$\varphi_{e1} = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s_2}{s_3} \cdot \frac{s_4}{s_1}\right) = 0 \quad \checkmark$$

$\underbrace{\frac{s_2}{s_3} \cdot \frac{s_4}{s_1}}_{=1} \quad \ln(1) = 0$

2) In der y - z -Ebene gilt:

$$s_1 = s_2, s_3 = s_4$$

$$\varphi_{e1} = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{s_4}{s_3}\right) = 0 \quad \checkmark$$

$\underbrace{\frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{s_4}{s_3}}_{=1}$

b) 2. Teilproblem: $\varphi_2 = 0$ in der x - z -Ebene

$\varphi_2 = U_0$ in der y - z -Ebene

$\Delta \varphi_2 = 0$ im Lösungsgebiet

Vergleiche Winkelkondensator, hier $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\varphi_2(\vec{r}_A) = U_0 \cdot \frac{\Phi_A}{\Phi_2} = U_0 \cdot 2 \cdot \frac{\Phi_A}{\pi}$$

$$\varphi_e(\vec{r}_A) = \varphi_1(\vec{r}_A) + \varphi_2(\vec{r}_A)$$

c) Allgemein gilt

Falls im Lösungsgebiet gilt

$$(*) \quad \Delta \varphi_1 = -\frac{\rho_1}{\epsilon} \text{ mit gegebenem } \varphi_{1,\text{Rand}}$$

$$(**) \quad \Delta \varphi_2 = -\frac{\rho_2}{\epsilon} \text{ mit gegebenem } \varphi_{2,\text{Rand}}$$

dann gilt für $\varphi_e = \varphi_1 + \varphi_2$:

$$(***) \quad \Delta \varphi_e = \Delta(\varphi_1 + \varphi_2) = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\epsilon}$$

$$\text{und } \varphi_{e,\text{Rand}} = \varphi_{1,\text{Rand}} + \varphi_{2,\text{Rand}}$$

(*) entspricht Teilproblem in a) mit

$$\rho_1(\vec{r}) = q_L \cdot \delta(x-a) \cdot \delta(y-a)$$

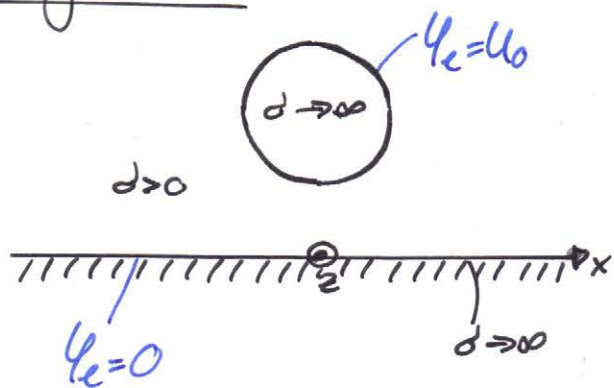
(**) entspricht Teilproblem b) mit

$$\rho_2(\vec{r}) = 0$$

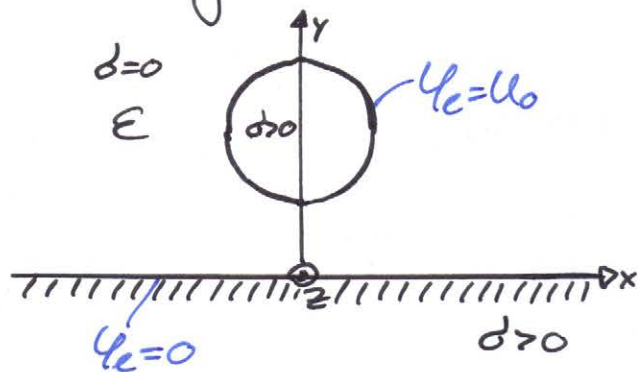
(***) inklusive Randbedingungen entspricht dem Originalproblem

$\Rightarrow \varphi_e = \varphi_1 + \varphi_2$ ist die Lösung des Originalproblems

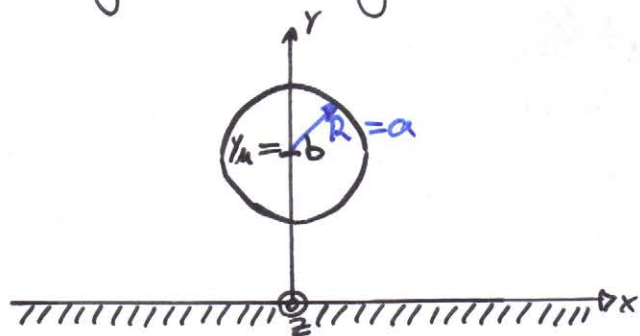
Aufgabe 22



a) analoges elektrostatisches Problem

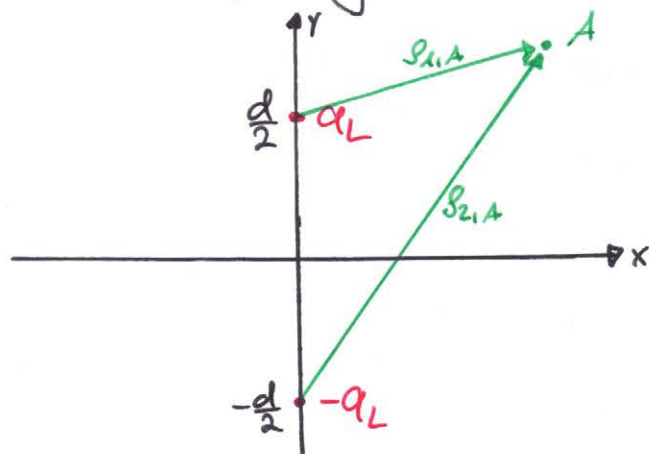


b) Vergleiche Aufgabe 17 b) (Zylinder vor Ebene)



$$k_1 \stackrel{\text{vgl. A 16}}{=} \frac{y_A}{R} + \sqrt{\left(\frac{y_A}{R}\right)^2 - 1} = \frac{b}{a} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}$$

Ersatzanordnung:



zu bestimmen: q_L und d

$$(i) U_0 = \varphi_e(h_1) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln(h_1)$$

$$\Leftrightarrow q_L = \frac{2\pi\epsilon U_0}{\ln(h_1)}$$

$$(ii) \text{ aus Aufgabe : } a = \sqrt{x_m^2 - R^2}$$

$\uparrow$ dort Koordinate der Linienladung q_L

$$\text{Hier: } \frac{d}{2} = \sqrt{y_m^2 - R^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$\varphi_e(\vec{r}_A) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{s_{2,A}}{s_{1,A}}\right)$$

mit

$$s_{1,A} = \sqrt{\left(y_A - \frac{d}{2}\right)^2 + x_A^2}$$

$$s_{2,A} = \sqrt{\left(y_A + \frac{d}{2}\right)^2 + x_A^2}$$

$$\varphi_e(\vec{r}_A) = \frac{U_0}{\ln(h_1)} \ln\left(\frac{s_{2,A}}{s_{1,A}}\right)$$

Stromdichte im Originalproblem:

$$\vec{J} = \epsilon \cdot \vec{E}, \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi_e = \dots$$

oder mithilfe von Aufgabe 9:

E-Feld eines Liniendipols

(dort: Abstand der Linienladungen $= 2a$, hier $= d$;
ersetze x durch y_A , y durch $-x_A$)

$$c) I = \iint \vec{J} d\vec{A} \cdot \frac{\vec{A}}{l} = \dots$$

Zylindermantel um den
Zylinderleiter mit Länge l

$$\text{Einfacher: } I' = U_0 \cdot G'$$

Mit $R \cdot C = \frac{\epsilon}{d}$ gilt

$$G' = \frac{C}{l} = \frac{1}{R \cdot l} = \frac{C \cdot d}{l} = C' \cdot \frac{d}{l} \quad (\text{oder } \frac{G'}{d} = \frac{C'}{l})$$

$$\text{Vergleiche Aufgabe 17 b): } C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(h_1)}$$

$$\text{Also } G' = \frac{2\pi d}{\ln(h_1)}$$

$$\text{und } I' = U_0 \cdot \frac{2\pi d}{\ln(h_1)}$$

Aufgabe 23

a) Rotationssymmetrie $\Rightarrow$ wie beim geraden Linienstrom
in der z-Achse: $\vec{H}(\vec{r}) = H_\Phi(\rho) \vec{e}_\Phi$

$$\left[\begin{array}{l} H_z = 0 \text{ laut Aufgabenstellung} \\ \text{Wenn überall } \mu = \mu_0 \text{ gilt, muss div } \vec{H} = 0 \text{ gelten} \\ (\text{aus div } \vec{B} = \mu_0 \text{ div } \vec{H} = 0) \\ \text{Für eine Zylinder-Hüllfläche ergibt sich dann} \\ 0 = \oint_H \vec{H} d\vec{A} = H_\Phi(\rho) \cdot 2\pi\rho \cdot \Delta l \text{ also } H_\Phi = 0 \\ (\text{Deckel und Boden liefern keinen Beitrag wegen } H_z = 0) \end{array} \right.$$

Anwendung des Durchflutungsgesetzes auf
kreisförmige Konturkurven mit dem Radius ρ_A
im Rechtsschraubensinn zu $d\vec{A} \parallel \vec{e}_z$ (hier).

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) d\vec{s} = \oint_C \underbrace{H_\Phi(\rho_A) \rho_A}_{=\text{const. entlang } C} d\Phi = 2\pi\rho_A \cdot H_\Phi(\rho_A) \stackrel{!}{=} I_{\text{ein}}$$

$\rho_A \cdot d\Phi \vec{e}_\Phi$

$$I_{\text{ein}} = \iint_A \underbrace{\vec{J}(\vec{r})}_{\text{von } C \text{ berandet}} d\vec{A} \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{mit } \vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{e}_z \text{ für } 0 \leq \rho_A < R_1$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = -\frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_z \text{ für } R_2 < \rho_A < R_3 \quad - \text{da entgegengesetzte Richtung des Stromes}$$

$$I_{\text{ein}} = I \cdot \begin{cases} \frac{\pi \rho_A^2}{\pi R_1^2} = \frac{\rho_A^2}{R_1^2} & \text{für } 0 \leq \rho_A \leq R_1 \\ 1 & \text{für } R_1 < \rho_A < R_2 \\ 1 - \frac{\pi(\rho_A^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} = \frac{R_3^2 - \rho_A^2}{R_3^2 - R_2^2} & \text{für } R_2 \leq \rho_A \leq R_3 \\ 1 - 1 = 0 & \text{für } \rho_A > R_3 \end{cases}$$

ET3
Ü11
-26-

$$\vec{H}(\vec{r}_A) = \frac{I_{\text{ein}}}{2\pi s_A} \vec{e}_\Phi$$

10.01.2012

$$= \frac{I}{2\pi} \vec{e}_\Phi \cdot \begin{cases} \frac{s_A}{R_1^2} & \text{für } 0 \leq s_A < R_1 \\ \frac{1}{s_A} & \text{für } R_1 < s_A < R_2 \\ \frac{1}{s_A} \cdot \frac{R_3^2 - s_A^2}{R_3^2 - R_2^2} & \text{für } R_2 \leq s_A \leq R_3 \\ 0 & \text{für } s_A > R_3 \end{cases}$$

Wichtig: Das Durchflutungsgesetz gilt so nur im stationären Fall.

Allgemein gilt: $\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \iint_A (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{A} !$

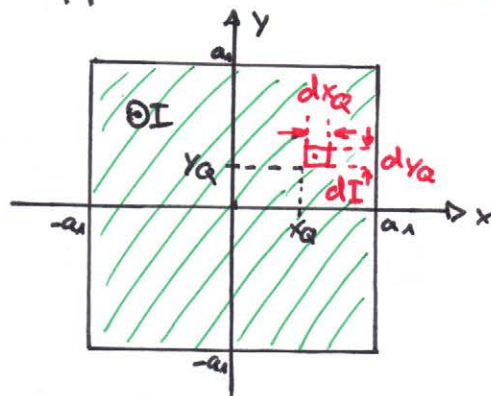
b) keine Rotationssymmetrie

$H_g(\vec{r}) \neq 0$ i. Allg.

$$H_g = H_g(s, \Phi), H_\Phi = H_\Phi(s, \Phi)$$

Das Durchflutungsgesetz gilt weiterhin, hilft aber nicht zur Berechnung von $\vec{H}(\vec{r}_A)$.

c) Ansatz: Zerlegung in infinitesimale, gerade Stromfäden, approximierbar als Linienströme.



Ü12

Bekannt: Magnetfeld eines Linienstroms I in der z-Achse (in z-Richtung)

17.01.2012

$$\vec{H}_0(\vec{r}_A) = \frac{I}{2\pi s_A} \vec{e}_\Phi = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{-y_A \vec{e}_x + x_A \vec{e}_y}{x_A^2 + y_A^2}$$

Hier: Verschiebung des Quellpunktes vom Ursprung nach (x_Q, y_Q)

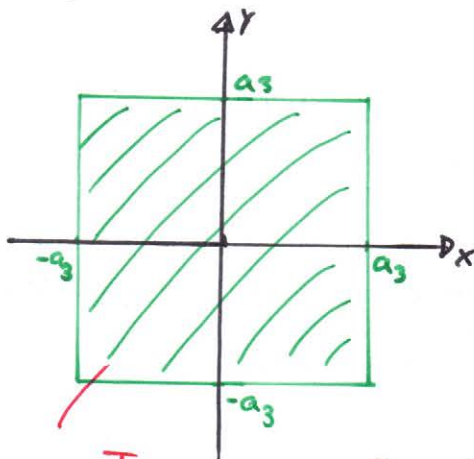
$$d\vec{H}(\vec{r}_A) = \frac{dI}{2\pi} \cdot \frac{-(y_A - y_Q)\vec{e}_x + (x_A - x_Q)\vec{e}_y}{(x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2}$$

d) mit $dI = J_2 \cdot dx_Q \cdot dy_Q$

Feld des Innenleiters

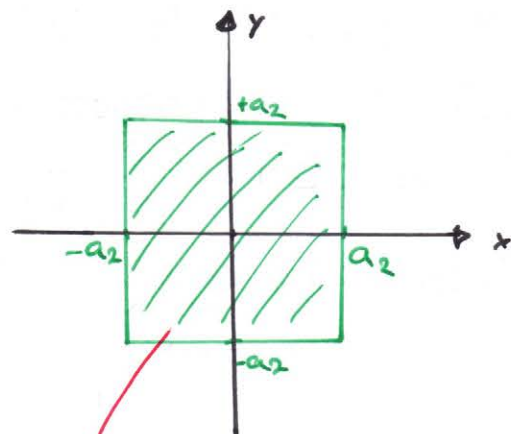
$$\begin{aligned} \vec{H}_i(\vec{r}_A) &= \int_{x_Q=-a_1}^{a_1} \int_{y_Q=-a_1}^{a_1} \underbrace{J_1}_{\frac{I}{4a_1^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-(y_A - y_Q)\vec{e}_x + (x_A - x_Q)\vec{e}_y}{(x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2} dx_Q dy_Q \\ &=: \vec{H}_\square(\vec{r}_A, J_1, a_1) \end{aligned}$$

