Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen

Aachen, den 20.01.2011

Übungsblatt 10 Höhere Mathematik I WS 2010/2011

Teil B

Aufgabe B 43.

Bestimmen Sie alle β, $\gamma \in \mathbb{R}$, für die die Gleichungssysteme $A \cdot x = b_i$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4\beta & -2 & 2 \\ -2 & \beta & -1 \\ 2 & -1 & \beta \end{pmatrix} \text{ und } b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\beta \\ \beta \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

mehr als eine Lösung besitzen und geben Sie die Lösungsgesamtheit an. Wann besitzen die Gleichungssysteme keine Lösung? Bestimmen Sie außerdem für $\beta = 1$ den Rang und der Kern der durch die Matrix definierten linearen Abbildung.

Lösung.

Betrachte die erweiterte Matrix $(A|b_1|b_2)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 4\beta & -2 & 2 & 2 & \gamma \\ -2 & \beta & -1 & \beta & -\beta \\ 2 & -1 & \beta & -\beta & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[I+2\beta II]{III+II} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 2\beta^2-2 & 2-2\beta & 2-2\beta^2 & \gamma-2\beta^2 \\ -2 & \beta & -1 & -\beta & -\beta \\ 0 & \beta-1 & \beta-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für $\beta = 1$ ist $(A|b_1|b_2)$ von der Form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma-2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Zu $A \cdot x = b_1$:</u>

Hier gilt nun $-2x_1 + x_2 - x_3 = -1$, also sind 2 Unbekannte frei wählbar.
Setze $x_1 = s,\ x_2 = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$, dann ist $x_3 = -2s + t + 1$.

$$\Rightarrow \mathscr{L}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \text{Ebene im } \mathbb{R}^3$$

<u>Zu $A \cdot x = b_2$:</u>

Hier ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 0 = \gamma - 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Für $\gamma \neq 2$ ist das Gleichungssystem nicht lösbar, da $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = \gamma - 2 \neq 0$ keine Lösung besitzt.
Für $\gamma = 2$ gilt wie bei $A \cdot x = b_1$:

$$\mathscr{L}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Bestimme Rang und Kern:
$rg(A) =$Zeilenrang$(A) = 1$
Um den Kern zu bestimmen löse das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[2III-I]{2II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wähle $x_1 = s$ und $x_2 = t$, dann gilt $x_3 = -2s + t$.
Also:

$$ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 |\, Ax = 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Sei nun $\beta \neq 1$. Dann gilt:

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 2\beta^2 - 2 & 2 - 2\beta & 2 - 2\beta^2 & \gamma - 2\beta^2 \\ -2 & \beta & -1 & -\beta & -\beta \\ 0 & \beta - 1 & \beta - 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{I+2III} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 2\beta^2 + 2\beta - 4 & 0 & 2 - 2\beta^2 & \gamma - 2\beta^2 \\ -2 & \beta & -1 & -\beta & -\beta \\ 0 & \beta - 1 & \beta - 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Falls $\beta = -2$ ist, gilt $2\beta^2 + 2\beta - 4 = 2 \cdot 4 - 4 - 4 = 0$ und das Gleichungssytem hat die Form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 0 & -6 & \gamma - 8 \\ -2 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Das Gleichungssystem $A \cdot x = b_1$ hat hier keine Lösung, da $0 \neq -6$.
- Für $A \cdot x = b_2$ betrachte $\gamma = 8$. Dann gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

  Rang$(A|b_2) = 2 \;\Rightarrow$ 1 frei wählbarer Parameter.
  Aus der dritten Zeile folgt $-3x_2 - 3x_3 = 0$
  Wähle $x_2 = s$, dann gilt:

$$x_3 = -s$$
$$x_1 = \frac{-2s + s - 2}{2} = -1 - \frac{1}{2}s$$
$$\Rightarrow \mathscr{L}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \right\}$$

  Für $\gamma \neq 8$ hat $A \cdot x = b_2$ keine Lösung.

Sei nun $\beta \neq 1$ und $\beta \neq -2$. Dann hat $(A|b_1|b_2)$ die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 2\beta^2+2\beta-4 & 0 & 2-2\beta^2 & \gamma-2\beta^2 \\ -2 & \beta & -1 & -\beta & -\beta \\ 0 & \beta-1 & \beta-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Weiter gilt, dass Rang$(A|b_1) = 3 =$Rang$(A|b_2)$, also sind die Systeme eindeutig lösbar mit

$$A \cdot x = b_1 : \quad x = \frac{1}{\beta+2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\beta-1 \\ \beta+1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b_2 : \quad x = \frac{1}{2\beta^2+2\beta-4}\begin{pmatrix} -2\beta+\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta\gamma}{2} \\ -2\beta^2+\gamma \\ 2\beta^2-\gamma \end{pmatrix}$$

(Lösung z.B. mit Maple, ist hier nicht gefordert.)

Insgesamt:

Für $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ sind die Systeme mehrdeutig lösbar mit Lösung $\mathscr{L}_1$.
Für $\beta = 1$ und $\gamma \neq 2$ ist $A \cdot x = b_2$ nicht lösbar.
Für $\beta = -2$ und $\gamma = 8$ ist $A \cdot x = b_2$ mehrdeutig lösbar mit Lösung $\mathscr{L}_2$.
Für $\beta = -2$ und $\gamma \neq 8$ sind beide Systeme nicht lösbar.
Für $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{1, -2\}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ sind beide Systeme eindeutig.

