

Kommunikationsnetze 1 und 2

Sascha Schade

2011-08-28

Preface

Why writing this

This document is being compiled during my preparation for the exams “Communication Networks” (lectured by professor Mähönen) and “Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung” (by professor Mathar) for my studies in electrical engineering at RWTH Aachen University. I expected preparing this document as a good exercise for me. Do *not* trust this document in any way! I *know* that this document still contains errors, but I have no time to fix them now.

Why not publishing it

There is some concern over publishing learning material under teaching staff. Some members of the teaching staff think that handing out too much information and material (which includes ready-made solutions) renders students lazy and makes their teaching unnecessary.

Sometimes I feel that some chairs are reluctant to publish any information about exercises or exams because some assistants and professors are quite lazy and just repeat the same (exam) questions over and over again.

That’s probably why the access to written solutions is more or less restricted in many ways in many courses at RWTH Aachen University.

Another reason not to publish this document is that some students are willing to pay good prices for solutions.

Why publishing it

My first experience with university was during my Abitur at Fernuniversität Hagen (distance university). All learning material and also all well and fully prepared solutions were accessible at all times for any student. There was no effort to hide any information from any student at any time.

As a matter of course every student *studied* the material to prepare herself/himself for the exam. In my point of view that did not render any student lazy or made the lectures (which still exist at a distant university) useless. Every student was given the ability to find out and decide what his or hers best learning method is.

You can trust every adult student at an University to take that responsibility.

Feedback and Copyright

I would really appreciate if this document is helpful for some students. If you spot some errors feel free to drop me a message. If time allows I will update the document and make a new version available. But remember: my resources are limited.

The copyright status of this document is a bit unclear to me. On the first hand, I, the author, claim some rights according to German law (Urheberrechtsgesetz) because I compiled all the solutions and commented them. On the other hand, the solutions somehow were prepared by the teaching staff and other students.

The copyright shall remain to the greatest extent by me. I grant every student the non-exclusive, no-transferrable right to use this material for his or hers personal studies at university.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but without any warranty; without even the implied warranty of merchantability or fitness for a particular purpose.

I did not include the questions in this document because the lecturers may claim the copyright for the problem sheets. I would feel lucky if I was allowed to include these documents in the appendix.

Thanks

I would like to thank all the fellow students who kindly provided their lecture notes and notes of the exercises anonymously on the Internet. They were of great help in preparing these notes.

This document also relies on some solutions provided by the teaching staff for solutions not solved in class. I also like to thank the members of teaching staff who provided support when I tried to solve the questions on my own.

Now, take the chance to use this document to *study* both subjects.

Aachen, September 2011

Contents

Preface	III
List of Figures	XV
List of Tables	XVII

I Communications Networks: Basics and Principles	1
---	----------

1. Exercise	3
--------------------	----------

1. Problem	3
2. Problem	3
a) propagation and transmission delay	3
b) find m	4
c) Maximum number of bits in transit	4
3. Circuit vs. packet switched network	5
a) Packet delay	5
b) Example	5
4. Circuit vs. packet switched network	6
a) Circuit switched network	6
b) Packed switched network	6
5. Problem	6
a) Throughput and goodput	6
b) Achievable goodput	6
c) Example of achievable goodput	7
6. Packet loss at wireless links	7
a) Probability of arrival	7
b) Required repetitions	8

2. Parity and finite state machines	11
--	-----------

1. Problem	11
a) Finite state machines for calculating parity	11
b) Shannon-Fano coding	11
c) Finite state machine to recognise symbols	12

d) Palindrome	13
2. Cyclic Redundancy Check	13
3. Flag byte	13
4. Block CRC	13
3. Exercise	15
1. Problem	15
a) Petri net for stop-and-wait ARQ	15
2. Problem	15
3. Problem	16
4. Problem	17
a) Minimum window size	17
b) Average package delivery rate	17
c) Comparison with Go-back-N protocol	18
4. Exercise	19
1. Throughput of pure ALOHA and slotted ALOHA	19
a) Pure ALOHA	19
b) Slotted ALOHA	20
c) Maximum throughput	20
2. ALOHA	20
3. CSMA/CD	20
4. CSMA/CD with binary exponential backoff	21
5. CSMA	21
6. CSMA wireless	21
5. Exercise	23
1. Uniqueness of Dijkstra's algorithm result	23
2. Dijkstra's algorithm and negative edge weights	23
3. Find least-cost route	23
4. Bellman-Ford algorithm	23
a) Least-cost path from C to A after next vector exchange	24
b) Problems of distance vector protocols	24
5. Bellmann-Ford algorithm example	24
6. Exercise	25
1. Hierarchical routing	25
a) Definition	25
b) Hierarchical routing on the Internet	25
c) Benefits and trade-offs	26
2. Hierarchical routing example	26
a) Binary tree	26

b)	Average distance	27
c)	Numerical results	28
d)		28
3.	RIP protocol example	29
a)	Routing tables	29
b)	Machine added	30
c)	Machine removed	30
4.	Router	30
a)	Maximum entries of routing table	31
b)	Maximum number of interfaces	31
c)	Single lookup process	32
7.	Exercise	33
1.	Distance-vector algorithms	33
a)	Problems of distance-vector algorithms	33
b)	Poisoned reverse mechanism	34
2.	Failure of poisoned reverse mechanism	35
3.	Comparison RIP and OSPF	35
8.	Exercise	37
1.	Internet protocol	37
a)	IP Fragmentation	37
b)	MTU and fragmentation	37
2.	IP subnets and broadcast addresses	37
a)	192.168.1.45, netmask 255.255.255.0	38
b)	10.0.11.12, netmask 255.255.254.0	38
c)	192.168.1.45/27	38
3.	IP subnets	38
a)	Size of subnets	38
b)	Smaller subnet	39
4.	Router with CIDR	39
a)	Routing	39
b)	Aggregation	40
5.	Subnetting	41
6.	Network Address Translation	43
9.	Exercise	45
1.	Sequence numbers and Maximum Packet Lifetime	45
a)	Maximum Packet Lifetime	45
b)	Example	45
2.	Round-Trip-Time (RTT) Estimation	45
a)	Sample RTT	45

b)	RTT example calculation	45
3.	TCP sequence numbers	46
a)	Maximum file size	46
b)	Transmission time	46
4.	Example transmission	46
a)	Second segment	46
b)	In-order reception	47
c)	ACK number reversed	47
5.	MSC diagram of a short TCP connection	47
10.	Exercise	49
1.	TCP reno	49
a)	Timeout	49
b)	Duplicate ACKs	49
2.	UDP vs. TCP	50
a)	Suitable protocol for real-time streaming	50
b)	Current use	50
3.	Special AIMD	50
a)	Example	50
b)	Average throughput	51
4.	Reliability of TCP	51
5.	TCP start sequence	51
6.	Delay-limited link	51
a)	Throughput with TCP	51
b)	Optimal window size	52
11.	Exam Spring 2011	53
1.	Question	53
2.	Question	54
3.	Question	54
4.	Question	54
5.	Question	54
6.	Question	55
7.	Question	55
8.	Question	55
12.	Exam Fall 2011	57
a)	OSI Model	57
b)	Terms	57
c)	Distance Vector Routing	57
d)	Routing protocol properties	57
e)	Aloha	57

f)	Assign IP addresses	58
g)	ARQ	58
h)	IP identification	59
i)	Stop-and-Wait ARQ	59

II Kommunikationsnetze:

Analyse und Leistungsbewertung 61

1.	Aufgabenübersicht	63
----	-------------------	----

1. Zusatzübung Herbst 2007 65

1.	Jacksonnetz	65
a)	Klassifizierung	65
b)	Zustandsraum und Routingmatrix	65
c)	Stationäre Verteilung	66
d)	Gleiche Gesamtverweilzeiten	67
e)	Umwandlung	68
f)	Zustandsraum und Mächtigkeit	68
g)	Stationäre Verteilung	68
2.	$M/E_k/1$ -System	71

2. Zusatzübung Frühjahr 2008 73

1.	Geburts- und Todesprozess	73
a)	Modellierung	73
b)	Eingebettete Markov-Kette	74
c)	Spezielles System	75
d)	Stationäre Verteilung	75
e)	Nutzer in der Leitung	76
f)	Blockierwahrscheinlichkeit	76
g)	Abwägung von Alternativen	77
2.	Warteschlangennetz	79
a)	Routingmatrix	79
b)	Stationäre Verteilung des Jackson-Netzes	79
c)	Gesamtfluss und erwartete Anzahl an Anforderungen	80
d)	Stationäre Verteilung mit Station 1 als $M/M/\infty$ -System	81
e)	Routingmatrix des geschlossenen Jackson-Netzes	81
f)	Stationäre Verteilung	82
g)	Auslastung und erwartete Anzahl Anforderungen	83

3. Zusatzübung Herbst 2008 85

1.	Parallele Prozessoren	85
a)	Modellierung als Markov-Prozess	85

b)	Übergangsgraph und Übergangsmatrix	88
c)	Stationäre Verteilung	89
d)	Blockierwahrscheinlichkeit, zentraler Speicher	93
e)	Blockierwahrscheinlichkeit, lokaler Speicher	93
f)	Vergleich	96
2.	Router	97
a)	Typ	97
b)	Modell, Zustandsraum und Routingmatrix	97
c)	Stationäre Verteilung	97
d)	Mindestbedienintensität μ_1	98
e)	Mindestroutingwahrscheinlichkeit β	99
f)	Modifikation	99
g)	Zustandsraum und Mächtigkeit	99
h)	Stationäre Verteilung	99
i)	Durchsatz, Erwartete Anzahl Anforderungen und Auslastung	100
4.	Zusatzübung Frühjahr 2009	103
1.	Jackson Netz	103
a)	Zustandsraum und Routingmatrix	103
b)	Stationäre Verteilung	103
c)	Gleiche mittlere Anzahl an Anforderungen	105
d)	Gleiche mittlere Gesamtverweilzeit	106
e)	Geschlossenes Jackson Netz	106
2.	Hyperexponentialverteilung	109
a)	Erwartungswert $E(Y)$ der Bedienzeit Y	109
b)	Mittlere Anzahl an Anforderungen und mittlere Gesamtverweilzeit	109
c)	$M/M/1$ -System mit gleichem Erwartungswert der Bedienzeit	110
d)	Stationäre Verteilung	111
e)	$M/G/1 - 1$ -System	111
5.	Zusatzübung Herbst 2009	115
1.	Jackson Netz	115
a)	Zustandsraum und Routingmatrix	115
b)	Stationäre Lösung	115
c)	Gleiche Auslastung	116
d)	Stationäre Verteilung	117
e)	Geschlossenes Jackson-Netz	117
f)	Flussgleichungen	117
g)	Erwartete Anzahl Anforderungen, Auslastung und Durchsatz	118
2.	Callcenter	119
a)	Modellierung	119
b)	Eingebettete Markov-Kette	120

c)	Bediensystem	120
d)	Parameter	120
e)	Stationäre Verteilung	120
f)	Erwartete Gesamtanzahl und erwartete Anzahl von Kunden in der Warteschleife	121
g)	Blockierwahrscheinlichkeit	122
h)	Alternativen	122
6. Zusatzübung Frühjahr 2010		125
1.	Warteschlangennetz	125
a)	Modell und Zustandsraum	125
b)	Stationäre Verteilung	125
c)	Geschlossenes Jacksonnetz	126
d)	Lösung Flussgleichungen	127
e)	Stationäre Verteilung	127
f)	Verteilung im nicht-blockierenden Fall	128
g)	Blockierender Fall	129
h)	Wahrscheinlichkeit für den nicht-blockierenden Fall	130
2.	Postfiliale	131
a)	Modellierung	131
b)	Erwartete Anzahl von Kunden und Gesamtverweilzeit	131
c)	Laplace-Transformierte der Wartezeit	133
d)	Erwartungswert der Wartezeit	134
e)	Begrenzte Wartekapazität	134
7. Zusatzübung Herbst 2010		139
1.	Jacksonnetz	139
a)	Zustandsraum und Routingmatrix	139
b)	Bedingung für stationäre Verteilung	140
c)	Erwartete Zahl an Anforderungen für Server S_4	141
d)	Gleicher Fluss	141
e)	Fluss	142
f)	Neue Verteilung	142
g)	S_1 ändern	143
h)	Geschlossenes Jacksonnetz	143
i)	Lösung der Flussgleichung	144
j)	Stationäre Verteilung	145
k)	Erwartete Anzahl an Anforderungen	148
2.	Tandem-Server	149
a)	Bediensystemtyp, Verteilung der Bedienzeit	149
b)	Erwartungswert der Bedienzeit Y	149
c)	Stationäre Verteilung	150

d)	Mittlere Anzahl und mittlere Gesamtverweilzeit im stationären Zustand	151
e)	Stationäre Verteilung berechnen	153
8.	Zusatzübung Frühjahr 2011	155
1.	Service-Hotline	155
a)	Modellierung	155
b)	Übergangsgraph und Übergangsmatrix	156
c)	Beispielsystem	156
d)	Stationäre Verteilung und Blockierwahrscheinlichkeit	156
e)	Erwartete Gesamtanzahl und Anzahl wartender Kunden	157
f)	Bewertung von Alternativen	158
2.	Jackson-Netz	160
a)	Zustandsraum, Routingmatrix und Lösung der Flussgleichungen	160
b)	Existenz stationäre Verteilung	161
c)	Erweiterung und stationäre Verteilung an Station 3	162
d)	Wahrscheinlichkeit	163
e)	Geschlossenes Jackson-Netz	163
f)	Explizite stationäre Verteilung	164
9.	Zusatzübung Herbst 2011	167
1.	Markov-Prozess	167
a)	Zustandsraum und Intensitätsmatrix	167
b)	Übergangsmatrix und Übergangsgraph der eingebetteten Markovkette	167
c)	Zustandswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markov-Kette .	168
d)	Eigenschaften der eingebetteten Markov-Kette	168
e)	Stationäre Verteilung des Markov-Prozesses	169
f)	Modellierung	170
2.	Jackson-Netz	172
a)	Routingmatrix	172
b)	Lösung Flussgleichungen	172
c)	Stationäre Verteilung des offenen Jackson-Netzes	173
d)	Wartewahrscheinlichkeit und Warteschlangenlänge	174
e)	Geschlossenes Jackson-Netz	174
f)	Stationäre Verteilung	174
g)	Durchsatz und Auslastung	175
10.	Klausur Herbst 2011	177
1.	Einwohnermeldeamt	177
a)	Bedienzeiten	177
b)	Ankunftswahrscheinlichkeit	177
c)	Intensitätsgraph	177

d)	Stationäre Verteilung	178
e)	Wahrscheinlichkeit	178
f)	Variation	178
2.	Jackson-Netz	178
a)	Zustandsraum, Routingmatrix	178
b)	Flussgleichungen	178
c)	Stationäre Verteilung	178
d)	Auslastung	179
e)	geschlossenes Jackson-Netz	179
f)	Zustandsraum, Mächtigkeit	179
g)	Routingmatrix, Flussgleichungen	179
h)	Stationäre Verteilung, Durchsatz, Auslastung	179
11.Rezepte		181
1.	Intensitätsgraph	181
2.	Intensitätsmatrix	181
3.	Übergangsgraph	182
4.	Übergangsmatrix	182
5.	Geburts- und Todesprozesse (GTP)	183
a)	Stationäre Verteilung	183
b)	Blockierwahrscheinlichkeit	185
6.	Offenes Jackson Netz	186
a)	Ankunftsprozess	186
b)	Routingmatrix	186
c)	Stationäre Lösung	187
d)	Wartewahrscheinlichkeit	188
e)	Erwartete mittlere Anzahl von Anforderungen	189
f)	Mittlere Gesamtverweilzeit	189
g)	Warteschlangenlänge	189
h)	Lösung einer komischen Aufgabe	189
7.	Geschlossenes Jackson-Netz	190
a)	Stationäre Verteilung	190
8.	$M/G/1$ -Systeme	191
a)	Erwartungswert $E(Y)$ der Bedienzeit Y	191
b)	Höhere Momente des Erwartungswertes $E(Y^k)$	192
c)	Varianz $V(Y)$	192
d)	Mittlere Anzahl Anforderungen im System $E(X^*)$	193
e)	Mittlere Gesamtverweilzeit einer Anforderung $E(W^*)$	193
f)	Stationäre Verteilung p_i^*	193
g)	Laplace-Transformierte der Wartezeit	193
h)	Hyperexponentialverteilung	194
i)	Gesamtsystem leer	195

12. Formelsammlung	197
1. Reihen	197
2. Binominalkoeffizient	197
3. Geschlossenes Jackson Netz	198
a) Stationäre Lösung	198
b) Auslastung Station i	199
c) Erwartete Auslastung Station i	199
Literaturverzeichnis	201

List of Figures

1..1	Tree with probability of successful transmitted packet.	8
2..1	Finite state machine for parity calculation	12
2..2	FSM 2	12
3..1	Petri net for ARQ.	15
4..1	Vulnerable period for pure ALOHA.	19
6..1	Hierarchical routing with binary tree.	26
8..1	Netmask of CIDR /24 and /27.	39
8..2	Netmask of CIDR /28 for smaller subnets.	39
8..3	Routing decisions.	39
8..4	Aggregated routing table.	40
8..5	Largest subnet with 62 possible hosts.	41
8..6	3 subnet with 30 possible hosts each.	42
8..7	1 subnet with 14 possible hosts.	42
2..1	Intensitätsgraph.	74
2..2	Übergangsgraph der eingebetteten Markov-Kette.	74
2..3	Intensitätsgraph spezielles System.	75
2..4	Modell Alternative 1.	77
2..5	Modell Alternative 2.	78
3..1	System mit zentralem Speicher.	85
3..2	Intensitätsgraph.	86
3..3	Intensitätsgraph (andere Lösung).	87
3..4	Übergangsgraph der eingebetteten Markov-Kette.	88
3..5	System mit lokalem Speicher.	93
3..6	Übergangsgraph für System 1.	94
3..7	Modell des Systems.	97
4..1	Modell des Systems.	106
4..2	Modell des Systems.	112
5..1	Intensitätsgraph.	119