Strömungsfeld des Rückleiters entspricht der Überlagerung



$$\vec{J} = - \frac{I}{4a_3^2 - 4a_2^2} \vec{e}_z =: J_3$$

" + "



$$\vec{J} = + \frac{I}{4a_3^2 - 4a_2^2} \vec{e}_z =: J_2$$

Das Magnetfeld des Rückleiters ergibt sich durch Superposition zu

$$\vec{H}_a(\vec{r}_A) = \vec{H}_\square(\vec{r}_A, J_2, a_2) + \vec{H}_\square(\vec{r}_A, J_3, a_3)$$

aus dem Vorlesungsumdruck mit

$$\rho_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \text{ und } \rho_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2\pi} \left[-\vec{e}_x \cdot \left(I_1 \cdot \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} + I_2 \cdot \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right) + \vec{e}_y \left(I_1 \cdot \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} + I_2 \cdot \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right) \right]$$

a) Definition der Feldlinie:

$$d\vec{s} \parallel \vec{H} \Rightarrow d\vec{s} \times \vec{H} = 0$$

(Hier ebenes Problem $\rightarrow H_z = 0, dz = 0$)

$$d\vec{s} \times \vec{H} = (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) \times (H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y) \\ = (dx H_y - dy H_x) \vec{e}_z \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow dx \cdot H_y = dy \cdot H_x$$

$$b) \int H_x dy = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int \left(I_1 \cdot \frac{2 \cdot y}{(x+a)^2 + y^2} + I_2 \cdot \frac{2 \cdot y}{(x-a)^2 + y^2} \right) dy \\ = -\frac{1}{4\pi} \left[I_1 \cdot \ln \underbrace{|(x+a)^2 + y^2|}_{\substack{\rho_1^2 \\ 2 \ln \rho_1}} + I_2 \cdot \ln \underbrace{|(x-a)^2 + y^2|}_{\substack{\rho_2^2 \\ 2 \ln \rho_2}} \right] + C_1$$

$$\int H_y dx = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(I_1 \cdot \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} + I_2 \cdot \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right) dx \\ = \frac{1}{4\pi} \left[I_1 \cdot 2 \cdot \ln(\rho_1) + I_2 \cdot 2 \cdot \ln(\rho_2) \right] + C_2$$

$$\text{aus (a): } 0 \stackrel{!}{=} \int H_y dx - \int H_x dy$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[I_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ln \rho_1 + I_2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ln \rho_2 \right] + \underbrace{C_2 - C_1}_{=: C_3}$$

$$C_3 = \frac{1}{\pi} \left[I_1 \ln \rho_1 + I_2 \ln \rho_2 \right] \quad \quad \quad =: -C_3$$

Fall (A): $I_1 = I_2 = I > 0$

$$C_3 = \frac{I}{\pi} [\ln \rho_1 + \ln \rho_2] = \frac{I}{\pi} \ln(\rho_1 \cdot \rho_2) \Rightarrow \rho_1 \cdot \rho_2 = \text{const} \\ (\text{vgl. Vorlesung: 'Cassinische Kurven'})$$

Fall (B): $I_1 = -I_2 = I > 0$

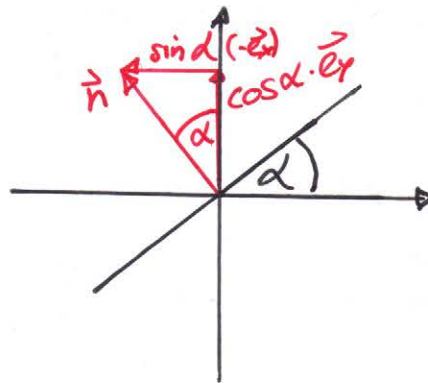
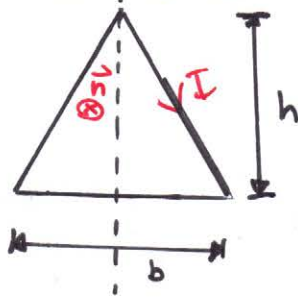
$$C_3 = \frac{I}{\pi} [\ln s_1 - \ln s_2] = \frac{I}{\pi} \ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) \Rightarrow \frac{s_1}{s_2} = \text{const}$$

(Vgl. Aufgabe 14: Apollonische Kreise)

- c) Die Form der $\vec{H}$ -Feldlinien zweier paralleler Linienströme $I_1 = -I_2$ entspricht der Form der Schnittlinien der Äquipotentialflächen mit der x - y -Ebene für zwei unendlich lange, parallele Linienladungen $q_{L1} = -q_{L2}$.

Aufgabe 25

Leiterschleife



- a) Magnetisches Moment der Leiterschleife

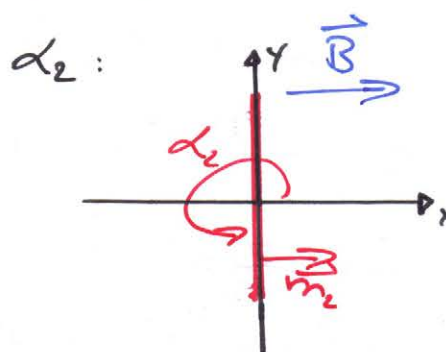
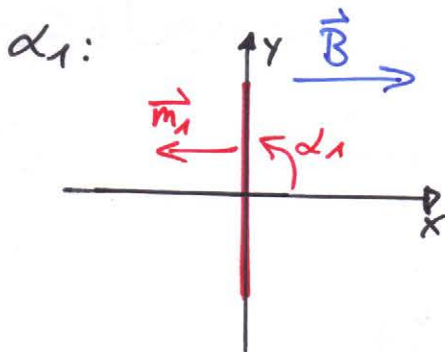
$$\vec{m} = A \cdot I \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot I \cdot \vec{n}$$

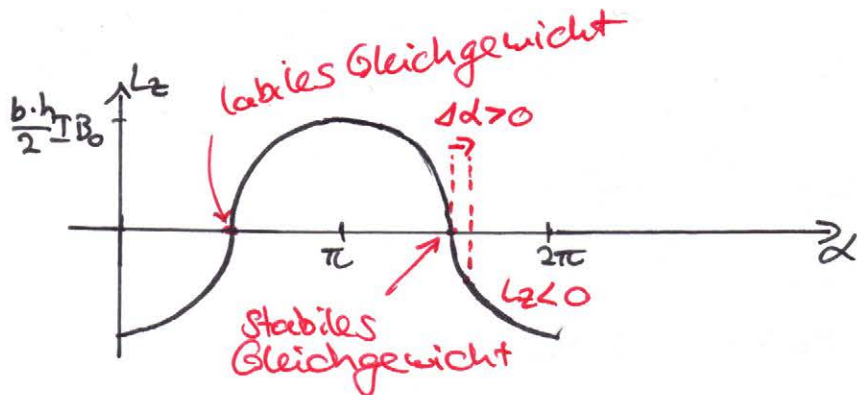
Wegen Homogenität von $\vec{B}$ gilt:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{m} \times \vec{B} = \frac{b \cdot h}{2} I (-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y) \times (B_0 \cdot \vec{e}_x) \\ &= \underbrace{-\frac{b \cdot h}{2} I B_0 \cos \alpha \vec{e}_z}_{L_z} \end{aligned}$$

