Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen

Aachen, den 02.12.2010

Übungsblatt 7 Höhere Mathematik I WS 2010/2011

Teil B

Aufgabe B 29.

Es sei durch

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n-1} & \text{wenn } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ (-1)^n & \text{sonst} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegben. Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lösung. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n-1} & , n \text{ ist durch 4 teilbar.} \\ (-1)^n & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Gesucht: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

Bestimme dazu zunächst alle Häufungspunkte von a_n:

- $\frac{1}{2}$ ist Häufungspunkt von a_n:
  Setze $n_k = 4k,\ k \in \mathbb{N}$, dann gilt für die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$:

  $$a_{n_k} = \frac{4k+1}{8k-1} = \frac{4+\frac{1}{k}}{8-\frac{1}{k}} \xrightarrow[\text{GWS}]{k\to\infty} \frac{1}{2}$$

  Nach Satz 5.3 ist $\frac{1}{2}$ also Häufungspunkt von $(a_n)_n$.

- 1 ist Häufungspunkt von a_n:
  Setze $n = 4k+2$ mit $k \in \mathbb{N}$, dann gilt:

  $$a_{n_k} = (-1)^{4k+2} = 1$$

  da $4k+2$ immer gerade ist.
  $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = 1$
  Nach Satz 5.3 ist 1 damit ein Häufungspunkt con a_n.

- (-1) ist Häufungspunkt von (a_n):
  Setze $n_k := 4k+1$, dann gilt:

  $$a_{n_k} = (-1)^{4k+1} = -1$$

  da $4k+1$ immer ungerade ist.
  $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = -1$
  Damit ist (-1) nach Satz 5.3 ein Häufungspunkt von a_n.
  ($n_k = 4k+3$ führt zum selben HP.)

Weitere Häufungspunkte kann es nicht geben, denn angenommen, $y \notin \left\{\frac{1}{2}, -1, 1\right\}$ sei ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = y$$

Sind nun aber unendlich viele n_k durch 4 teilbar, dann folgt $y = \frac{1}{2}$ ↯
Sind unendlich viele der n_k von der Form $4k+2$, dann folgt: $y = 1$ ↯
Sind unendlich viele der n_k von der Form $4k+1$ oder $4k+3$, dann folgt: $y = -1$ ↯
Also sind $\frac{1}{2}$ und ± 1 die einzigen Häufungspunkte von a_n.
Damit folgt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$$

□

Aufgabe B 30.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

***Lösung*.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \tag{$*$}$$

Behauptung: f ist gleichmäßig stetig.

Beweis:
1. Möglichkeit:
Sei $\epsilon > 0$. Wegen $(*)$ gibt es ein $K > 0$ mit

$$|f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \ \forall\ |x| \geq K \tag{1}$$

(a) Das Intervall $[-K, K]$ ist kompakt, also ist f nach Satz 5.15 gleichmäßig stetig auf $[-K, K]$.
Das heißt, es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \ \forall x, y \in [-K, K] \text{ mit } |x - y| < \delta$$

(b) Für $|x| > K$ gilt unabhängig von δ

$$|f(x) - f(\pm K)| \leq |f(x)| + |f(\pm K)| \overset{(1)}{<} \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon$$

(c) Sei nun $x > K$ und $y \in [-K, K]$ mit $|x - y| < \delta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(K) + f(K) - f(y)| \\
&\leq \underbrace{|f(x) - f(K)|}_{<\frac{2}{3}\epsilon,\text{ da } x>K} + \underbrace{|f(K) - f(y)|}_{<\frac{\epsilon}{3},\text{ da } y<K<x \text{ und } |x-y|<\delta \Rightarrow |y-K|<\delta} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

(d) Für $x < -K$ und $y \in [-K, K]$ mit $|x-y| < \delta$ gilt analog

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(-K) + f(-K) - f(y)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f(-K)|}_{<\frac{2}{3}\epsilon} + \underbrace{|f(-K) - f(y)|}_{<\frac{\epsilon}{3}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

(e) Für $x, y \notin [-K, K]$ gilt wegen (1):

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon$$

Insgesamt gilt also:
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig.

2. Möglichkeit:
Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $K > 0$, so dass

$$|f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \;\forall\; |x| > K \tag{2}$$

Das Intervall $[-2K, 2K]$ ist kompakt, also gibt es nach Satz 5.15 ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass $\forall x, y \in [-2K, 2K]$ mit $|x-y| < \tilde{\delta}$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{3}$$

Sei jetzt $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$, wobei $\delta := \min\left\{\tilde{\delta}, \frac{K}{2}\right\}$.

1. Fall: $x, y \in [-2K, 2K]$

Dann gilt wegen (3):

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

2. Fall: $x, y > 2K$ oder $x, y < -2K$

Dann ist $|x|, |y| > 2K > 2$ und es gilt wegen (2):

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x)| + |f(y)| \\ &\overset{(2)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

3. Fall: $x \in [-2K, 2K],\; y > 2K$

Wegen $|x-y| < \delta \leq \frac{K}{2}$ gilt: $x \in \left[\frac{3}{2}K, 2K\right]$

$$\Rightarrow f(x) < \frac{\epsilon}{2} (\text{ wegen (2)})$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)|+|f(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

<u>4. Fall</u>: $x \in [-2K, 2K],\ y < -2K$

Dann gilt (analog zu oben) $x \in \left[-2K, -\frac{3}{2}K\right]$, also:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)|+|f(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

<u>Insgesamt</u>:
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta = \min\left\{\tilde{\delta}, \frac{K}{2}\right\}$ gilt:

$$|f(x)-f(y)| < \epsilon$$

□

Aufgabe B 31.
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^x - 2$$

genau eine Nullstelle besitzt.