List of Figures

5.2 Übergangsgraph der eingebetteten Markovkette.	120
6.1 Intensitätsgraph.	135
6.2 Intensitätsgraph.	137
11.1 Intensitätsgraph.	181
11.2 Übergangsgraph.	182

List of Tables

1..1	Probability of arrival after n -th try.	8
4..1	CSMA/CD with binary exponential backoff.	21
5..1	Dijkstra's algorithm.	23
5..2	Routing table for node 1.	24
5..3	Bellmann-Ford algorithm example.	24
6..1	Routing table for node B.	29
6..2	Routing table for node C.	30
6..3	Routing table for node D.	30
6..4	Routing tables when machine A is added.	31
6..5	Tab	31
7..1	Routing tables at $t = 0$	33
7..2	Routing tables at $t = T$	34
7..3	Routing tables at $t = 2T$	34
7..4	Routing tables at $t = 3T$	34
7..5	Routing tables at $t = 0$	35
7..6	Routing tables at $t = T$	35
7..7	Routing tables at $t = 2T$	35
7..8	Routing tables at $t = 3T$	35
7..9	Comparison of OSPF and RIP.	36
8..1	Fragments of transmission.	38
9..1	Estimated RTT.	45
9..2	Sequence number, source and destination port number.	47
9..3	Sequence number, source and destination port number in in-order reception.	47
9..4	Sequence number, source and destination port number in out-of-order reception.	47
9..5	MSC diagram for a simple TCP connection.	48
10..1	Congestion window after a timeout.	49
10..2	Congestion window after a timeout.	50

10..3 Segments transmitted.	51
0..1 Übersicht über alle Aufgaben.	63
4..1 Ermittlung von K_M	108
6..1 K_M bestimmen.	128
8..1 Abbruchrate in Abhängigkeit vom Warteplatz	156
11..1 Ermittlung von K_M	191

Part I

Communications Networks: Basics and Principles

1. Exercise

1. Problem

- Advantages
 1. Break a complex system into pieces, which is easier to manage.
 2. Good reference model.
 3. Eases maintenance and updating as layers can be changed independently from the stack if interfaces are kept identically.
- Disadvantages
 1. Data overhead (headers etc.).
 2. optimisation of individual layers is difficult in practice.
 3. adds complexity to the design (e.g. cross layer issues).

2. Problem

a) propagation and transmission delay

The transmission delay is ruled by the rate R and the packet size L . It is the time it takes to squeeze the packet out of the sender into the channel.

$$d_{\text{trans}} = \frac{L}{R} = \frac{\text{packet size}}{\text{rate}} \quad (1..1)$$

$$[d_{\text{trans}}] = \frac{\text{bits}}{\frac{\text{bits}}{\text{sec}}} = \text{sec} \quad (1..2)$$

The propagation delay is the delay incurred by the electromagnetic waves traveling at finite speed c along the path of length l .

$$d_{\text{prop}} = \frac{l}{c} = \frac{\text{length of connection}}{\text{propagation speed}} \quad (1..3)$$

$$[d_{\text{prop}}] = \frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{sec}}} = \text{sec} \quad (1..4)$$

1. Exercise

b) find m

$$d_{\text{prop}} = d_{\text{trans}} \quad (1..5)$$

$$\frac{m}{s} = \frac{L}{K} \quad (1..6)$$

$$m = s \frac{L}{K} \quad (1..7)$$

$$= 2.5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{100 \text{ bits}}{28 \text{ Kbps}} \quad (1..8)$$

$$m = 892.86 \text{ m} \quad (1..9)$$

c) Maximum number of bits in transit

Propagation delay:

$$d_{\text{prop}} = \frac{10000 \cdot 10^3}{\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 10^9} \quad (1..10)$$

$$= 0.05 \text{ sec} \quad (1..11)$$

Time to transmit 1 bit:

$$t_1 = \frac{1 \text{ bit}}{1 \text{ Mbps}} \quad (1..12)$$

$$= 1 \cdot 10^{-6} \text{ sec} \quad (1..13)$$

First bit reaches receiver after:

$$t_2 = t_1 + t_{\text{prop}} \quad (1..14)$$

$$= 1 \cdot 10^{-6} \text{ sec} + 0.05 \text{ sec} \quad (1..15)$$

$$\approx 0.05 \text{ sec} \quad (1..16)$$

So, there are x bits traveling on the link concurrently:

$$x = R \cdot t_2 \quad (1..17)$$

$$= 1 \text{ Mbps} \cdot 0.05 \text{ sec} \quad (1..18)$$

$$= 50'000 \text{ bits} < 400'000 \text{ bits} \quad (1..19)$$

If the message was shorter than 50'000 bits the last bit would have been sent at the transmitter before the first bit has arrived at the receiver.

3. Circuit vs. packet switched network

a) Packet delay

α) Circuit switched network

Setup time

$$t_{\text{up}} \quad (1..20)$$

Transmission delay

$$t_{\text{tr}} = \frac{L}{R} \quad (1..21)$$

Propagation delay

$$t_{\text{prop}} = \frac{L}{c} \quad (1..22)$$

Sum of delays:

$$t_{\text{cs}} = t_{\text{up}} + t_{\text{tr}} + \frac{6d}{c} \quad (1..23)$$

$$= t_{\text{up}} + \frac{L}{R} + \frac{6d}{c} \quad (1..24)$$

β) Packet switched network

$$t_{\text{ps}} = 6t_{\text{tr}} + 6t_{\text{prop}} + 5t_{\text{p}} \quad (1..25)$$

$$= 6 \left(\frac{d}{c} + \frac{L}{R} \right) + 5t_{\text{p}} \quad (1..26)$$

b) Example

Sending x packets:

$$t_{\text{cs}} = \left(\frac{L}{R} + \frac{6d}{c} \right) x + t_{\text{up}} \quad (1..27)$$

$$t_{\text{ps}} = \left(\frac{6d}{c} + \frac{6L}{R} + 5t_{\text{p}} \right) x \quad (1..28)$$

@TODO Graph delay over packets

Break-even point: 13.13 packets

4. Circuit vs. packet switched network

a) Circuit switched network

In general: waste of bandwidth.

In this case not all hosts can achieve their desired bandwidth. When host *A* setups its connection first it will be granted a 10 Mbps link. If host *B* then requests a link from the circuit-switched network it will not succeed as 10+5 Mbps exceeds the capacity of the link to host *D*. But when host *C* then connects it can use the remaining 1 Mbps of the link.

b) Packed switched network

If a kind of “fair” bandwidth allocation is used the bandwidth would be shared as following:

$$A \rightarrow D \quad \frac{10}{16} \cdot 11 \text{ Mbps}$$

$$B \rightarrow D \quad \frac{5}{16} \cdot 11 \text{ Mbps}$$

$$C \rightarrow D \quad \frac{1}{16} \cdot 11 \text{ Mbps}$$

5. Problem

a) Throughput and goodput

- Throughput
Rate of successfully delivered data (e.g. including doublets)
- Goodput
Rate of successfully delivered useful information (e.g. excluding doublets and headers)

b) Achievable goodput

After first layer:

$$M = m + h \tag{1..29}$$

After second layer:

$$M = m + 2h \quad (1..30)$$

After third layer:

$$M = m + 3h \quad (1..31)$$

After n -th layer:

$$M = m + nh \quad (1..32)$$

Goodput:

$$G = \frac{m}{m + nh} T \quad (1..33)$$

c) Example of achievable goodput

$$G = \frac{512}{512 + 5 \cdot 20} \cdot 1.5 \text{ Mbps} = 1.25 \text{ Mbps} \quad (1..34)$$

6. Packet loss at wireless links

a) Probability of arrival

Probability of failure: p .

Probability of reception: $(1 - p)$.

This is a sequence of n independent yes/no experiments. Such a success/failure experiment is also called a Bernoulli experiment or Bernoulli trial. The probability mass function is:

$$P = \binom{n}{k} \underbrace{(1-p)^n}_{\text{success}} \underbrace{p}_{\text{failure}}^{(k-n)} \quad (1..35)$$

where n the number of experiments, and k is the number of successfully transmitted packets. If you use a calculator you can calculate $\binom{n}{k}$ with $n \text{ nCr } k$. If you cannot remember if the exponent $(k - n)$ goes with $(1 - p)$ or p check with $k = 1 = n$. The expected probability of success should be $(1 - p)$ and it is clear that $(k - n)$ goes with p .

Iteration / try	Success
$i = 1$	$(1 - p)$
$i = 2$	$p(1 - p)$
$i = 3$	$p \cdot p(1 - p)$
\vdots	\vdots
$i = n$	$p^{n-1}(1 - p)$

Table 1..1: Probability of arrival after n -th try.

@TODO

Figure 1..1: Tree with probability of successful transmitted packet.**b) Required repetitions**

The probability of successful transmission of a packet after n tries can be evaluated using this simple table:

The probability that a packet arrived after n tries is

$$p(n) = p^{n-1}(1 - p) \quad (1..36)$$

This is a probability density function (PDF) of the discrete random variable n . To evaluate the number of tries that are necessary on average integrate the PDF to get the probability:

$$E[x] = \sum_i x_i p(x_i) \quad (1..37)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p^{n-1}(1 - p) \quad (1..38)$$

Hint:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k = \frac{a}{1 - r} \quad (1..39)$$

differentiate hint:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot k \cdot r^{k-1} = \frac{a}{(1 - r)^2} \quad (1..40)$$

use hint with: $(1 - p) \rightarrow a, n \rightarrow k, p \rightarrow r$

$$E[N] = \frac{1 - p}{(1 - p)^2} = \frac{1}{1 - p} \quad (1..41)$$

2. Parity and finite state machines

1. Problem

a) Finite state machines for calculating parity

Even parity means that the entire set (data plus parity bit) has a an even number of bits.

$$I = \{0, 1\} \tag{2..1}$$

b) Shannon-Fano coding

See Wikipedia¹. Most frequent symbol gets the shortest codes. Symbols with same probability should get codes of same length:

$$A \rightarrow 0 \tag{2..2}$$

$$B \rightarrow 10 \tag{2..3}$$

$$C \rightarrow 11 \tag{2..4}$$

Alternative solution:

$$A \rightarrow 1 \tag{2..5}$$

$$B \rightarrow 00 \tag{2..6}$$

$$C \rightarrow 01 \tag{2..7}$$

Alternative solution:

$$A \rightarrow 1 \tag{2..8}$$

$$B \rightarrow 01 \tag{2..9}$$

$$C \rightarrow 00 \tag{2..10}$$

¹http://en.wikipedia.org/wiki/Shannon-Fano_coding

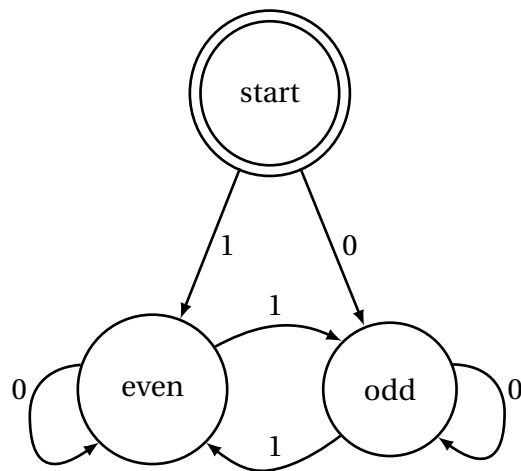


Figure 2..1: Finite state machine for parity calculation

Alternative solution:

$$A \rightarrow 1 \quad (2..11)$$

$$B \rightarrow 00 \quad (2..12)$$

$$C \rightarrow 01 \quad (2..13)$$

c) Finite state machine to recognise symbols

This FSM is for the second solution

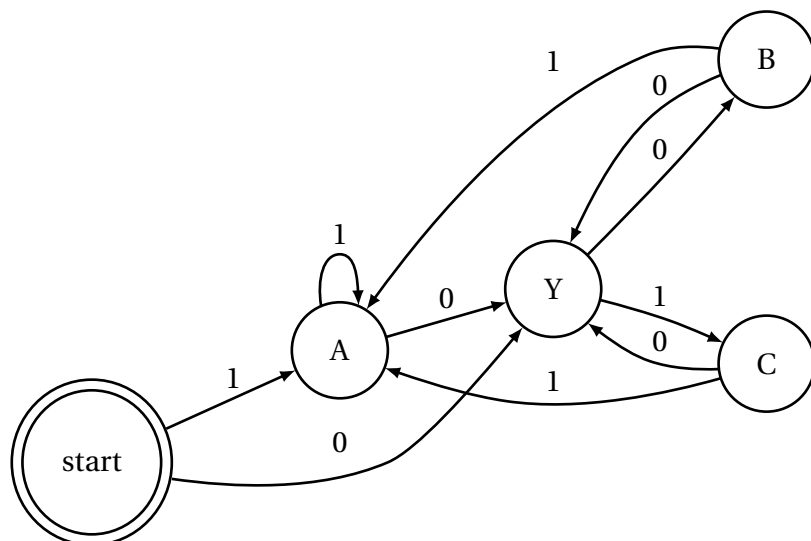


Figure 2..2: FSM 2

d) Palindrome

Anna is palindrome. Solution provided by teaching staff. (FSM is *finite*).

2. Cyclic Redundancy Check

Solution provided by teaching staff. (4th order polynom generates 4 CRC bits. Do a mod-2 division: message mod-2-div bits of polynom).

3. Flag byte

Solution provided by teaching staff.

4. Block CRC

Solution provided by teaching staff. Short:

- single errors: always detectable, always correctable
- double errors: always detectable, sometimes correctable
- triple errors: in most cases (not always) detectable, not correctable

3. Exercise

1. Problem

a) Petri net for stop-and-wait ARQ

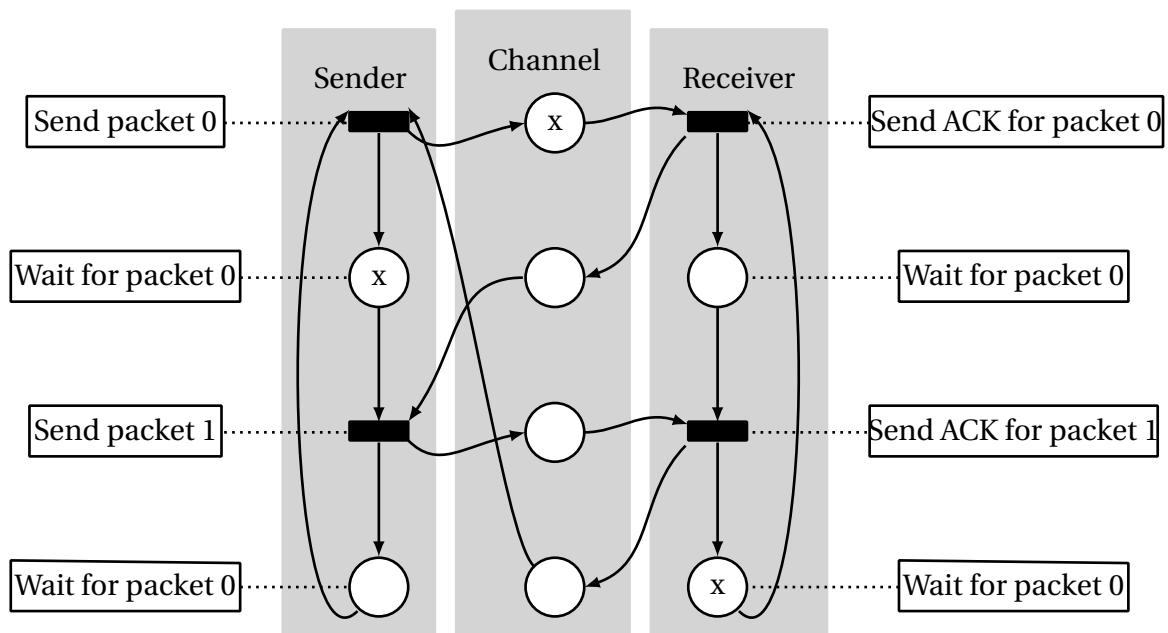


Figure 3..1: Petri net for ARQ.

