GET3 Kleingruppenübungen WS 2011

Jan Alexander

27. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

Kleingruppenübung 1

Bearbeitete Aufagben: A1-A4

Tipps:

- A1: Formelsammlung
- A2: $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$
- A3: b) $\mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_a}{\mathrm{d}\phi} \cdot \mathrm{d}\phi$

Aufgabe 1:

a) $\vec{A} = y \cdot \vec{e}_x - x \cdot \vec{e}_y$ in Zylinderkoordinaten transformieren

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{e}_x = \vec{e}_\rho \cos\phi - \vec{e}_\phi \sin\phi \qquad \sin\phi = \frac{y}{\rho}$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_\rho \sin\phi + \vec{e}_\phi \cos\phi \qquad \cos\phi = \frac{x}{\rho}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= y \cdot \vec{e}_x - x \cdot \vec{e}_y = y \cdot (\vec{e}_\rho \cos\phi - \vec{e}_\phi \sin\phi) - x \cdot (\vec{e}_\rho \sin\phi + \vec{e}_\phi \cos\phi) \\
&= y \cdot \left(\vec{e}_\rho \cdot \frac{x}{\rho} - \vec{e}_\phi \cdot \frac{y}{\rho}\right) - x \cdot \left(\vec{e}_\rho \cdot \frac{y}{\rho} + \vec{e}_\phi \cdot \frac{x}{\rho}\right) \\
&= \frac{1}{\rho} \cdot \left(xy \cdot \vec{e}_\rho - y^2 \cdot \vec{e}_\phi\right) - \frac{1}{\rho} \cdot \left(xy \cdot \vec{e}_\rho + x^2 \cdot \vec{e}_\phi\right) \\
&= -\frac{1}{\rho} \cdot \left(y^2 + x^2\right) \cdot \vec{e}_\phi = -\frac{\rho^2}{\rho} \cdot \vec{e}_\phi = -\rho \cdot \vec{e}_\phi
\end{aligned}$$

b) $\vec{B} = \left(x^2 + y^2\right) \cdot \vec{e}_z$ in Kugelkoordinaten transformieren

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \Rightarrow r^2 - z^2 = \left(x^2 + y^2\right)$$

$$B = \left(x^2 + y^2\right) \cdot \vec{e}_z = \left(r^2 - z^2\right) \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{mit } \cos\theta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \left(r^2 - r^2 \cos^2\theta\right) \cdot \vec{e}_z = r^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{mit } \left(1 - \cos^2\theta\right) = \sin^2\theta \text{ und } \vec{e}_z = \vec{e}_r \cdot \cos\theta - \vec{e}_\theta \cdot \sin\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B} = r^2 \sin^2\theta \cdot (\vec{e}_r \cos\theta - \vec{e}_\theta \sin\theta)$$

Aufgabe 2:

a) Zylinderkoordinaten

b) $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$

1. $\vec{v} = w \cdot \rho \cdot \vec{e}_\phi$
2. $\vec{w} = w \cdot \vec{e}_z$

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} = w \cdot \rho \cdot \underbrace{\vec{e}_\phi}_{\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho} + w \cdot z \Big(\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_z}_{=0}\Big) = w \cdot \rho \cdot \vec{e}_\phi$$

Aufgabe 3:

a) $\rho = l \cdot \phi\ , \quad z = l \cdot \phi\ , \quad \phi \in [\pi, 6\pi]$

b) $$\mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_a}{\mathrm{d}\phi} \cdot \mathrm{d}\phi$$

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\mathrm{d}\vec{s} = \frac{(\mathrm{d}\,(\rho \cdot \vec{e}_\rho) + \mathrm{d}\,(z \cdot \vec{e}_z))}{\mathrm{d}\phi} \cdot \mathrm{d}\phi$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}\phi}}_{\vec{e}_\phi (*)} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\phi} \cdot \vec{e}_z \right) \cdot \mathrm{d}\phi$$

$$(*) = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} (\cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_\phi$$

c) $$\int_S \vec{A}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \rho \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\int_S \vec{A}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{s} = \int_\pi^{6\pi} \rho^2\, \mathrm{d}\phi \quad (\text{da } \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi = 1,\ \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\rho = 0,\ \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_z = 0)$$

$$= \int_\pi^{6\pi} (l\phi)^2\, \mathrm{d}\phi = l^2 \left[\frac{1}{3}\phi^3 \right]_\pi^{6\pi} = \frac{1}{3} l^2 \left[216\pi^3 - \pi^3 \right] = \frac{215}{3} l^2 \pi^3$$

Aufgabe 4:

a) In Kugelkoordinaten ist keine Superposition möglich, da die Quellvektoren unterschiedlich sind. Hingegen ist eine Überlagerung in kartesischen Koordinaten möglich, da die Einheitsvektoren konstant sind.

b) $$\vec{F}_1 = k \cdot \frac{\vec{r}_{AQ_1}}{{r_{AQ_1}}^3}$$

$$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{e}_x + y_A \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{Q_1} = a \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{r}_{AQ_1} = \vec{r}_A - \vec{r}_{Q_1} = (x_A - a)\, \vec{e}_x + y_A \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

$$r_{AQ_1} = \sqrt{(x_A - a)^2 + {y_A}^2 + {z_A}^2}$$

$$\vec{F}_1 = k \cdot \frac{(x_A - a)\, \vec{e}_x + y_A \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z}{\left[(x_A - a)^2 + {y_A}^2 + {z_A}^2 \right]^{3/2}}$$

c) $$\vec{F}_2 = k \cdot \frac{\vec{r}_{AQ_2}}{{r_{AQ_2}}^3}$$

$$\vec{r}_{Q_2} = a \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}_{AQ_2} = \vec{r}_A - \vec{r}_{Q_2} = x_A \cdot \vec{e}_x + (y_A - a) \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_2 = k \cdot \frac{x_A \cdot \vec{e}_x + (y_A - a)\,\vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z}{\left[{x_A}^2 + (y_A - a)^2 + {z_A}^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k \cdot \left[\frac{(x_A - a)\,\vec{e}_x + y_A \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z}{\left[(x_A - a)^2 + {y_A}^2 + {z_A}^2\right]^{3/2}} + \frac{x_A \cdot \vec{e}_x + (y_A - a)\,\vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z}{\left[{x_A}^2 + (y_A - a)^2 + {z_A}^2\right]^{3/2}}\right]$$

Kleingruppenübung 2

Bearbeitete Aufagben: A5+A6

Tipps:

- $\vec{F}_{q,Q} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{{r_{AQ}}^3}$
- A6: $\mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t$

Aufgabe 5:

a) Die z-Komponente entfällt aus Symmetrie der Linienladung zur x-y-Ebene. ($\mathrm{d}Q$ bei $(0, 0, \pm z)$ liefern entgegengesetzte Beiträge)

Weiterhin entfällt die y-Komponente, da der Aufpunkt auf der x-Achse liegt. ($\rightarrow$ Ebenes Problem in der x-z-Ebene)

b) bestimme $\mathrm{d}F_{q,x}$ von $\mathrm{d}Q$ auf die Probeladung

$\vec{r}_Q = z_Q \cdot \vec{e}_z$

$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{e}_x$

Quellgebiet: $z_Q \in [-a, a]$

$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = x_A \cdot \vec{e}_x - z_Q \cdot \vec{e}_z$

$r_{AQ} = \sqrt{{x_A}^2 + {z_Q}^2}$

$$\mathrm{d}F_{q,x} = \frac{q \cdot \mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x_A}{[{x_A}^2 + {z_Q}^2]^{3/2}}$$

$\mathrm{d}F_{q,x} = \mathrm{d}\vec{F}_q \cdot \vec{e}_x$

c) $\vec{F}_q(x_A,0,0)$

$$\mathrm{d}\vec{F}_q = \frac{q \cdot \mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x_A \cdot \vec{e}_x - z_Q \cdot \vec{e}_z}{[{x_A}^2 + {z_Q}^2]^{3/2}}$$

wie in a) geschrieben entfällt die z-Komponente aus Symmetrie ($\mathrm{d}\vec{F}_q \cdot \vec{e}_x = F_q$)