- b) $L_z \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \cos \alpha \stackrel{!}{=} 0$

$$\text{also } \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$$





Anmerkung: Die Bezugssinne von α und L_z sind im Rechtsschraubensinn miteinander verknüpft. Dann ist ein stabiles Gleichgewicht gegeben, falls

$$L_z(\alpha) = 0 \text{ und } \frac{d}{d\alpha} L_z(\alpha) < 0$$

(Eine kleine Auslenkung $\Delta\alpha$ bewirkt ein der Auslenkung entgegengerichtetes Drehmoment.)

$$\frac{d}{d\alpha} L_z(\alpha) = + \underbrace{\frac{b \cdot h}{2} I B_0}_{>0} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha_1 = 1 > 0 \rightarrow \text{labiles Gleichgewicht}$$

$$\sin \alpha_2 = -1 < 0 \rightarrow \text{stabiles Gleichgewicht}$$

c) Jetzt $\vec{B} \neq \text{const}$, d.h. der Ansatz $\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$ ist nicht möglich.

Stattdessen:

1) Unterteilung der Leiterschleife in Wägelemente $d\vec{s}$

2) Bestimmung der Lorentzkraft $d\vec{F}_m = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$

3) Bestimmung der Beiträge $d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{F}_m$
zum Drehmoment

4) Integration $\vec{L} = \oint_{\text{Schleife}} d\vec{L}$

Hier interessiert nur L_z , d.h. Vereinfachung der Rechnung möglich:

zu (3) Hebelarm (vom Ursprung zum Wägelement $d\vec{s}$)

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\phi + z \cdot \vec{e}_z$$

$$d\vec{L} = (g \cdot \vec{e}_g + z \vec{e}_z) \times (dF_{m,g} \vec{e}_g + \underline{dF_{m,\phi} \vec{e}_\phi} + dF_{m,z} \vec{e}_z)$$

$$= \dots + g dF_{m,\phi} \underbrace{(\vec{e}_g \times \vec{e}_\phi)}_{\vec{e}_z} + \dots$$

einzigster Beitrag in z-Richtung

$$dL_z = g \cdot dF_{m,\phi} \rightarrow \text{nur } dF_{m,\phi} \text{ interessiert}$$

zu (2): Aus Schleifengeometrie bzw. $\vec{B} \parallel \vec{e}_x$ ergibt sich

$$d\vec{s} = (dg \vec{e}_g + dz \vec{e}_z), \quad \vec{B} = (B_g \vec{e}_g + B_\phi \vec{e}_\phi),$$

also

$$d\vec{s} \times \vec{B} = \dots + dz B_g \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_g)}_{\vec{e}_\phi} + \dots$$

einzigster Beitrag in ϕ -Richtung

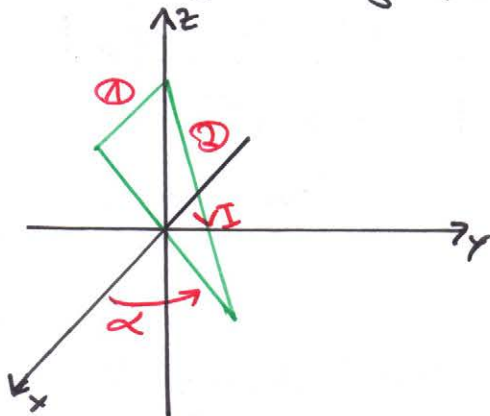
$$dF_{m,\phi} = dz \cdot B_g \cdot I$$

$\Rightarrow$ Nur B_g interessiert und nur Schleifensegmente mit $dz \neq 0$ tragen zu L_z bei.

$\Rightarrow$ Das Schleifensegment in der x-y-Ebene liefert keinen Beitrag zu L_z .

$$a) \vec{B}(\vec{r}) = B_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \vec{e}_x = B_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) (\cos\phi \vec{e}_\rho - \sin\phi \vec{e}_\phi),$$

$$\text{also } B_g(\vec{r}) = B_g(z, \phi) = B_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos\phi$$



$$\text{Segment 1: } \phi = \alpha + \pi \quad \cos\phi = \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$

$$\text{Segment 2: } \phi = \alpha \quad \cos\phi = \cos\alpha$$

ET3
Ü12
-29-

$$dF_{m,\Phi} = I \cdot dz \cdot B_g(z, \Phi) = I \cdot B_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos \Phi dz$$

$$dL_z = g(z) dF_{m,\Phi}(z) \quad \text{mit } g(z) = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

17.01.2012

für Segmente ① und ②.

$$dL_z = I \cdot \frac{b}{2} B_0 \cos \Phi \underbrace{\left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(1 + \frac{z}{h}\right)}_{\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)} dz$$

Ü13
e) Segment ③ (Grundseite des Dreiecks) liefert keinen Beitrag zu L_z , da $dz=0$

24.01.2012

$$L_z = \int_{\text{Segm. ① u. ②}} dL_z$$

$$L_z = I \cdot \frac{b}{2} \cdot B_0 \cdot \left[\underbrace{\int_{z=0}^h \left(1 - \cos \alpha\right) \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) dz}_{\text{Segment ①}} + \underbrace{\int_{z=h}^0 \cos \alpha \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) dz}_{\text{Segment ②}} \right]$$

$$= I \cdot \frac{b}{2} \cdot B_0 \cos \alpha \cdot \underbrace{\left(- \left[z - \frac{z^3}{3h^2} \right]_{z=0}^{z=h} + \left[z - \frac{z^3}{3h^2} \right]_{z=h}^{z=0} \right)}_{= -\frac{4}{3}h}$$

$$= -\frac{2}{3} I \cdot b \cdot h \cdot \cos \alpha \cdot B_0$$

Aufgabe 26

a) Mit $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{J}_Q(\vec{r}_Q) = \rho_Q \cdot \vec{v}(\vec{r}_Q) = \rho_Q \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_Q = \rho_Q \cdot \omega \cdot \rho_Q \cdot \vec{e}_{\Phi_Q}$$