2. Problem

@TODO graph

3. Exercise

First, consider the case with $p = 0$ (no errors):

$$v = \frac{t_{\text{frame}}}{t_{\text{frame}} + t_{\text{prop}} + \underbrace{t_{\text{ack}}}_{\approx 0} + t_{\text{prop}}} \quad (3..1)$$

$$= \frac{t_{\text{frame}}}{t_{\text{frame}} + 2t_{\text{prop}}} \quad (3..2)$$

with $a = \frac{t_{\text{prop}}}{t_{\text{frame}}}$

$$= \frac{1}{1 + 2a} \quad (3..3)$$

With $p \neq 0$ a packet is transmitted on average N times with $N = \frac{1}{1-p}$.

$$D = \frac{t_{\text{frame}}}{(N-1) \left(t_{\text{frame}} + \underbrace{t_{\text{ack,timeout}}}_{2t_{\text{prop}}} \right) + (t_{\text{frame}} + 2t_{\text{prop}})} \quad (3..4)$$

$$= \frac{t_{\text{frame}}}{N (t_{\text{frame}} + 2t_{\text{prop}})} \quad (3..5)$$

$$= \frac{1-p}{1+2a} \quad (3..6)$$

3. Problem

@TODO Graph

First assume no errors ($p = 0$):

- Case 1: The ACK for frame 0 is received before t_0 .
 $v(p=0) = 1$.
- Case 2: The ACK for frame 0 is received at $t_1 > t_0$.
 $v(p=0) < 1$.

$$v(p=0) = \frac{k \cdot t_{\text{frame}}}{t_1} = \frac{\text{time for transmission of } k \text{ frames}}{\text{time until ACK for frame 0 is received}} \quad (3..7)$$

$$\text{with } t_1 = t_{\text{frame}} + t_{\text{prop}} + t_{\text{ack}} + t_{\text{prop}} \approx t_{\text{frame}} + 2t_{\text{prop}}$$

$$v(p=0) = \frac{k \cdot t_{\text{frame}}}{t_{\text{frame}} + 2t_{\text{prop}}} \quad (3..8)$$

$$t_{\text{frame}} = \frac{2 v t_{\text{prop}}}{K - a} \quad (3..9)$$

$$= 1.36 \cdot 10^{-6} \text{sec} \quad (3..10)$$

$$\text{with } t_{\text{prop}} = \frac{1500}{3 \cdot 10^8} \text{sec} = 5 \mu\text{sec} \quad (3..11)$$

$$t_{\text{frame}} = \frac{L}{R} \quad (3..12)$$

$$L = (1.36 \cdot 10^{-6})(10 \cdot 10^6) \quad (3..13)$$

$$= 13.63 \text{bits} \approx 14 \text{bits} \quad (3..14)$$

4. Problem

a) Minimum window size

The time needed for transmitting k frames must be greater the time T needed for the acknowledgement and processing (t_{proc}) of first frame. k is the minimum window size.

$$T = t_{\text{frame}} + t_{\text{prop}} + t_{\text{proc}} + t_{\text{frame}} + t_{\text{prop}} + t_{\text{proc}} \quad (3..15)$$

$$= 0.64125 \text{sec} \quad (3..16)$$

$$\text{with } t_{\text{frame}} = \frac{1000}{R} = 0.015625 \text{sec} \quad (3..17)$$

$$t_{\text{prop}} = \frac{90000 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 0.3 \text{sec} \quad (3..18)$$

$$t_{\text{proc}} = 0.005 \text{sec} \quad (3..19)$$

$$k \cdot t_f > T \quad (3..20)$$

$$k > \frac{T}{t_{\text{frame}}} \quad (3..21)$$

$$> 41.02 \approx 42 \quad (3..22)$$

b) Average package delivery rate

$$p = 0.01 \quad (3..23)$$

3. Exercise

Average tries to send each frame:

$$N = \frac{1}{1-p} \quad (3..24)$$

Time to deliver a frame:

$$t_{\text{frame},p} = t_{\text{frame}} \frac{1}{1-p} \quad (3..25)$$

Rate:

$$v = \frac{v(p=0)}{\frac{1}{1-p}} = 0.99 \quad (3..26)$$

$$R = 64'000 \text{ bps} = 64 \text{ packets/s} \quad (3..27)$$

packet transmission rate

$$64 \cdot 0.99 = 63.36 \text{ packets/s} \quad (3..28)$$

c) Comparison with Go-back-N protocol

- with Go-back-N:

If success at first time ($1-p$):

time to transmit frame is t_{frame} .

If failure at first time (p):

knowing that we need $\frac{1}{1-p}$ transmission attempts on average:

time to deliver frame:

$$t_{\text{frame}} + N_F \cdot t_{\text{frame}} \left(\frac{1}{1-p} \right) = t_{\text{frame}} + T \left(\frac{1}{1-p} \right)$$

N_F is the number of frames transmitted after the last one and until timeout:

$$N_F = \frac{T}{t_{\text{frame}}}. \quad T \text{ is timeout.}$$

Total time for frame:

$$(1-p)t_{\text{frame}} + p \left(t_{\text{frame}} + T \left(\frac{1}{1-p} \right) \right) = t_{\text{frame}} + p \frac{T}{1-p}$$

$$\text{Utilisation: } \frac{t_{\text{frame}}}{t_{\text{frame}} + p \frac{T}{1-p}} = 0.7074$$

$$\text{Packet delivery rate} = 64 \cdot 0.7 = 42.5 \text{ packets/s.}$$

4. Exercise

1. Throughput of pure ALOHA and slotted ALOHA

Poisson arrivals. The probability of K frame arrivals in a frame time:

$$P_G[K] = \frac{G^K e^{-G}}{K!} \quad (4..1)$$

Throughput. The throughput is:

$$S = G \cdot P_{\text{suc}} \quad (4..2)$$

a) Pure ALOHA

In pure ALOHA the vulnerable period can be derived from figure 4..1:

$$[t_0 - T; t_0 + T] \quad (4..3)$$

@TODO

Figure 4..1: Vulnerable period for pure ALOHA.

Scale poisson arrival:

$$T \longleftrightarrow G \quad (4..4)$$

$$2T \longleftrightarrow 2G \quad (4..5)$$

$$P_{\text{suc}} = P_{2G}[0] = \frac{2G^0}{0!} e^{-2G} = e^{-2G} \quad (4..6)$$

$$S = G e^{-2G} \quad (4..7)$$

b) Slotted ALOHA

In slotted ALOHA the vulnerable period is reduced to

$$[t_0 - T; t_0] \quad (4..8)$$

$$P_{\text{suc}} = P_G[0] = \frac{(G)^0}{0!} e^{-G} = e^{-G} \quad (4..9)$$

$$S = G e^{-G} \quad (4..10)$$

c) Maximum throughput

To find the maximum throughput S_{max} of pure ALOHA derive S:

$$\frac{d}{dG} G e^{-2G} = e^{-2G} + G(-2)e^{-2G} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4..11)$$

$$G = \frac{1}{2} \quad (4..12)$$

$$S_{\text{max}} = \frac{1}{2e} = 0.18 \quad (4..13)$$

Same for slotted ALOHA:

$$\frac{d}{dG} G e^{-G} = e^{-G} + G(-1)e^{-G} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4..14)$$

$$G = 1 \quad (4..15)$$

$$S_{\text{max}} = \frac{1}{e} = 0.36 \quad (4..16)$$

2. ALOHA

Solution provided by teaching staff.

3. CSMA/CD

Solution provided by teaching staff.

Round	after collision, select time slot among	Number of choices
1	0	$1 = 2^0$
2	0, 1	2^1
3	0, 1, 2, 3	2^2
4	0, 1, ..., 7	2^3
\vdots	\vdots	\vdots
i		2^{i-1}

Table 4..1: CSMA/CD with binary exponential backoff.

4. CSMA/CD with binary exponential backoff

Find: Probability of having $(k - 1)$ collisions, and the success on round k .

Collision at round i :

$$p_i = \underbrace{\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right)\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right)}_{\text{two stations collide at first slot}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right)\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right)}_{\text{two stations collide at second slot}} + \dots \quad (4..17)$$

$$= \frac{2^{i-1}}{2^{2(i-1)}} = 2^{-(i-1)} \quad (4..18)$$

Collision at first $(k - 1)$ rounds:

$$\prod_{i=1}^{k-1} 2^{-(i-1)} \quad (4..19)$$

Final result:

$$P = \prod_{i=1}^{k-1} 2^{-(i-1)} \cdot (1 - 2^{-(k-1)}) \quad (4..20)$$

5. CSMA

Solution provided by teaching staff.

6. CSMA wireless

This situation is equal to the hidden station problem because C cannot detect a communication from B to A . A collision will occur. A simple CSMA mechanism may be unsuitable.

5. Exercise

1. Uniqueness of Dijkstra's algorithm result

The result of two calculations is the same if the least cost path is unique. If different paths have the same lowest cost then the result may differ.

2. Dijkstra's algorithm and negative edge weights

Negative edge weights are not allowed because Dijkstra's algorithm is a greedy algorithm.

3. Find least-cost route

notation: $(\sum \text{weight}, \text{predecessor})$

step	R	2	3	4	5	6
0	1	(1,1)	∞	(4,1)	∞	∞
1	1,2		(4,2)		(2,2)	
2	1,2,5		(3,5)	(3,5)		(6,5)
3	1,2,5,3					(5,3)
3	1,2,5,4					

Table 5..1: Dijkstra's algorithm.

To construct the routing table start at the destination and find the predecessors with the lowest cumulated weight.

4. Bellman-Ford algorithm

Destination	Route (reverse)
2	2 ← 1
3	3 ← 5 ← 2 ← 1
4	4 ← 5 ← 2 ← 1
5	5 ← 2 ← 1
6	6 ← 3 ← 5 ← 2 ← 1

Table 5..2: Routing table for node 1.**a) Least-cost path from C to A after next vector exchange**

C advertise to be able to reach A with a cost of 6 with the route

$$C \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A \quad (5..1)$$

This results to the count-to-infinity problem.

b) Problems of distance vector protocols

In distance vector (DV) protocols nodes do not have a complete knowledge of the network topology. They base their decisions on limited information. They only find the forwarding link to each destination. This may lead to routing loops.

5. Bellmann-Ford algorithm example

Destination	Router B	Router D	Router E
A	5 + 6 = 11	16 + 3 = 19	7 + 5 = 12
B	0 + 6 = 6	12 + 3 = 15	6 + 5 = 11
C	8 + 6 = 14	6 + 3 = 9	3 + 5 = 8
D	12 + 6 = 18	0 + 3 = 3	9 + 5 = 14
E	6 + 6 = 12	9 + 3 = 12	0 + 5 = 5
F	2 + 6 = 8	10 + 3 = 13	4 + 5 = 9

Table 5..3: Bellmann-Ford algorithm example.

Do *not* send packets intended for router C to router E because this is the routing table for router C.

6. Exercise

1. Hierarchical routing

a) Definition

See Tanenbaum, 5.2.6 (p. 366ff).

- regionalisation:
split routers into regions
- local knowledge:
each router has detailed knowledge about routers in own region
no knowledge about routers outside region (topology, links, etc.)
- aggregation:
regions may be further aggregated

b) Hierarchical routing on the Internet

Tanenbaum, 5.6.4 (p. 454ff).

- one level
called autonomous systems (AS),
e.g. AS680 (RWTH) connected to AS1275 (DFN)
- sublevels may exist at enterprise level
e.g. c6k-...
- routing
all gateway routers (AS boundary routers) must implement BGP
- relationships differ:
peer, transit, multi-bonded

c) Benefits and trade-offs

- Aggregation:
lower complexity, smaller routing tables
- Information hiding:
sub-optimal routing, less options for paths

2. Hierarchical routing example

a) Binary tree

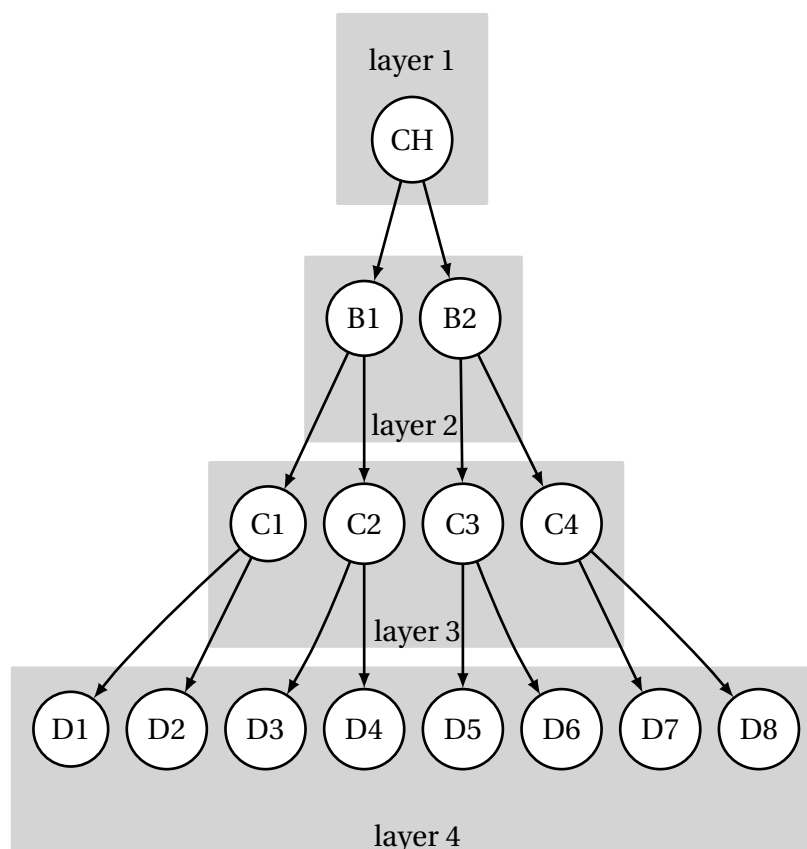


Figure 6..1: Hierarchical routing with binary tree.

Observation:

1. Node at level l is $(l - 1)$ hops away from cluster head (CH).

2. Adding a new level approximately doubles the number of nodes in tree.

3. Depth of tree $l \approx \log_2(N)$

Average distance to cluster head: Half of the nodes are $(l - 1)$ hops away, one quarter $(l - 2)$, ...

$$\bar{d} = 0.5 \cdot (l - 1) + 0.25 \cdot (l - 2) + 0.125 \cdot (l - 3) + \dots \quad (6..1)$$

$$= \sum_{i=1}^L (L - i) \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (6..2)$$

For $L \gg 10$:

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^{\infty} (L - i) \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (6..3)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} L \left(\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (6..4)$$

Hints:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1 - x} \quad \text{for } x < 1 \quad (6..5)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot x^i = \frac{x}{(1 - x)^2} \quad \text{for } x < 1 \quad (6..6)$$

continue:

$$\bar{d} = L \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (6..7)$$

$$= L \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i - L - \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (6..8)$$

$$= L - \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = L - 2 \quad (6..9)$$

b) Average distance

@todo graph

Observations for example node (EN):

1. Tree can be split into subtrees, each several hops away.

6. Exercise

2. Left subtree has depth $L - l$.

3. Size of subtree $\approx 2^{\text{depth}+1}$.

$$\bar{e} = \sum_{i=0}^{L-1} \left(\underbrace{((L-l+i)-2)}_{n\text{-tree depth}} + \underbrace{(i+1)}_{\text{path to subtree}} \right) \cdot \underbrace{\frac{2^{L-l+i+1}}{2^L}}_{\substack{\text{fractional nodes} \\ \text{in subtree}}} + \underbrace{((L-l)-2) \frac{2^{L-l+1}}{2^L}}_{\text{left head side subtree}} \quad (6..10)$$

c) Numerical results

$$\bar{l}_{M \rightarrow CH} > \bar{l}_{M \rightarrow M} \quad (6..11)$$

is not optimal to cluster. Additionally, all outside traffic needs to go through cluster head.

d)

Assumptions:

1. To reach a node inside the cluster, on average $\bar{l}_{M \rightarrow M} = \log_2 N_C - 2.5$ hops are needed, where N_C is the number of nodes in the cluster.
2. To reach a node outside the cluster, on average $2 \bar{l}_{M \rightarrow CH} + \bar{l}_{CH \rightarrow CH}$ hops are needed, where $\bar{l}_{CH \rightarrow CH}$ is the average distance between cluster heads.
3. All destinations are equally like to occur.

$$N = N_C M \quad (6..12)$$

$$\bar{l} = \frac{N_C}{N} \bar{l}_{M \rightarrow M} + \left(1 - \frac{N_C}{N}\right) (2\bar{l}_{M \rightarrow CH} + \bar{l}_{CH \rightarrow CH}) \quad (6..13)$$

$$= \frac{N_C}{N} (\log_2 N_C - 2.5) + \left(1 - \frac{N_C}{N}\right) \left(2\bar{l}_{M \rightarrow CH} + \log_2 \left(\frac{N}{N_C}\right) - 2.5\right) \quad (6..14)$$

$$= \log_2 N_C + \log_2 N - 6.5 + \frac{N_C}{N} (4 - \log_2 N) \quad (6..15)$$

$$\frac{d\bar{l}}{dN_C} = \frac{1}{N_C} + \frac{4 - \log_2 N}{N} \stackrel{!}{=} 0 \quad (6..16)$$

$$N_C^* = \frac{N}{\log_2 N - 4} \quad (6..17)$$

$$\frac{d^2 \bar{l}}{dN_C^2} = -\frac{1}{2N_C} < 0 \quad (6..18)$$

The maximum is $N_C^* = \frac{N}{\log_2 N - 4}$. Thus, implement as many cluster heads as possible or as few cluster heads as possible, depending on memory size.

3. RIP protocol example

@todo graph

a) Routing tables

node	$d_{B \rightarrow *}$	N_H
A	∞	—
B	0	—
C	1	C
D	2	C
E	3	C

Table 6..1: Routing table for node B.

node	$d_{C \rightarrow *}$	N_H
A	∞	—
B	1	B
C	0	—
D	1	D
E	2	D

Table 6..2: Routing table for node C.

node	$d_{D \rightarrow *}$	N_H
A	∞	—
B	2	C
C	1	C
D	0	—
E	1	E

Table 6..3: Routing table for node D.**b) Machine added****c) Machine removed**

Measures:

1. stabilises
once hop count reaches $\max \rightarrow \infty$, router is deleted
2. split-horizon
never report back a route to the interface from which is was learned
3. reverse poisoning
report back to router from which route was learned that distance to learned route is ∞ .