Lösung. Es gilt

$$f(1) = e^1 - 2 = e - 2 > 0$$

und

$$f(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0.$$

Dann gilt mit dem Zwischenwertsatz, dass ein $x_0 \in (0,1)$ existiert mit $f(x_0) = 0$, dh f hat mindestens eine Nullstelle.
Außerdem gilt: f ist streng monoton wachsend, denn sei $x < y$, dann ist

$$\begin{aligned}f(x)-f(y) &= e^x - 2 - e^y + 2 \\ &= e^x - e^y < 0,\end{aligned}$$

da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist. Also ist x_0 die einzige Nullstelle von f, denn für alle $x < x_0$ gilt $f(x) < f(x_0) = 0$ und für alle $x > x_0$ gilt $f(x) > f(x_0) = 0$. □

Aufgabe B 32.

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+7)}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$.

Lösung. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+5)(n+7)}$

Es gilt $\dfrac{1}{(n+5)(n+7)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+5} - \dfrac{1}{n+7}\right)$. Betrachte die Partialsummen der Reihe:

$$\begin{aligned}
S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+5)(n+7)} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+5} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+7}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+5} - \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n+5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+5} + \frac{1}{2+5} - \frac{1}{N+1+5} - \frac{1}{N+2+5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{42} - \frac{1}{N+6} - \frac{1}{N+7}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+7)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{13}{42} - \frac{1}{N+6} - \frac{1}{N+7}\right) = \frac{1}{2}\frac{13}{42} = \frac{13}{84}.$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$.

Erinnerung:$\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Also: $\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k} = \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}$.

Partialsummen:

$$\begin{aligned}
S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} &= 2\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 2\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \lim_{N\to\infty} S_N = 2\lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 2.$$

□

Aufgabe B 33.

Zeigen Sie,

(a) dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{4n^2+n} - 2n)$ divergiert.

(b) dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(2n+1)(n+2)}$ konvergiert.

Lösung. (a) Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{4n^2+n}-2n)$ konvergiert.
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+n}-2n=0$ (Folgerung 6.4).
Es gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{4n^2+n}-2n = \frac{(\sqrt{4n^2+n}-2n)(\sqrt{4n^2+n}+2n)}{\sqrt{4n^2+n}+2n} &= \frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\\ &= \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \neq 0.\end{aligned}$$

Also ist die Reihe divergent.

(b) Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \underbrace{\frac{n}{(2n+1)(n+2)}}_{a_n}$ konvergiert.

Verwende dazu das Leibnitz-Kriterium. Zeige zuerst

(i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend.
(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(i) klar ✓
(ii) Monotonie

$$\begin{aligned}a_n - a_{n+1} &= \frac{n}{(2n+1)(n+2)} - \frac{n+1}{(2n+3)(n+3)}\\ &= \frac{n(2n^2+9n+9)-(n+1)(2n^2+5n+2)}{(2n+1)(n+2)(2n+3)(n+3)}\end{aligned}$$

Da der Nenner für alle $n \in \mathbb{N}$ positiv ist, betrachten wir nur noch den Zähler:

$$n(2n^2+9n+9)-(n+1)(2n^2+5n+2) = 2n^2+2n-2 = 2(\underbrace{n^2+n}_{\geq 2\ \forall n}-2) \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend ✓

(iii) Nullfolge

$$0 < a_n = \frac{n}{2n^2+5n+2} \leq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge (nach Sandwich-Lemma).

Wegen (i)-(iii) gilt mit dem Leibnitz-Kriterium:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n < \infty\\ \Leftrightarrow &\sum_{n=1}^{\infty}(-1)(-1)^{n+1}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n < \infty\end{aligned}$$

□

⋆ **Aufgabe.**

Untersuchen Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{für } x = \dfrac{p}{q}, \text{ wobei } p, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Lösung.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{für } x = \dfrac{p}{q}, \text{ wobei } p, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

<u>Behauptung</u>:
f ist in allen rationalen Punkten unstetig und in allen irrationalen Punkten stetig.
<u>Beweis</u>:
Für $x \in \mathbb{Q}$ gibt es in jeder Umgebung von x Punkte y aus $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, also mit $f(y) = 0$. Wähle aus solchen y eine Folge y_n mit $y_n \notin \mathbb{Q},\ y_n \to x$, dann gilt:

$$f(y_n) \equiv 0 \to 0 \text{ für } x \to \infty$$

Aber $f(x) \neq 0$, also ist f in allen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ unstetig.
Für $x \neq \mathbb{Q}$ und $y \notin \mathbb{Q}$ ist sowieso

$$|f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 < \epsilon \quad \forall\ \epsilon > 0$$

Betrachte also $x \in \mathbb{Q}$ und eine Folge $y_n \in \mathbb{Q}$ mit $y_n \to x$ für $n \to \infty$.
Dann muss der Nenner bei

$$y_n = \frac{p_n}{q_n}$$

gegen ∞ gehen, also $q_n \to \infty$.
Dann gilt für f:

$$f(y_n) = \frac{1}{q_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = f(x)$$

□