Bahnradius

b) Wegen der Rotationssymmetrie muss gelten:

$$H_{A,x}(q,q,0) = H_{A,r}(q,q,0) = 0$$

$$\vec{H}_A(0,q,0) = H_{A,z}(0,q,0) \cdot \vec{e}_z$$

c) „Kochrezept“ für Biot-Savart:

$$\cdot \vec{J}_Q(\vec{r}_Q) = \rho_e \cdot \omega \cdot \rho_Q \cdot \vec{e}_{\Phi_Q}$$

$$\cdot \vec{r}_{AQ} = \underbrace{\vec{r}_A}_{=0} - \vec{r}_Q = -\vec{r}_Q = -r_Q \cdot \vec{e}_{r,Q}$$

$$\cdot r_{AQ} = |\vec{r}_{AQ}| = r_Q$$

$$\cdot \vec{J}_Q \times \vec{r}_{AQ} = -\rho_e \cdot \omega \cdot \underbrace{\rho_Q \cdot r_Q}_{r_Q \sin \theta_Q} \underbrace{\vec{e}_{\Phi_Q} \times \vec{e}_{r,Q}}_{\vec{e}_{\theta_Q}}$$

$$= -\rho_e \cdot \omega \cdot r_Q^2 \cdot \sin \theta_Q \vec{e}_{\theta_Q}$$

$$\cdot d\vec{H}_A(Q,0,0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\vec{J}_Q \times \vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3} \cdot dV_Q = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{-\rho_e \omega r_Q^2 \sin \theta_Q \vec{e}_{\theta_Q}}{r_Q^3} dV_Q$$

$$dH_{A,z}(Q,0,0) = d\vec{H}_A(Q,0,0) \cdot \vec{e}_z$$

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{\theta} = -\sin \theta)$$

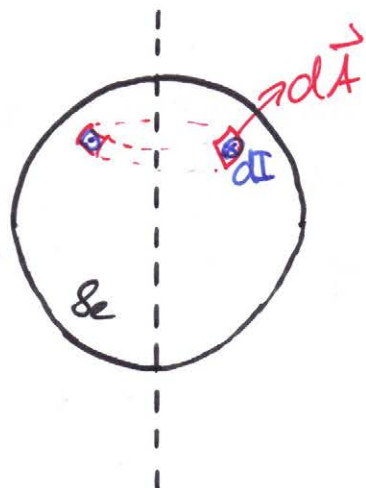
$$= +\frac{1}{4\pi} \frac{\rho_e \omega r_Q^2 \sin^2 \theta_Q}{r_Q^3} dV_Q$$

$$c/d) \vec{H}_A(Q,0,0) = \frac{\rho_e \omega}{4\pi} \int_{r_Q=0}^a \int_{\theta_Q=0}^{\pi} \int_{\Phi_Q=0}^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta_Q}{r_Q} \underbrace{r_Q^2 \sin \theta_Q d\Phi_Q d\theta_Q dr_Q}_{dV_Q} \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{\rho_e \omega}{4\pi} \cdot 2\pi \int_{r_Q=0}^a r_Q dr_Q \int_{\theta_Q=0}^{\pi} \sin^3 \theta_Q d\theta_Q$$

$$\underbrace{\frac{a^2}{2}}_{r_Q=0} \underbrace{\left[-\cos \theta_Q + \frac{1}{3} \cos^3 \theta_Q \right]_{\theta_Q=0}^{\theta_Q=\pi}}_{= \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \rho_e \cdot \omega \cdot a^2 \cdot \vec{e}_z$$



ET3 24.01.2012
 U13
 -30- „Liniengstrom“ $dI = \vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{J}_Q r_Q d\theta_Q dr_Q \vec{e}_{\Phi_Q}$
 umfasst die „Schleifen“-Fläche $A = \pi \cdot (r_Q \cdot \sin \theta_Q)^2$

Magnetisches Moment

$$d\vec{m} = A \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\vec{e}_z} \cdot dI$$

$$= \pi (r_Q \sin \theta_Q)^2 \cdot \vec{e}_z \cdot \underbrace{[\vec{J}_Q \cdot \omega \cdot r_Q \sin \theta_Q \vec{e}_{\Phi_Q} \cdot r_Q \cdot d\theta_Q \cdot dr_Q \cdot \vec{e}_{\Phi_Q}]}_{d\vec{A}}$$

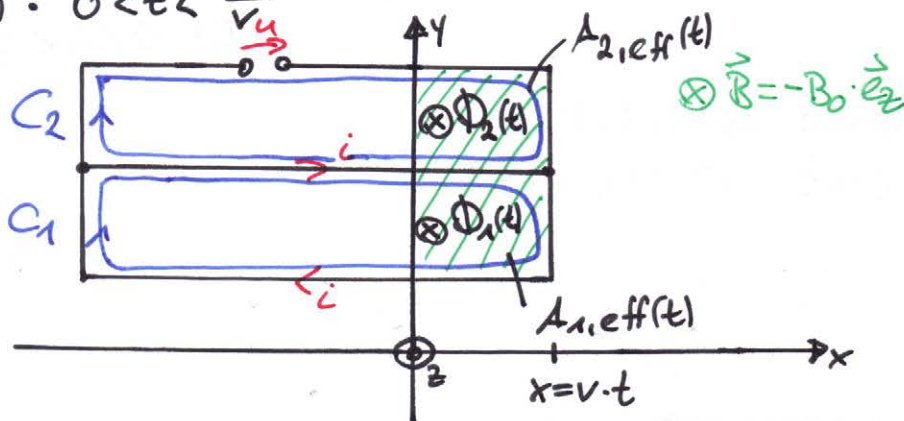
$$= \pi \cdot \vec{J}_Q \cdot \omega \cdot r_Q^4 \sin^3 \theta_Q d\theta_Q dr_Q \vec{e}_z$$

$$\vec{m} = \pi \cdot \vec{J}_Q \cdot \omega \cdot \underbrace{\int_{r_Q=0}^a r_Q^4 dr_Q}_{\frac{a^5}{5}} \underbrace{\int_{\theta_Q=0}^{\pi} \sin^3 \theta_Q d\theta_Q}_{=\frac{4}{3}} \vec{e}_z$$

$$= \frac{4}{15} \pi \vec{J}_Q \omega a^5 \cdot \vec{e}_z$$

Aufgabe 217

a) $0 < t < \frac{a}{v}$



$$A_{1,eff}(t) = A_{2,eff}(t) = b \cdot v \cdot t$$

Induktionsgesetz für Masche 1:

$$\oint_{C_1} \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_{A_1} \vec{B} d\vec{A}$$

$$= i \cdot 4R$$

(Maschenumlauf)

$$B_0 \cdot A_{1,eff}(t)$$

$$= B_0 \cdot b \cdot v \cdot t$$

(wegen $\vec{B} \perp d\vec{A}$, $\vec{B}$ homogen)

$$\text{Also } i \cdot 4R = - \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = -B_0 \cdot b \cdot v$$

$$i = - \frac{B_0 \cdot b \cdot v}{4R} \quad (\text{für } 0 < t < \frac{a}{v})$$

$$\bullet \frac{a}{v} < t < \infty \text{ (ebenso } t < 0)$$

$$\Phi_1 = \text{const}$$

$$i = - \frac{1}{4R} \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = 0$$

b) Induktionsgesetz für Masche 2:

Aus der Geometrie der Anordnung ergibt sich

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(t)$$

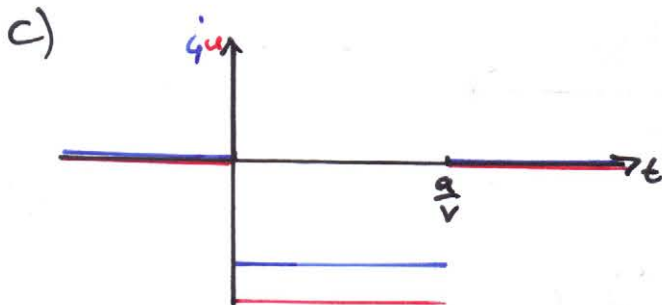
$$\bullet 0 < t < \frac{a}{v}:$$

$$\underbrace{\oint_{C_2} \vec{E} d\vec{s}}_{u - i \cdot R} = - \frac{d\Phi_2(t)}{dt} = -B_0 \cdot b \cdot v$$

$$\text{Also: } u = i \cdot R - B_0 \cdot b \cdot v = -B_0 \cdot b \cdot v \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = -\frac{5}{4} B_0 \cdot b \cdot v \quad (\text{für } 0 < t < \frac{a}{v})$$

$$\bullet \frac{a}{v} < t < \infty \text{ (ebenso für } t < 0):$$

$$\Phi_2 = \text{const}, i = 0 \Rightarrow u = 0$$

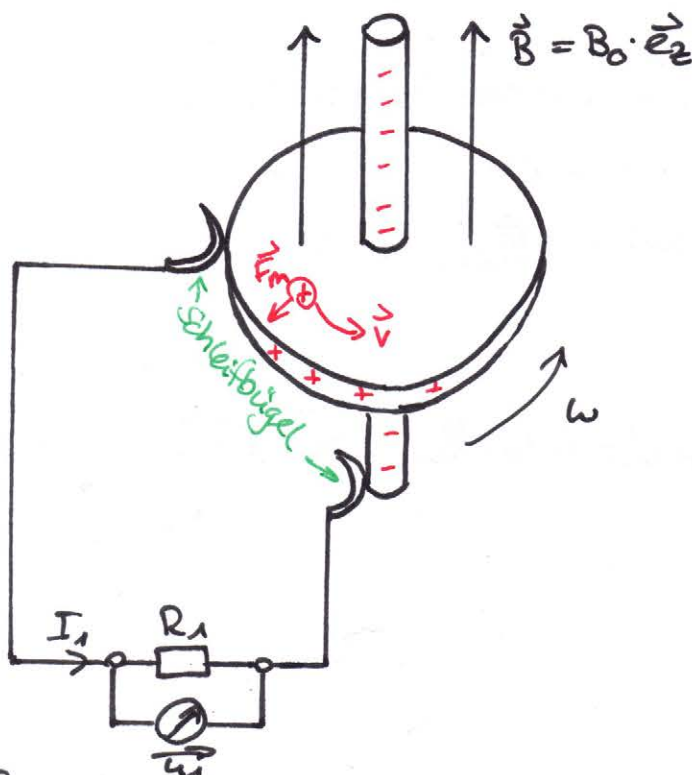


d) Jetzt $\Phi_1(t) = \iint_{A_1(t)} \vec{B}(t) d\vec{A}$

$$= \begin{cases} B_0 e^{-\frac{t}{\tau}} b \cdot v \cdot t & \text{für } 0 < t < \frac{a}{v} \\ B_0 e^{-\frac{t}{\tau}} b \cdot a & \text{für } \frac{a}{v} < t < \infty \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$i(t) = -\frac{1}{4R} \frac{d\Phi_A(t)}{dt} = -\frac{1}{4R} B_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot b \cdot \begin{cases} v(1 - \frac{t}{\tau}) & \text{für } 0 < t < \frac{a}{v} \\ a(-\frac{1}{\tau}) & \text{für } \frac{a}{v} < t < \infty \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 28 Barlowisches Rad



Gesucht: I_1, U_1

Problem: keine bewegte Schleife, kein $\dot{B}(t)$

Ansatz: $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ so nicht möglich

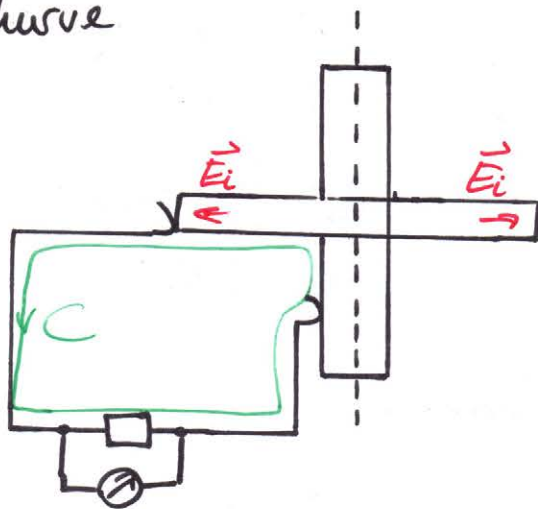
Abhilfe: $\oint_C \vec{E} d\vec{s} \stackrel{\text{rot } \vec{E}_{\text{stat}} = 0}{=} \oint_C \vec{E}_i d\vec{s}$
Maschenumlauf

In der Kreisscheibe gilt:

$$\vec{v} = \omega \cdot \rho \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E}_i = \omega \cdot \rho \cdot B_0 (\underbrace{\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_r})$$

Konturkurve



a) $R_1 \rightarrow \infty$, d.h. $I_1 = 0$, $\vec{J} = 0$ in der Scheibe

Anmerkung: $\vec{J} = \sigma_0 (\vec{E}_{\text{stat}} + \vec{E}_i) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ in der Scheibe: $\vec{E}_{\text{stat}} = -\vec{E}_i$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = U_1$$

$$= \oint_C \vec{E}_i d\vec{s} = \int_{s=s_i}^{s=s_a} \omega \cdot s \cdot B_0 ds = \omega \cdot B_0 \cdot \frac{s_a^2 - s_i^2}{2}$$

Ü14

31.01.2012

b) Jetzt $R_1 < \infty$, d.h. $I_1 \neq 0$, $\vec{J} \neq 0$

Anmerkung: In der Scheibe gilt jetzt

$$\vec{J} = \sigma_0 (\vec{E}_{\text{stat}} + \vec{E}_i) \neq 0$$

d.h. $\vec{E}_{\text{stat}} \neq -\vec{E}_i$

• $v_{\text{Drift}} \ll \omega \cdot s$, d.h. $\vec{v}$, $\vec{E}_i$ und $U_i = \oint_C \vec{E}_i d\vec{s}$ wie in a)

Scheiben-Widerstand:

$$R_s = \int_{s=s_i}^{s=s_a} \frac{1}{\sigma_0} \cdot \frac{ds}{2\pi s d} = \frac{1}{2\pi \sigma_0 d} \cdot \ln\left(\frac{s_a}{s_i}\right)$$

$$I_1 = \frac{U_i}{R_1 + R_s}$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_1 = U_i \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_s} = \frac{U_i}{1 + \frac{R_s}{R_1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \omega \cdot B_0 (s_a^2 - s_i^2)}{1 + \frac{R_s}{R_1}}$$