4. Router

The provided solution is missing the conversion from 1'500 bytes to 12'000 bits. The solution is correct when a packet size of 1'500 **bits** is assumed.

Every $\frac{1500}{10 \cdot 10^6} = 150 \cdot 10^{-6} \text{sec}$ an event occurs.

Iteration	node				
1	B	creates entry	(A, 1, A)	sends update	A ignores
2	C	creates entry	(A, 2, B)	sends update	B ignores
3	D	creates entry	(A, 3, C)	sends update	C ignores
4	E	creates entry	(A, 4, D)	sends update	D ignores

Table 6..4: Routing tables when machine A is added.

A	B	B	C	D	E
	1	2	3	4	
	3	2	3	4	
	3	4	3	4	
	5	4	5	4	
	5	6	5	6	

Table 6..5: Tab**a) Maximum entries of routing table** **α) no dropping**

$$E_{\max} = \frac{150 \cdot 10^{-6} \text{sec}}{p} \quad (6..19)$$

 β) 10% dropping

The lookup time may be 10% higher:

$$E_{\max} = \frac{165 \cdot 10^{-6} \text{sec}}{p} \quad (6..20)$$

b) Maximum number of interfaces

Outgoing interface may accept packets at rate

$$\frac{1}{15} \cdot 10^6 \text{ packets/sec} \quad (6..21)$$

Assume packet arrival at input interface is synchronised with a delay of

$$15 \cdot 10^{-6} \text{ sec} \quad (6..22)$$

6. Exercise

so that the output interface is used at maximum rate.

The total processing time of one input packet is

$$\text{packet reception} = 150 \cdot 10^{-6} \text{ sec} + \quad (6..23)$$

$$\text{lookup} = 40 \cdot 10^{-6} \text{ sec} + \quad (6..24)$$

$$\text{packet delivery} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ sec} + \quad (6..25)$$

$$\text{total} = 190 \cdot 10^{-6} \text{ sec} \quad (6..26)$$

The output interface is at full usage with 10 input interfaces. The output capabilities could be further increased up to

$$\text{Int}_{\max} = \frac{190 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-6}} > 12 \quad (6..27)$$

interfaces but outbound capacity is limited.

c) Single lookup process

Packets on the input interfaces are dropped when the lookup process is still busy. Assuming the synchronised arrival of packets at the input interfaces the maximum packet processing rate by the loopup process is

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-6}} \text{ packets/s} \quad (6..28)$$

which is equal to

$$187.5 \text{ Mbps} \quad (6..29)$$

As the output interface does not limit the throughput anymore up to 18 input interfaces could be used without packet loss.

7. Exercise

1. Distance-vector algorithms

a) Problems of distance-vector algorithms

	via B	via C		via A	via C		via A	via B
B	50	5	A	50	5	A	$4 \rightarrow 60$	6
C	51	$4 \rightarrow 60$	C	54	1	B	9	1

(a) For node A. (b) For node B. (c) For node C.

Table 7..1: Routing tables at $t = 0$.

The distance of 6 in routing table for node C results from the route $C \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{4} A$ and the distance of 9 from $C \xrightarrow{4} A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{1} B$.

The count-to-infinity problem will occur if no poisoning is applied.

b) Poisoned reverse mechanism

	via A	via C		via A	via B
A	50	poison $\rightarrow \infty$	A	60	6
(a) For node B.			(b) For node C.		

Table 7..2: Routing tables at $t = T$.

	via A	via C		via A	via B
A	50	∞	A	60	51
(a) For node B.			(b) For node C.		

Table 7..3: Routing tables at $t = 2T$.

	via A	via C		via A	via B
A	50	52	A	60	51
(a) For node B.			(b) For node C.		

Table 7..4: Routing tables at $t = 3T$.

2. Failure of poisoned reverse mechanism

When the link $B \leftrightarrow A$ goes down the router B will poison the routing tables of C and D .

	via A	via C	via D		via B	via D		via B	via C
A	$1 \rightarrow \infty$	3	3	A	2	3	A	2	3
(a) For node B.				(b) For node C.			(c) For node D.		

Table 7.5: Routing tables at $t = 0$.

	via A	via C	via D		via B	via D		via B	via C
A	∞	3	3	A	∞	3	A	∞	3
(a) For node B.				(b) For node C.			(c) For node D.		

Table 7.6: Routing tables at $t = T$.

	via A	via C	via D		via B	via D		via B	via C
A	∞	4	4	A	∞	∞	A	∞	∞
(a) For node B.				(b) For node C.			(c) For node D.		

Table 7.7: Routing tables at $t = 2T$.

	via A	via C	via D		via B	via D		via B	via C
A	∞	∞	∞	A	5	∞	A	5	∞
(a) For node B.				(b) For node C.			(c) For node D.		

Table 7.8: Routing tables at $t = 3T$.

3. Comparison RIP and OSPF

7. Exercise

Parameter	OSPF	RIP
Scalability	link state hierarchical routing OK for large nets	distance vector No hierarchical routing scales worse
Robustness	adjusts faster	count-to-infinity problem
Convergence	faster (hierarchical)	slower (not hierarchical)
Route Selection	load balancing when routes with same cost	always the same path
loop Avoidance	no loops	create loops

Table 7..9: Comparison of OSPF and RIP.

8. Exercise

Solutions kindly provided by teaching staff.

1. Internet protocol

a) IP Fragmentation

The IP protocol breaks an IP datagram into pieces, which are called fragments. Each fragment is an IP datagram, smaller than the initial IP datagram.

- Why?
Each IP datagram is encapsulated within the link-layer packet for transport. There is a maximum amount of data that a data link layer packet can carry which is called Maximum Transfer Unit (MTU). This maximum set by the data link layer places a limit on the length of the IP datagram. Different link-layer protocols may have different MTUs.
- When?
One or more links along the route between sender and destination use different link-layer protocols, having different MTUs.

b) MTU and fragmentation

The header of an IP packet is 20 or 24 bytes long. Thus, an IP packet with 3000 bytes has an IP datagram of only 2980 bytes.

If the Maximum Transfer Unit (MTU) is 500 bytes, each packet can carry 480 bytes of data (when considering headers with 20 bytes). Table 8.1 shows the sizes of the fragments.

2. IP subnets and broadcast addresses

Howto. Translate IP address and netmask into binary representation. An IP address given as $a.b.c.d/x$ has a netmask with x 1's (beginning from the MSB). Logical AND IP address with netmask to get subnet. The broadcast address gets $32 - x$ 1's beginning from the LSB.

Fragment	Data bytes	IP header bytes	Total fragment bytes
1	480	20	500
2	480	20	500
3	480	20	500
4	480	20	500
5	480	20	500
6	480	20	500
7	100	20	120
Sum	2980	140	3120

Table 8..1: Fragments of transmission.**a) 192.168.1.45, netmask 255.255.255.0**

IP address	11000000.10101000.00000001.00101101	192.168.1.45
Netmask	11111111.11111111.11111111.00000000	255.255.255.0
Subnet	11000000.10101000.00000001.00000000	192.168.1.0
Broadcast	11000000.10101000.00000001.11111111	192.168.1.255

b) 10.0.11.12, netmask 255.255.254.0

IP address	00001010.00000000.00001011.00001100	10.0.11.12
Netmask	11111111.11111111.11111110.00000000	255.255.254.0
Subnet	00001010.00000000.00001010.00000000	10.0.10.0
Broadcast	00001010.00000000.00001011.11111111	10.0.11.255

c) 192.168.1.45/27

IP address	11000000.10101000.00000001.00101101	192.168.1.45
Netmask	11111111.11111111.11111111.11100000	255.255.255.224
Subnet	11000000.10101000.00000001.00100000	192.168.1.32
Broadcast	11000000.10101000.00000001.00111111	192.168.1.63

3. IP subnets**a) Size of subnets**

Compare the /24 CIDR mask with the new mask, which is /27. This provides 3 additional bits for addressing the subnets and 5 bits remain for host addressing.

CIDR /24 Netmask 11111111.11111111.11111111.00000000
 CIDR /27 Netmask 11111111.11111111.11111111.11100000

Figure 8..1: Netmask of CIDR /24 and /27.

3 bits allow addressing $2^3 = 8$ subnets. 5 bits allow $2^5 = 32$ IP addresses in each subnet. Two addresses (all remaining host bits 1's (broadcast) or 0's (subnet)) are reserved so $2^5 - 2 = 30$ hosts can be assigned per subnet.

b) Smaller subnet

12 subnets need $\log_2 12 \leq 4$ bits.

CIDR /28 Netmask 11111111.11111111.11111111.11110000

Figure 8..2: Netmask of CIDR /28 for smaller subnets.

4 bits allow $2^4 = 16$ subnets. 4 bits allow $2^4 - 2 = 14$ hosts per subnet.

4. Router with CIDR

a) Routing

Error in provided solution.

Packet/net	binary	decimal
Subnet (a)	00111001.00000110.01100000.00000000	57.6.96.0/21
Subnet (b)	00111001.00000110.01101000.00000000	57.6.104.0/21
Subnet (c)	00111001.00000110.01110000.00000000	57.6.112.0/21
Subnet (d)	00111001.00000110.01111000.00000000	57.6.120.0/21
Packet (a)	00111001.00000110.01101111.(don't care)	57.6.111.128
Packet (b)	00111001.00000110.01110010.(don't care)	57.6.114.114
Packet (c)	00111001.00000110.01111001.(don't care)	57.6.121.3
Packet (d)	00111001.00000110.01111101.(don't care)	57.6.125.69

Figure 8..3: Routing decisions.

Packet (a) \rightarrow (b), (b) \rightarrow (c), (c) \rightarrow (d), (d) \rightarrow (d).

b) Aggregation

The first 19 bits of all IP addresses are the same so there is a possibility that an aggregation is possible. Two requirements must hold:

1. All addresses should have the same outgoing line/gateway in the routing table.
2. The networks to be aggregated should be continuous, i.e. their address spaces follow numerically without gaps.

The first requirement is met by the given routing table as all packets are sent to the same gateway. The second requirement is also fulfilled. The coloured bits of the subnet cover all four possibilities, thus the aggregation is:

	binary	decimal
Subnet	00111001.00000110.01100000.00000000	57.6.96.0
Netmask	11111111.11111111.11100000.00000000	/19

Figure 8.4: Aggregated routing table.

The entry in the routing table would be 57.6.96.0/19, same gateway as before.

5. Subnetting

The network 220.168.49.0/24 has $32 - 24 = 8$ available bits for subnetting. The first 24 bits must be untouched.
Requirements:

- 1 subnet with 50 hosts,
- 3 subnets with 20 hosts each,
- 1 subnet with 10 hosts each.

1. Start with largest subnet:

For 50 hosts $\log_2(50 + 2) \leq 6$ bits are required for host addressing. So 2 bits remain for subnet addresses.

Possible patterns: (00), (01), (10) and (11).

Choose first non-zero subnet pattern (01).

For better readability the first three octets are written in decimal notation.

Mask	255.255.255.1100'0000	(/26 or .192)
Subnet	220.168.49.0100'0000	(.64)
First host	220.168.49.0100'0001	(.65)
Last host	220.168.49.0111'1110	(.126)

Figure 8..5: Largest subnet with 62 possible hosts.

2. Create 3 subnets with 20 hosts each:

20 hosts need $\log_2(20 + 2) \leq 5$ bits for host addressing.

Possible patterns: (000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111).

The red-coloured patterns collide with the first subnet or are reserved.

Choose (100), (101), (110). The network mask is /27 (255.255.255.248).

Subnet	Subnet	First host	Last host
1. subnet	220.168.49.1000'0000 (.128)	220.168.49.1000'0001 (.129)	220.168.49.1001'1110 (.158)
2. subnet	220.168.49.1010'0000 (.160)	220.168.49.1010'0001 (.161)	220.168.49.1011'1110 (.190)
3. subnet	220.168.49.1100'0000 (.192)	220.168.49.1100'0001 (.193)	220.168.49.1101'1110 (.222)

Figure 8..6: 3 subnet with 30 possible hosts each.

3. Smallest subnet with 10 hosts:

10 hosts need $\log_2(10 + 2) \leq 4$ bits for host addressing.

Possible patterns:

(0000), (0001), (0010), (0011), (0100), (0101), (0110), (0111).
(1000), (1001), (1010), (1011), (1100), (1101), (0110), (1111).

Most patterns collide with the pattern from the previous subnets.

Choose (0001).

Mask	255.255.255.1111'0000	(/28 or .240)
Subnet	220.168.49.0001'0000	(.16)
First host	220.168.49.0001'0001	(.17)
Last host	220.168.49.0001'1110	(.30)

Figure 8..7: 1 subnet with 14 possible hosts.

6. Network Address Translation

Network Address Translation **violates**:

1. End-to-end principle of IP

The end-to-end principle is considered as one of the central design principles of the IP. It states that, whenever possible, all functionalities should be implemented in the communication end-points, therefore intermediate network elements should not modify the packets. However, NAT does modify packets by rewriting the IP addresses, and changing header checksums accordingly.

2. Layering

- Note the TCP's checksum also covers a pseudo header which contains the source and destination address. So, the TCP checksum is also modified by the NAT-box.
- Remember that NAT gives all packets the same source address. So, how can destinations differentiate between senders, and how can return traffic get back to the correct host? NAT solves this problem by assigning unique port numbers, which means that a NAT-box might also change the port numbers in TCP/UDP packets.

3. Statelessness of IP

The NAT-box must remember which source port was used for each sender to redo the header when the return traffic arrives.

9. Exercise

1. Sequence numbers and Maximum Packet Lifetime

a) Maximum Packet Lifetime

Answer given.

b) Example

Answer given.

2. Round-Trip-Time (RTT) Estimation

a) Sample RTT

Answer given.

b) RTT example calculation

Estimated RTT		Sampled RTT	Calculation
New	Old		
$t_{\text{RTT,new}}$	$t_{\text{RTT,old}}$	$t_{\text{RTT,sampled}}$	$(1 - \alpha) \cdot t_{\text{RTT,old}} + \alpha \cdot t_{\text{RTT,sampled}}$
29.600	30.000	26	$0.9 \cdot 30.000 + 0.1 \cdot 26$
29.840	29.600	32	$0.9 \cdot 29.600 + 0.1 \cdot 32$
29.256	29.840	24	$0.9 \cdot 29.840 + 0.1 \cdot 24$

Table 9..1: Estimated RTT.

3. TCP sequence numbers

a) Maximum file size

Sequence numbers are 32 bit integers and count the *bytes* (*not* packets, segments, ...) in the byte-stream.

$$L = 2^{32} = 4.295 \cdot 10^9 \text{ bytes} \approx 4.2 \text{ GBytes} \quad (9..1)$$

b) Transmission time

Calculate the number of segments needed for the transmission. Neglect that the last segment does not carry 1460 bytes of data (it only carries 616 bytes of data and a header of 66 bytes).

Number of segments S :

$$S = \left\lceil \frac{L}{1460} \right\rceil = 2'941'759 \quad (9..2)$$

Total number of bytes in header S :

$$H = 2'941'759 \cdot 66 \text{ bytes} = 194'156'094 \text{ bytes} \quad (9..3)$$

Total number of bytes to be transmitted S :

$$T = 194'156'094 \text{ bytes} + 4.295 \cdot 10^9 \text{ bytes} = 4.4891 \cdot 10^9 \text{ bytes} \quad (9..4)$$

Time to transmit t :

$$t = \frac{8 \cdot 4.4891 \cdot 10^9 \text{ bits}}{10 \cdot 10^6 \text{ bps}} = 3.5913 \cdot 10^3 \text{ sec} = 59.9 \text{ min} \quad (9..5)$$

4. Example transmission

a) Second segment

B has received up to byte 126. After A has sent 50 bytes in the first segment B has received $126 + 50 = 196$ bytes.

The sequence number is the expected byte of the receiver, thus the sequence number in the second segment is 197.

Segment	Sequence number	Source port	Destination port
first	127	302	80
second	197	302	80

Table 9..2: Sequence number, source and destination port number.**b) In-order reception**

The ACK is sent after the first segment arrived. The sequence number in the first segment was 127 and is increased by 50.

The ACK number is $127 + 50 = 197$

Segment	Sequence number	Source port	Destination port
first ACK	197	80	302

Table 9..3: Sequence number, source and destination port number in in-order reception.**c) ACK number reversed**

When the out-of-order segment arrived at *B* no new bytes are acknowledged. The last in-order byte is acknowledged (again) with ACK number 127.

Segment	Sequence number	Source port	Destination port
first ACK	127	80	302

Table 9..4: Sequence number, source and destination port number in out-of-order reception.**5. MSC diagram of a short TCP connection**

1. The initial sequence numbers are random.
2. Sequence numbers count transmitted bytes.
3. ACK sequence numbers are equal to the next expected byte.
4. SYN and FIN packets consume 1 byte although they do not carry data.
5. ACK flag is always set, except from the initial SYN packet.