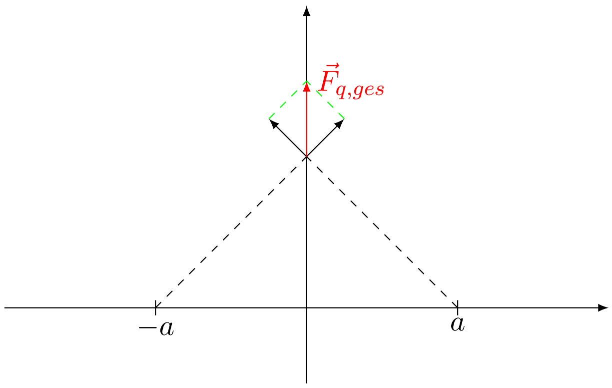
$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int \frac{x_A \cdot \mathrm{d}Q}{[{x_A}^2 + {z_Q}^2]^{3/2}} \cdot \vec{e}_x \text{ mit } \mathrm{d}Q = q_L \cdot \mathrm{d}z_Q$$

$$= \frac{q \cdot x_A}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{q_L \cdot \mathrm{d}z_Q}{[{x_A}^2 + {z_Q}^2]^{3/2}} \cdot \vec{e}_x = \frac{q \cdot q_L \cdot x_A}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}z_Q}{[{x_A}^2 + {z_Q}^2]^{3/2}} \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{q \cdot q_L \cdot x_A}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{z_Q}{{x_A}^2 \cdot \sqrt{{z_Q}^2 + {x_A}^2}} \right]_{z_Q=-a}^{z_Q=a} \cdot \vec{e}_x$$

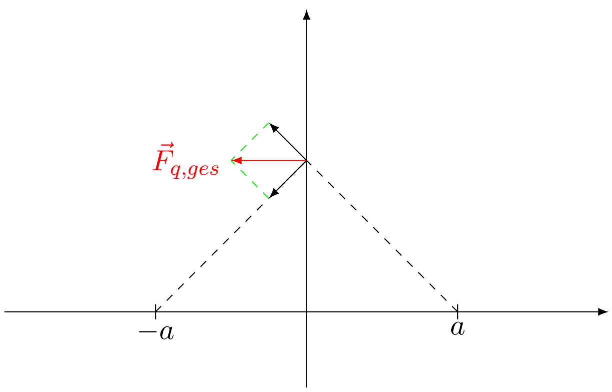
$$= \frac{q \cdot q_L}{4\pi\varepsilon_0 x_A} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + {x_A}^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + {x_A}^2}} \right] \cdot \vec{e}_x = \frac{q \cdot q_L \cdot a}{2\pi\varepsilon_0 x_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + {x_A}^2}} \cdot \vec{e}_x$$

d) Die Beiträge liegen in der x-y-Ebene e)



$$\vec{F}_q = F_{q,x} \cdot \vec{e}_x = (F_{q_1,x} + F_{q_2,x}) \cdot \vec{e}_x = 2F_{q_1,x} \cdot \vec{e}_x$$
$$\vec{r}_{AQ} = x_A \cdot \vec{e}_x - z \cdot \vec{e}_z \pm a \cdot \vec{e}_y$$
$$r_{AQ} = \sqrt{{x_A}^2 + z^2 + a^2}$$
$$F_{q_1,x} = \int_{-a}^{a} \frac{q \cdot q_L \cdot \mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ} \cdot \vec{e}_x}{[{x_A}^2 + z^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{q \cdot q_L \cdot x_A}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}z}{[z^2 + {x_A}^2 + a^2]^{3/2}} \text{ mit } c^2 = {x_A}^2 + a^2$$
$$= \frac{q \cdot q_L \cdot x_A}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{z}{({x_A}^2 + a^2)\sqrt{z^2 + {x_A}^2 + a^2}} \right]_{z=-a}^{z=a}$$
$$= \frac{q \cdot q_L \cdot x_A}{4\pi\varepsilon_0\,({x_A}^2 + a^2)} \left[\frac{a}{\sqrt{{x_A}^2 + 2a^2}} + \frac{a}{\sqrt{{x_A}^2 + 2a^2}} \right]$$
$$= \frac{q \cdot q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x_A \cdot a}{({x_A}^2 + a^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{{x_A}^2 + 2a^2}}$$
$$\vec{F}_q = 2 \cdot F_{q_1,x} \cdot \vec{e}_x = \frac{q \cdot q_L}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x_A \cdot a}{({x_A}^2 + a^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{{x_A}^2 + 2a^2}} \cdot \vec{e}_x$$

f)



anders als bei der e): $\vec{F}_q = 2 \cdot F_{q_1,y} \cdot \vec{e}_y = F_{q,y} \cdot \vec{e}_y$

$\vec{r}_{AQ}$ wie bei der e)

$$F_{q_1,y} = \int_{-a}^{a} \frac{q \cdot q_L \cdot \mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ} \cdot \vec{e}_y}{{r_{AQ}}^3}$$
$$\vec{F} = -\frac{q \cdot q_L}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + {x_A}^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2 + {x_A}^2}} \cdot \vec{e}_y$$

Aufgabe 6:

a) $\vec{r}(t) = \rho_0 \cdot t \cdot \vec{e}_\rho$

$\phi(t) = t^2$

$\rho_0 = \text{const.}$

$$\mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mathrm{d}\left(\rho_0 \cdot t \cdot \vec{e}_\rho\right)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \left(\rho_0 \cdot \vec{e}\rho + \rho_0 \cdot t \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}\phi}}_{\vec{e}\phi} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}_{2t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left(\rho_0 \cdot \vec{e}_\rho + \rho_0 \cdot 2 \cdot t^2 \cdot \vec{e}_\phi\right)\mathrm{d}t$$

$z(t) = 0$, keine $\vec{e}_z$-Komponente

b) $$\mathrm{d}\vec{s} = \frac{t \cdot \vec{e}_x + \sqrt{1-t^2} \cdot \vec{e}_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \quad \text{mit}\, \vec{r}(t) = t \cdot \vec{e}_x + \sqrt{1-t^2} \cdot \vec{e}_z$$

$$= \left(\vec{e}_x + \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\vec{e}_z\right)\mathrm{d}t = \left(\vec{e}_x - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\vec{e}_z\right)\mathrm{d}t$$

$y(t) = 0$, keine $\vec{e}_y$-Komponente

Kleingruppenübung 3

Bearbeitete Aufgaben: A7+A8

Tipps:

- A7: Zylinderkoordinaten!
- Vergleiche mit Großübung A6 ! $\sqrt{x^2} = |x|$!

Aufgabe 7:

a) Quellgebiet: x-y-Ebene $\rightarrow$ es existiert nur eine z-Komponente (Symmetriegründe)

$$\vec{r}_A = z_A \cdot \vec{e}_z \quad , \quad \vec{r}_Q = \rho \cdot \vec{e}_\rho$$

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = -\rho\vec{e}_\rho + z_A\vec{e}_z$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{{r_{AQ}}^3}$$

$$r_{AQ} = \sqrt{\rho^2 - {z_A}^2}$$

$$\mathrm{d}Q = \sigma_e \cdot \mathrm{d}A \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}A = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

b) $\vec{E} = E_z \cdot \vec{e}_z$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma_e \cdot \mathrm{d}A}{[\rho^2 + {z_A}^2]^{3/2}} \cdot z_A = \frac{\sigma_e \cdot z_A}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} \frac{\rho}{[\rho^2 + {z_A}^2]^{3/2}} \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\sigma_e \cdot z_A}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + {z_A}^2}} \right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} = \frac{\sigma_e \cdot z_A}{2\varepsilon_0} \left[-0 + \frac{1}{\sqrt{{z_A}^2}} \right]$$

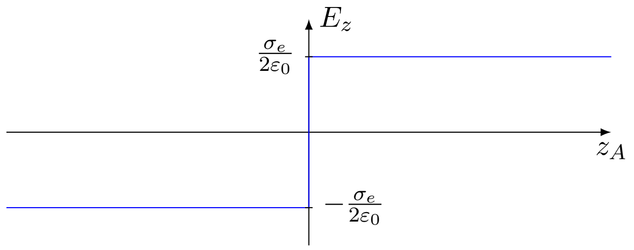
$$= \frac{\sigma_e \cdot z_A}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|z_A|} = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \cdot \mathrm{sgn}(z_A)$$

$$\vec{E} = E_z \cdot \vec{e}_z = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \cdot \mathrm{sgn}(z_A) \cdot \vec{e}_z$$

Fallunterscheidung der Musterlösung:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z & , z_A \geq 0 \\ -\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z & . z_A < 0 \end{cases}$$

c)



Aufgabe 8:

a) Ergebnis Aufgabe 7: $\vec{E} = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \cdot \mathrm{sgn}(z_A)$

Änderungen:

σ_e durch σ_{e_1}, bzw. $\sigma_{e_2} = -\sigma_{e_1}$ ersetzen

z_A durch $(z_A - a)$, bzw. $(z_A + a)$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_{e1}}{2\varepsilon_0} \cdot \mathrm{sgn}(z_A - a) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_{e1}}{2\varepsilon_0} \cdot \mathrm{sgn}(z_A + a) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_{e1}}{2\varepsilon_0} \cdot \big(\mathrm{sgn}(z_A - a) - \mathrm{sgn}(z_A + a)\big) \cdot \vec{e}_z$$