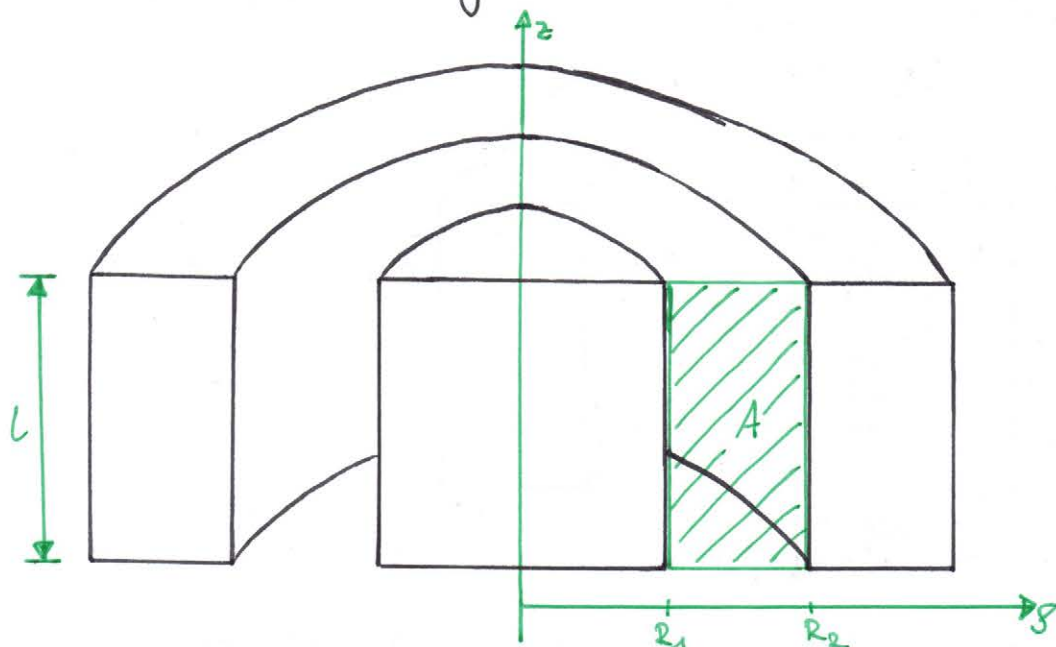
a) Mit Aufgabe 23

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \vec{e}_\Phi$$

$$\begin{cases} \frac{s}{R_1^2} & \text{für } 0 \leq s < R_1 \\ \frac{1}{s} & \text{für } R_1 < s < R_2 \\ \frac{1}{s} \cdot \frac{R_3^2 - s^2}{R_3^2 - R_2^2} & \text{für } R_2 \leq s \leq R_3 \\ 0 & \text{für } s > R_3 \end{cases}$$

für $0 \leq s < R_1$
für $R_1 < s < R_2$
für $R_2 \leq s \leq R_3$
für $s > R_3$

b) Abschnitt der Länge l



$$\Phi_a = \iint_A \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \int_{z=0}^l \int_{s=R_1}^{R_2} \frac{\vec{e}_\Phi}{s} \cdot \underbrace{ds dz \vec{e}_\Phi}_{d\vec{A}} = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Äußere Induktivität (Flussanteile außerhalb des Leitermaterials. Hier nur im Zwischenraum, da $\vec{B}=0$ für $s > R_3$)

$$L_a = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Phi_a}{I} = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

c) „Innere Induktivität“

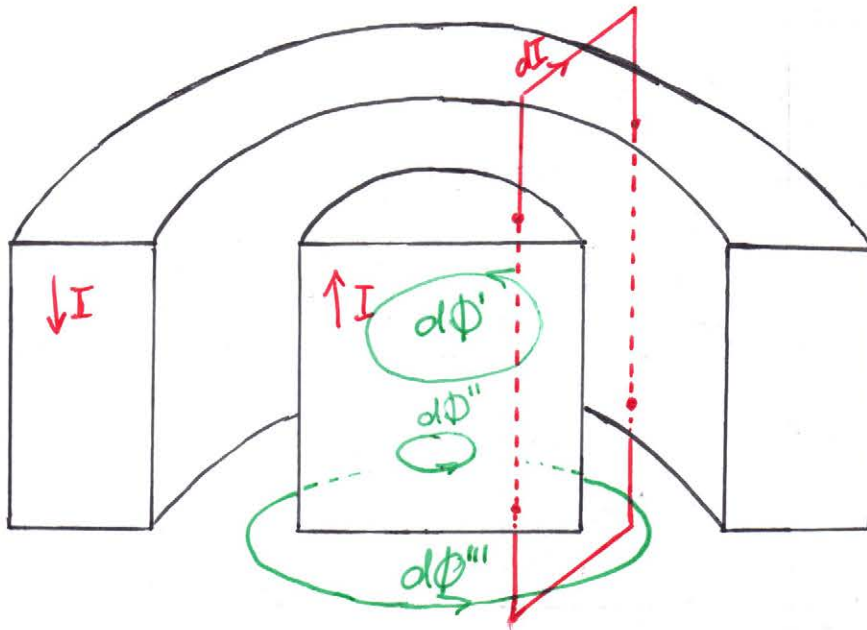
Problem: Nicht der gesamte magnetische Fluss im Leitermaterial ist mit dem gesamten Strom/Leiter verknüpft.

Abhilfe: Zerlegung von I und/oder Φ in infinitesimale Ströme / Flüsse $dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}_+$
 $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}_\Phi$ (Strom/Flusslinien).

Strom- und Flussröhren verlaufen entlang der $\vec{J}$ - und der $\vec{B}$ -Feldlinien, d.h. entlang geschlossener (kontur-) Kurven.

... wegen $\text{div}(\vec{J})=0$ und $\text{div}(\vec{B})=0$

gegebenenfalls $\vec{J}_{\text{tot}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$



- dI und $d\Phi'$ sind (im Rechtsschraubensinn) verknüpft.
- dI und $d\Phi''$ sind nicht verknüpft
- $d\Phi'''$ ist mit allen dI , also mit dem gesamten dI verknüpft $\Rightarrow d\Phi'''$ ist Teil von Φ_a (vom äußeren Fluss)

Damit z.B. Beitrag zur magnetischen Energie:

$$dW_m = \frac{1}{2} dI \cdot d\Phi$$

Hier: $d\Phi = \vec{B}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{A}}{d\rho dz \vec{e}_\rho} = \mu_0 \frac{I}{2\pi} d\rho dz \cdot \begin{cases} \frac{\rho}{R_1} & \text{im Hinleiter} \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} & \text{im Rückleiter} \end{cases}$

d) Gesamter innerer verknüpfter Fluss Ψ_i , z.B. über

Energie formuliert:

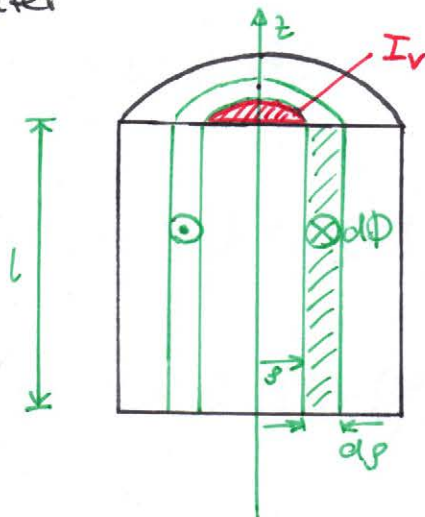
$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Psi \cdot I = \frac{1}{2} \cdot \iint_{\text{alle verknüpften } dI \text{ und } d\Phi} dI d\Phi$$

Also $\Psi = \frac{1}{I} \cdot \int_{\text{alle } d\Phi} dI d\Phi = \int_{\text{alle } d\Phi} \underbrace{\left(\int \frac{dI}{I} \right)}_{\substack{\text{alles damit} \\ \text{verhelfen } dI}} d\Phi$

$\underbrace{\frac{I_v}{I}}_{d\Psi}$

$\Psi = \Psi_i + \Psi_a$
 $= \Phi_a$ (also schon bekannt)