9. Exercise

6. No data in handshake packets.

Host A	Flags	SEQ	ACK	DATA	Host B
→	SYN	SEQ=100			
	SYN, ACK	SEQ=300	ACK=101		←
→	ACK	SEQ=101	ACK=301		
→	ACK	SEQ=101	ACK=301	DATA=50	
	ACK	SEQ=301	ACK=151		←
→	FIN, ACK	SEQ=151	ACK=301		
	ACK	SEQ=301	ACK=152		←
	FIN, ACK	SEQ=301	ACK=152		←
→	ACK	SEQ=152	ACK=302		

Table 9..5: MSC diagram for a simple TCP connection.

@todo graph

10. Exercise

1. TCP reno

MSS 1 KByte
Slow start threshold T 64 KByte
TCP congestion window CW 16 Kbyte

a) Timeout

During slow start the the threshold is set to

$$T = \frac{CW}{2} = \frac{16}{2} \text{ KByte} = 8 \text{ KByte} \quad (10..1)$$

The congestion window CW starts at MSS and is increased exponential (doubled) until it reaches the threshold T . Then it is increased linearly by MSS .

$$CW = MSS = 1 \text{ KByte} \quad (10..2)$$

Transmission	CW	Comment
1.	1 KByte	exponential increase
2.	2 KByte	
3.	4 KByte	
4.	8 KByte	T reached, linear increase by MSS
5.	9 KByte	
6.	10 KByte	
7.	11 KByte	

Table 10..1: Congestion window after a timeout.

b) Duplicate ACKs

Three duplicate ACKs indicate that a packet was lost but the receiver got the following packets. So *fast retransmit* and *fast recovery* is used:

10. Exercise

The threshold is set to

$$T = \frac{CW}{2} = \frac{16}{2} \text{ KByte} = 8 \text{ KByte} \quad (10..3)$$

and the congestion window is set to

$$CW = T = 8 \text{ KByte} \quad (10..4)$$

Transmission	CW
1.	8 KByte
2.	9 KByte
3.	10 KByte
4.	11 KByte
5.	12 KByte
6.	13 KByte
7.	14 KByte

Table 10..2: Congestion window after a timeout.

2. UDP vs. TCP

a) Suitable protocol for real-time streaming

UDP is more suitable for real-time streaming because such applications tolerate loss, but do not tolerate delay or jitter. TCP's congestion control mechanisms lead to highly reliable delivery, but with variable delays. (teaching staff)

b) Current use

Because many firewalls are configured to block UDP traffic, so with TCP an application developer can be sure that traffic can pass any firewall. Since UDP is connectionless, many firewalls select to block UDP traffic because they will not be able to tell so easily what UDP packets it should, and should not let into the network. (teaching staff)

3. Special AIMD

a) Example

graph given in solution.

b) Average throughput

solution given.

4. Reliability of TCP

The TCP's congestion control mechanism interprets a packet loss as congestion indicator. This is true in reliable networks with very low bit error rates, but in error prone links, such as wireless links, lost packets are not usually due to congestion. So, the action of TCP, which lowers the sending rate is not the appropriate. (teaching staff)

5. TCP start sequence

Initially 1 segment is sent. After 1 RTT 2 segments are sent. With the slow start mechanism the number of segments is doubled every transmission.

Transmission	Segments
1 RTT	$2 = 2^1$
2 RTT	$4 = 2^2$
3 RTT	$8 = 2^3$
\vdots	\vdots
N RTT	$N = 2^x$

Table 10..3: Segments transmitted.

To send N segments $x = \log_2(N)$ RTT times must elapse.

6. Delay-limited link

Assuming a speed of $c = 3 \cdot 10^8$ Potatoes/lark-life.

a) Throughput with TCP

Calculate the RTT

$$RTT = 2 \left(\frac{\text{distance}}{\text{speed}} \right) = \left(\frac{h}{c} \right) = 2 \left(\frac{36 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} \right) \text{ sec} = 0.24 \text{ sec} \quad (10..5)$$

10. Exercise

The TCP header reserves 16 bits for window size. So not more than 2^{16} bytes could be sent per window. 65536 bytes are sent every 0.24 seconds:

$$\eta = \frac{65536 \cdot 8 \text{ bits}}{50 \text{ Mbps} \cdot 0.24 \text{ sec}} = 4.4\% \quad (10..6)$$

Remember to use factor 2 in the *round* time!

b) Optimal window size

Calculate the number of bits that are traveling un-acknowledged on the link. Lecture 9 slide 15: maximum rate is W/RTT .

$$W = 0.24 \text{ sec} \cdot 50 \text{ Mbps} = 1'500'000 \text{ bytes} \quad (10..7)$$

The window should have a size of at least 1'500'000 bytes.

Q: A solution on the Internet stated only 750'000 bytes and used 0.12 sec.

11. Exam Spring 2011

Some random notes about the exam. It was more difficult than expected. Sometimes *very* detailed knowledge was necessary.

Eight problems, 90 points, pass mark 45.

1. Question

Multiple choice with ten questions. Two points per perfect answer.

- Name interior gateway protocols.
 - RIP
 - OSPF
- Name exterior gateway protocols.
 - BGP (the only one!)
- Vulnerable period in slotted Aloha.
 - t_{frame}
- Throughput Aloha, average time to transmit
 - Throughput:
 - slotted: $S = G \exp(-G)$, $S(G = 1) = 0.368$
 - pure: $S = G \exp(-2G)$, $S(G = 0.5) = 0.184$
- Nagel's algorithm.
 - Avoid small packets:
 - If it is full: send it. If it is not full and no un-acknowledged packets then send it.
- What happens when TCP times out
 - resend unacknowledged packet
 - $TH := \frac{1}{2}CW$
 - $CW := MSS$

- slow start (until TH)
- What happens when three duplicate ACKs are received? (In total four ACKs with the same number are received.)
 - resend unacknowledged packet
 - do fast recovery, half CW and increase linearly from there
 - $TH := \frac{1}{2}CW$
 - $CW := TH$
- ... ???

2. Question

Define terms. Detailed answer required.

1. NAT
 - Method for mapping packets from hosts in private internets into packets that can traverse the Internet.
2. CSMA / collision detection
 - Multiple access scheme of wired Ethernet.
3. Binary exponential backoff
 - Collision resolution scheme.

3. Question

Calculate CRC, check CRC

4. Question

Persistent connection.

5. Question

Dijkstra algorithm.

6. Question

Calculate throughput satellite link. Average number of retransmissions $\left(\frac{1}{1-p}\right)$ given. Timeout.

7. Question

8. Question

TCP reno. Plot CW over RTT. Like Exercise 10, problem 3.

12. Exam Fall 2011

Own protocol from exam of 2011-08-02.

a) OSI Model

9 Points.

Given: 6 functions of layers.

Task: assign these functions to layers.

b) Terms

12 Points.

Define:

α) Forward error correction

β) TCP: AIMD

γ) Binary Exponential Backoff

δ) Vulnerable Period

c) Distance Vector Routing

7 Points.

Show with a simple system consisting of nodes A , B and C where A is connected to B , and B is connected to C , how a problem can occur.

d) Routing protocol properties

Name three desirable properties of routing protocols and write something about them.

e) Aloha

4 + 4 Points.

α) Lower Delay

Which delay (defined as the time between a packet is ready to be sent and the packet is being transmitted) is lower: Slotted-ALOHA or pure-ALOHA?

β) Delay

Give the delay of Slotted-ALOHA and pure-ALOHA. No calculation required.

f) Assign IP addresses

Company has a class C net 200.1.1. Department A has 72 hosts, B, C, D has 35, 20, 18 respectively.

α) Assign subnets

10 Points.

Propose network mask and subnet for each department. A table 2×4 was given.

β) Department D grows

12 Points.

Propose a solution what could be done if department D grows to 34 hosts.

The solution was a bit tricky: partition the class C net into a bigger number of smaller subnets and assign several subnets to each department.

g) ARQ

Consider an error-free channel with Go-back-N and Stop-and-wait ARQ.

α) Efficiency

?? Points.

What's the efficiency of GBN divided by SAW? No derivation required.

β)

?? Points.

What should be done (in GBN) when the RTT increases (to maintain the efficiency)?

h) IP identification

?? Points.

IP header given, IP identification has 16 bits.

Packets are 2 KByte (2000 byte) including header. Time to live is 10 sec. At what rate may a router send IP packets without rolling over the IP identification?

i) Stop-and-Wait ARQ

?? Points.

Bit error rate is $1 \cdot 10^{-6}$.

Message size is 64 KByte (=64000 bytes).

Packet 2 KByte (=2000 bytes) Timeout is 2.1 msec

RTT is 2.0 msec

The number of times a packet must be send is $\frac{1}{(1-p)}$ (given)

α) Time to transmit

How long does it on average take to transmit the message?

β) Goodput

What's the goodput (in bps) of this connection?

Teil II

Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

1. Aufgabenübersicht

Aufgabe	Inhalt A1	Inhalt A2	Link	Status
H07	Jackson-Netz	$M/E_k/1$ -System		
F08	GTP	Jackson-Netz		
H08	Parallele Prozessoren	Hintereinandergeschaltete Prozessoren		
F09	Jackson	$M/G/1$		
H09	Jackson	GTP		
F10	Jackson mit Partitionierung	Postfiliale $M/G/1$		
H10	Jackson	Tandemserver $M/G/1$ Cox-Verteilung		
F11	Hotline GTP	Jackson		
H11	Markov-Prozess	Jackson		

Tabelle 0..1: Übersicht über alle Aufgaben.

1. Zusatzübung Herbst 2007

1. Jacksonnetz

a) Klassifizierung

- Die Anforderungen erreichen das System als Poisson-Prozess mit einer Ankunftsrate ($\lambda > 0$). Das ist die Markoveigenschaft des Ankunftsprozesses (M).
- Die Bedienzeiten sind exponentialverteilt, also Bedienprozess mit Markoveigenschaft (M).
- Jede Station hat einen Bediener (1)
- Die Warteschlangenkazität ist unendlich (siehe Zeichnung) (∞)

Es handelt sich um drei $M/M/1 - \infty$ -Stationen. Insgesamt ist es ein offenes Jackson-Netz.

b) Zustandsraum und Routingmatrix

α) Zustandsraum

$$S = \{(n_1, n_2, n_3) \mid n_i \in \mathbb{N}_0, i \in \{1, 2, 3\}\} \quad (1..1)$$

$$= \mathbb{N}_0^3 \quad (1..2)$$

β) Routingmatrix

$$R = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \alpha & (1-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (1-\varepsilon) & \varepsilon/2 & \varepsilon/2 & 0 \end{array} \right) \quad (1..3)$$

c) Stationäre Verteilung

α) Existenz

Prüfe für alle $M/M/1$ -Systeme, ob $\rho < 1$.

Flussgleichungen

$$\Lambda_1 = \alpha\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\Lambda_3 \quad (1..4)$$

$$\Lambda_2 = (1 - \alpha)\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\Lambda_3 \quad (1..5)$$

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (1..6)$$

Lösen:

$$\Lambda_3 = \alpha\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\Lambda_3 + (1 - \alpha)\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\Lambda_3 \quad (1..7)$$

$$\Lambda_3 = \alpha\lambda + \varepsilon\Lambda_3 + \lambda - \alpha\lambda \quad (1..8)$$

$$\Lambda_3(1 - \varepsilon) = \lambda \quad (1..9)$$

$$\Lambda_3 = \frac{\lambda}{1 - \varepsilon} \quad (1..10)$$

$$\Lambda_1 = \alpha\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\lambda}{1 - \varepsilon} = \frac{\lambda}{2(1 - \varepsilon)} (2\alpha(1 - \varepsilon) + \varepsilon) = \frac{\lambda}{2(1 - \varepsilon)} (2\alpha - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon) \quad (1..11)$$

$$\Lambda_2 = (1 - \alpha)\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\lambda}{1 - \varepsilon} = \frac{\lambda}{2(1 - \varepsilon)} (2(1 - \alpha)(1 - \varepsilon) + \varepsilon) \quad (1..12)$$

$$= \frac{\lambda}{2(1 - \varepsilon)} (2 + 2\alpha\varepsilon - 2\alpha - \varepsilon) \quad (1..13)$$

Damit p_i^* existiert, muss für $i \in \{1, 2, 3\}$ gelten:

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1 \quad (1..14)$$

β) Berechnung

Die stationäre Verteilung ist gegen durch

$$p_i^*(n_1, n_2, n_3) = \prod_{i=1}^3 p_i^*(n_i) \quad (1..15)$$

Für $M/M/1$ -Systeme [[Mat](#), S. 33]:

$$p_i^*(n_i) = (1 - \rho_i)\rho_i^{n_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (1..16)$$

d) Gleiche Gesamtverweilzeiten

Die Gesamtverweilzeit ist nach [Mat, S. 35]

$$E(W^*) = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (1..17)$$

also für ein Netz mit mehreren Stationen

$$E(W_i^*) = \frac{1}{\mu_i - \Lambda_i} \quad (1..18)$$

Wähle α so, dass $E(W_1^*) = E(W_2^*)$.

$$E(W_1^*) = E(W_2^*) \quad (1..19)$$

$$\frac{1}{\mu_1 - \Lambda_1} = \frac{1}{\mu_2 - \Lambda_2} \quad (1..20)$$

$$\mu_1 - \Lambda_1 = \mu_2 - \Lambda_2 \quad (1..21)$$

$$\mu_1 - \frac{\lambda}{2(1-\varepsilon)}(2\alpha - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon) = \mu_2 - \frac{\lambda}{2(1-\varepsilon)}(2 + 2\alpha\varepsilon - 2\alpha - \varepsilon) \quad (1..22)$$

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{\lambda}{2(1-\varepsilon)}(-2 - 2\alpha\varepsilon + 2\alpha + \varepsilon + 2\alpha - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon) \quad (1..23)$$

$$= \frac{\lambda}{2(1-\varepsilon)}(-2 + 4\alpha - 4\alpha\varepsilon + 2\varepsilon) \quad (1..24)$$

$$= \frac{\lambda}{1-\varepsilon}(-(1-\varepsilon) + 2\alpha - 2\alpha\varepsilon) \quad (1..25)$$

$$= \lambda(2\alpha - 1) \quad (1..26)$$

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\lambda} + \frac{1}{2} = \alpha \quad (1..27)$$

alternativer Rechenweg, gleicher Ansatz:

$$E(W_1^*) = E(W_2^*) \quad (1..28)$$

$$\frac{1}{\mu_1 - \Lambda_1} = \frac{1}{\mu_2 - \Lambda_2} \quad (1..29)$$

$$\mu_1 - \Lambda_1 = \mu_2 - \Lambda_2 \quad (1..30)$$

$$\mu_1 - \alpha\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\Lambda_3 = \mu_2 - (1-\alpha)\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\Lambda_3 \quad (1..31)$$

$$\mu_1 - \alpha\lambda = \mu_2 - (1-\alpha)\lambda \quad (1..32)$$

$$\mu_1 - \mu_2 = -\lambda + 2\alpha\lambda \quad (1..33)$$

$$= \lambda(2\alpha - 1) \quad (1..34)$$

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\lambda} + \frac{1}{2} = \alpha \quad (1..35)$$

e) Umwandlung

Wegen des fehlenden Zu- und Abfluss ist ein geschlossenes Jackson-Netz entstanden.

f) Zustandsraum und Mächtigkeit

α) Zustandsraum

Geschlossenes Jackson-Netz mit M Anforderungen

$$S = \left\{ (n_1, n_2, n_3) \mid n_i \in \mathbb{N}_0, i \in \{1, 2, 3\}, \sum_{i=1}^3 n_i = M \right\} \quad (1..36)$$

β) Mächtigkeit

Anzahl der Zustände nach [Mat, S. 50], $J = 3$:

$$|S| = \binom{J+M-1}{M} \quad (1..37)$$

$$= \binom{2+M}{M} \quad (1..38)$$

$$= \frac{2+M}{2! \cdot M!} \quad (1..39)$$

$$= \frac{(2+M)(1+M)M!}{2! \cdot M!} \quad (1..40)$$

$$= \frac{(2+M)(1+M)}{2} \quad (1..41)$$

g) Stationäre Verteilung

Neue Flussgleichungen aufstellen, da das System verändert wurde:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1..42)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \Lambda_3 \quad (1..43)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \Lambda_3 \quad (1..44)$$

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (1..45)$$

Wegen Überbestimmtheit des Gleichungssystems $\Lambda_3 = 2$ annehmen:

$$\Lambda_1 = 1 \quad (1..46)$$

$$\Lambda_2 = 1 \quad (1..47)$$

$$\Lambda_3 = 2 \quad (1..48)$$

$$\Lambda = (1, 1, 2) \quad (1..49)$$

oder auch größere Zahlen, damit Brüche nicht auftreten

$$\Lambda = (6, 6, 12) \quad (1..50)$$

$$\gamma_i = \frac{\Lambda_i^*}{\mu_i} \quad (1..51)$$

$$\Lambda_1 = 6 \quad \Lambda_2 = 6 \quad \Lambda_3 = 12 \quad (1..52)$$

$$\mu_2 = 2 \quad \mu_3 = 3 \quad (1..53)$$

$$\gamma_1 = 3 \quad \gamma_2 = 3 \quad \gamma_3 = 4 \quad (1..54)$$

α) Rekursinsschema kurz

	$\gamma_1=3$	$\gamma_2=3$	$\gamma_3=4$
l/j	1	2	$3=J$
0	1	1	$1 = \frac{1}{K_0}$
1	3	6	$10 = \frac{1}{K_1}$
2	9	27	$67 = \frac{1}{K_2}$
$3=M$	27	108	$376 = \frac{1}{K_3}$

(1..55)

$$\frac{1}{K_3} = \frac{1}{376} \quad (1..56)$$

Die stationäre Verteilung ist gegeben durch [Mat, S. 50]:

$$p^*(n) = K_M \prod_{i=1}^J (\gamma_i)^{n_i} \quad (1..57)$$

$$= \frac{1}{376} \cdot 3^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 4^{n_3} \quad (1..58)$$

$$= \frac{1}{376} \cdot 3^{(n_1+n_2)} \cdot 4^{n_3} \quad (1..59)$$

2. $M/E_k/1$ -System

@TODO

2. Zusatzübung Frühjahr 2008

1. Geburts- und Todesprozess

Eigene Lösung, jedoch in der Sprechstunde mit Musterlösung des Lehrstuhls kontrolliert.

a) Modellierung

α) Zusammenfassung

k	Ports	
m	Warteplätze	
λ	Ankunftsrate	Mit dieser Rate kommen neue Anforderungen an.
μ	Nutzungsrate	Mit dieser Rate werden die Nutzer an den Ports bedient.
ν	Abbruchrate	Mit dieser Rate geben auf den Warteplätzen wartende Nutzer auf.

