Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen
Aachen, den 15.10.10

Übungsblatt 0 **Höhere Mathematik I** **WS 2010/2011**

Teil B

Aufgabe B 1.

Berechnen Sie

$$\text{(a) } \frac{2}{3}\left(3-\frac{1}{5}\right), \quad \text{(b) } 32^{0,2}, \quad \text{(c)} \sqrt[3]{12}\sqrt[6]{9^2\cdot 4}, \quad \text{(c) } \log_8\left(6^2-2^2\right).$$

Lösung.

(a)

$$\frac{2}{3}\left(3-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{3}\cdot 3-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{30}{15}-\frac{2}{15}=\frac{28}{15}$$

(b)

$$32^{0,2}=32^{\frac{2}{10}}=\left(2^5\right)^{\frac{1}{5}}=2$$

(c)

$$\sqrt[3]{12}\sqrt[6]{9^2\cdot 4}=\sqrt[6]{12^2 9^2 2^2}=\sqrt[3]{12\cdot 9\cdot 2}=\sqrt[3]{8\cdot 27}=2\cdot 3=6$$

(d)

$$\log_8\left(6^2-2^2\right)=\log_8(32)=\frac{\log_2(32)}{\log_2(8)}=\frac{5}{3}$$

□

Aufgabe B 2.

Es seien $a, b > 0$ und $y \neq (2x)^{-1}$. Vereinfachen Sie die folgenden Terme

$$\text{(a) } \frac{xy(4-16x^2y^2)}{2-4xy}-(2xy)^2 \qquad \text{(b) } \sqrt[5]{a^2b\sqrt{a^6b^{-2}}}.$$

Lösung. (a)

$$\frac{xy(4-16x^2y^2)}{2-4xy}-(2xy)^2=\frac{xy(2-4xy)(2+4xy)}{2-4xy}-(2xy)^2=2xy+4x^2y^2-4x^2y^2=2xy$$

(b)

$$\sqrt[5]{a^2b\sqrt{a^6b^{-2}}}=\sqrt[5]{a^2ba^3b^{-1}}=\sqrt[5]{a^5}=a$$

□

Aufgabe B 3.

Lösen Sie die folgenden (Un-)Gleichungen:

(a) $x^2 + 5x + 7 = 0$ (b) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

(c) $(x+5)(x-4) \leq 0$ (d) $\dfrac{|2x-1|}{|2-x|} \leq 1$

Lösung. (a)

$$\begin{aligned} & x^2 + 5x + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge (als Teilmenge der reellen Zahlen) ist also leer, d.h. $\mathbb{L} = \emptyset$.

(b)

$$\begin{aligned} & x^3 + x^2 - x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2(x+1) - (x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x^2-1)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)(x+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-1, 1\}$.

(c)

$$\begin{aligned} & (x+5)(x-4) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & [x+5 \leq 0 \wedge x-4 \geq 0] \vee [x+5 \geq 0 \wedge x-4 \leq 0] \\ \Leftrightarrow \quad & [x \leq -5 \wedge x \geq 4] \vee [x \geq -5 \wedge x \leq 4] \\ \Rightarrow \quad & -5 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{L} = [-5, 4]$

(d) Fallunterscheidung!

1.Fall: Es gelte: $2x - 1 \geq 0$ und $2 - x > 0$
Also ist $\frac{1}{2} \leq x < 2$. Dann gilt

$$\frac{|2x-1|}{|2-x|} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x-1}{2-x} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 2x-1 \leq 2-x \;\Leftrightarrow\; x \leq 1$$

In diesem Fall also $\mathbb{L}_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2.Fall: Es gelte $x > 2$. Dann ist

$$\frac{|2x-1|}{|2-x|} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x-1}{x-2} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 2x-1 \leq x-2 \;\Leftrightarrow\; x \leq -1$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $x > 2$. Also $\mathbb{L}_2 = \emptyset$.

3.Fall: Es gelte $x \le \frac{1}{2}$. Dann ist

$$\frac{|2x-1|}{|2-x|} \le 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-2x}{2-x} \le 1 \;\Leftrightarrow\; 1-2x \le 2-x \;\Leftrightarrow\; x \ge -1$$

In diesem Fall ist also $\mathbb{L}_3 = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

Insgesamt ist $\mathbb{L} = [-1, 1]$.

$\square$

Aufgabe B 4.

Vervollständigen Sie die Wahrheitstafel.

Lösung.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	$A \wedge (\neg B)$	$(\neg A) \vee B$
W	W	F	W	W	W	W	W	F	W
W	F	F	F	W	F	F	F	W	F
F	W	W	F	W	W	F	W	F	W
F	F	W	F	F	W	W	W	F	W

$\square$

Aufgabe B 5.

Beschreiben Sie die folgende Aussage formal, d.h. insbes. unter Verwendung von Quantoren: "Für jedes positive, reelle ε existiert ein positives reelles δ, so dass für alle reellen Zahlen x, welche einen Abstand kleiner als δ zu der reellen Zahl x_0 besitzen, gilt, dass $f(x)$ einen Abstand von weniger als ε zu $f(x_0)$ besitzt."

Lösung. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ so dass $\forall\, x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. $\square$

Aufgabe B 6.

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen durch einen logischen Ausdruck und bestimmen Sie ihre jeweilige logische Negation. Welcher der Aussagen sind richtig? Begründen Sie!

(a) Für jede reelle Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, so dass $x < n$ gilt.

(b) Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass für jede reelle Zahl x die Ungleichung $x < n$ gilt.

Lösung.

(a) $\forall\, x \in \mathbb{R}\, \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$. Dies ist wahr. Wähle z.B. $n = \lceil x \rceil + 1$.
Negation: $\exists\, x \in \mathbb{R}$ so dass $\forall n \in N$ gilt $x \ge n$. (falsch!)

(b) $\exists\, n \in \mathbb{N}$ so dass $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt $x < n$. (falsch)
Negation: $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, x \in \mathbb{R}$ so dass $x \ge n$. Dies ist wahr. Wähle z.B. $x = n + 1$.

$\square$