Fallunterscheidungen:

$$\underline{z_A > a} \Rightarrow \mathrm{sgn}(z_A - a) = 1,\ \mathrm{sgn}(z_A + a) = 1$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_{e_1}}{2\varepsilon_0} (1 - 1) \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$\underline{z_A < -a} \Rightarrow \mathrm{sgn}(z_A - a) = -1,\ \mathrm{sgn}(z_A + a) = -1$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_{e_1}}{2\varepsilon_0} (-1 - (-1)) \cdot \vec{e}_z = 0$$

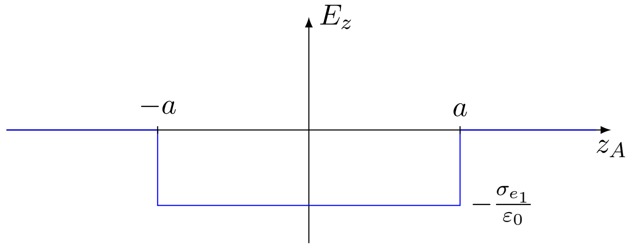
$$\underline{-a < z_A < a} \Rightarrow \mathrm{sgn}(z_A - a) = -1,\ \mathrm{sgn}(z_A + a) = 1$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_{e_1}}{2\varepsilon_0} (-1 - 1) \cdot \vec{e}_z = -\frac{\sigma_{e_1}}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z$$

Zusammengefasst:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma_{e_1}}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z & , -a < z_A < a \\ 0 & , z_A > a \text{ und } z_A < -a \end{cases}$$

b)



Kleingruppenübung 4

Bearbeitete Aufgabe: A9

Tipps:

- Coulomb-Integral $\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{{r_{AQ}}^3}$
- $\mathrm{d}Q = ?$, $\vec{r}_A = ?$, $\vec{r}_Q = ?$, $\vec{r}_{AQ} = ?$

HINWEISE:

- Zylinderkoordinaten
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Generelles:

- Projektion (gilt immer):

$$\vec{E} \cdot \vec{e}_z = (E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + E_z \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = E_x \cdot \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z}_{=0} + E_y \cdot \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z}_{=0} + E_z \cdot \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{=1}$$

- andere Aussage:

$\vec{E} = E_z \cdot \vec{e}_z \Leftrightarrow E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z = E_z\vec{e}_z \Leftrightarrow \vec{E}$ hat nur eine z-Komponente

- Häufig:

$\mathrm{d}\vec{E} \neq \mathrm{d}E_z \cdot \vec{e}_z$ ($\mathrm{d}\vec{E}$ hat z.B. $\mathrm{d}E_\rho$-Komponente)

oder:

$\vec{E} = E_z \cdot \vec{e}_z$ (wegen Symmetrie)

- $\mathrm{d}E_\rho$ fällt durch Integration weg

Aufgabe 9:

a) Der $\vec{e}_r$-Vektor der Aufpunkte und der Quellpunke unterschiedet sich $\Rightarrow$ nicht superponierbar.

Musterlösung: Sowohl Aufpunkt, als auch die Quellpunkte liegen nicht im Koordinatenursprung.

b) Weil es sich um eine kugelsymmetrische Anordnung handelt. Dreht/rotiert man die Kugel in eine beliebige Richtung, so bleibt das Feld entlang der „neuen“ Richtung gleich.

c)
$$\begin{aligned}
\vec{r}_A &= z_A \cdot \vec{e}_z \\
\vec{r}_Q &= \rho_Q \cdot \vec{e}_\rho + z_Q \cdot \vec{e}_z \\
\vec{r}_{AQ} &= -\rho_Q \cdot \vec{e}_\rho + (z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z \\
\rho_Q &= \sqrt{R^2 - {z_Q}^2} \\
\mathrm{d}A_Q &= R \cdot \mathrm{d}\phi_Q \cdot \mathrm{d}z_Q \\
r_{AQ} &= \sqrt{{\rho_Q}^2 + (z_A - z_Q)^2} = \sqrt{R^2 - {z_Q}^2 + {z_A}^2 - 2z_Az_Q + {z_Q}^2} \\
&= \sqrt{R^2 + {z_A}^2 - 2z_Az_Q} \\
\mathrm{d}Q &= \sigma_e \cdot \mathrm{d}A = \sigma_e \cdot R \cdot \mathrm{d}\phi_Q \cdot \mathrm{d}z_Q \\
\mathrm{d}\vec{E} &= \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{{r_{AQ}}^3} = \frac{R \cdot \sigma_e \cdot \mathrm{d}\phi_Q \cdot \mathrm{d}z_Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-\rho_Q \cdot \vec{e}_\rho + (z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z}{[R^2 + {z_A}^2 - 2z_Az_Q]^{3/2}}
\end{aligned}$$

d) $$\vec{E} = \int\limits_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int\limits_{z_Q=-R}^{z_Q=R} \frac{R \cdot \sigma_e \cdot \mathrm{d}\phi_Q \cdot \mathrm{d}z_Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-\rho_Q \cdot \vec{e}_\rho + (z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z}{\left[R^2 + {z_A}^2 - 2z_A z_Q\right]^{3/2}}$$

$\rightarrow$ Die $\vec{e}_\rho$-Komponente entfällt aus Symmetriegründen.

Weiterhin hängt im Integral nichts außer $\mathrm{d}\phi_Q$ von ϕ ab

$$\Rightarrow \int\limits_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \mathrm{d}\phi_Q = 2\pi$$

$$\vec{E} = \int\limits_{z_Q=-R}^{z_Q=R} \frac{R \cdot \sigma_e \cdot 2\pi \cdot \mathrm{d}z_Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z}{\left[R^2 + {z_A}^2 - 2z_A z_Q\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{R\sigma_e}{2\varepsilon_0} \int\limits_{z_Q=-R}^{z_Q=R} \frac{(z_A - z_Q)}{\left[R^2 + {z_A}^2 - 2z_A z_Q\right]^{3/2}} \cdot \mathrm{d}z_Q \cdot \vec{e}_z$$

e) $$\vec{E} = \frac{R\sigma_e}{2\varepsilon_0} \int\limits_{-R}^{R} \frac{(z_A - z_Q)}{\left[R^2 + {z_A}^2 - 2z_A z_Q\right]^{3/2}} \cdot \mathrm{d}z_Q \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{R\sigma_e}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{{z_A}^2} \cdot \frac{-R^2 + z_A z_Q}{\sqrt{R^2 + {z_A}^2 - 2z_A z_Q}}\right]_{z_Q=-R}^{z_Q=R} \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{R\sigma_e}{2\varepsilon_0 {z_A}^2} \left[\frac{-R^2 + Rz_A}{\underbrace{\sqrt{R^2 + {z_A}^2 - 2Rz_A}}_{(R-z_A)^2}} - \frac{-R^2 - Rz_A}{\underbrace{\sqrt{R^2 + {z_A}^2 + 2Rz_A}}_{(R+z_A)^2}}\right] \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{R^2\sigma_e}{2\varepsilon_0 {z_A}^2} \left[\frac{-R + z_A}{|R - z_A|} + \frac{R + z_A}{|R + z_A|}\right] \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{R^2\sigma_e}{2\varepsilon_0 {z_A}^2} \left[-\operatorname{sgn}(R - z_A) + \operatorname{sgn}(R + z_A)\right] \cdot \vec{e}_z$$

1. Fall

$z_A < -R$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(R + z_A) = -1, \ \operatorname{sgn}(R - z_A) = 1$

$\vec{E} = \frac{R^2\sigma_e}{2\varepsilon_0 {z_A}^2} \cdot [-1 - 1] \cdot \vec{e}_z = -\frac{R^2\sigma_e}{\varepsilon_0 {z_A}^2} \cdot \vec{e}_z$

2. Fall

$-R < z_A < R$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(R + z_A) = 1, \ \operatorname{sgn}(R - z_A) = 1$

$\vec{E} = \frac{R^2\sigma_e}{2\varepsilon_0 {z_A}^2} \cdot [-1 + 1] \cdot \vec{e}_z = 0$

3. Fall

$z_A > R$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(R + z_A) = 1, \ \operatorname{sgn}(R - z_A) = -1$

$\vec{E} = \frac{R^2\sigma_e}{2\varepsilon_0 {z_A}^2} \cdot [-(-1) + 1] \cdot \vec{e}_z = \frac{R^2\sigma_e}{\varepsilon_0 {z_A}^2} \cdot \vec{e}_z$

<u>Insgesamt:</u>

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{R^2\sigma_e}{\varepsilon_0 {z_A}^2} \cdot \vec{e}_z & , z_A < -R \\ 0 & , -R < z_A < R \\ \frac{R^2\sigma_e}{\varepsilon_0 {z_A}^2} \cdot \vec{e}_z & , z_A > R \end{cases}$$