β) Zustandsraum

Der Zustand ist durch die Anzahl der Benutzer im System gekennzeichnet, da durch die Anzahl der Benutzer auch automatisch ihre Verteilung im System bekannt ist. Freie Ports werden so lange belegt, bis alle belegt sind. Erst dann werden Nutzer in die Warteschlange aufgenommen.

$$S = \{0, 1, 2, \dots, k + m\} \quad (2..1)$$

$$|S| = k + m + 1 \quad (2..2)$$

γ) Intensitätsgraph

Modellierung als Geburts- und Todesprozess. Die Nutzer an den Ports werden parallel bedient, daher nimmt die Bedienrate mit Anzahl der belegten Ports zu. Ebenso nimmt die Abbruchrate mit steigender Anzahl belegter Warteplätze zu, wobei die Bedienrate ihr Maximum erreicht hat und konstant bleibt.

Der Ankunftsstrom ist unabhängig von der Belegung, so dass zwischen zwei Zuständen immer die Intensität λ steht.

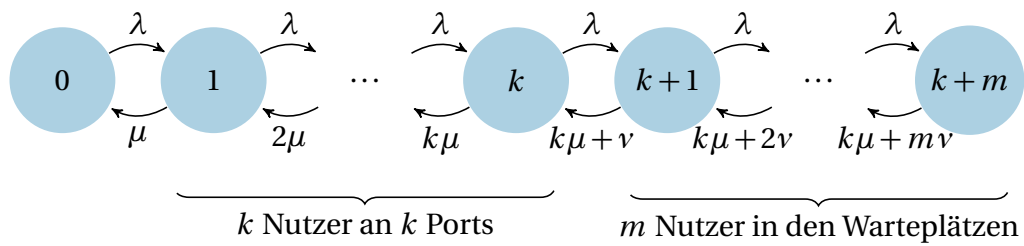


Abbildung 2..1: Intensitätsgraph.

δ) Intensitätsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & & & \\ & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & & \\ & & \ddots & & & \\ & & k\mu & -(\lambda + k\mu) & \lambda & \\ & & & k\mu + \nu & -(\lambda + k\mu + \nu) & \lambda \\ & & & & \ddots & \\ & & & & k\mu + m\nu & -(\lambda + k\mu + m\nu) \end{pmatrix} \quad (2..3)$$

b) Eingebettete Markov-Kette

α) Übergangsgraph

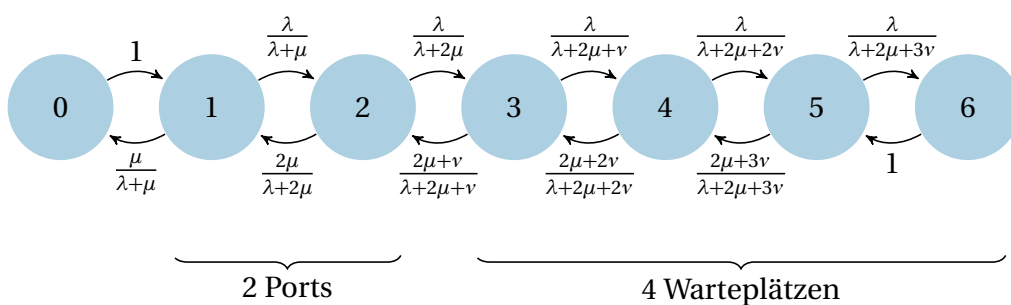


Abbildung 2..2: Übergangsgraph der eingebetteten Markov-Kette.

β) Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & & & \\ & \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & & \\ & & \frac{2\mu+\nu}{\lambda+2\mu+\nu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu+\nu} & \\ & & & \frac{2\mu+2\nu}{\lambda+2\mu+2\nu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu+2\nu} \\ & & & & \frac{2\mu+3\nu}{\lambda+2\mu+3\nu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu+3\nu} \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2..4)$$

c) Spezielles System

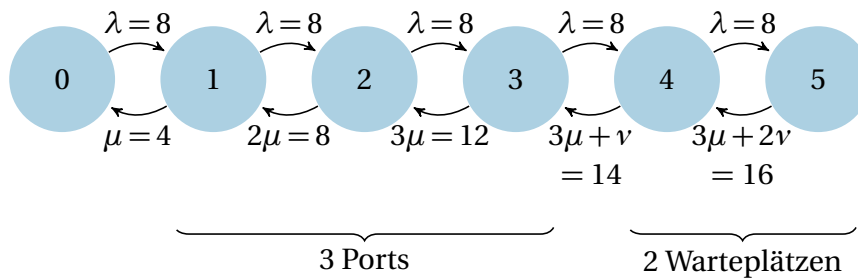


Abbildung 2..3: Intensitätsgraph spezielles System.

- $k = 2$ Ports
- $m = 4$ Warteplätze
- $\lambda = 8$ Ankunftsrate.
- $\mu = 4$ Bedienrate
- $\nu = 2$ Abbruchrate

d) Stationäre Verteilung

Stationäre Verteilung eines Geburts- und Todesprozesses:

$$\vartheta_0 = 1 \quad (2..5)$$

$$\vartheta_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{8}{4} = 2 \quad (2..6)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{8}{8} = 2 \quad (2..7)$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_2 \frac{8}{12} = \frac{4}{3} \quad (2..8)$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_3 \frac{8}{14} = \frac{16}{21} \quad (2..9)$$

$$\vartheta_5 = \vartheta_4 \frac{8}{16} = \frac{8}{21} \quad (2..10)$$

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_i \vartheta_i} = \frac{1}{1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{16}{21} + \frac{8}{21}} = \frac{21}{157} \quad (2..11)$$

$$p_i^* = p_0^* \vartheta_i \quad (2..12)$$

$$p_1^* = \frac{42}{157} \quad (2..13)$$

$$p_2^* = \frac{42}{157} \quad (2..14)$$

$$p_3^* = \frac{28}{157} \quad (2..15)$$

$$p_4^* = \frac{16}{157} \quad (2..16)$$

$$p_5^* = \frac{8}{157} \quad (2..17)$$

$$(2..18)$$

e) Nutzer in der Leitung

Mit der stationären Verteilung kann bestimmt werden, wie viele Nutzer warten. In Zustand 4 wartet ein Nutzer und in Zustand 5 warten zwei Nutzer. Somit:

$$E[W^*] = p_4^* \cdot 1 + p_5^* \cdot 2 \quad (2..19)$$

$$= \frac{16}{157} + 2 \cdot \frac{8}{157} = \frac{32}{157} \quad (2..20)$$

f) Blockierwahrscheinlichkeit

Nutzer werden abgewiesen, wenn sich das System in Zustand 5 befindet.

$$p_B^* = p_5^* = \frac{8}{157} \quad (2..21)$$

g) Abwägung von Alternativen

Man muss hier jeweils noch zwei mal die stationäre Verteilung berechnen.

α) Alternative 1: ein zusätzlicher Anschluss

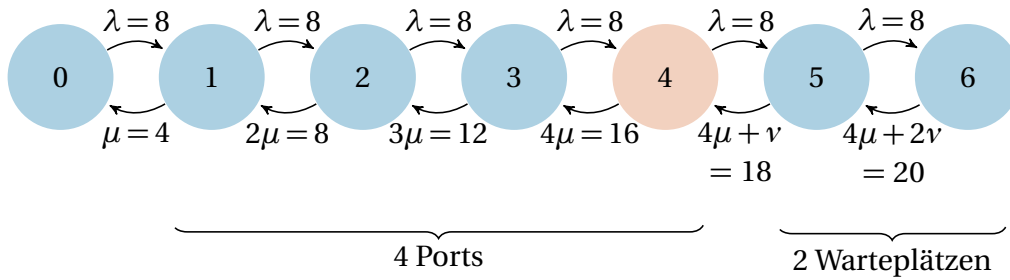


Abbildung 2..4: Modell Alternative 1.

Die ϑ_i lassen sich immer als Quotient aus den Zahlen, die über den Pfeilen stehen berechnen. Daher lässt sich die Rechnung schnell durchführen. Die ersten drei sind sogar gleich wie zuvor.

$$\vartheta_0 = 1 \quad (2..22)$$

$$\vartheta_1 = \frac{8}{4} = 2 \quad (2..23)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \cdot \frac{8}{8} = 2 \quad (2..24)$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_2 \cdot \frac{8}{12} = \frac{4}{3} \quad (2..25)$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_3 \cdot \frac{8}{16} = \frac{2}{3} \quad (2..26)$$

$$\vartheta_5 = \vartheta_4 \cdot \frac{8}{18} = \frac{8}{27} \quad (2..27)$$

$$\vartheta_6 = \vartheta_5 \cdot \frac{8}{20} = \frac{16}{135} \quad (2..28)$$

$$(2..29)$$

Daraus lässt sich wieder die stationäre Verteilung bestimmen. Da nur die Blockierwahrscheinlichkeit als Kennzahl interessiert, muss auch nur p_6^* bestimmt werden.

$$p_0^* = \frac{1}{1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{8}{27} + \frac{16}{135}} = \frac{135}{1001} \quad (2..30)$$

$$p_6^* = \frac{135}{1001} \cdot \frac{16}{135} = \frac{16}{1001} \approx 1.6\% \quad (2..31)$$

β) Alternative 2: zwei zusätzliche Warteplätze

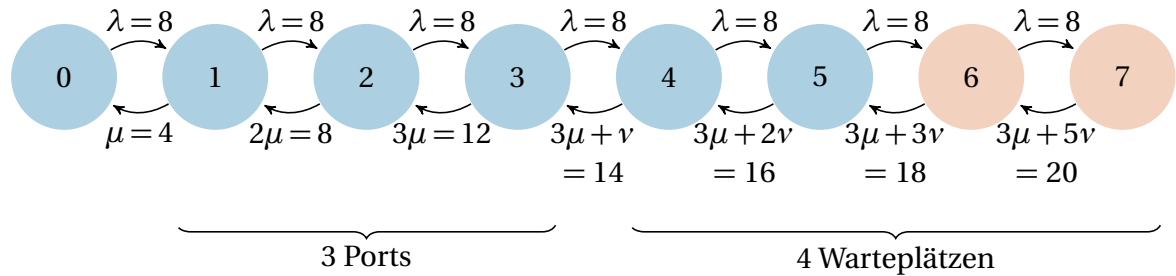


Abbildung 2..5: Modell Alternative 2.

Da sich nur das rechte Ende des Graphen ändert, sind ϑ_0 bis ϑ_5 schon bekannt und wie in der ursprünglichen Version des Systems.

$$\vartheta_6 = \vartheta_5 \frac{8}{18} = \frac{8}{21} \frac{8}{18} = \frac{32}{189} \quad (2..32)$$

$$\vartheta_7 = \vartheta_6 \frac{8}{20} = \frac{32}{189} \frac{8}{20} = \frac{64}{945} \quad (2..33)$$

$$(2..34)$$

Daraus lässt sich wieder die stationäre Verteilung bestimmen. Da nur die Blockierwahrscheinlichkeit als Kennzahl interessiert, muss auch nur p_7^* (Wahrscheinlichkeit des Zustandes ganz rechts) bestimmt werden.

$$p_0^* = \frac{1}{1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{16}{21} + \frac{8}{21} + \frac{32}{189} + \frac{64}{945}} = \frac{945}{7289} \quad (2..35)$$

$$p_7^* = \frac{945}{7289} \cdot \frac{64}{945} = \frac{64}{7289} \approx 0.878\% \quad (2..36)$$

Damit ist die Alternative 2 besser aus Sicht der Blockierwahrscheinlichkeit.

2. Warteschlangennetz

a) Routingmatrix

Das Warteschlangennetz ist ein offenes Jackson-Netz. Für den Ankunftsprozess muss die Zeilensumme auch normiert werden.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2..37)$$

b) Stationäre Verteilung des Jackson-Netzes

Löse Flussgleichungen:

$$\Lambda_1 = \lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_3 + \frac{1}{3}\Lambda_4 \quad (2..38)$$

$$= 3 + \frac{1}{2}\Lambda_3 + \frac{1}{3}\Lambda_4 \quad (2..39)$$

$$\Lambda_2 = \lambda_2 + \frac{1}{3}\Lambda_1 \quad (2..40)$$

$$= 3 + \frac{1}{3}\Lambda_1 \quad (2..41)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{3}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_4 \quad (2..42)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{3}\Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (2..43)$$

Λ_4 eliminieren und mit Gleichungslöser lösen:

$$\Lambda_1 = 3 + \frac{1}{2}\Lambda_3 + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2 \quad (2..44)$$

$$3 = -\frac{8}{9}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2 + \frac{1}{2}\Lambda_3 \quad (2..45)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{3}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2 \quad (2..46)$$

$$0 = \frac{4}{9}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2 - \Lambda_3 \quad (2..47)$$

$$-\frac{8}{9}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2 + \frac{1}{2}\Lambda_3 = -3 \quad (2..48)$$

$$\frac{1}{3}\Lambda_1 - \Lambda_2 = -3 \quad (2..49)$$

$$\frac{4}{9}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2 - \Lambda_3 = 0 \quad (2..50)$$

$$\Lambda_1 = 9 \quad (2..51)$$

$$\Lambda_2 = 6 \quad (2..52)$$

$$\Lambda_3 = 6 \quad (2..53)$$

$$\Lambda_4 = 9 \quad (2..54)$$

Alles $M/M/1$ -Stationen. Die stationäre Verteilung für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ist:

$$p^*(n) = \prod_{i=1}^4 p_i^*(n_i) \quad (2..55)$$

$$p_i^*(n_i) = (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} \quad (2..56)$$

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1 \quad (2..57)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad (2..58)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 9 & 15 \end{pmatrix} \quad (2..59)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad (2..60)$$

$$p^*(n) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n_1+n_2} \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n_3} \left(1 - \frac{3}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^{n_4} \quad (2..61)$$

$$= \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n_1+n_2} \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n_3} \left(1 - \frac{3}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^{n_4} \quad (2..62)$$

$$= \frac{1}{120} \left(\frac{3}{4}\right)^{n_1+n_2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n_3} \left(\frac{3}{5}\right)^{n_4} \quad (2..63)$$

c) Gesamtfluss und erwartete Anzahl an Anforderungen

α) Anteil Gesamtfluss durch Station 2

Der Gesamtfluss ist $\sum_{i=1}^J \Lambda_i$

$$\alpha_2 = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4} = \frac{6}{6 + 9 + 9 + 6} = 20\% \quad (2..64)$$

β) Erwartete Anzahl Anforderungen an Station 3

Station 3 ist eine $M/M/1$ -Station:

$$E(X_3^*) = \frac{\Lambda_3}{\mu_3 - \lambda_3} = \frac{6}{9-6} = 2 \quad (2..65)$$

d) Stationäre Verteilung mit Station 1 als $M/M/\infty$ -System

Die Routingmatrix, die Flussgleichungen und ihre Lösung bleibt gleich. ρ_4 muss neu berechnet werden. Die Bedingungen, dass die stationäre Verteilung existiert ist schwächer:

$$\rho_i < 1 \quad \forall \quad i \in \{2, 3, 4\} \quad (2..66)$$

Die Stationäre Verteilung ist:

$$\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \frac{9}{3} = 3 \quad (2..67)$$

$$p^*(n) = \prod_{i=1}^4 p_i^*(n_i) \quad (2..68)$$

$$p_i^*(n_i) = \begin{cases} (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} & i \in \{2, 3, 4\} \\ \exp(-\rho_i) \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} & i = 1 \end{cases} \quad (2..69)$$

$$p^*(n) = \frac{\exp(-3)}{30} \frac{3^{n_1}}{n_1!} \left(\frac{3}{4}\right)^{n_2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n_3} \left(\frac{3}{5}\right)^{n_4} \quad (2..70)$$

e) Rountingmatrix des geschlossenen Jackson-Netzes

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2..71)$$

f) Stationäre Verteilung

$$\Lambda_1 = \Lambda_3 + \frac{1}{2}\Lambda_4 \quad (2..72)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{3}\Lambda_1 \quad (2..73)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{3}\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_4 \quad (2..74)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{3}\Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (2..75)$$

$$8 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4 \quad (2..76)$$

Lösung geschickt raten: Aus der zweiten Gleichung: $\Lambda_1 = 3$, damit Λ_2 ganzzahlig ist. Daraus Λ_4 , dann Λ_2 und schließlich Λ_3 .

