Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen

Aachen, den 02.11.10

Übungsblatt 2 — Höhere Mathematik I — WS 2010/2011

Teil B

Aufgabe B 6.

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$.

(c) $p^n > n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 3$.

Lösung. (a) Sei $A(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(IA): Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1 \checkmark$$

(IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

(IS): Zeige nun, dass $A(n+1)$ wahr ist.
Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + 7n + 6] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)
\end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $A(n) : \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

(IA): Für $n = 1$ gilt:

LS: $\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{1+1} \cdot 1^2 = 1$

RS: $(-1)^{1+1} \cdot \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 =$LS

(IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

(IS): Zeige nun, dass $A(n+1)$ wahr ist. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n^2+2n+1)\right) \\
&= (-1)^{n+1}\left[\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - n^2 - 2n - 1\right] \\
&= (-1)^{n+1}\left[-\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n - 1\right] \\
&= (-1)^{n+1}(-1)\frac{n^2+3n+2}{2} \\
&= (-1)^{n+2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Es sei $p \in \mathbb{N}$ und $p \geq 3$ und $A(n) : p^n > n^2$.

(IA): Für $n = 1$ gilt: $p^1 = p \geq 3 > 1^2$

Für $n = 2$ gilt: $p^2 \geq 9 > 2^2 = 4$

$\Longrightarrow A(1)$ und $A(2)$ gelten.

(IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

(IS): Zeige nun, dass $A(n+1)$ wahr ist. Es gilt:

$$p^{n+1} = p \cdot p^n \overset{\text{(IV)}}{>} p \cdot n^2 \overset{\text{Vor}}{\geq} 3n^2$$

Es genügt also zu zeigen, dass $3n^2 \geq (n+1)^2$ gilt.

$$\begin{aligned}
3n^2 \geq (n+1)^2 &\Leftrightarrow 3n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \\
&\Leftrightarrow 2n^2 - 2n \geq 1 \\
&\Leftrightarrow 2n(n-1) \geq 1
\end{aligned}$$

Da $n \geq 2$ gilt, ist $n - 1 \geq 1$. Also gilt:

$$2n(n-1) \geq 2 \cdot 2 \cdot 1 > 1 \checkmark$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Aufgabe B 7.

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} k^2 = n(2n-1)$ für $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung. (a) Sei $A(n) : \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = n(2n-1)$.

(IA): Für $n = 1$ gilt:

LS: $\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^0 \cdot 1^2 = 1$

RS: $1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 1 \cdot 1 = 1 = \text{LS}$

(IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

(IS): Zeige nun, dass $A(n+1)$ wahr ist. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)-1} (-1)^{k-1} k^2 &= \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^{2n-1} \cdot (2n)^2 + (-1)^{2n+1-1} \cdot (2n+1)^2 \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} n(2n-1) + (2n+1)^2 - 4n^2 \\
&= 2n^2 - n + 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 \\
&= 2n^2 + 3n + 1 \\
&= (n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $A(n) : \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

(IA): Für $n = 1$ gilt:

LS: $\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1$

RS: $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1 = \text{LS}$

(IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS): Zeige nun, dass $A(n+1)$ wahr ist. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! + (n+1)(n+1)! \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)!(1+n+1) - 1 \\ &= (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Aufgabe B 8.

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion.

(a) $7^n + n \le 8^n \qquad (n \in \mathbb{N})$

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2(k+2)}{(k+1)^3} = \frac{n+2}{2(n+1)^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$

(d) $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar $\qquad (n \in \mathbb{N})$

Lösung. (a) Es sei $A(n) : 7^n + n \le 8^n$.

(IA) $n = 1$: $7 + 1 = 8 \le 8$ ✓

(IV) Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Zeige, $A(n+1)$ ist wahr.

$$\begin{aligned}7^{n+1} + n + 1 &= 7\,(7^n + n) - 6n + 1 \\ &\overset{\text{(IV)}}{\le} 7 \cdot 8^n - 6n + 1 \\ &\le 7 \cdot 8^n + 8^n \quad = \quad 8^{n+1}\end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es sei $A(n) : \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2(k+2)}{(k+1)^3} = \frac{n+2}{2(n+1)^2}$.

(IA) $n = 1$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \frac{k^2(k+2)}{(k+1)^3} = \frac{3}{8} = \frac{1+2}{2(1+1)^2}$ ✓

(IV) Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

(IS) Zeige, $A(n+1)$ ist wahr.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k^2(k+2)}{(k+1)^3} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2(k+2)}{(k+1)^3} \cdot \frac{(n+1)^2(n+3)}{(n+2)^3} \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n+2}{2(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2(n+3)}{(n+2)^3} \\ &= \frac{n+3}{2(n+2)^2}\end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Es sei $A(n) : \sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2$.

