Übungsblatt 9

Höhere Mathematik I

WS 2010/2011

Teil B

Aufgabe B 38.

- (a) Unter welcher Bedingung sind Geraden und Ebenen in $\mathbb{R}^n$ Unterräume?
(b) Sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ Unterräume des Vektorraums aus Aufgabe A 49, (a)?

Lösung.

- (a) Unter welcher Bedingung sind Gerade und Ebenen in $\mathbb{R}^n$ Unterräume?

- Eine Gerade g im $\mathbb{R}^n$ hat folgende Gestalt:

$$g = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = p + t \cdot v, t \in \mathbb{R}\}$$

mit $p, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.

Prüfe die Bedingungen aus Definition 1.2:

- (1.1) $0 \in g$: Wenn $0 \in g$ gelten soll, müssen p und v linear anhängig sein.
 $\Rightarrow$ Wähle oBdA $0 = p = 0$.
- (1.2) $a, b \in g \Rightarrow a + b \in g$:
Seien $a, b \in g$, dann gilt:

$$a = p + t_1 \cdot v, b = p + t_2 \cdot v \quad \text{für } t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a + b = 2p + (t_1 + t_2)v.$$

ist in g , falls $2p = p \Leftrightarrow p = 0$.

- (1.3) $a \in g \Rightarrow \alpha \cdot a \in g \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Sei $a \in g$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, also $a = p + tv$ für ein $t \in \mathbb{R}$.
Dann:

$$\alpha a = \alpha \cdot p + \alpha \cdot t \cdot v \in g \Leftrightarrow \alpha p = p \forall \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p = 0$$

$\Rightarrow g$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $p = 0$ gilt, das heißt, die Gerade muss durch den Koordinatenursprung verlaufen.

- Eine Ebene E im $\mathbb{R}^n$ hat folgende Gestalt:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = p + s \cdot u + t \cdot v, s, t \in \mathbb{R}\}$$

mit $p, u, v \in \mathbb{R}^n$, $u, v \neq 0$.

Prüfe wieder Definition 1.2:

- (1.1) $0 \in E$: Wenn $0 \in E$ gelten soll, müssen p, u, v linear abhängig sein.
 $\Rightarrow$ Wähle wieder oBdA $p = 0$

(1.2) $a, b \in E \Rightarrow a + b \in E$:

Sei $a, b \in E$ mit

$$a = p + s_1 \cdot u + t_1 \cdot v \quad \text{für } s_1, t_1 \in \mathbb{R}$$

$$b = p + s_2 \cdot u + t_2 \cdot v \quad \text{für } s_2, t_2 \in \mathbb{R}$$

Dann ist

$$a + b = 2p + (s_1 + s_2) \cdot u + (t_1 + t_2) \cdot v$$

$a + b \in E$, wenn $2p = p \Leftrightarrow p = 0$.

(1.3) $a \in E \Rightarrow \alpha a \in E \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in E$. Dann:

$$\alpha a = \alpha p + \alpha s_1 u + \alpha t_1 v \in E \Leftrightarrow \alpha p = p \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow p = 0$$

$\Rightarrow E$ ist genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, wenn $p = 0$ gilt, das heißt, die Ebene muss durch den Koordinatenursprung verlaufen.

(b) Sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_0^+$ Unterräume von $\mathbb{C}$ (als $\mathbb{R}$ - Vektorraum)?

• $\mathbb{R}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{C}$, denn:

(1.1) $0 \in \mathbb{R} \checkmark$

(1.2) Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist auch $a + b \in \mathbb{R} \checkmark$

(1.3) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot \alpha \in \mathbb{R} \checkmark$

• $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ist kein Unterraum von $\mathbb{C}$, denn:
Sei $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{0\}$ und $\alpha < 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \alpha \cdot a < 0 \notin \mathbb{R}_0^+$$

Also ist die Bedingung (1.3) aus Definition 1.2 verletzt.

□

Aufgabe B 39.