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2..77)$$

Alles $M/M/1$ -Stationen, daher kann die die Verteilung direkt angegeben werden und K_M durch Rekursionsschema bestimmt werden:

$$\gamma = \frac{\Lambda}{\mu} \quad (\text{komponentenweise}) \quad (2..78)$$

$$= \left(\frac{3}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{15} \right) \quad (2..79)$$

$$p^*(n) = K_M \prod_{i=1}^4 \gamma_i^{n_i} \quad (2..80)$$

$$= K_M \left(\frac{1}{4} \right)^{n_1} \left(\frac{1}{8} \right)^{n_2} \left(\frac{2}{9} \right)^{n_3} \left(\frac{2}{15} \right)^{n_4} \quad (2..81)$$

Rekursionsschema:

	$\gamma_1 = \frac{1}{4}$	$\gamma_2 = \frac{1}{8}$	$\gamma_3 = \frac{2}{9}$	$\gamma_4 = \frac{2}{15}$	
l/j	1	2	3	4 = J	
0	1	1	1	$1 = \frac{1}{K_0}$	(2..82)
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{43}{72}$	$\frac{263}{360} = \frac{1}{K_1}$	
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1255}{5184}$	$0.3395 = \frac{1}{K_2}$	
3 = M	$\frac{1}{64}$	$\frac{15}{512}$	0.0831	$0.1284 = \frac{1}{K_3}$	

$$K_M = 7.79 \quad (2..83)$$

g) Auslastung und erwartete Anzahl Anforderungen

α) Auslastung Station 1

$M/M/1$ -Station:

$$\rho_1 = \gamma_1 \frac{C_2(4)}{C_3(4)} = \frac{0.3395}{0.1284} = 66.1\% \quad (2..84)$$

β) Erwartete Anzahl Anforderungen Station 4

$M/M/1$ -Station:

$$E(X_4^*) = K_M \sum_{\ell=1}^3 \gamma_i^\ell C_{3-\ell}(4) \quad (2..85)$$

$$= K_M \left(\left(\frac{2}{15} \right)^1 0.3395 + \left(\frac{2}{15} \right)^2 \cdot \frac{263}{360} + \left(\frac{2}{15} \right)^3 \right) \quad (2..86)$$

$$= 0.4723 \quad (2..87)$$

3. Zusatzübung Herbst 2008

1. Parallele Prozessoren

Zusammenfassung:

- Zwei parallel Prozessoren ($S = 2$)
- Ankunft von Anforderungen ($\exp(\lambda)$ -verteilt, mit $\lambda = 2$)
- Bedienzeiten \exp -verteilt mit $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = 1$
- Warteschlangenlänge 2 ($K = 2$)

a) Modellierung als Markov-Prozess

α) Modell

Es handelt sich um ein $M/M/S - K$ -System mit $S = 2$ und $K = 2$, also $M/M/2 - 2$.

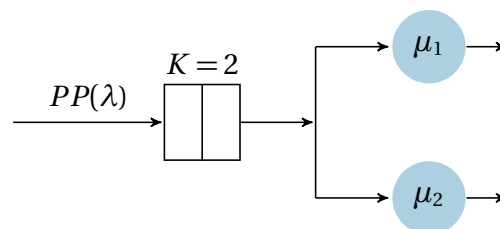


Abbildung 3..1: System mit zentralem Speicher.

β) Zustandsraum

Im Gesamtsystem können zwischen null und vier Anforderungen sein. Bei vier Anforderungen sind beide Server gerade mit einer Anforderung beschäftigt und zwei weitere Anforderungen warten auf den zwei Plätzen in der gemeinsamen Warteschlange. Da mit der Angabe der Anzahl der Anforderungen automatisch klar ist, wie die Anforderungen verteilt sind (niemals ist eine Anforderung in der Warteschlange, wenn ein

Server frei ist), genügt die Angabe der Anzahl der Anforderungen zur vollständigen Beschreibung des Systems. Der Zustandsraum ist somit:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (3..1)$$

γ) Intensitätsgraph

Graphisch dargestellt werden kann der Zustandsraum durch je einen Kreis je Zustand, siehe Abbildung 3..2. $\lambda = 2$, $\mu_1 = 2$. Die Intensität $2 \rightarrow 1$ ist $\mu' = \mu_1 + \mu_2 = 3$, da dann beide Server gleichzeitig Anforderungen bearbeiten.

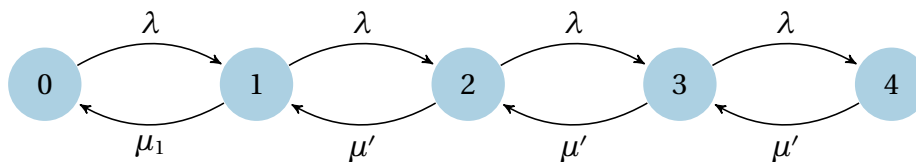


Abbildung 3..2: Intensitätsgraph.

Q: Warum ist dann der Übergang $1 \xrightarrow{\mu_1} 0$ und nicht μ_2 oder etwas anderes?
 Hat das etwas mit „Sind sowohl Prozessor Eins als auch Prozessor 2 frei, wird eine neu ankommende Anforderung an Prozessor Eins geschickt.“ zu tun? Was ist, wenn Prozessor 1 und 2 beschäftigt sind, dann Prozessor 1 vor 2 fertig wird? Dann ist noch eine Anforderung an Prozessor 2, somit μ_2 .

A: Christoph Schmitz (2011-07-06): Die vorgestellte Lösung ist tatsächlich fraglich. Die Unterscheidung, ob Server 1 oder 2 noch beschäftigt ist, muss getroffen werden, wenn die Bedienintensitäten unterschiedlich sind. Die in Abbildung 3..3 gezeigte Lösung ist die zusammen erarbeitete. Es handelt sich dabei nicht mehr um einen GTP, so dass die Lösung aufwändiger ist. Die aufwändigere Lösung ist auch im Ordner mit den Zusatzübungen eingezeichnet. Hier wird jedoch die falsche Lösung vorgestellt.

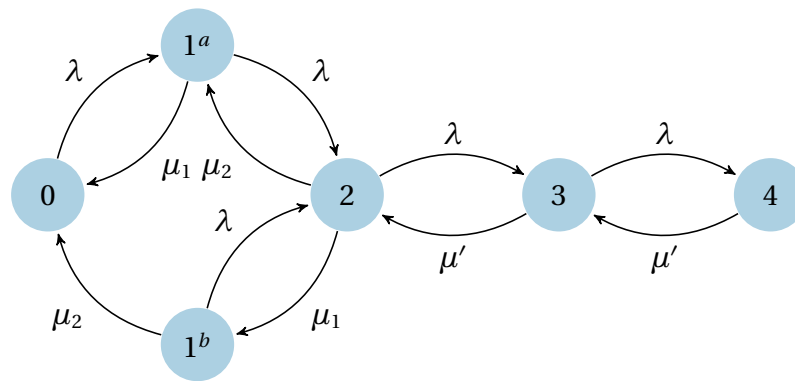


Abbildung 3..3: Intensitätsgraph (andere Lösung).

δ) Intensitätsmatrix

Die Intensitätsmatrix Q kann aus dem Intensitätsgraphen direkt abgelesen werden.

Eine Zeile steht dabei für die Übergangsintensitäten *in* die anderen Zustände. Die Zeilensumme muss immer null ergeben und wird durch den Diagonaleintrag ausgeglichen.

$$Q = \begin{pmatrix} -(\lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu' & -(\mu' + \lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu' & -(\mu' + \lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \mu' & -(\mu') \end{pmatrix} \quad (3..2)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad (3..3)$$

b) Übergangsgraph und Übergangsmatrix

α) Übergangsgraph der eingebetteten Markov-Kette

Der Übergangsgraph stellt Übergangswahrscheinlichkeiten dar. Die Zahlen an den Pfeilen geben die Übergangswahrscheinlichkeit von einem zu einem anderen Zustand an. Da die Wahrscheinlichkeiten stochastisch sein sollen, werden die Intensitäten so normiert, dass die Summe aller Abgänge *von* einem Zustand *eins* ergibt. Geht von einem Zustand nur ein Pfeil ab, so ist dieser automatisch 1 ($0 \xrightarrow{1} 1, 4 \xrightarrow{1} 3$).

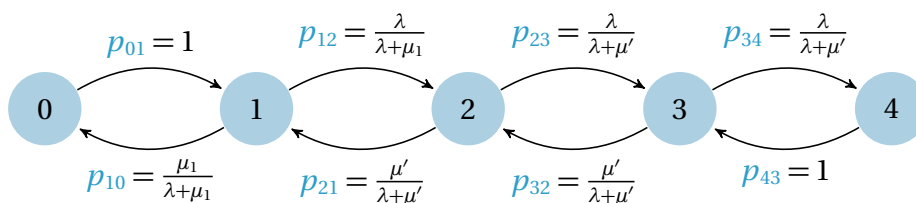


Abbildung 3..4: Übergangsgraph der eingebetteten Markov-Kette.

Dies entspricht den Wahrscheinlichkeiten, *wohin* ein Übergang stattfindet, nicht *wann*. Informationen über die Intensitäten gehen verloren.

β) Übergangsmatrix der eingebetteten Markov-Kette

Bei der Übergangsmatrix werden die Intensitäten so normiert, dass die Summe aller Abgänge von einem Zustand eins ergibt. Die Diagonaleinträge werden zu null gesetzt und die Zeilensumme ist somit immer eins.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\mu_1 + \lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu_1 + \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu'}{\mu' + \lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu' + \lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu'}{\mu' + \lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu' + \lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3..4)$$

c) Stationäre Verteilung

Q: Was ist der Unterschied zwischen p_j^* und p_j ?

A: Der Lösungsweg mit ϑ_i ist die stationäre Verteilung des Geburts- und Todesprozesses (verknüpft mit der Intensitätsmatrix Q und dem Markov-Prozess). Mit $p = p\Pi$ wird der stationäre Verteilung der eingebetteten Markov-Kette bestimmt (verknüpft mit der Übergangsmatrix Π der eingebetteten Markov-Kette).

α) Stationäre Verteilung des Geburts- und Todesprozesses

Hier nicht gefragt!

Da nur Zugänge von i nach $i + 1$ und Abgänge von $i + 1$ nach i (nur Übergänge zwischen benachbarten Zuständen) vorkommen, kann das System als Geburts- und Todesprozess modelliert werden. Siehe [Mat, S. 29f].

Die stationäre Verteilung ist nach [Mat, S. 30]

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_{j \in S} \vartheta_j} \quad (3..5)$$

$$p_j^* = \vartheta_j^* p_0^* \quad (3..6)$$

$$\vartheta_0 = 1 \quad (3..7)$$

$$\vartheta_j = \frac{\lambda_0 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_j}, \quad j \geq 1 \quad (3..8)$$

oder rekursiv nach:

$$\vartheta_j = \vartheta_{j-1} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}, \quad j \geq 1 \quad (3..9)$$

Die Indices beziehen sich dabei auf Abbildung nach [Mat, S. 29], also die obere (λ_i) bzw. unteren (μ_i) Nebendiagonale der Intensitätsmatrix.

Also allgemein:

$$\vartheta_0 = 1 \quad (3..10)$$

$$\vartheta_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \quad (3..11)$$

$$\vartheta_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} = \vartheta_1 \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_2} \quad (3..12)$$

$$\vartheta_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \vartheta_2 \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_3} \quad (3..13)$$

$$\vartheta_4 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = \vartheta_3 \cdot \frac{\lambda_3}{\mu_4} \quad (3..14)$$

Mit der Bezeichnung aus der Aufgabe:

$$\vartheta_0 = 1 \quad (3..15)$$

$$\vartheta_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{2}{2} = 1 \quad (3..16)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \cdot \frac{\lambda}{\mu'} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad (3..17)$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_2 \cdot \frac{\lambda}{\mu'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad (3..18)$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_3 \cdot \frac{\lambda}{\mu'} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad (3..19)$$

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_{j=0}^4 \vartheta_j} \quad (3..20)$$

$$= \left(1 + 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right)^{-1} = \frac{27}{92} \quad (3..21)$$

$$p_1^* = \vartheta_1 p_0^* \quad (3..22)$$

$$= 1 \cdot \frac{27}{92} = \frac{27}{92} \quad (3..23)$$

$$p_2^* = \vartheta_2 p_0^* \quad (3..24)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{92} = \frac{9}{46} \quad (3..25)$$

$$p_3^* = \vartheta_3 p_0^* \quad (3..26)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{27}{92} = \frac{3}{23} \quad (3..27)$$

$$p_4^* = \vartheta_4 p_0^* \quad (3..28)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{27}{92} = \frac{2}{23} \quad (3..29)$$

Ergebnis:

$$p^* = \left(\frac{27}{92}, \frac{27}{92}, \frac{9}{46}, \frac{3}{23}, \frac{2}{23} \right) = (0.293, 0.293, 0.196, 0.130, 0.087) \quad (3..30)$$

Test:

$$\sum_{j=0}^4 p_j^* = 1 \quad \text{OK} \quad (3..31)$$

β) Stationäre Verteilung des eingebetteten Markov-Prozesses

Im stationären Fall soll gelten

$$p = p \Pi \quad (3..32)$$

$$(p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4) = (p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3..33)$$

$$p_0 = \frac{1}{2} p_1 \quad (3..34)$$

$$p_1 = p_0 + \frac{3}{5} p_2 \quad (3..35)$$

$$p_2 = \frac{1}{2} p_1 + \frac{3}{5} p_3 \quad (3..36)$$

$$p_3 = \frac{2}{5} p_2 + p_4 \quad (3..37)$$

$$p_4 = \frac{2}{5} p_3 \quad (3..38)$$

Vorgehen zur Lösung: alles in p_0 ausdrücken, dann mit der zusätzlichen Bedingung $\sum_{j=0}^4 p_j = 1$ die Werte bestimmen:

$$p_1 = 2p_0 \quad (3..39)$$

$$p_2 = \frac{5}{3} p_0 \quad (3..40)$$

$$p_3 = \frac{10}{9} p_0 \quad (3..41)$$

$$p_4 = \frac{4}{9} p_0 \quad (3..42)$$

$$p_4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{9} p_0 = \frac{4}{9} p_0 \quad (\text{OK}) \quad (3..43)$$

$$\sum_{j=0}^4 p_j = 1 \quad (3..44)$$

$$p_0 \left(1 + 2 + \frac{5}{3} + \frac{10}{9} + \frac{4}{9} \right) = 1 \quad (3..45)$$

$$p_0 = \frac{9}{56} \quad (3..46)$$

$$p_0 = \frac{9}{56} \quad p_1 = \frac{9}{28} \quad p_2 = \frac{15}{56} \quad p_3 = \frac{5}{28} \quad p_4 = \frac{1}{14} \quad (3..47)$$

$$p_0 = 0.161 \quad p_1 = 0.321 \quad p_3 = 0.268 \quad p_4 = 0.179 \quad p_4 = 0.071 \quad (3..48)$$

Test:

$$\sum_{j=0}^4 p_j^* = 1 \quad \text{OK} \quad (3..49)$$

d) Blockierwahrscheinlichkeit, zentraler Speicher

Eine ankommende Anforderung wird abgewiesen (das System ist blockiert), genau dann, wenn genau vier Anforderungen im System sind (zwei in den Servern und zwei auf den zwei Wartepätzen in der Warteschlange). Dies ist genau $p_4 = p_B = \frac{1}{14}$.

Q: Warum wird die Blockierwahrscheinlichkeit der eingebetteten Markov-Kette benutzt? ($\frac{2}{23}$ ist die Wahrscheinlichkeit aus der stationären Verteilung des GTP.)

e) Blockierwahrscheinlichkeit, lokaler Speicher

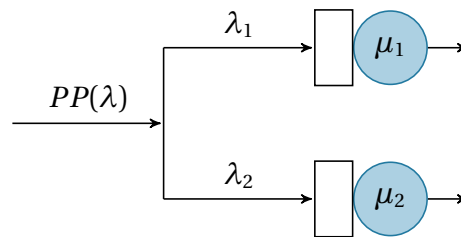


Abbildung 3..5: System mit lokalem Speicher.

Das System besteht aus zwei $M/M/1-1$ Bedienstationen. Der Ankunftsstrom wird auf beide Stationen verteilt:

$$S_1: \quad \mu_1 = 2 \quad \lambda_1 = \lambda p = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (3..50)$$

$$S_2: \quad \mu_2 = 1 \quad \lambda_2 = \lambda p = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (3..51)$$

Q: Warum ist in der Lösung $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}$? Übersehen, dass λ^{-1} angegeben ist?

A: Ja, scheint ein Fehler zu sein. Korrekt ist die Ankunftsintensität λ mit der Routingwahrscheinlichkeit p zu multiplizieren. Daraus ergibt sich $\lambda_{1,2} = \lambda p = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

α) System 1

Q: Für die Blockierwahrscheinlichkeit wird wieder die stationäre Verteilung der eingebetteten Markov-Kette benutzt. Warum?

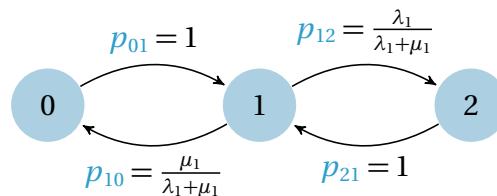


Abbildung 3..6: Übergangsgraph für System 1.

