Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen Aachen, den 14.07.11

Übungsblatt 1 **Höhere Mathematik II** **SoSe 2011**

Musterlösung Teil B

Aufgabe B 1.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Transformationsmatrix B an, so dass gilt: $B^{-1} \cdot A \cdot B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Lösung.

Bestimmt alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2(4-\lambda) + 2 + 2 - (4-\lambda) - 2(3-\lambda) - 2(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)^2(4-\lambda) + 4 - 4 + \lambda - 4(3-\lambda) \\ &= (9 - 6\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) + \lambda - 12 + 4\lambda \\ &= 36 - 9\lambda - 24\lambda + 6\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 5\lambda - 12 \\ &= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24 \end{aligned}$$

Eine Nullstelle von $p_A(\lambda)$ ist 2: $-8 + 40 - 56 + 24 = 0$
Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \big(-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24\big) : \big(\lambda - 2\big) = -\lambda^2 + 8\lambda - 12 \\ \underline{\quad \lambda^3 - 2\lambda^2} \\ \qquad\quad 8\lambda^2 - 28\lambda \\ \qquad \underline{-8\lambda^2 + 16\lambda} \\ \qquad\qquad -12\lambda + 24 \\ \qquad\qquad \underline{\quad 12\lambda - 24} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p_A(\lambda) &= (\lambda-2)(-\lambda^2+8\lambda-12)\\
&= -(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-2)\\
&= -(\lambda-2)^2(\lambda-6)
\end{aligned}
$$

Die Matrix A hat also die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 2 \text{ mit algebraischer Vielfachheit } 2.$$

$$\lambda_2 = 6 \text{ mit algebraischer Vielfachheit } 1.$$

Zu $\lambda_1 = 2$: Löse $(A - 2\mathrm{I})v = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 2 frei wählbare Parameter, wähle also $v_2 = t, v_3 = s$, dann: $v_1 = -t - s$.
$\Rightarrow$ Eigenraum:

$$
\begin{aligned}
E(2) &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v = s \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}\\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

Zu $\lambda_2 = 6$: Löse $(A - 6\mathrm{I})v = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[I+3III]{II-2III} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -8 & 0\\ 0 & -4 & 8 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 1 frei wählbarer Parameter, wähle also $v_3 = t$, dann: $v_2 = 2t$ und $v_1 = -v_2+3v_3 = -2t+3t = t$. $\Rightarrow$ Eigenraum:

$$
\begin{aligned}
E(6) &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v = t \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}\\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

Finde noch die Transformationsmatrix B, so dass $B^{-1}AB$ Diagonalgestalt hat:
Nach Satz 5.6 gilt: Sind $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (mit Vielfachheit gezählt) und sind die zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n$ linear unabhängig, dann gilt mit $B = (v_1, \cdots, v_n)$:

$$B^{-1}AB = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Eigenvektoren von oben linear unabhängig sind:
Es gilt:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} &= 0+0+1-0+2+1\\ &= 4 \neq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Eigenvektoren $\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ist die gesuchte Matrix und es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Aufgabe B 2.

Es seien $A,\, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ist λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v, so ist λ^n ein Eigenwert von A^n zum Eigenvektor v.

(b) Sei A invertierbar und λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v. Dann ist v auch Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.

(c) A und A^T haben dieselben Eigenwerte.

(d) AB und BA haben dasselbe charakteristische Polynom.

Lösung.

(a) λ sei Eigenwert von A zum Eigenvektor v, d.h. $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow A^n v &= A^{n-1}(Av) = A^{n-1}\lambda v\\ &= \lambda A^{n-1} v = \lambda A^{n-2} A v\\ &= \cdots\\ &= \lambda^n v (\text{induktiv})\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda^n$ ist Eigenwert von A^n zum Eigenvektor v.

(b) λ sei Eigenwert von A zum Eigenvektor v. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&Av = \lambda v\\ \overset{A^{-1}\text{ existiert}}{\Rightarrow} &A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v\\ \Leftrightarrow &v = \lambda A^{-1} v\\ \overset{A \text{ invertierbar, also } \lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} &\frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v\end{aligned}$$

$\Rightarrow v$ ist Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\dfrac{1}{\lambda}$.