Weitergehende Betrachtung:

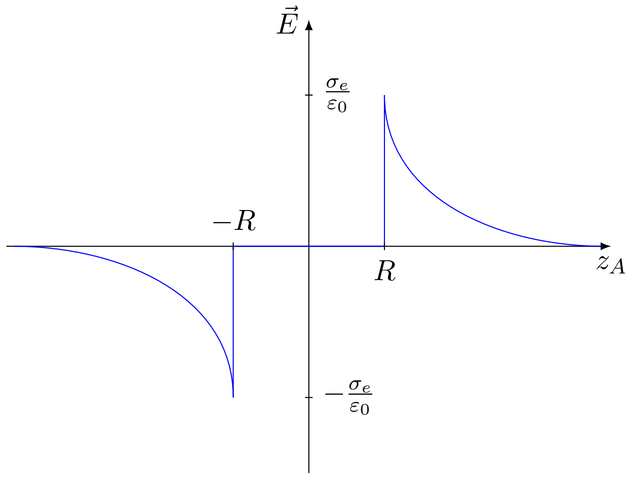
$$\frac{R^2\sigma_e}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{{z_A}^2} \cdot \vec{e}_z = \frac{R^2\sigma_e}{\varepsilon} \cdot \frac{\vec{r}_A}{{r_A}^3} \text{ mit } \vec{r}_A = z_A \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \vec{e}_z = \frac{\vec{r}_A}{z_A}$$

$$= \frac{4\pi R^2\sigma_e}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_A}{{r_A}^3} \text{ mit } Q = 4\pi R^2\sigma_e$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_A}{{r_A}^3}$$

$\rightarrow$ entspricht dem Feld einer Punktladung im Ursprung (für $|z_A| > R$)

f)



Kleingruppenübung 5

Bearbeitete Aufgabe: A10
Tipps:
- Satz von Gauß: $\oiint_{H(r)} \varepsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint_{V(r)} \rho_e(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}V = Q_{ein}$
- Potential: $\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_0 - \int_{r_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\,\mathrm{mit}\,\varphi_0 = \varphi_0(\vec{r}_0)$
- φ_0 ist das Benzugspotential und $\vec{r}_0$ der Bezugspunkt.
- φ_e ist stetig

Aufgabe 10:

a) $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \cdot \vec{e}_r$

$$\oiint \vec{E} \cdot \varepsilon(r) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} E_r(r)\varepsilon(r)\vec{e}_r \cdot r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \,\vec{e}_r$$

$$= 2\pi r^2 E_r(r)\varepsilon(r) \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta}_{=1-(-1)=2} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) E_r(r) = Q_{ein}$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{Q_{ein}}{4\pi r^2 \varepsilon(r)}$$

<u>$0 < r < a$</u>

$$Q_{ein} = \iiint_V \rho_e \,\mathrm{d}V = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{r} \rho_{e_0} \cdot \frac{r'^2}{a^2} \cdot r'^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r'$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{r^5}{a^2} \cdot \rho_{e_0} = Q_{ein} \stackrel{!}{=} 4\pi\varepsilon(r)E_r(r)r^2 \quad \mathrm{mit} \quad \varepsilon_r(r) = 4 \Rightarrow \varepsilon = 4\varepsilon_0$$

$$E_{I,r} = \frac{\rho_{e_0}}{20\varepsilon_0 a^2} \cdot r^3$$

<u>$a \leq r < b$</u>

$$Q_{ein} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{a} \rho_{e_0} \frac{r^2}{a^2} \cdot r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r' = \frac{4\pi}{5} a^3 \rho_{e_0}$$

$$E_{II,r} = \frac{Q_{ein}}{4\pi r^2} \cdot \frac{1}{k \cdot r \cdot \varepsilon_0} = \frac{\rho_{e_0} \cdot a^3}{5 \cdot k \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}$$

<u>$r > b$</u>

$$Q_{ein} = \frac{4\pi}{5} \cdot a^3 \cdot \rho_{e_0}$$

$$E_{III,r} = \frac{Q_{ein}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_{e_0} \cdot a^3}{5\varepsilon_0 r^2}$$

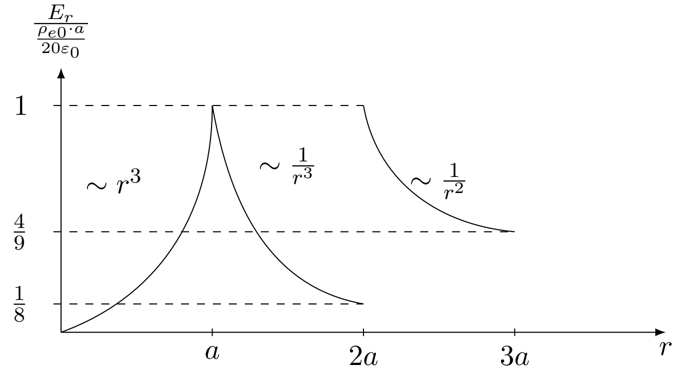
Insgesamt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_{e_0} \cdot a^3}{5\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_r \cdot \begin{cases} \frac{r^3}{4 \cdot a^5} & , 0 \leq r < a \\ \frac{1}{k \cdot r^3} & , a < r < b \\ \frac{1}{r^2} & , r > b \end{cases}$$

b) Stetigkeit für $E(\vec{r})$ bei $r = a$

$E_I(r \to a) = E_{II}(r \to a)$

$\Rightarrow \frac{a^3}{4a^5} = \frac{1}{k \cdot a^3} \Leftrightarrow k = \frac{4}{a}$



c) $\varphi_0 = 0$

<u>$0 < r < a$</u>

$$\varphi_I(r) = \varphi_0 - \int\limits_{r'=0}^{r} E_I(r')\,\mathrm{d}r' = -\frac{\rho_{e_0}}{80a^2} r^4$$

<u>$a < r \leq b$</u>

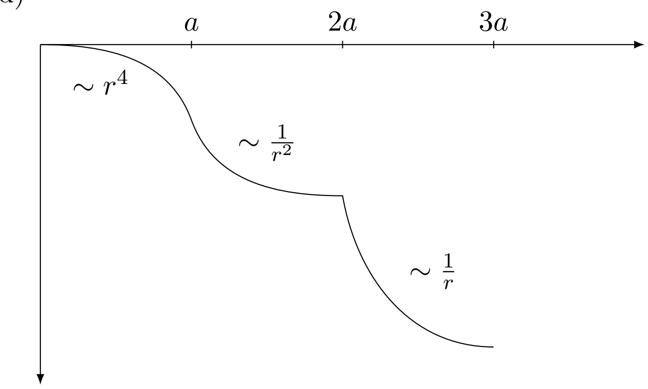
$$\varphi_{II} = \underbrace{\varphi_0 - \int\limits_{r'=0}^{a} E_I(r')\,\mathrm{d}r'}_{=\varphi_I(r=a)} - \int\limits_{r'=a}^{r} E_{II}(r')\,\mathrm{d}r' = \varphi_I(r=a) - \int\limits_{r'=a}^{r} E_{II}(r')\,\mathrm{d}r'$$

$$= -3 \cdot \frac{\rho_{e_0} \cdot a^2}{80\varepsilon_0} + \frac{\rho_{e_0} \cdot a^4}{40\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

<u>$r > b$</u>

$$\varphi_{III} = \varphi_{II}(r \to 2a) - \int\limits_{r'=2a}^{r} E_{III}(r')\,\mathrm{d}r' = -\frac{21}{160\varepsilon_0} \cdot \rho_{e_0} \cdot a^2 + \rho_{e_0} \cdot a^3 \cdot \frac{1}{5\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

d)



e) $\iiint\limits_V \rho_e(r)\,\mathrm{d}V = \frac{4}{5}\pi\rho_{e_0} \cdot a^3 = Q_{Punktladung}$

f) $\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} D_r \vec{e}_r \quad \text{da} \quad D_\theta = D_\phi = 0$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot D_r \right)$$

$\underline{0 \leq r < a}$

$$\operatorname{div} \vec{D}_r(\vec{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \operatorname{div} \vec{E}_r(\vec{r}) = \varepsilon_0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\rho_{e_0}}{20\varepsilon_0 a^2} \cdot r^3 \right)$$

$$= \varepsilon_0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\rho_{e_0}}{20\varepsilon_0 a^2} \cdot 5 \cdot r^4 = \frac{20\varepsilon_0}{20\varepsilon_0} \cdot \rho_{e_0} \cdot \frac{r^2}{a^2} = \rho_{e_0} \cdot \frac{r^2}{a^2}$$