(IA) $n = 1$: $\sum_{j=1}^{1}(2j-1) = 1 = 1^2$ ✓

(IV) Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Zeige, $A(n+1)$ ist wahr.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1) &= \sum_{j=1}^{n}(2j-1) + 2n + 1 \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Es sei $A(n) : n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

(IA) $n = 1$: $1 + 5 = 6$ ist durch 6 teilbar. ✓

(IV) Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Zeige, $A(n+1)$ ist wahr.

$$(n+1)^3 + 5n + 5 = n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6 = n^3 + 5n + 3(n\,(n+1) + 2)$$

Nun ist entweder n oder $n+1$ gerade und damit auch $n\,(n+1) + 2$ eine gerade Zahl.Dann ist $3(n\,(n+1)+2)$ durch 6 teilbar und nach Induktionsvoraussetzung ist dann $(n+1)^3 + 5(n+1)$ durch 6 teilbar.

Also ist $A(n+1)$ wahr. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

□

Aufgabe B 9.

Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die verallgemeinerte Dreiecksungleichung:

$$(*) \quad \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Lösung. Beweis per vollständiger Induktion nach n.

(IA) $n = 1$: ✓

$n = 2$: $\left|\sum_{k=1}^{2} x_k\right| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ Dies folgt aus der Dreiecksungleichung.

(IV) Es gelte $(*)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

(IS)

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}| \quad \text{nach der Dreiecksungleichung} \\ &\overset{\text{(IV)}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Aufgabe B 10.

(a) Zeigen Sie: n Elemente kann man auf $n!$ verschiedene Arten anordnen.

(b) Die Binomialkoeffizienten sind definiert durch $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$. Zeigen Sie:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Lösung. (a) Behauptung: "n Elemente kann man auf $n!$ verschiedene Arten anordnen."

(IA) $n = 1$: Hat man nur ein Element, so kann man es auch nur auf $1! = 1$ Art anordnen.

(IV) Es gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Nimm eine beliebige Anordnung der ersten n Elemente. Dann kann man das $(n+1)$-te Element auf $n+1$ Arten in diese Anordnung einfügen. [z.B. vor jedem vorhandenen Element (n Möglichkeiten) oder nach dem n-ten Element; macht also $n+1$ Möglichkeiten]

Laut (IV) gibt es $n!$ Anordnungen der ersten n Elemente.

$\Longrightarrow$ das $(n+1)$-te Element kann auf $n!(n+1) = (n+1)!$ verschiedene Arten in die n-Tupel eingeschoben werden.

$\Longrightarrow$ Es gibt $(n+1)!$ Möglichkeiten $n+1$ Elemente anzuordnen.

Damit folgt die Behauptung nach dem Induktionsprinzip.

(b)

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!\,k+n!\,(n-k+1)}{k!(n+1-k)!}\\ &= \frac{n!\,(n+1)}{k!(n+1-k)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\\ &= \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

□

$\star$ **Aufgabe.**

Finden Sie den Fehler in folgendem Induktionsbeweis:
Behauptung: Alle Planeten im Sonnensystem sind bewohnt.
Beweis. Es sei $\mathcal{A}(n) :=$ je n Planeten sind bewohnt.

(IA) $\mathcal{A}(1)$ ist offenbar wahr (die Erde ist bewohnt).

(IV) Es seien n Planeten im Sonnensystem bewohnt, es gelte also $\mathcal{A}(n)$.

(IS) Schließe nun auf $(n+1)$ wie folgt: Die $(n+1)$ Planeten werden auf folgende Art gruppiert:

Erste Gruppe: $1, 2, \ldots, n$, zweite Gruppe: $2, 3, \ldots, n+1$.

Wegen der Induktionsvoraussetzung sind in der ersten Gruppe alle Planeten bewohnt, ebenso in der zweiten. Folglich müssen alle Planeten im Sonnensystem bewohnt sein, und $\mathcal{A}(n+1)$ ist gezeigt.

Lösung. Dieser Beweis ist schon beim Schluss von $1 \to 2$ falsch, da hier die zwei Gruppen nicht so gebildet werden können, dass $A(1)$ angewandt werden kann. Denn $A(1)$ gilt nur für einen ausgezeichneten Planeten. □