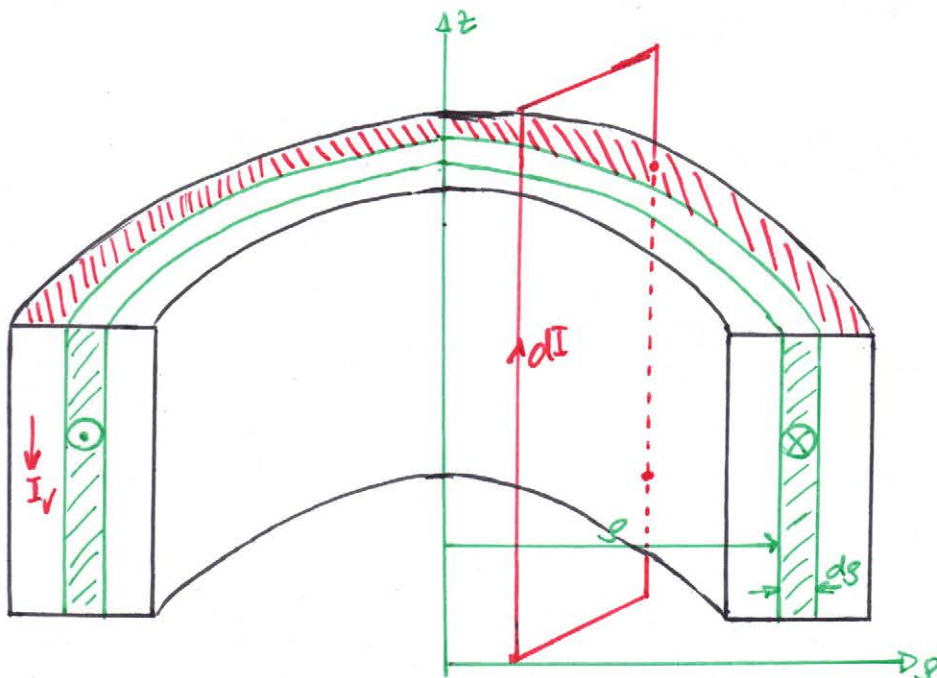
① Hinleiter



$d\Phi = \underbrace{\mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{s}{R_1^2} \vec{e}_\Phi}_{\vec{B}} \cdot \underbrace{l ds \vec{e}_\Phi}_{d\vec{A}}$

$I_v = \pi \cdot s^2 \cdot \frac{I}{\pi R_1^2}$ also $\frac{I_v}{I} = \frac{s^2}{R_1^2}$ (vgl. Vorlesung)

$\Psi_{i,\Phi} = \int_{s=0}^{R_1} \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{s^3}{R_1^4} \cdot l \cdot ds = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_1^4} \cdot l \cdot \frac{R_1^4}{4} = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \cdot l$



$$d\Phi = \underbrace{\mu_0 \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{R_3^2 - s^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_\Phi \cdot L \cdot ds \cdot \vec{e}_\Phi}_{\vec{B}}$$

$$\frac{I_v}{I} = \frac{R_3^2 - s^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{i,\odot} &= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{L}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \cdot \int_{s=R_2}^{R_3} \frac{1}{s} (R_3^2 - s^2)^2 ds \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{L}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \cdot \left[R_3^4 \int_{s=R_2}^{R_3} \frac{1}{s} ds - 2 R_3^2 \int_{s=R_2}^{R_3} s ds + \int_{s=R_2}^{R_3} s^3 ds \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{L}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \cdot \left[R_3^4 \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) - 2 R_3^2 \left(R_3^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} R_2^2 \right) + \left(\frac{R_3^4}{4} - \frac{R_2^4}{4} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{L}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \cdot \left[R_3^4 \cdot \left(\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) - \frac{3}{4} \right) + R_3^2 R_2^2 - \frac{R_2^4}{4} \right] \end{aligned}$$

$$\Psi_i = \Psi_{i,\odot} + \Psi_{i,\ominus}$$

$$e) L' = \frac{1}{L} \cdot (\Psi_a + \Psi_i) \cdot \frac{1}{I}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left[\ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \left(R_3^4 \left(\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) - \frac{3}{4} \right) + R_3^2 R_2^2 - \frac{R_2^4}{4} \right) \right]$$

Aufgabe 30

a) Flussdichte $\vec{B}(\vec{r})$ aus der Formel für die schlanke

Zylinderspule: $H = \frac{N \cdot I}{L}$

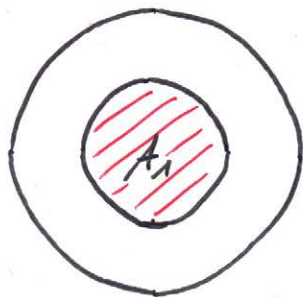
(i) $0 \leq s < R_1$:

$$\vec{B}_1 = \mu \cdot \left(\frac{N_1 \cdot I}{L} + \frac{N_2 \cdot I}{L} \right) \cdot \vec{e}_z = \mu \cdot \frac{(N_1 + N_2) I}{L} \vec{e}_z$$

(ii) $R_1 < s < R_2$:

$$\vec{B}_2 = \mu \cdot \frac{N_2 \cdot I}{L} \vec{e}_z$$

b) (i) Innere Wicklung:

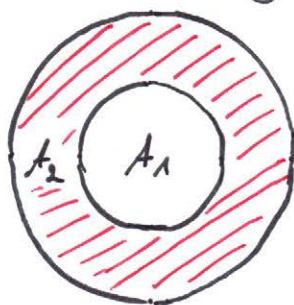


$$\Phi_1 = \iint_{A_1} \vec{B}_1 d\vec{A} = B_{1,2} \cdot A_1$$

$$= \mu \cdot \frac{(N_1 + N_2)I}{L} \pi R_1^2$$

$$\Psi_1 = N_1 \cdot \Phi_1 = \mu \frac{\pi I}{L} \cdot R_1^2 (N_1^2 + N_1 N_2)$$

(ii) Äußere Wicklung:



$$\Phi_2 = \iint_{A_1} \vec{B}_1 d\vec{A} + \iint_{A_2} \vec{B}_2 d\vec{A}$$

$$= \Phi_1 + B_{2,2} A_2 = \Phi_1 + \mu \frac{N_2 I}{L} \pi (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\Psi_2 = N_2 \cdot \Phi_2$$

$$= \frac{\mu \pi I}{L} [R_1^2 (N_1 N_2 + N_2^2) + N_2^2 (R_2^2 - R_1^2)]$$

$$\Psi_{\text{ges}} = \Psi_1 + \Psi_2 = \frac{\mu \pi I}{L} [R_1^2 (N_1^2 + N_1 N_2) + \underline{R_1^2 (N_1 N_2 + N_2^2)} + \underline{(R_2^2 - R_1^2) N_2^2}]$$

$$c) L_{\text{ges}} = \frac{\Psi_{\text{ges}}}{I} = \frac{\mu \pi}{L} [R_1^2 N_1^2 + 2 R_1^2 N_1 N_2 + R_2^2 N_2^2]$$

$$N_1 = N_2 = N \Rightarrow \frac{\mu \pi}{L} [3 R_1^2 + R_2^2] N^2$$

d) Jetzt getrennte, nicht magnetisch gekoppelte Windungen.

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 = \mu \frac{N_1^2 \pi R_1^2}{L} + \mu \frac{N_2^2 \pi R_2^2}{L}$$

← $2 R_1^2 N_1 N_2$

d.h. wie in c) ohne Kopplungsanteil mit $N_1 = N_2$