$\underline{a < r < b}$

$$\operatorname{div} D_r \vec{e}_r = \varepsilon_0 \operatorname{div} \left(\underbrace{\varepsilon(r)}_{k \cdot r} \frac{\rho_{e_0} \cdot a^3}{5\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{k \cdot r^3} \right) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \left(\frac{\rho_{e_0} \cdot a^3}{5\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \right)$$

$$= \frac{\rho_{e_0} \cdot a^3 \varepsilon_0}{5\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right)}_{=1}}_{=0} = 0$$

$\underline{r > b}$

$$\operatorname{div} D_r \vec{e}_r = \varepsilon_0 \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\rho_{e_0} \cdot a^3}{5\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \right) = \frac{\rho_{e_0} \cdot a^3}{5} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

Kleingruppenübung 6

Bearbeitete Aufgabe: A11
Tipps:
- $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{P} \cdot \mathrm{d}V$
- Integrationsreihenfolge beachten
- $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi_e$

Aufgabe 11:

a)
$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{P} \cdot \mathrm{d}V_Q$$
$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi_A &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\vec{p}\frac{\vec{r}_{AQ}}{{r_{AQ}}^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot \vec{P}\,\mathrm{d}V_Q\frac{\vec{r}_{AQ}}{{r_{AQ}}^3} \\ &= \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}_{AQ}}{{r_{AQ}}^3}\cdot\vec{e}_z\,\mathrm{d}V_Q \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= z_A\vec{e}_z \\ \vec{r}_Q &= \rho_Q\vec{e}_\rho + z_Q\vec{e}_z \\ \vec{r}_{AQ} &= -\rho_Q\vec{e}_\rho + (z_A - z_Q)\,\vec{e}_z \\ r_{AQ} &= \sqrt{{\rho_Q}^2 + (z_A - z_Q)^2} \\ \mathrm{d}\varphi_A &= \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(z_A - z_Q)}{\left[{\rho_Q}^2 + (z_A - z_Q)^2\right]^{3/2}}\,\mathrm{d}V_Q \end{aligned}$$

c)
$$\varphi_A = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{(z_A - z_Q)}{\left[{\rho_Q}^2 + (z_A - z_Q)^2\right]^{3/2}}\,\mathrm{d}V_Q$$

d) $$\varphi_A = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\rho_Q=0}^{R} \int\limits_{z=-a}^{0} \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(z_A - z_Q)}{\left[{\rho_Q}^2 + (z_A - z_Q)^2\right]^{3/2}} \rho_Q \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}z_Q \,\mathrm{d}\rho_Q$$

$$= \frac{2\pi P_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\rho_Q=0}^{R} \int\limits_{z=-a}^{0} \frac{(z_A - z_Q)}{\left[{\rho_Q}^2 + (z_A - z_Q)^2\right]^{3/2}} \rho_Q \,\mathrm{d}z_Q \,\mathrm{d}\rho_Q$$

$$= \frac{P_0}{2\varepsilon_0} \int\limits_{\rho_Q=0}^{R} \rho_Q \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{{\rho_Q}^2 + (z_A - z_Q)^2}}\right]_{z_Q=-a}^{z_Q=0} \mathrm{d}\rho_Q$$

$$= \frac{P_0}{2\varepsilon_0} \int\limits_{\rho_Q=0}^{R} \rho_Q \left[\frac{1}{\sqrt{{z_A}^2 + {\rho_Q}^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z_A + a)^2 + {\rho_Q}^2}}\right] \mathrm{d}\rho_Q$$

$$= \frac{P_0}{2\varepsilon_0} \cdot \int\limits_{\rho_Q=0}^{R} \rho_Q \left[\frac{1}{\sqrt{{z_A}^2 + {\rho_Q}^2}} - \underbrace{\lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(z_A + a)^2 + {\rho_Q}^2}}}_{\to 0}\right] \mathrm{d}\rho_Q$$

$$= \frac{P_0}{2\varepsilon_0} \int\limits_{\rho_Q=0}^{R} \frac{\rho_Q}{\sqrt{{z_A}^2 + {\rho_0}^2}} \,\mathrm{d}\rho_Q = \frac{P_0}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{{z_A}^2 + {\rho_Q}^2}\right]_{\rho_Q=0}^{\rho_Q=R}$$

$$= \frac{P_0}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{{z_A}^2 + R^2} - |z_A|\right]$$

e) $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ (hier $\varphi = \varphi_A$ und $\vec{E}$ hat nur eine z-Komponente)

$$= -\left(\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi}_{=0} + \frac{\partial\varphi}{\partial z_A}\vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial z_A}\vec{e}_z = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_A}\left[\sqrt{{z_A}^2 + R^2} - z_A\right] \cdot \vec{e}_z = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{2z_A}{2\sqrt{{z_A}^2 + R^2}} - 1\right]\vec{e}_z$$

$$= \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z_A}{\sqrt{{z_A}^2 + R^2}}\right]\vec{e}_z$$

Kleingruppenübung 7

Bearbeitete Aufgabe: A12
Tipps:
- Satz von Gauß: $\oiint_H \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A} = Q_{ein}$
- Spannung: $U_{12} = \int\limits_{P_1}^{P_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s}$
- Kapazität: $C = \frac{Q}{U}$
- Diskreter Laplace Operator:

$$\begin{array}{ccc} & \bullet 2 & \\ \bullet 3 & \bullet 0 & \bullet 1 \\ & \bullet 4 & \end{array} \qquad \varphi_0 = \frac{1}{4}\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4\right)$$

Aufgabe 12:

a) $Q_{ein} = q_L \cdot d$

$$\oiint_H \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A} = Q_{ein}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \oiint_H \varepsilon \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = q_L \cdot d \quad \text{mit} \quad \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E_\rho \cdot \mathrm{d}A, \ \oiint_H 1 \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 2\pi \cdot \rho \cdot d \cdot \vec{e}_\rho$$

$$\varepsilon E_\rho \oiint \mathrm{d}A = q_L \cdot d$$

$$\Rightarrow \varepsilon E_\rho \cdot 2\pi\rho \cdot d = q_L \cdot d$$

$$\Rightarrow E_\rho = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\rho$$

$$U_{12} = \int\limits_{P_1}^{P_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} \quad \text{mit } E \cdot \mathrm{d}s = E_\rho \cdot \mathrm{d}\rho$$

$$= \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} E_\rho\,\mathrm{d}\rho = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{q_L}{2\pi\varepsilon}\left[\ln(\rho)\right]_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon}\underbrace{[\ln(\rho_2) \underbrace{-\ln(\rho_1)}_{=\ln\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}]}_{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

b) $U_{12} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \Rightarrow \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} = \frac{U_{12}}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$

$$\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U_{12}}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)} \cdot \vec{e}\rho$$

c) $\vec{E}_{max} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U_{12}}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)} \cdot \vec{e}_\rho \qquad \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \; \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{\rho}$ maximieren $\Rightarrow \rho = \rho_1$

$$\left|\vec{E}_{max}\right| = \frac{U_{12}}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)} \cdot \frac{1}{\rho_1}$$

d) $C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{q_L \cdot d}{\frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon d}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$

e) Symmetrieüberlegung: alle um $\frac{\pi}{2}$ gedrehten Punkte haben das gleiche Potential

weiterhin: In diesem Virtel haben alle an der Diagonalen gespiegelten Punkte das gleiche Potential

$\Rightarrow$ es müssen nur 4 Punkte berechnet werden

f) $\varphi_1 = \frac{1}{4}\left(2 \cdot \varphi_a + 2 \cdot \varphi_2\right)$

$\varphi_2 = \frac{1}{4}\left(\varphi_b + \varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_4\right)$

$\varphi_3 = \frac{1}{4}\left(2 \cdot \varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_c\right)$

$\varphi_4 = \frac{1}{4}\left(2 \cdot \varphi_U + 2 \cdot \varphi_2\right)$

Wobei gilt:

$U = \varphi_U$

$U_0 = 0 = \varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi_d = \varphi_e$

Punkte im Gitter:

φ_1 : (a|1)

φ_2 : (b|1)

φ_3 : (c|1)