Es sei mit P_n der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $k \leq n$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $V = \{p \in P_n \mid p \text{ hat nur ungerade Exponenten}\}$ ein Unterraum von P_n ist. Geben Sie für diesen Raum eine Basis an und bestimmen Sie die Dimension von V .

(b) Betrachten Sie speziell P_2 . Zeigen Sie, dass (p_1, p_2, p_3, p_4) mit

$$p_1(x) = x^2 + x - 1, \quad p_2(x) = x^2 - x + 1, \quad p_3(x) = x, \quad p_4(x) = x + 4$$

ein Erzeugendensystem von P_2 ist. Ist das System auch eine Basis? Wenn nicht, verkürzen Sie es zu einer Basis.

Lösung.

(a) $V = \{p \in P_n \mid p \text{ hat nur ungerade Exponenten}\}$.
 V ist ein Unterraum von P_n :

$$(1.1) \quad 0 = 0 \cdot x^1 \in V \checkmark$$

(1.2) Für $p_1, p_2 \in V$ gilt, dass die Summe $p_1 + p_2$ auch nur ungerade Exponenten hat:

$$p_1(x) = \sum_{k=1}^{l_1} a_k \cdot x^{2k-1}, \quad a_k = 0 \quad \forall k > l_1$$

$$p_2(x) = \sum_{k=1}^{l_2} b_k \cdot x^{2k-1}, \quad b_k = 0 \quad \forall k > l_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (p_1 + p_2)(x) &= \sum_{k=1}^{\max\{l_1, l_2\}} \underbrace{(a_k + b_k)}_{=: c_k} \cdot x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\max\{l_1, l_2\}} c_k \cdot x^{2k-1} \in V \end{aligned}$$

(1.3) Für $p \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha p)(x) &= \alpha \cdot \sum_{k=1}^l a_k \cdot x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^l (\alpha \cdot a_k) \cdot x^{2k-1} \in V \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\alpha p)$ hat auch nur ungerade Exponenten.

Basis für V :

$$\mathcal{B} = \{x^{2k-1} \text{ für } k = 1, \dots, \frac{n}{2} \text{ für } n \text{ gerade}, k = 1, \dots, \frac{n+1}{2} \text{ für } n \text{ ungerade}\}$$

Falls n gerade besteht die Basis also aus $\frac{n}{2}$ Vektoren.

Falls n ungerade besteht die Basis also aus $\frac{n+1}{2}$ Vektoren.

(b)

$$P_2 = \{p = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Sei $p \in P_2$ mit $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Prüfe, ob sich p aus dem System (p_1, p_2, p_3, p_4) kombinieren lässt.

$$\begin{aligned} p(x) &\stackrel{!}{=} \lambda_1 \cdot p_1(x) + \lambda_2 \cdot p_2(x) + \lambda_3 \cdot p_3(x) + \lambda_4 \cdot p_4(x) \\ &= \lambda_1(x^2 + x - 1) + \lambda_2(x^2 - x + 1) + \lambda_3 \cdot x + \lambda_4(x + 4) \\ \Leftrightarrow ax^2 + bx + c &= (\lambda_1 + \lambda_2)x^2 + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot x + (4\lambda_4 - \lambda_1 + \lambda_2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} a = \lambda_1 + \lambda_2 &\quad \Rightarrow \lambda_1 = a - \lambda_2 \quad (*) \\ b = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ c = (4\lambda_4 - \lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned}$$

(*) einsetzen:

$$\begin{aligned} b &= a - 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ c &= 4\lambda_4 - a + 2\lambda_2 \quad \Rightarrow \lambda_2 = \frac{c - 4\lambda_4 + a}{2} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} b &= a - (c - 4\lambda_4 + a) + \lambda_3 + \lambda_3 \\ &= -c + 5\lambda_4 + \lambda_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_3 = b + c - 5\lambda_4$
Setze $\lambda_4 = s \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= b + c - 5s \\ \lambda_2 &= \frac{c - 4s + a}{2} \\ \lambda_1 &= 2s - \frac{c}{2} + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow p \in P_2$ lässt sich aus (p_1, p_2, p_3, p_4) linear kombinieren, also ist (p_1, p_2, p_3, p_4) ein Erzeugendensystem für P_2 .

