Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen

Aachen, den 11.01.2011

Übungsblatt 8 — Höhere Mathematik I — WS 2010/2011

Teil B

Aufgabe B 34.

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^7 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

konvergent ist

(a) indem Sie das Quotientenkriterium benutzen;

(b) indem Sie das Wurzelkriterium benutzen.

Lösung. (a) mit Quotientenkriterium: $a_n := n^7 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{n^7 2^n}{3^n}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^7 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n}{n^7 \cdot 2^n \cdot 3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^7 \\ &\overset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{3} < 1.\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe konvergent.

(b) mit Wurzelkriterium: $a_n := n^7 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{n^7 \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \sqrt[n]{n^7} \cdot \frac{2}{3} = \sqrt[n]{n}^7 \frac{2}{3} \\ &\overset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{3} < 1.\end{aligned}$$

Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe konvergent.

□

Aufgabe B 35.

Weisen Sie jeweils die Konvergenz der Reihe nach

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{3n}}{(n^2+1)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n-3^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot n!}{1+(3n)!}$

Lösung. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{3n}}{(n^2+1)!}$

Quotientenkriterium: $a_n := \frac{6^{3n}}{(n^2+1)!}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{6^{3(n+1)}(n^2+1)!}{6^{3n}((n+1)^2+1)!} = \frac{6^{3(n+1)}(n^2+1)!}{6^{3n}(n^2+2n+2)!} \\ &= \frac{6^3}{(n^2+2)\cdot \ldots \cdot (n^2+2n+2)} \\ &\overset{n\to\infty}{\to} 0 < 1.\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe konvergent.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^4+1} - n^2$

Vergleichskriterium: Definiere $a_n := \sqrt{n^4+1} - n^2$. Es gilt

$$|a_n| = |\sqrt{n^4+1} - n^2| = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, ist nach dem Vergleichskriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^4+1} - n^2$ konvergent.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n-3^n}$

Vergleichskriterium: Definiere $a_n := \frac{2^n+3^n}{5^n-3^n}$. Es gilt

$$|a_n| = \left|\frac{2^n+3^n}{5^n-3^n}\right| = \frac{2^n+3^n}{5^n-3^n} \leq \frac{3^n+3^n}{5^n-3^n} = \frac{2\cdot 3^n}{5^n-3^n}$$

Für $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} 5^n - 3^n &\geq \frac{1}{2}5^n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}5^n &\geq 3^n \\ \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^n &\geq 2 \quad \text{(w)} \end{aligned}$$

Also:

$$|a_n| \leq \frac{2\cdot 3^n}{5^n-3^n} \leq \frac{2\cdot 3^n}{\frac{1}{2}5^n} = 4\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Da $\frac{3}{5} < 1$, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ konvergent. Damit ist nach dem Vergleichskriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n-3^n}$ konvergent.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot n!}{1+(3n)!}$

Quotientenkriterium: Definiere $a_n := \frac{n\cdot n!}{1+(3n)!}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)(n+1)!(1+(3n)!)}{n\cdot n!(1+(3(n+1))!)}\\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)(n+1)\frac{1+(3n)!}{1+(3n+3)!}\\
&\leq \left(\frac{n+1}{n}\right)(n+1)\frac{(3n)!+(3n)!}{(3n+3)!}\\
&\leq \left(\frac{n+1}{n}\right)(n+1)\frac{2(3n)!}{(3n+3)!}\\
&\leq \left(\frac{n+1}{n}\right)(n+1)\frac{2}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\\
&\leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{2}{\left(3+\frac{3}{n}\right)(3n+2)(3n+1)}\\
&\leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{2}{\left(3+\frac{3}{n}\right)(3n+2)(3n+1)}\\
&\overset{n\to\infty}{\to} 0<1.
\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe konvergent.