(c) Wegen $\det(A) = \det(A^T)$ folgt:

$$\begin{aligned} p_{A^T}(\lambda) &= \det(A^T - \lambda \mathrm{I}) = \det((A^T - \lambda \mathrm{I})^T) \\ &= \det((A^T)^T - \lambda \mathrm{I}^T) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die charakteristischen Polynome von A und A^T sind gleich, daher auch die Eigenwerte.

(d) <u>1. Fall:</u> B sei regulär, d.h. B^{-1} existiere.

$$\begin{aligned} p_{AB}(\lambda) &= \det(AB - \lambda \mathrm{I}) = \det(B^{-1}BAB - \lambda B^{-1}B\mathrm{I}) \\ &= \det(B^{-1}BAB - B^{-1}\lambda \mathrm{I}B) \\ &= \det(B^{-1}(BA - \lambda \mathrm{I})B) \\ &= \underbrace{\det(B^{-1})}_{=\frac{1}{\det(B)}} \cdot \det(BA - \lambda \mathrm{I}) \cdot \det(B) = \det(BA - \lambda \mathrm{I}) \\ &= p_{BA}(\lambda) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung gilt, falls B regulär.

<u>2. Fall:</u> B sei nicht regulär, d.h. $\det(B) = 0$
Seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ die Eigenwerte von B. Dann gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$, dass $(B - xI)$ regulär ist, da x kein Eigenwert von B ist.

$$\Rightarrow \det(A(B - x\mathrm{I}) - \lambda \mathrm{I}) \overset{\text{1. Fall}}{=} \det((B - x\mathrm{I})A - \lambda \mathrm{I})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(A(B - x\mathrm{I}) - \lambda \mathrm{I}) - \det((B - x\mathrm{I})A - \lambda \mathrm{I})}_{\text{Polynom } p(x) \text{ vom Grad } \leq n} \equiv 0$$

$\Rightarrow p(x) \equiv 0$ für $x \in \mathbb{R}$, da für $x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ paarweise verschieden, folgt:

$$p(x_i) = 0, \ (i = 0, \cdots, n).$$

Ein Polynom hat höchstens so viele Nullstellen, wie sein Grad angibt, oder ist identisch Null. Da der Grad hier $\leq n$ ist, und das Polynom mehr als n Nullstellen hat, ist es also konstant Null.
Es gilt demnach insbesondere für $x = 0$:

$$p_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda \mathrm{I}) = \det(BA - \lambda \mathrm{I}) = p_{BA}(\lambda).$$

Aufgabe B 3.

Es sei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch ihre Werte auf den Basisvektoren wie folgt festgelegt:

$$L(b_1) = 2b_1 + 2b_2, \ L(b_2) = b_1 + b_2 - b_3, \ L(b_3) = -b_2 + 2b_3.$$

Eine weitere Basis $\mathcal{W} = (w_1, w_2, w_3)$ des $\mathbb{R}^3$ sei durch ihre Koordinatenvektoren $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ und $(1, 0, 0)$ bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben.

(a) Geben Sie die Matrix der linearen Abbildung bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ an.

(b) Berechnen Sie die Matrix C der linearen Abbildung bezüglich der Basis $\mathcal{W}$ sowie die Basiswechselmatrix D, das heißt die Matrix D mit der Eigenschaft $C = D^{-1}AD$.

Lösung.

$\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ sei Basis des $\mathbb{R}^3$. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$L(b_1) = 2b_1 + 2b_2$$

$$L(b_2) = b_1 + b_2 - b_3$$

$$L(b_3) = -b_2 + 2b_3$$

(a) Matrix von L bezüglich $\mathscr{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $\mathscr{W} = (w_1, w_2, w_3)$ sei weitere Basis des $\mathbb{R}^3$ mit

$$(w_1)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (w_2)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (w_3)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} L(w_1) &= L(b_1 - b_2) = L(b_1) - L(b_3) \\ &= 2b_1 + 2b_2 - (-b_2 + 2b_3) \\ &= 2b_1 + 3b_2 - 2b_3 \\ &= 5w_1 + 3w_2 - 3w_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(w_2) &= L(b_2 + b_3) = L(b_2) + L(b_3) \\ &= b_1 + b_2 + b - b_3 + (-b_2 + 2b_3) \\ &= b_1 + b_3 \\ &= -w_1 + 2w_3 \end{aligned}$$