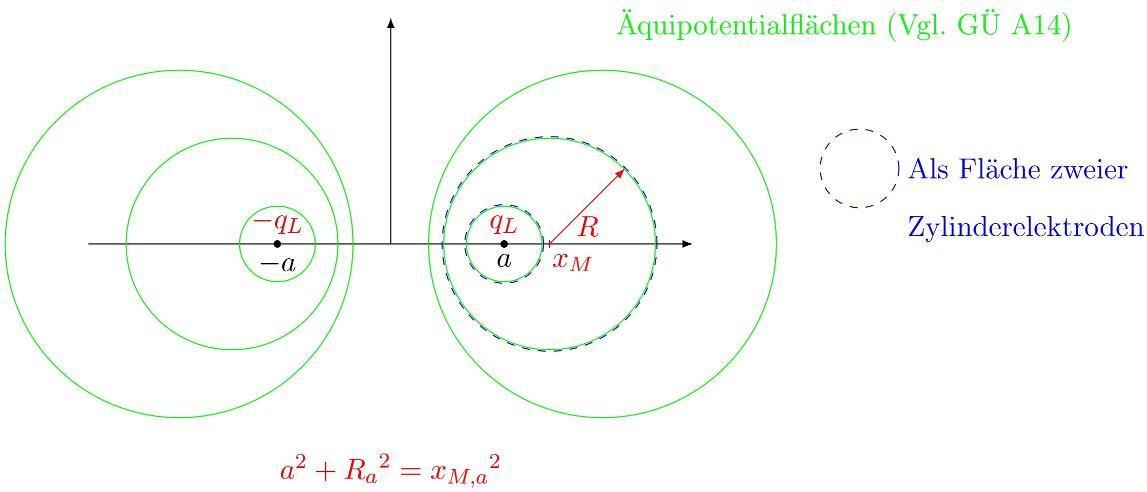
φ_4 : (b|2)

Kleingruppenübung 8

Bearbeitete Aufgabe: A13

Tipps:

- $\vec{E}$-Feld einer Linienladung: $\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho_1} \cdot \vec{e}_{\rho_1}$ Formelsammlung!
- Potential: $\varphi_e = \varphi_0 - \int\limits_{P_0}^{P_1} \vec{E}_1 \, \mathrm{d}\vec{s}$ meist: $\varphi_0 = 0V$



Aufgabe 13:

a) $\varphi_0 = 0V$

$$\varphi_{e_1} = \varphi_0 - \int\limits_{P_0}^{P_1} \vec{E}_1 \, \mathrm{d}\vec{s} = 0V - \int\limits_{P_0}^{P_1} \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho_1} \cdot \vec{e}_{\rho_1} \, \mathrm{d}\vec{s} = -\int\limits_{\rho_1'=a}^{\rho_1'=\rho_1} \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho_1'} \, \mathrm{d}\rho_1'$$

$$= -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \left[\ln\left(\rho_1'\right)\right]_{\rho_1'=a}^{\rho_1'=\rho_1} = -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_1}{a}\right) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a}{\rho_1}\right)$$

b) $\varphi_{e_2} = +\frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_2}{a}\right)$

$$\varphi_{ges} = \varphi_{e_1} + \varphi_{e_2} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \left(\ln\left(\frac{a}{\rho_1}\right) + \ln\left(\frac{\rho_2}{a}\right)\right) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

c) ${x_M}^2 = a^2 + R^2$

$x_{M,i} = 13\rho_0 \, , \; R_i = 5\rho_0$

$x_{M,a} = 15\rho_0 \, , \; R_a = 9\rho_0$

i) $a^2 - (5\rho_0)^2 = (13\rho_0)^2 \Rightarrow a^2 = 169{\rho_0}^2 - 25{\rho_0}^2 \Rightarrow a = \pm 12\rho_0$

ii) $a^2 - (9\rho_0)^2 = (15\rho_0)^2 \Rightarrow a^2 = 225{\rho_0}^2 - 81{\rho_0}^2 \Rightarrow a = \pm 12\rho_0$

$2a = 24\rho_0$

d) $U = \varphi_i - \varphi_a \qquad C_E = \dfrac{Q}{U} \qquad Q = q_L \cdot l$

$$U = \underbrace{\varphi\left(R_i - (x_{M,i} - a)\,,\, 2a - R_i + (x_{M,i} - a)\right)}_{\varphi_i} - \underbrace{\varphi\left(R_a - (x_{M,a} - a)\,,\, 2a - R_a + (x_{M,a} - a)\right)}_{\varphi_a}$$

$$= \varphi\left(5\rho_0 - (13\rho_0 - 12\rho_0)\,,\, 24\rho_0 - 5\rho_0 + \rho_0\right) - \varphi\left(9\rho_0 - (15\rho_0 - 12\rho_0)\,,\, 24\rho_0 - 9\rho_0 + 3\rho_0\right)$$

$$= \varphi\left(4\rho_0, 20\rho_0\right) - \varphi\left(6\rho_0, 18\rho_0\right) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{20\rho_0}{4\rho_0}\right) - \ln\left(\frac{18\rho_0}{6\rho_0}\right)\right)$$

$$= \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\left(\underbrace{\ln(5) - \ln(3)}_{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}\right) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$C_E = \frac{Q}{U} = \frac{q_L \cdot l}{\frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$$

e) C_K, falls konzentrische Elektroden (Formel aus dem Skript)

$$C_K = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{9\rho_0}{5\rho_0}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(1,8)}$$

$$\ln(1,8) > \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln\left(1,\overline{6}\right)$$

$$\Rightarrow C_K < C_E$$

Kleingruppenübung 9

Bearbeitete Aufgabe: A14

Tipps:

- $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ a)
- $\vec{J} = \sigma(r) \cdot \vec{E}$ a)
- $\oiint_H \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A} = Q_{ein}$ c)
- $\iint_A \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A} = I$ a) $\quad \left[\vec{J}\right] = \frac{A}{m^2}$
- Gauß'scher Satz in differenzieller Form: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e$ b)

Aufgabe 14:

a) $I = \iint\limits_A \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A} \qquad \mathrm{d}\vec{A} = \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_\rho$

Überlegung: da I' auf die Länge in z-Richtung bezogen ist:

$$I' = \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \vec{J}\rho\,\mathrm{d}\phi\vec{e}_\rho = J_\rho \cdot \rho \cdot \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi\rho \cdot J_\rho$$

$$\Rightarrow J_\rho = \frac{I'}{2\pi\rho}, \text{ bzw. } \vec{J} = \frac{I'}{2\pi\rho} \cdot \vec{e}_\rho$$

alternativ: Integriere in z-Richtung von 0 bis l und nutze $I' = \frac{I}{l}$

1. $0 < \rho < R$:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0,\ \sigma_1 = \sigma_0\left(1 + \frac{\rho}{R}\right),\ \vec{J} = \vec{J}_1 = \frac{I'}{2\pi\rho}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{J}_1 = \sigma_1 \cdot \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{J}_1}{\sigma_1} = \frac{I'}{2\pi\rho\sigma_0\left(1 + \frac{\rho}{R}\right)}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \cdot \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi\rho\sigma_0\left(1 + \frac{\rho}{R}\right)}\vec{e}_\rho$$

2. $\rho > R$:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0\frac{\rho}{R},\ \sigma_1 = 2 \cdot \sigma_0,\ \vec{J} = \vec{J}_2 = \frac{I'}{2\pi\rho}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{J}_2 = \sigma_2 \cdot \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\vec{J}_2}{\sigma_2} = \frac{I'}{2\pi\rho \cdot 2\sigma_0}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \cdot \vec{E}_2 = \varepsilon_0\frac{\rho}{R} \cdot \frac{I'}{2\pi\rho \cdot 2\sigma_0}\vec{e}_\rho = \frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi R \cdot 2\sigma_0}\vec{e}_\rho$$

b) $\rho_e = \operatorname{div} \vec{D} \qquad \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

da $\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}\left(D_\rho \cdot \vec{e}_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho \cdot D_\rho\right)}{\partial\rho}$

1. $0 < \rho < R$:

$$\rho_e = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \cdot \overbrace{\frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi\rho\sigma_0\left(1+\frac{\rho}{R}\right)}}^{D_{1,\rho}}\right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi\sigma_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(1+\frac{\rho}{R}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi\sigma_0} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(1+\frac{\rho}{R}\right)^{-2} = -\frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi\sigma_0 \rho R\left(1+\frac{\rho}{R}\right)^2}$$

2. $\rho > R$:

$$\rho_e = \operatorname{div} \vec{D}_2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \cdot D_{2,\rho}\right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \cdot \frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi R \cdot 2\sigma_0}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi R \cdot 2\sigma_0}$$

c) $$Q_{ein} = \oiint_H \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A} \qquad \mathrm{d}\vec{A} = \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_\rho$$

$$= \int_{z=0}^{l}\int_{\phi=0}^{2\pi} D_{1,\rho} \cdot \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = D_{1,\rho} \cdot \rho \int_{z=0}^{l} 1 \cdot \mathrm{d}z \int_{\phi=0}^{2\pi} 1 \cdot \mathrm{d}\phi$$

$$= D_{1,\rho} \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot l = \frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi\rho\sigma_0\left(1+\frac{\rho}{R}\right)} \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot l$$

$$q_L \cdot l = \lim_{\rho\to 0} Q_{ein} = 2\pi l \frac{\varepsilon_0 I'}{2\pi\sigma_0}$$

$$\Rightarrow q_L = \frac{\varepsilon_0 I'}{\sigma_0}$$

d) Es eignen sich nur $x, y = 0$ und $x, y \to \infty$ nicht. Alle anderen Punkte sind geeignet.
Weil: 1.) in der z-Achse liegt eine Linienladung
und 2.) im Außenfeld/-bereich nimmt die Ladung zu. Für $\to \infty$ wird auch die Ladung ∞ groß.