Ist das System auch eine Basis?

Nein, denn es gilt:

$$p_2(x) = p_1(x) - \frac{3}{2}p_3(x) + \frac{p_4(x)}{2}$$

$\Rightarrow p_2(x)$ lässt sich aus p_1, p_3 und p_4 erzeugen, d.h. die Vektoren (p_1, p_2, p_3, p_4) sind linear abhängig.

(p_1, p_3, p_4) ist also eine Basis für P_2 .

(p_1, p_3, p_4) ist linear unabhängig:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_3(x) + \lambda_3 p_4(x) \\ &= \lambda_1(x^2 + x - 1) + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3(x + 4) \\ &= \lambda_1 \cdot x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot x + 4\lambda_3 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 \\ 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 0 = \lambda_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow (p_1, p_3, p_4)$ sind linear unabhängig.

□

Aufgabe B 40.

Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_i \in \mathbb{C}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2i \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$ linear abhängig, aber über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

Lösung. Betrachte $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2i \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 0 & \text{I} & i & 1 & 0 & 0 & \text{I} & -1 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2i & 0 & \text{II} & \xrightarrow{II-i \cdot I} & 0 & -i & -2i & 0 & \text{II} & \xrightarrow{III-i \cdot II} & 0 & -i & -2i & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \text{III} & & 0 & 1 & 2 & 0 & \text{III} & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Da ein Koeffizient frei gewählt werden kann, muss nicht $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ gelten. Also sind die Vektoren über $\mathbb{C}$ linear abhängig.

Da über $\mathbb{R}$ nur reelle Koeffizienten erlaubt sind, ist diese Rechnung so nicht für die Analyse der linearen Abhängigkeit über $\mathbb{R}$ geeignet. Allerdings sieht man in der ersten Zeile von (*), dass $i \cdot \lambda_1 = \lambda_2$ gelten muss. Da die λ_i nur aus $\mathbb{R}$ gewählt werden dürfen, müssen also beide Koeffizienten Null sein: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Da man zudem in der dritten Zeile von (*) ablesen kann, dass $i \cdot \lambda_2 = \lambda_3$ gegeben sein muss um die Gleichung zu erfüllen, folgt auch $\lambda_3 = 0$. Die Vektoren sind also über $\mathbb{R}$ linear unabhängig, da der Nullvektor nur die triviale Darstellung hat. $\square$

Aufgabe B 41.

Ist die Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$L \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

linear?

Lösung. Ist die Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$L \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

linear?

Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, dann gilt:

$$L \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) + L \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \\ x_1 + x_3 + y_1 + y_3 \end{pmatrix}$$

aber

$$\begin{aligned} L \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) \\ x_1 + x_3 + y_1 + y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_3 + y_1 + y_3 \end{pmatrix} \\ &\neq L \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) + L \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow L$ ist nicht linear. $\square$

Aufgabe B 42.

Sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$L \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung L bezüglich der Basen $\mathcal{L}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{L}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^2$.

Lösung. Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Matrix von L bezüglich der Basen:

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \{w_1, w_2\}$$

Bestimme zunächst $L(v_i)$:

$$L(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}, \quad L(v_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}, \quad L(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

Stelle nun die Bilder in der Basis $\mathcal{L}_2$ dar:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = -7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -7 \cdot w_1 + 4 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{L}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = -33 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 19 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -33 \cdot w_1 + 19 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -33 \\ 19 \end{pmatrix}_{\mathcal{L}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = -13 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -13 \cdot w_1 + 8 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \end{pmatrix}_{\mathcal{L}_2}$$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{L}_2}L^{\mathcal{L}_1}x_{\mathcal{L}_1} = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix} x_{\mathcal{L}_1}$$

□