$$L(w_3) = L(b_1) = 2b_1 + 2b_2 = 2w_1 + 2w_2$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} L(w_1) = Aw_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathscr{W}} \\ L(w_2) = Aw_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathscr{W}} \\ L(w_3) = Aw_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{W}} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Basiswechselmatrix (mit Satz 5.8):
In der j-ten Spalte der Basiswechselmatrix zwischen den Basen $\mathscr{B}$ und $\mathscr{W}$ stehen die Koordinaten des j-ten Basisvektors aus $\mathscr{W}$ bezüglich $\mathscr{B}$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$C = D^{-1}AD$$

oder:
Basiswechselmatrix wie oben:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann: Berchne D^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III-II]{III+I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

also $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Dann:

$$\begin{aligned} C &= D^{-1}AD \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe B 4.

(a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3i & -1 \\ -4 & -i \end{pmatrix}$ und die zugehörige Transformationsmatrix.

(b) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort, ohne die Transformationsmatrix zu berechnen.

Lösung.

(a) Bestimme die Jordan-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 3i & -1 \\ -4 & -i \end{pmatrix}$$

Bestimme zunächst die Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) &= \begin{vmatrix} 3i-\lambda & -1 \\ -4 & -i-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3i-\lambda)(-i-\lambda) - 4 \\ &= 3 - 3\lambda i + i\lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 2i\lambda - 1 = (\lambda - i)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = i$ ist Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2.
Bestimme Eigenvektoren von A:

$$(A - i\mathrm{I})v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} v = 0$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2i & -1 & 0 \\ -4 & -2i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II-(2i)I} \left(\begin{array}{cc|c} 2i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ &\Rightarrow 2iv_1 - v_2 = 0 \quad v_2 = 2iv_1 \\ &\Rightarrow E(i) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \middle| v = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

also gilt $\dim(E(i)) = 1$, d.h. $\lambda = i$ hat geometrische Vielfachheit 1.
Bestimmt nun Hauptvektor $w \in \mathbb{R}^2$ mit $(A - i\mathrm{I})w = v$ und $(A - i\mathrm{I})^2 w = 0$.
Es gilt:

$$(A - i\mathrm{I})^2 = \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also ist $(A - i\mathrm{I})^2 w = 0\ \forall w \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

$$(A - i\mathrm{I})w = v \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2i & -1 & 1 \\ -4 & -2i & 2i \end{array}\right) \xrightarrow{II-(2i)I} \left(\begin{array}{cc|c} 2i & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für w gilt also:

$$2iw_1 - w_2 = 1$$

Wähle $w_1 = t \in \mathbb{R}$, dann ist $w_2 = 2it - 1$.
$\Rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i-1 \end{pmatrix}$ ist ein Hauptvektor.
Die Transformationsmatrix B ist dann:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i & 2i-1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} J(A) = B^{-1}AB &= \begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ 2i & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3i & -1 \\ -4 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i & 2i-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3i+2 & -1+i \\ -2 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i & 2i-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) - 1 + (2-\lambda) \\ &= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) \\ &= -(\lambda-1)(-2\lambda+\lambda^2+1) \\ &= -(\lambda-1)^3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ ist Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3.
Bestimme noch die geometrische Vielfachheit, also $\dim(E(1))$:

$$(A - 1\mathrm{I})v = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 1 frei wählbarer Parameter, wähle $v_1 = t \in \mathbb{R}$, dann: $v_2 = t = v_3$
$\Rightarrow$ Eigenraum

$$E(1) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

also $\dim(E(1)) = 1 =$ geometrische Vielfachheit. Für die Jordan-Normalform gilt:
Zu jedem Eigenwert gibt es seiner <u>geometrischen</u> Vielfachheit entsprechend viele Jordan-Kästen.
Die Gesamtdimension aller Jordan-Kästen zu einem Eigenwert entspricht der algebraischen Vielfachheit.
Hier: Ein EW $\lambda = 1$ mit geometrischer Vielfachheit $=1$ und algebraischer Vielfachheit $=3$
$\Rightarrow J(A)$ besteht aus einem 3×3 Block.

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$