Kleingruppenübung 10

Bearbeitete Aufgabe: A15

Tipps:

- $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$
- $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$
- Kontinuitätsgleichung: $\oiint_H \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Aufgabe 15:

a) $r_1 < r < r_2, \quad t > 0, \quad Q_1(t=0) = Q_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \sigma$

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \frac{Q_1(t)}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{{r_{AQ}}^2} = \frac{Q_1(t)}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\vec{e}_r \text{ da } r > r_1 \Rightarrow \text{Feld einer Punktladung im Ursprung}$$

$$\vec{D}_1(\vec{r}, t) = \frac{Q_1(t)}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

b) $\oiint_H \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \mathrm{d}\vec{A} \quad \mathrm{d}\vec{A} = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, \vec{e}_r$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D}$$

$$\oiint_H \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oiint_H \underbrace{\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}D_r + \frac{\partial D_r}{\partial t}\right)}_{\text{unabh. von } \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi} \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}D_r + \frac{\partial D_r}{\partial t}\right) \cdot r^2 \cdot \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}_{=2} \cdot \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} 1 \cdot \mathrm{d}\phi}_{=2\pi}$$

$$= 4\pi r^2 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}D_r + \frac{\partial D_r}{\partial t}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

c) da $4\pi r^2 \neq 0 \quad$ (für $r_1 < r < r_2$)

$$\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}D_r + \frac{\partial D_r}{\partial t}\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad D_r(r,t) = D_0(r) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot D_o(r) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau} D_0(r) e^{-\frac{t}{\tau}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} - \frac{1}{\tau}\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$\Rightarrow D_r(r,t) = D_0(r) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

$$\vec{D}_0(r) = \frac{Q_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow D_r(r,t) = \frac{Q_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

d) $I(t)$ für $t > 0$

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_A \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A} \qquad \mathrm{d}\vec{A} = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{e}_r, \quad \vec{J} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\vec{D} \\
&= \iint_A \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot D_r\,\mathrm{d}A = \iint_A \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_0}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_0}{4\pi}\cdot 4\pi\cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \\
I(t) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot Q_0\cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \\
U_{12} &= \int\limits_{r_1}^{r_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} \qquad \mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r \\
&= \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{D_r}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}r = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} \\
&= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]
\end{aligned}
$$

e) Ladungsverteilung für $t \to \infty$

Durch den Strom werden die Ladungsträger nach außen bewegt, so dass sich am Ende alle Ladungsträger auf der Außenschale ($r = r_2$) befinden.

Dadurch wird das innere der Kugel feldfrei, da sich so das interne E-Feld gegenseitig kompensiert.

f) Ladungsverteilung für $t \to \infty$ bei einem (gewöhnlichen) Plattenkondensator

Durch das Auftragen der Ladung Q_0 auf der oberen (oder unteren) Elektrode entsteht ein E-Feld zwischen den beiden Platten. Aufgrund der Leitfähigkeit σ kann so ein Strom zur anderen Platte fließen.

Dies geschieht so lange, bis das durch die verschobene Ladung entstehende Gegenfeld betragsmäßig genau so groß ist, wie das stromverursachende Feld.

Wenn beide Platten die gleiche Ladung tragen, dann ist das innere des Plattenkondensators feldfrei und es fließt kein Strom mehr. Für $t \to \infty$ tragen beide Platten jeweils die Ladung $\frac{Q_0}{2}$.

Kleingruppenübung 11

Bearbeitete Aufgabe: A16
Tipps:
- $x' = \frac{R^2}{x}$
- $Q' = -Q\frac{R}{x}$

Aufgabe 16:

a) Die Feldinien von $\vec{E}, \vec{D}$ stehen senkrecht auf der Kugelüberfläche.

b) Gespiegelte Ersatzladung muss innerhalb der Kugel sein (von ${x_2}'$ bis ${x_1}'$).

$$ {x_1}' = \frac{R^2}{x_1}, \quad {x_2}' = \frac{R^2}{x_2} $$

c) $$ x' = \frac{R^2}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x} = -\frac{R^2}{x^2} \Rightarrow \mathrm{d}x' = -\frac{R^2}{x^2}\,\mathrm{d}x $$
$$ \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{R^2}\,\mathrm{d}x' $$

d) $$ \begin{aligned} \mathrm{d}Q' &= -\mathrm{d}Q \cdot \frac{R}{x} \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}Q = q_L \cdot \mathrm{d}x \\ &= -q_L\frac{R}{x}\mathrm{d}x = -q_L\frac{R}{x}\left(-\mathrm{d}x'\frac{x^2}{R^2}\right) = q_L\frac{x}{R}\mathrm{d}x' \quad \text{mit} \quad x' = \frac{R^2}{x} \Rightarrow x = \frac{R^2}{x'} \\ &= q_L\frac{1}{R}\cdot\frac{R^2}{x'}\mathrm{d}x' = q_L\frac{R}{x'}\mathrm{d}x' \\ &\Rightarrow \left|\mathrm{d}Q'(x,\mathrm{d}x)\right| = q_L\frac{R}{x}\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \left|\mathrm{d}Q'(x',\mathrm{d}x')\right| = q_L\frac{R}{x'}\mathrm{d}x' \end{aligned} $$

e) $$ \mathrm{d}Q' = {q_L}'\,\mathrm{d}x' = -q_L\,\mathrm{d}x'\frac{R}{x'} \Rightarrow \quad = {q_L}' = -q_L\frac{R}{x'} $$

f) Da die Feldlinien von der positiven zur negativen Ladung verlaufen: -$\vec{e}_y$-Richtung (unter der Annahme: $q_L > 0$)

Kleingruppenübung 12

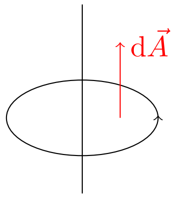
Bearbeitete Aufgabe: A17

Tipps:

- $\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\vec{A} = I$ da stationär: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$
- $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$
- $\vec{J} = \rho_e \cdot \vec{v}$
- $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
- $[\rho_e] = \frac{C}{m^3} = \frac{A \cdot s}{m^3}$
- $[\sigma_e] = \frac{C}{m^2} = \frac{A \cdot s}{m^2}$

Aufgabe 17:

a)



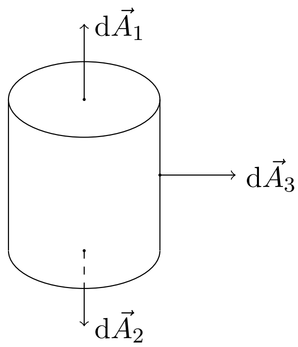
$$\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\vec{J} = J \cdot \vec{e}_\phi, \quad \mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A \cdot \vec{e}_z$$

$$\int \underbrace{\vec{H} \cdot \vec{e}_\phi}_{H_\phi} \cdot \rho\,\mathrm{d}\phi = H_\phi \cdot \rho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \overset{!}{=} 0$$

$$= H_\phi \cdot \underbrace{\rho \cdot 2\pi}_{\neq 0} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow H_\phi = 0$$

b)



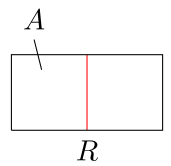
$$\oiint_A \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\oiint_H \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{A} = \underbrace{\oiint_{A_1} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{A}_1 + \oiint_{A_2} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{A}_2}_{=0 \text{ da: } \mathrm{d}\vec{A}_1 = -\mathrm{d}\vec{A}_2} + \oiint_{A_3} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{A}_3$$

$$= \oiint_{A_3} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{A}_3 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \iint \underbrace{H_\rho \cdot \rho}_{\neq f(\phi), f(z)} \cdot \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = H_\rho \cdot \underbrace{\rho \cdot 2\pi \cdot h}_{\neq 0} \Rightarrow H_\rho = 0$$

c)



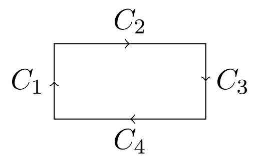
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Da der Strom konstsant ist: Pro Umdrehung wird die gesamte Ladung einmal durch die Fläche bewegt.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}Q = \sigma_e \,\mathrm{d}A \;\text{ mit } \mathrm{d}A = 2\pi Rh$$

$$I_A = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma_e \,\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma_e 2\pi Rh\omega}{2\pi} = \sigma_e \cdot \omega \cdot R \cdot h$$

d)