□

Aufgabe B 36.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\sqrt{n}-n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n}$

Lösung. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\sqrt{n}-n}$

Wurzelkriterium: $a_n := 3^{\sqrt{n}-n}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{3^{\sqrt{n}-n}} = 3^{\frac{1}{\sqrt{n}}-1} = \frac{1}{3}3^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe konvergent.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

Wurzelkriterium: $a_n := \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} e^{-2} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe konvergent.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$
Es gilt

$$\begin{aligned} e^x &\geq x+1 \quad \forall x \geq -1 \\ \Rightarrow e^n &\geq n+1 \geq n \\ \Rightarrow n &\geq \log n. \end{aligned}$$

Vergleichskriterium: $a_n := \frac{1}{\log n}$

$$|a_n| = \frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n}.$$

Weil die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, ist nach dem Vergleichskriterium auch $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ divergent.

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$
Vergleichskriterium: $a_n := \frac{1}{n^2 \log n}$

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \log n} \leq \frac{1}{n^2 \log 2}$$

Weil die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, ist nach dem Vergleichskriterium auch $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ konvergent.

$\square$

Aufgabe B 37.

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die die folgenden Potenzreihen konvergent sind

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} x^k \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} x^k$$

$$\text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} x^k \qquad \text{(d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} x^k$$

Lösung. (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} x^k$
Quotientenkriterium: $a_k := \frac{(-7)^k}{k+5} x^k$. Für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(-7)^{k+1}(k+5)}{(-7)^k(k+6)} \right| |x| \\ &= 7 \frac{k+5}{k+6} |x| \\ &\overset{k \to \infty}{\to} 7|x| \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} x^k$ konvergent für $|x| < \frac{1}{7}$, $x \neq 0$, und divergent für $|x| > \frac{1}{7}$.

Betrachte noch die Fälle $x = -\frac{1}{7}, x = \frac{1}{7}, x = 0$:

<u>$x = 0$</u>:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} 0 = 0$$

also konvergent.

$\underline{x = \frac{1}{7}}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} \frac{1}{7^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+5}$$

konvergent nach dem Leibniz-Kriterium

$\underline{x = -\frac{1}{7}}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} \frac{1}{(-7)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+5}$$

divergent, da $\frac{1}{k+5} \geq \frac{1}{2k}$ für $k \geq 5$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergent.

Insgesamt: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k+5} x^k$ ist konvergent für $-\frac{1}{7} < x \leq \frac{1}{7}$ und sonst divergent.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} x^k$

Wurzelkriterium: $a_k := \frac{k^3}{2^k} x^k$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{k^3}{2^k} x^k} = |x| \sqrt[k]{\frac{k^3}{2^k}} = |x| \frac{\sqrt[k]{k}^3}{2} \overset{k \to \infty}{\to} \frac{|x|}{2}$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} x^k$ konvergent für $|x| < 2$ und divergent für $|x| > 2$.

Betrachte noch die Fälle $x = -2, x = 2$:

$\underline{x = 2}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^3$$

divergent, da $(k^3)_k$ keine Nullfolge ist.

$\underline{x = -2}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} (-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^3$$

divergent, da $((-1)^k k^3)_k$ keine Nullfolge ist.

Insgesamt: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} x^k$ ist konvergent für $-2 < x < 2$ und sonst divergent.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} x^k$ Quotientenkriterium: $a_k := \frac{k^2}{k!} x^k$. Für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(k+1)^2 k!}{k^2 (k+1)!} \right| |x| \\ &= \frac{k+1}{k^2} |x| \\ &\overset{k \to \infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} x^k$ konvergent für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Für $x = 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} 0 = 0.$$

Also ist auch in diesem Fall die Reihe konvergent.

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} x^k$
Quotientenkriterium: $a_k := \frac{1}{k^2+1} x^k$. Für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left|\frac{k^2+1}{(k+1)^2+1}\right| |x| \\ &= \frac{k^2+1}{(k^2+2k+2)} |x| \\ &\overset{k\to\infty}{\to} |x|\end{aligned}$$

Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} x^k$ konvergent für $|x| < 1$, $x \neq 0$, und divergent für $|x| > 1$.
Betrachte noch die Fälle $x = -1, x = 1, x = 0$:

$\underline{x = 0}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} 0 = 0$$

konvergent.

$\underline{x = 1}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$$

konvergent, da $\frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent.

$\underline{x = -1}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

konvergent nach Leibniz-Kriterium.

Insgesamt: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} x^k$ ist konvergent für $-1 \leq x \leq 1$ und sonst divergent.

$\square$