

Übungsblatt 6

Höhere Mathematik I

WS 2010/2011

Teil B

Aufgabe B 24.

Zeigen Sie: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$.

Bestimmen Sie ferner die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}.$$

Lösung.

(a) Zeige: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

Dazu: Für $x > 0$ gilt:

$$0 \leq e^{-x} = \frac{1}{e^x} \stackrel{\text{Satz 3.17}}{\leq} \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{x}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ gilt dann mit Satz 4.3:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$1 + x \leq e^x$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \text{ da } \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x) = \infty$$

(b) Bestimme die Grenzwerte:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1$, denn:

$$\frac{e^x + x^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x(1 + x^{-x} \cdot e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x} \cdot e^{-x})} = \frac{1 + x^{-x} \cdot e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$$

Es gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-x} = 0$, denn:

$x^{-x} = e^{-x \cdot \log(x)}$ und für $x > e^1$ gilt dann:

$$\log(e) = 1 < \log(x) \implies -x \cdot \log(x) < -x$$

Damit:

$$x^{-x} = e^{-x \cdot \log(x)} < e^{-x}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ folgt dann mit Satz 4.3:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-x} = 0$$

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-x} \cdot e^{-x}) &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \right) \\ &= 0 \cdot 0 = 0 \quad (\text{da beide Grenzwerte existieren.})\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot e^{-x} = 0$$

Insgesamt gilt also nach Satz 4.2:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{-x} \cdot e^{-x}}{1 - e^{-2x}} = 1$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht, denn

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\text{aber } \lim_{x \nearrow 0} -\frac{|x|}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x}{x} = -1$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht, da die einseitigen Grenzwerte nicht übereinstimmen.

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = 1$
Sei $x > 0$, dann gilt:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x + 1} = \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

□

Aufgabe B 25.

Berechnen Sie die rechts- und linksseitigen Grenzwerte der folgenden Funktionen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} & \text{für } |x| < 2 \\ 3 & \text{für } x \leq -2 \\ 5x - 4 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} |x| + \sqrt{1 - x^2} & \text{für } |x| < 1 \\ -x & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

an den jeweiligen Übergangsstellen.

Lösung.

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} & \text{für } |x| < 2 \\ 3 & \text{für } x \leq -2 \\ 5x - 4 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Gesucht: links- und rechtsseitiger Grenzwert an den Übergangsstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

$x_1 = -2$:

$$\lim_{x \nearrow -2} f(x) = \lim_{x \nearrow -2} 3 = 3$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \searrow -2} f(x) &= \lim_{x \searrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} \\&= \lim_{x \searrow -2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\&= \lim_{x \searrow -2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{x^2 + 5 - 9} \\&= \lim_{x \searrow -2} \frac{(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)} \cdot (\sqrt{x^2 + 5} + 3) \\&= \lim_{x \searrow -2} \sqrt{x^2 + 5} + 3 = \sqrt{(-2)^2 + 5} + 3 = 6\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \nearrow -2} f(x) \neq \lim_{x \searrow -2} f(x)$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ existiert nicht, also ist f in $x_1 = -2$ nicht stetig.

$x_2 = 2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \nearrow 2} f(x) &= \lim_{x \nearrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} \\&\stackrel{\text{s.o.}}{=} \lim_{x \nearrow 2} \sqrt{x^2 + 5} + 3 = 6\end{aligned}$$

$$\lim_{x \searrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} 5x - 4 = 10 - 4 = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ existiert, } f(2) = 6.$$

$\Rightarrow f$ ist stetig in $x_2 = 2$.

$$g(x) := \begin{cases} |x| + \sqrt{1 - x^2} & \text{für } |x| < 1 \\ -x & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Übergangsstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

$x_1 = -1$:

$$\lim_{x \nearrow -1} g(x) = \lim_{x \nearrow -1} -x = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \searrow -1} g(x) &= \lim_{x \searrow -1} |x| + \sqrt{1 - x^2} \\&\stackrel{x \leq 0}{=} \lim_{x \searrow -1} -x + \sqrt{1 - x^2} \\&= 1 + \underbrace{\sqrt{1 - (-1)^2}}_{=0} = 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \nearrow -1} g(x) = \lim_{x \searrow -1} g(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1} g(x), \text{ also ist } g \text{ in } x_1 = -1 \text{ stetig.}$$

$x_2 = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \nearrow 1} g(x) &= \lim_{x \nearrow 1} |x| + \sqrt{1-x^2} = \lim_{x \nearrow 1} x + \sqrt{1-x^2} \\ &= 1 + \sqrt{1-1^2} = 1\end{aligned}$$

$$\lim_{x \searrow 1} g(x) = \lim_{x \searrow 1} -x = -1 \neq \lim_{x \nearrow 1} g(x)$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ existiert nicht, also ist g in $x_2 = 1$ nicht stetig.