$C_2, C_4 : H_\rho = 0$

C_3: im Außenbereich, $H_z = 0$ für $\rho > R$

$$I_{ein} = \oint_{C_1} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_0^h H_z(\rho_1)\,\mathrm{d}z = H_z(\rho_1)\cdot h \overset{!}{=} \underbrace{\sigma_e \cdot \omega \cdot R \cdot h}_{\text{aus } c)}$$

$$\Rightarrow H_z(\rho_1) = \sigma_e \cdot \omega \cdot R$$

e)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \omega \cdot \vec{e}_z \times \rho \cdot \vec{e}_\rho = \omega \cdot \rho \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho)}_{=\vec{e}_\phi} = \omega \cdot \rho \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{J} = \rho_e \cdot \vec{v} = \rho_e \cdot \omega \cdot \rho \cdot \vec{e}_\phi$$

$$I_{ein} = \iint \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A} = \int_{\rho=\rho_1}^{R} \int_{z=0}^{h} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_\phi = \int_{\rho=\rho_1}^{R} \int_{z=0}^{h} \rho_e \cdot \omega \cdot \rho \cdot \vec{e}_\phi \cdot \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_\phi$$

$$= \rho_e \cdot \omega \cdot \frac{1}{2}\left[\rho^2\right]_{\rho_1}^{R} \cdot [z]_0^h = \rho_e \cdot \omega \cdot \frac{1}{2} \cdot h\left[R^2 - {\rho_1}^2\right]$$

$$\oint \vec{H}(\rho_1)\,\mathrm{d}\vec{s} = H(\rho_1) \cdot \int_0^h 1 \cdot \mathrm{d}z = H(\rho_1) \cdot h \overset{!}{=} \rho_e \cdot \omega \cdot \frac{1}{2} \cdot h\left[R^2 - {\rho_1}^2\right]$$

$$\Rightarrow H(\rho_1) = \frac{\rho_e \omega}{2}\left(R^2 - {\rho_1}^2\right)$$

$$H(\rho) = \frac{\rho_e \omega}{2}\left(R^2 - \rho^2\right)$$

f) $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \underbrace{\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{H}\vec{e}_z\right)}_{=0}\vec{e}_\rho + \left(-\frac{\partial}{\partial\rho}\vec{H}\vec{e}_z\right)\vec{e}_\phi = 0 - \frac{\partial}{\partial\rho}H_z\vec{e}_\phi$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\rho_e\omega}{2}\left[R^2 - \rho^2\right] = \frac{\rho_e\omega}{2} \cdot 2\rho\vec{e}_\phi = \rho_e\omega\rho\vec{e}_\phi = J_\phi \cdot \vec{e}_\phi = \vec{J}$$

g) $$\vec{H} = \omega \cdot \rho_{e_0} \cdot \rho^2 \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \vec{e}_z$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\frac{\partial}{\partial \rho} H_z \vec{e}_\phi = \omega \rho_{e_0} \left[-2\rho + 3\frac{\rho^2}{R}\right] \vec{e}_\phi = \omega \cdot \rho_{e_0} \cdot \rho \left(3\frac{\rho}{R} - 2\right) \vec{e}_\phi$$

Koeffizientenvergleich mit $(\rho_e \cdot \omega \rho \vec{e}_\phi)$

$$\Rightarrow \rho_e = \rho_{e_0} \left(3\frac{\rho}{R} - 2\right)$$

Kleingruppenübung 13

Bearbeitete Aufgabe: A19
Tipps:
- bei Unterpunkt d) müssen 2 Näherungen gemacht werden (nicht nur eine wie angegeben)

Aufgabe 19:

a)
$$\vec{r}_A = \rho_A \cdot \vec{e}_\rho$$
$$\vec{r}_Q = z_Q \cdot \vec{e}_z$$
$$\vec{r}_{AQ} = \rho_A \cdot \vec{e}_\rho - \vec{z}_Q \cdot \vec{e}_z$$
$$r_{AQ} = \sqrt{{\rho_A}^2 + {z_Q}^2}$$
$$\mathrm{d}\vec{s} =$$

b)
$$\mathrm{d}\vec{A}_{mA} = \frac{\mu I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{r_{AQ}} = \frac{\mu I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}z\,\vec{e}_z}{\sqrt{{\rho_A}^2 + {z_Q}^2}}$$
$$-a \leq z_Q \leq a$$

Nur $a \to \infty$ ist sinnvoll, damit das Kurvenintegral als über den Raumpunkt unendlich geschlossen angesehen werden kann.

c)
$$\vec{A}_{mA} = \frac{\mu I}{4\pi} \int\limits_a^{-a} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{{\rho_A}^2 + {z_Q}^2}}\,\vec{e}_z$$
$$= \frac{\mu I}{4\pi} \left[\ln\left(z + \sqrt{{\rho_A}^2 + {z_Q}^2}\right)\right]_{z_Q=-a}^{z_Q=a} \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z$$
$$= \frac{\mu I}{4\pi} \left[\ln\left(a + \sqrt{{\rho_A}^2 + a^2}\right) - \left(-a + \sqrt{{\rho_A}^2 + a^2}\right)\right] \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z$$
$$= \frac{\mu I}{4\pi} \ln\left(\frac{a + \sqrt{{\rho_A}^2 + a^2}}{-a + \sqrt{{\rho_A}^2 + a^2}}\right) \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z$$

d)
$$\vec{A}_{mA} = \frac{\mu I}{4\pi} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{{\rho_A}^2}{a^2}}}{-1 + \sqrt{\frac{{\rho_A}^2}{a^2}}}\right) \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z$$
$$\approx \frac{\mu I}{4\pi} \ln\left(\frac{1 + 1 + \frac{1}{2}\frac{{\rho_A}^2}{a^2}}{-1 + 1 + \frac{1}{2}\frac{{\rho_A}^2}{a^2}}\right) \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu I}{4\pi} \ln\left(\frac{2 + \frac{1}{2}\frac{{\rho_A}^2}{a^2}}{\frac{1}{2}\frac{{\rho_A}^2}{a^2}}\right) \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z$$
$$= \frac{\mu I}{4\pi} \ln\left(\frac{4 + \frac{{\rho_A}^2}{a^2}}{\frac{{\rho_A}^2}{a^2}}\right) \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu I}{4\pi} \ln\left(\frac{4a^2}{\rho_A 2} + 1\right) \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z$$
$$\approx \frac{\mu I}{4\pi} \ln\left(\frac{4a^2}{{\rho_A}^2}\right) \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{2a}{\rho_A}\right) \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z$$

e)
$$\vec{A}_{mA} = \frac{\mu I}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{2a}{\rho_0}\right) - \ln\left(\frac{\rho_A}{\rho_0}\right)\right] \vec{e}_z + C \cdot \vec{e}_z$$
$$= \underbrace{\left(\frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{2a}{\rho_0}\right) \vec{e}_z + C\right)}_{=\text{ konstant}} \vec{e}_z - \underbrace{\frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_A}{\rho_0}\right)}_{=\text{ variabel}} \vec{e}_z$$

f) $$\vec{B}_A = \operatorname{rot} \vec{A}_{mA}$$

$$\operatorname{rot} A_z \vec{e}_z = \vec{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \cdot \underbrace{\frac{\partial A_z}{\partial \phi}}_{=0} \right) + \vec{e}_\phi \left(-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right)$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}_A &= \operatorname{rot} \vec{A}_{mA} = -\frac{\partial}{\partial \rho_A} A_z \vec{e}_\phi \\
&= -\frac{\partial}{\partial \rho_A} \cdot \frac{\mu I}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{2a}{\rho_0}\right) - \ln\left(\frac{\rho_A}{\rho_0}\right) + C \right] \vec{e}_\phi \\
&= \frac{\mu I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho_A} \vec{e}_\phi
\end{aligned}$$

g) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = 0, \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} = 0$

da 1. unendliche Länge des Stromes in z-Richtung & 2. Rotationssymmetrie um die z-Achse

$$\vec{B}_A = \mu \cdot \frac{I}{2\pi \cdot \rho_A} \vec{e}_{\phi_A} \qquad \vec{B}_A = \operatorname{rot} \vec{A}_{mA}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{A}_{mA} &= \int \frac{\mu I}{2\pi \cdot \rho_A} \, \mathrm{d}\rho_A \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu I}{2\pi} \left(\ln(\rho_A) + C \right) \vec{e}_z \text{ mit } C = -\ln(\rho_0) \\
&= \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_A}{\rho_0}\right) \vec{e}_z
\end{aligned}$$