Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen Aachen, den 27.10.2010

Übungsblatt 1 **Höhere Mathematik I** **WS 2009/2010**

Teil B

Aufgabe B 1.

Beweisen Sie: $\sqrt{42} \notin \mathbb{Q}$. An welcher Stelle bricht der Beweis zusammen, wenn man ihn auf $\sqrt{4}$ anwendet?

Lösung. Zeige: $\sqrt{42} \notin \mathbb{Q}$
Annahme: Sei $r^2 = 42$ und $r = \dfrac{p}{q}$ mit p und q teilerfremd, $p, q \in \mathbb{Z}$.
Dann ist $42q^2 = p^2$ und wegen $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ist p^2 durch 2 teilbar. Da 2 eine Primzahl ist, ist 2 auch ein Teiler von p. Dies folgt analog für 3 und 7.
Somit ist 42 ein Teiler von p, d.h. $42s = p$.
Aus $42q^2 = p^2$ und $p = 42s$ folgt dann:

$$q^2 = \frac{p^2}{42} = \frac{42^2 \cdot s^2}{42} = 42s^2$$

$\overset{\text{wie oben}}{\Rightarrow}$ 42 ist ein Teiler von q.
$\lightning$ zur Teilerfremdheit von p und q $\rightarrow \sqrt{42} \notin \mathbb{Q}$.
Verfährt man analog mit $\sqrt{4}$, so erhält man die Gleichung $4q^2 = p^2$ und 4 ist Teiler von p^2. Da 4 keine Primzahl ist, kann nicht mehr gefolgert werden, dass 4 auch Teiler von p ist.
$\Rightarrow$ Beweis bricht zusammen. □

Aufgabe B 2.

Sind die folgenden Mengen reeller Zahlen beschränkt? Finden Sie (sofern existierend) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(a) $M_1 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n},\ n, m \in \mathbb{N}\right\}$,

(b) $M_2 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$,

(c) $M_3 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(d) $M_4 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ und } \frac{1}{1-x} < 1 + 2x\right\}$.

Lösung.

(a) $M_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \dfrac{1}{m} + \dfrac{(-1)^n}{n}, n, m \in \mathbb{N}\right\}$

- Es gilt $\dfrac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & n = 2k \\ -\frac{1}{2k-1}, & n = 2k-1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$$

Mit $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ gilt:

$$-1 < \frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow M_1$ ist nach oben und unten beschränkt, also existieren Infimum und Supremum.

$$-1 \leq \inf(M_1) \leq \sup(M_2) \leq \frac{3}{2}$$

- Für $m = 1, n = 2$ gilt
$$\frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$\Rightarrow \frac{3}{2} = \sup(M_1) = \max(M_1)$.
- Nun noch zu zeigen: $-1 = \inf(M_1)$.
Zeige dazu: $\forall \epsilon > 0\ \exists a \in M_1 : \quad a < -1 + \epsilon$
Es gilt: $\forall \epsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m_0} < \epsilon$
$\Rightarrow$ für $m = m_0,\ n = 1$ gilt:
$$\frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{m_0} + (-1) < -1 + \epsilon$$
also ist $-1 = \inf(M_1)$.
Weil aber $-1 \notin \mathrm{M}_1$, $\left(-1 < \frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ existiert kein Minimum.

(b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \big| x \in \mathbb{N}\}$
M_2 ist nach oben unbeschränkt, es existiert also kein Supremum und kein Maximum.
M_2 ist nach unten durch 1 beschränkt und wegen $1 \in M_2$ gilt:

$$1 = \inf(M_2) = \min(M_2)$$

(c) $M_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \big| x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$
M_3 ist durch 0 und 1 beschränkt, aus $n \geq 1$ folgt: $\frac{1}{n} \leq 1$ und wegen $n > 0$ gilt auch $\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1$. Da $1 = \frac{1}{1} \in M_3$ gilt, ist

$$1 = \sup(M_3) = \max(M_3)$$

Zeige noch: $0 = \inf(M_3)$:
0 ist untere Schranke von M_3, da $\frac{1}{n} > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Es gibt auch keine größere untere Schranke.
Sei $1 > s > 0$, dann ist $\frac{1}{s} > 1$. Wegen $\left[\frac{1}{s}\right] + 1 > \frac{1}{s}$ und damit $s > \frac{1}{[\frac{1}{s}] + 1} \in M_3$, ist s keine untere Schranke von M_3, also ist 0 schon die größte untere Schranke.

$$\Rightarrow 0 = \inf(M_3)$$

Da $0 \notin M_3$, ist 0 kein Minimum.