□

Aufgabe B 26.

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig sind, indem Sie die Bedingung

$\forall x_0 \in \mathcal{D}(f) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ so dass $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta(x_0, \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

nachweisen:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := 4x^2 + 3$;

(b) $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) := \frac{1}{1+x^2}$.

Lösung. Zeige, dass folgende Funktionen stetig sind:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 4x^2 + 3$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest vorgegeben. Wähle zu x_0 und ε folgendes $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$:

$$\delta(x_0, \varepsilon) := -|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \frac{\varepsilon}{4}}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |4x^2 + 3 - (4x_0^2 + 3)| \\ &= |4x^2 - 4x_0^2| \\ &= 4|x^2 - x_0^2| \\ &= 4|x - x_0| \cdot |x + x_0| \\ &= 4|x - x_0| \cdot |x - x_0 + 2x_0| \\ &\leq 4|x - x_0| \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|) \\ &= 4|x - x_0|^2 + 8|x_0| \cdot |x - x_0| \\ &< 4 \cdot \delta^2 + 8|x_0| \cdot \delta \\ &= 4 \left(|x_0|^2 - 2|x_0| \cdot \sqrt{x_0^2 + \frac{\varepsilon}{4}} + x_0^2 + \frac{\varepsilon}{4} \right) + 8|x_0| \left(-|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \frac{\varepsilon}{4}} \right) \\ &= 8|x_0|^2 - 8|x_0| \sqrt{x_0^2 + \frac{\varepsilon}{4}} + \varepsilon - 8|x_0|^2 + 8|x_0| \sqrt{x_0^2 + \frac{\varepsilon}{4}} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Also ist f in $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

(b) $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Sei $x_0 \in (0, \infty)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest vorgegeben.

Wähle zu x_0 und ε ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$:

$$\delta := -|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}$$

Dann gilt für alle $x \in (0, \infty)$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x_0^2} \right| \\ &= \left| \frac{1+x_0^2 - 1-x^2}{(1+x^2)(1+x_0^2)} \right| \\ &= \frac{|x_0^2 - x^2|}{\underbrace{|(1+x^2)|}_{>1} \underbrace{|(1+x_0^2)|}_{>1}} \\ &< |x_0^2 - x^2| \\ &= |x_0 - x| \cdot |x_0 + x| \\ &= |x - x_0| \cdot |x - x_0 + 2x_0| \\ &\leq |x - x_0| \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|) \\ &= |x - x_0|^2 + 2|x_0| \cdot |x - x_0| \\ &< \delta^2 + 2|x_0| \cdot \delta \\ &= |x_0|^2 - 2|x_0| \cdot \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0^2 + \varepsilon - 2|x_0|^2 + 2|x_0| \cdot \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow g$ ist in allen $x_0 \in (0, \infty)$ stetig.

□

Aufgabe B 27.

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar ist.

Lösung. Annahme: f sei in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar.

Dann müsste $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existieren. Es müsste also gelten:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x)$$

Aber:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} x^2 = 0 \neq 1$$

Damit ist f nicht in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar.

□

Aufgabe B 28.

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \sqrt{1+x^2}$, gleichmäßig stetig ist, indem Sie die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ so dass } \forall x, x_0 \in \mathcal{D}(f) \text{ gilt: } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

nachweisen.

Lösung. Sei $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \sqrt{1+x^2}$$

Zeige: f ist gleichmäßig stetig.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für alle $x, x_0 \in (1, \infty)$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x_0^2} \right| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x_0^2})(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x_0^2})}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x_0^2}} \right| \\ &= \frac{|1+x^2 - (1+x_0^2)|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x_0^2}} \\ &= \frac{|x^2 - x_0^2|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x_0^2}} \\ &= |x - x_0| \cdot \frac{|x + x_0|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x_0^2}} \\ &\leq |x - x_0| \cdot \left[\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2} + \underbrace{\sqrt{1+x_0^2}}_{>0}} + \frac{|x_0|}{\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{>0} + \sqrt{1+x_0^2}} \right] \\ &< |x - x_0| \cdot \left[\underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{|x_0|}{\sqrt{1+x_0^2}}}_{\leq 1} \right] \end{aligned}$$

$$\text{da } \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow x^2 \leq 1+x^2 \checkmark$$

$$\begin{aligned} &\leq 2|x - x_0| \\ &< 2\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist f gleichmäßig stetig auf $(1, \infty)$.

□