Aufgabe B 44.

Seien $w, x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w & x & y \\ w^2 & x^2 & y^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 13 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w & x & y \\ w^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot x \cdot y^2 + 1 \cdot y \cdot w^2 + 1 \cdot w \cdot x^2 - 1 \cdot x \cdot w^2 - 1 \cdot y \cdot x^2 - 1 \cdot w \cdot y^2 \\ &= xy^2 + yw^2 + wx^2 - xw^2 - yx^2 - y^2w \end{aligned}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 13 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Die 3. Spalte von der 2. und 4. Spalte subtrahieren.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach 2. Zeile.

$$\begin{aligned} &= (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 12 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -(-24 - 6 + 6 - 12 + 2 + 36) \\ &= -2 \end{aligned}$$

oder:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 13 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Nach der 2. Zeile entwickeln.

$$\begin{aligned} &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-2 - 2 + 6) - (-26 + 12 - 26 + 42) + (7 + 6 - 13 - 2) \\ &= 2 - 2 - 2 = -2 \end{aligned}$$

Aufgabe B 45.

Bestimmen Sie die Determinante der $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei a_{ij} wie folgt gegeben sei:

$$a_{ij} = \begin{cases} i+1 & \text{für } i = j \\ j & \text{für } i \neq j \end{cases}.$$

Lösung.

Bestimme $\det(A)$ mit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $a_{ij} = \begin{cases} i+1 & \text{für } i = j \\ j & \text{für } i \neq j \end{cases}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n+1 \end{pmatrix}$$

Substrahiere die n-te Zeile von allen anderen.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n+1 \end{pmatrix}$$

Subtrahiere nun nacheinander das i-fache der i-ten Zeile von der n-ten Zeile, dadurch entstehen in den ersten $(n-1)$ Einträgen in der letzten Zeile Nullen. Zum Eintrag in der n-ten Spalte der n-ten Zeile wird jeweils (i) addiert für $i = 1, \cdots, n-1$ ergibt sich also in diesem Eintrag:

$$n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i = n + 1 + \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$$

Dann erhält man durch Entwicklung nach der n-ten Zeile:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n+n} \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$$

Aufgabe B 46.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramer'schen Regel die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

Bestimme mit der Cramer'schen Regel die Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Um die Cramer'sche Regel (Satz 4.9) anwenden zu können, muss $\det(A) \neq 0$ gelten.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach 4. Spalte.

$$\begin{aligned} &= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(-8 - 12 - 12 + 8) + (-8 + 6 - 12 - 4) \\ &= 24 - 18 = 6 \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Cramer'sche Regel ist anwendbar.
$\Rightarrow A \cdot x = b$ ist eindeutig lösbar mit

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

wobei A_i derjenigen Matrix entspricht, die entsteht, wenn man die i-te Spalte von A durch b ersetzt.
Dann:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(-36 + 18 - 54 + 8) + (-20 - 9 - 30 - 4) \\ &= 64 - 63 = 1 \end{aligned}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_2) &= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(-8 - 54 - 18 + 36) + (-8 - 30 - 18 + 20) \\ &= 44 - 36 = 8 \end{aligned}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 9 & 1 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -(-24 + 16 - 72 - 72 + 16 + 24) + (-24 - 8 - 40 - 40 + 16 - 12) \\ &= 112 - 108 = 4 \end{aligned}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \\ -4 & -4 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_4) &= (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 3(12 + 18 + 20 + 20 - 36 + 6) - (-16 + 36 - 40 + 40 + 72 - 8) \\ &= 120 - 84 = 36 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},\ x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 6 \end{pmatrix} \text{ ist Lösung von } A \cdot x = b.$$

Aufgabe B 47.

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

einmal mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus und einmal mit Hilfe der Adjunkten von A (vergleiche Satz 4.8).

Lösung.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gesucht: A^{-1}

Berechnung der Inversen über Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[II-2I]{III-3I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III+II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}II]{-\frac{1}{12}III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II+2III]{i-3III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{array}\right) \xrightarrow{I-II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Inverse über die Adjunkte:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#} \quad \text{mit } (A^{\#})_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ji})$$

wobei A'_{ji} aus A durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte hervorgeht.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 2 - 4 - 6 - 6 = 24$$

$$\det(A'_{11}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \quad \Rightarrow a^{\#}_{11} = 10$$

$$\det(A'_{12}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \quad \Rightarrow a^{\#}_{21} = -4$$

$$\det(A'_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \quad \Rightarrow a^{\#}_{31} = -2$$

$$\det(A'_{21}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow a^{\#}_{12} = -2$$

$$\det(A'_{22}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \quad \Rightarrow a^{\#}_{22} = 8$$

$$\det(A'_{23}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow a^{\#}_{32} = -2$$

$$\det(A'_{31}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \quad \Rightarrow a^{\#}_{13} = -2$$

$$\det(A'_{32}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \quad \Rightarrow a^{\#}_{23} = -4$$

$$\det(A'_{33}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \quad \Rightarrow a^{\#}_{33} = 10$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 \\ -4 & 8 & -4 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$