(d) $M_4 = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x \neq 1 \text{ und } \frac{1}{1-x} < 1 + 2x\}$

- $x \leq 1$: Dann ist $1 - x \geq 0$ und damit

$$\begin{aligned} & & \frac{1}{1-x} &\leq 1 + 2x \\ &\Leftrightarrow & 1 &\leq (1-x)(1+2x) \\ &\Leftrightarrow & 1 &\leq 1 + 2x - x - 2x^2 \\ &\Leftrightarrow & 0 &\leq x(1-2x) \\ &\Leftrightarrow & &(x \geq 0 \wedge 1 - 2x \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge 1 - 2x \leq 0) \\ &\Leftrightarrow & &(x \geq 0 \wedge x \leq \frac{1}{2}) \vee (x \leq 0 \wedge \frac{1}{2} \leq x) \\ &\Leftrightarrow & &0 \leq x \wedge x \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- $x \geq 1$. Dann ist $1 - x \leq 0$ und $1 - 2x \leq 0$. Damit

$$\begin{aligned} & & \frac{1}{1-x} &\leq 1 + 2x \\ &\Leftrightarrow & 1 &\geq (1-x)(1+2x) \\ &\Leftrightarrow & 0 &\geq \underbrace{x}_{\geq 0} \underbrace{(1-2x)}_{\leq 0} \end{aligned}$$

Damit ist diese Aussage für alle $x \geq 1$ wahr.

$\Leftrightarrow M_4 = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x\}$. Die Menge M_4 ist nicht nach oben beschränkt, da sie alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ enthält und $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Ein Supremum von M_4 existiert also nicht.
Offensichtlich ist 0 eine untere Schranke von M_4, da $0 \leq x$ gilt.
Beh: $\inf(M_4) = 0$
Bew: Angenommen $0 \leq \inf(M_4) := m \leq \frac{1}{2}$. Dann folgt $\frac{m}{2} \in M_4$, da $0 \leq \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2}$. Da $\frac{m}{2} \leq m$, kann m keine untere Schranke sein. Dies ist ein Widerspruch. Da $0 \notin M_4$, existiert kein Minimum von M_4.

□

Aufgabe B 3.

Seien A, $B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass dann die Menge $C := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$ ein Supremum hat und dass gilt: $\sup(C) = \sup(A) + \sup(B)$.

Lösung. Aus der Voraussetzung folgt: $\sup(A)$ und $\sup(B)$ existieren.
Es gilt:

$$\begin{aligned} a &< \sup(A) \quad \forall a \in A \\ b &< \sup(B) \quad \forall b \in B \end{aligned}$$

$\Rightarrow a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$
$\Rightarrow$ Also ist $(A + B)$ nach oben beschränkt, d.h. $\sup(A + B)$ existiert.
Zeige noch: $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
Es ist klar, dass $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Annahme: $\sup(A+B) < \sup(A) + \sup(B) \Leftrightarrow \sup(A+B) - \sup(B) < \sup(A)$

$$\Rightarrow \exists a \in A : a > \sup(A+B) - \sup(B) \Leftrightarrow \sup(B) > \sup(A+B) - a$$

$$\overset{\text{analog}}{\Rightarrow} \exists b \in B : b > \sup(A+B) - a \Leftrightarrow a + b > \sup(A+B) \text{ für } a + b \in (A+B)$$

$\Rightarrow \sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ □

Aufgabe B 4.

Zerlegen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil, das heißt stellen Sie z wie folgt dar: $z = x + iy$ mit $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$:

(a) $z_1 = \left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^4$,

(b) $z_2 = (-1+i)^6$,

(c) $\exp(-i\frac{\pi}{2})$,

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(i\frac{7\pi}{4})$.

Lösung.

$$\begin{aligned} z_1 = \left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^4 &= \left(\left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^2\right)^2 \\ &= \frac{(4+12i+9i^2)^2}{(9-12i+4i^2)^2} \\ &= \frac{(4+12i-9)^2}{(9-12i-4)^2} \\ &= \frac{(-5+12i)^2}{(5-12i)^2} \\ &= (-1)^2\frac{(5-12i)^2}{(5-12i)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 = (-1+i)^6 &= \left((-1+i)^2\right)^3 \\ &= (1-2i+i^2)^3 \\ &= (1-2i-1)^3 \\ &= (-2i)^3 \\ &= 8i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \exp(-i\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos(\frac{\pi}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= -i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i\frac{7\pi}{4}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos\big(\frac{7\pi}{4}\big) + i\sin\big(\frac{7\pi}{4}\big)\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \\
&= \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe B 5.

Skizzieren Sie folgende Punktmenge in der komplexen Ebene

$$\big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{2z}{1-i}\right)^2 \leq 2\big\}.$$

Hinweis: Zerlegen Sie $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung. Vereinfache $\big(\frac{2z}{1-i}\big)^2$. Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2z}{1-i}\right)^2 &= \frac{4(x^2 + 2ixy - y^2)}{1 - 2i - 1} \\
&= 2i(x^2 + 2ixy - y^2) \\
&= -4xy + i2(x^2 - y^2).
\end{aligned}
$$

Damit ist $\operatorname{Im}\big(\frac{2z}{1-i}\big)^2 = 2(x^2 - y^2)$. Also gilt

$$
\begin{aligned}
& & \operatorname{Im}\left(\frac{2z}{1-i}\right)^2 &\leq 2 \\
&\Leftrightarrow & 2(x^2 - y^2) &\leq 2 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - y^2 &\leq 1 \\
&\Leftrightarrow & |x| &\leq \sqrt{1 + y^2}.
\end{aligned}
$$

Es schreibt sich demnach $\big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\big(\frac{2z}{1-i}\big)^2 \leq 2\big\}$ als $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| \leq \sqrt{1 + y^2}\}$.

$\square$