0 → 1:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1} = 1 \quad (3..52)$$

2 → 1:

$$\frac{\mu_1}{\mu_1} = 1 \quad (3..53)$$

1 → 2:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3} \quad (3..54)$$

2 → 1:

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} = \frac{2}{1 + 2} = \frac{2}{3} \quad (3..55)$$

$$(3..56)$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3..57)$$

Stationär:

$$p = p\Pi \quad (3..58)$$

$$p_0 = \frac{2}{3}p_1 \quad p_1 = p_0 + p_2 \quad p_2 = \frac{1}{3}p_1 \quad (3..59)$$

Lösen:

$$p_1 = \frac{3}{2}p_0 \quad p_2 = \frac{1}{2}p_0 \quad (3..60)$$

$$\sum_{j=0}^2 p_j = 1 \quad (3..61)$$

$$p_0 \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1 \quad (3..62)$$

$$p_0 = \frac{1}{3} \quad p_1 = \frac{1}{2} \quad p_2 = \frac{1}{6} \quad (3..63)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses System blockiert ist, liegt bei $p_{B,S_1} = p_2 = \frac{1}{6}$.

β) System 2

Gleiches Vorgehen:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3..64)$$

$$p_0 = \frac{1}{2}p_1 \quad p_1 = p_0 + p_2 \quad p_2 = \frac{1}{2}p_1 \quad (3..65)$$

$$p_1 = 2p_0 \quad p_2 = p_0 \quad (3..66)$$

$$p_0(1 + 2 + 1) = 1 \quad (3..67)$$

$$p_0 = \frac{1}{4} \quad p_1 = \frac{1}{2} \quad p_2 = \frac{1}{4} \quad (3..68)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses System blockiert ist, liegt bei $p_{B,S_2} = p_2 = \frac{1}{4}$.

γ) Gesamtsystem

Die Blockierwahrscheinlichkeit des Gesamtsystems mit lokalem Speicher ist

$$p_B = p_{B,S_1} \cdot p_{B,S_2} \quad (3..69)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \quad (3..70)$$

Q: Wieso das?

A: Lösungsweg auch fraglich. Christoph Schmitz schlägt eine Gewichtung der Blockierwahrscheinlichkeiten der Teilsysteme (p_{B,S_1}, p_{B,S_2}) an Hand der Routingwahrscheinlichkeit p vor:

$$p_B = p \cdot p_{B,S_1} + p \cdot p_{B,S_2} \quad (3..71)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{5}{24} \quad (3..72)$$

f) Vergleich

Mit der neuen Blockierwahrscheinlichkeit ergibt sich ein anderer Vergleich:

$$p_{B,\text{lokal}} = \frac{5}{24} = 0.208 > p_{B,\text{zentral}} = \frac{1}{14} = 0.071 \quad (3..73)$$

Das System mit lokalem Speicher hat eine höhere Blockierwahrscheinlichkeit. Anschaulich kann man sich das durch folgende Überlegung klar machen: Server 1 ist beschäftigt und ein Auftrag wartet in seiner lokalen Warteschlange. Server 2 ist komplett frei. Kommt eine weitere Anforderung an, wird sie mit einer Routingwahrscheinlichkeit von $1/2$ auf das besetzte Teilsystem geleitet, obwohl Server 2 frei ist, und abgewiesen.

2. Router

a) Typ

Es handelt sich um ein offenes Jackson-Netz, das aus drei $M/M/1 - \infty$ -Stationen besteht.

b) Modell, Zustandsraum und Routingmatrix

α) Modell

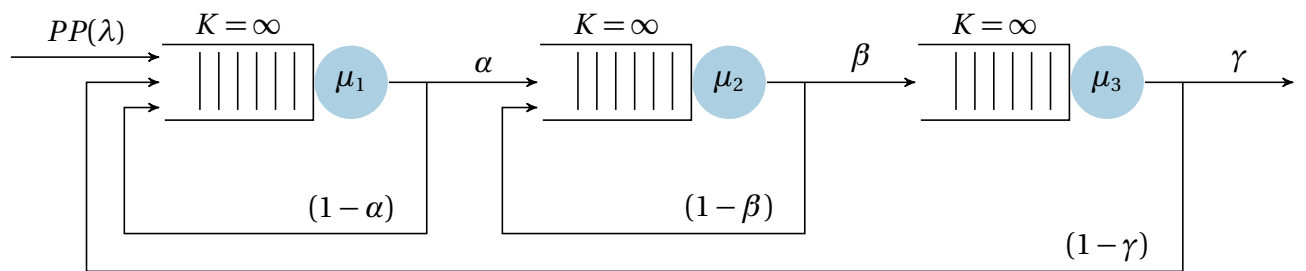


Abbildung 3..7: Modell des Systems.

β) Zustandsraum

$$S = \mathbb{N}_0^3 \quad (3..74)$$

γ) Routingmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha) & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1-\beta) & \beta \\ \gamma & (1-\gamma) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3..75)$$

c) Stationäre Verteilung

Die stationäre Verteilung existiert, wenn

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3..76)$$

Sie lautet

$$p^{(n)} = \prod_{i=1}^3 (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} \quad (3..77)$$

Dazu löse Flussgleichungen

$$\Lambda_1 = \lambda + (1 - \alpha)\Lambda_1 + (1 - \gamma)\Lambda_3 \quad (3..78)$$

$$\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1 + (1 - \beta)\Lambda_2 \quad (3..79)$$

$$\Lambda_3 = \beta\Lambda_2 \quad (3..80)$$

Aus Λ_2 folgt direkt

$$\Lambda_2(1 - 1 + \beta) = \alpha\Lambda_1 \quad (3..81)$$

$$\Lambda_2 = \frac{\alpha}{\beta}\Lambda_1 \quad (3..82)$$

$$\Lambda_1 = (1 - \alpha)\Lambda_1 + (1 - \gamma)\beta\frac{\alpha}{\beta}\Lambda_1 + \lambda \quad (3..83)$$

$$0 = \Lambda_1(-\gamma\alpha) + \lambda \quad (3..84)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\gamma\alpha}\lambda \quad (3..85)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{\beta\gamma}\lambda \quad (3..86)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{\gamma}\lambda \quad (3..87)$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} \frac{1}{\gamma\alpha} < 1 \quad (3..88)$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} \frac{1}{\gamma\beta} < 1 \quad (3..89)$$

$$\rho_3 = \frac{\lambda}{\mu_3} \frac{1}{\gamma} < 1 \quad (3..90)$$

d) Mindestbedienintensität μ_1

Erfülle die Bedingung(en), in denen μ_1 vorkommt

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} \frac{1}{\gamma\alpha} \quad (3..91)$$

$$= \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{0.8 \cdot 0.9} < 1 \quad (3..92)$$

$$\mu_1 > \frac{25}{18} \quad (3..93)$$

e) Mindestroutingwahrscheinlichkeit β

Erfülle die Bedingung(en), in denen β vorkommt

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} \frac{1}{\gamma\beta} \quad (3..94)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{0.9\beta} < 1 \quad (3..95)$$

$$\beta > \frac{5}{9} \quad (3..96)$$

f) Modifikation

Geschlossenes Jackson-Netz.

g) Zustandsraum und Mächtigkeit

$$S = \left\{ (n_1 \ n_2 \ n_3) \mid n_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \sum_{i=1}^3 n_i = 4 \right\} \quad (3..97)$$

$$|S| = \binom{M+J-1}{M} \quad (3..98)$$

$$= \binom{6}{4} = 15 \quad (3..99)$$

h) Stationäre Verteilung

Neue Flussgleichungen

$$R = \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \alpha & 0 \\ 0 & (1-\beta) & \beta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3..100)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3..101)$$

$$\Lambda_1 = 0.8\Lambda_1 + 0.2\Lambda_2 \quad (3..102)$$

$$\Lambda_2 = 0.2\Lambda_1 + \Lambda_3 \quad (3..103)$$

$$28 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 \quad (3..104)$$

In Form für Gleichungslöser bringen

$$\begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ -0.8 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \quad (3..105)$$

$$\Lambda = (10 \quad 10 \quad 8) \quad (3..106)$$

$$\mu = (5 \quad 2 \quad 2) \quad (3..107)$$

$$\gamma = (254) \quad (3..108)$$

$$(3..109)$$

Rekursionsschema

	$\gamma_1 = 2$	$\gamma_2 = 5$	$\gamma_3 = 4$
0	1	1	1
1	2	7	11
2	4	39	83
3	8	203	535
4	16	1031	3171

$$K_M = \frac{1}{3171} \quad (3..110)$$

$$p^*(n) = \frac{1}{3171} 2^{n_1} 5^{n_2} 4^{n_3} \quad (3..111)$$

i) Durchsatz, Erwartete Anzahl Anforderungen und Auslastung

α) Durchsatz

$$\lambda_1 = \Lambda_1 \frac{C_3(3)}{C_4(3)} \quad (3..112)$$

$$= 10 \cdot \frac{535}{3171} \approx 1.687 \quad (3..113)$$

β) Erwartete Anzahl Anforderungen

$$E(X_2^*) = K_M \sum_{\ell=1}^4 \gamma_2^\ell C_{4-\ell}(3) \quad (3..114)$$

$$= \frac{1}{3171} (5 \cdot 535 + 5^2 \cdot 83 + 5^3 \cdot 11 + 5^4) \quad (3..115)$$

$$= \frac{1}{3171} \cdot 6750 \approx 2.13 \quad (3..116)$$

γ) Auslastung

$$\rho_3 = \gamma_3 \frac{C_3(3)}{C_4(3)} \quad (3..117)$$

$$= 4 \cdot \frac{535}{3171} \approx 0.675 \quad (3..118)$$

4. Zusatzübung Frühjahr 2009

1. Jackson Netz

Eigene Lösung, aber mit Lehrstuhl kontrolliert. Vollständig.

a) Zustandsraum und Routingmatrix

α) Zusammenfassung

offenes Jackson Netz

$S_1, S_2 : M/M/\infty$ -Stationen

$S_3, S_4 : M/M/1$ -Stationen

β) Zustandsraum

Offenes Jackson Netz, 4 Stationen mit jeweils unendlich vielen Warteplätzen:

$$S = \mathbb{N}_0^4 \quad (4..1)$$

γ) Routingmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & (1-\alpha) & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \beta & 0 & 0 & (1-\beta) & 0 \end{pmatrix} \quad (4..2)$$

b) Stationäre Verteilung

Für alle $M/M/1$ -Stationen $i \in \{3, 4\}$ muss gelten:

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1 \quad (4..3)$$

Die stationäre Verteilung ist dann:

$$p^*(n) = K_M \prod_{i=1}^4 p_i^*(n_i) \quad (4..4)$$

mit

$$p_i(n_i) = \begin{cases} (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} & , \quad i \in \{3, 4\}, \quad M/M/1 - \text{Station} \\ \exp(-\mu_i) \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} & , \quad i \in \{1, 2\}, \quad M/M/\infty - \text{Station} \end{cases} \quad (4..5)$$

Dazu löse Flussgleichungen:

$$\Lambda_1 = \lambda + \frac{1}{2} \Lambda_3 \quad (4..6)$$

$$\Lambda_2 = \alpha \Lambda_1 \quad (4..7)$$

$$\Lambda_3 = (1 - \alpha) \Lambda_1 + (1 - \beta) \Lambda_4 \quad (4..8)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \Lambda_2 + \frac{1}{2} \Lambda_3 \quad (4..9)$$

Λ_2, Λ_3 in Λ_4 einsetzen:

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \alpha \Lambda_1 + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \Lambda_1 + \frac{1}{2} (1 - \beta) \Lambda_4 \quad (4..10)$$

$$\Lambda_4 \left(1 - \frac{1}{2} (1 - \beta) \right) = \Lambda_1 \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \right) \quad (4..11)$$

$$\Lambda_4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \beta \right) = \Lambda_1 \left(\frac{1}{2} \right) \quad (4..12)$$

$$\Lambda_4 = \Lambda_1 \frac{1}{1 + \beta} \quad (4..13)$$

Das zusammen mit Λ_3 in Λ_1 einsetzen:

$$\Lambda_1 = \lambda + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \Lambda_1 + \frac{1}{2} (1 - \beta) \Lambda_1 \frac{1}{(1 + \beta)} \quad (4..14)$$

$$\Lambda_1 \left(1 - \frac{1}{2} (1 - \alpha) - \frac{1}{2} \frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)} \right) = \lambda \quad (4..15)$$

$$\Lambda_1 \left(\frac{(1 + \beta) - \frac{1}{2} (1 - \alpha) (1 + \beta) - \frac{1}{2} (1 - \beta)}{(1 + \beta)} \right) = \lambda \quad (4..16)$$

$$\Lambda_1 \left(\beta + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \alpha \beta \right) = \lambda \quad (4..17)$$

$$\Lambda_1 = \frac{2\lambda(1 + \beta)}{\alpha + \alpha\beta + 2\beta} \quad (4..18)$$

Die übrigen Λ_i lassen sich durch Einsetzen bestimmen:

$$\Lambda_2 = \alpha \Lambda_1 \quad (4..19)$$

$$= \frac{2\lambda\alpha(1+\beta)}{\alpha + \alpha\beta + 2\beta} \quad (4..20)$$

$$\Lambda_4 = \Lambda_1 \frac{1}{(1+\beta)} \quad (4..21)$$

$$= \frac{2\lambda}{\alpha + \alpha\beta + 2\beta} \quad (4..22)$$

$$\Lambda_3 = (1-\alpha)\Lambda_1 + (1-\beta)\Lambda_4 \quad (4..23)$$

$$= \frac{(1-\alpha)2\lambda(1+\beta) + (1-\beta)2\lambda}{\alpha + \alpha\beta + 2\beta} \quad (4..24)$$

$$= \frac{2\lambda(1-\alpha+\beta-\alpha\beta+1-\beta)}{\alpha + \alpha\beta + 2\beta} \quad (4..25)$$

$$= \frac{2\lambda(2-\alpha-\alpha\beta)}{\alpha + \alpha\beta + 2\beta} \quad (4..26)$$

$$(4..27)$$

Ausgeschrieben ist die stationäre Verteilung:

$$p^*(n) = \exp(-\rho_1) \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} \exp(-\rho_2) \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} (1-\rho_3)\rho_3^{n_3} (1-\rho_4)\rho_4^{n_4} \quad (4..28)$$

Da ρ_i definiert ist muss es nicht nochmal in die Verteilung eingesetzt werden.

c) Gleiche mittlere Anzahl an Anforderungen

Beides sind $M/M/\infty$ -Stationen:

$$E(X_1^*) = E(X_2^*) \quad (4..29)$$

$$\frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} \quad (4..30)$$

Bei den Λ kürzt sich der Zähler und der Faktor $2\lambda(1+\beta)$ weg

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{\alpha}{\mu_2} \quad (4..31)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\alpha} \mu_2 \quad (4..32)$$

d) Gleiche mittlere Gesamtverweilzeit

Beides sind $M/M/1$ -Stationen:

$$E(W_3^*) = E(W_4^*) \quad (4.33)$$

Gleich den Nenner hinschreiben, $\alpha = 0$:

$$\mu_3 - \Lambda_3 = \mu_4 - \Lambda_4 \quad (4.34)$$

$$\mu_3 = \mu_4 - \Lambda_4 + \Lambda_3 \quad (4.35)$$

$$= \mu_4 - \frac{\lambda}{\beta} + \frac{2\lambda}{\beta} \quad (4.36)$$

$$= \mu_4 + \frac{\lambda}{\beta} \quad (4.37)$$

e) Geschlossenes Jackson Netz

Beim Aufzeichnen sieht man, dass der Fluss Λ_2 der Station 2 verschwindet. Daher kann sie einfach weggelassen werden.

α) Modell

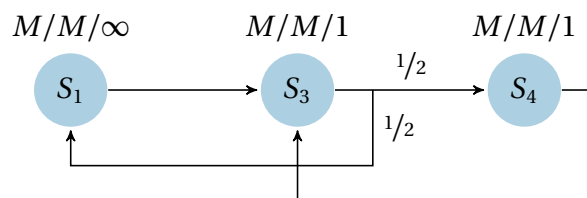


Abbildung 4..1: Modell des Systems.

Station 2 kann wegfallen, da der Fluss dort null ist.

β) Zustandsraum

$$S = \left\{ (n_1, n_3, n_4) \mid n_i \in \{1, 3, 4\}, \sum_i n_i = M \right\} \quad (4.38)$$

$$|S| = \binom{M+J-1}{M} = \binom{M+2}{M} = \frac{(M+2)!}{(M+2-M)!M!} = \frac{(M+2)(M+1)}{2} \quad (4.39)$$

γ) Stationäre Verteilung mit gemischten $M/M/1$ - und $M/M/\infty$ -Stationen

Neue Routingmatrix

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4..40)$$

Flussgleichungen

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \Lambda_3 \quad (4..41)$$

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 + \Lambda_4 \quad (4..42)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \Lambda_3 \quad (4..43)$$

$$\Lambda = (2, 4, 2) \quad (4..44)$$

Die stationäre Verteilung ist

$$p^*(n) = K_M \cdot \underbrace{\frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!}}_{M/M/\infty\text{-Station}} \cdot \underbrace{\rho_3^{n_3}}_{M/M/1\text{-Station}} \cdot \underbrace{\rho_4^{n_4}}_{M/M/1\text{-Station}} \quad (4..45)$$

K_M muss so gewählt werden, dass $\sum_{n \in S} p^*(n) = 1$ ist. Dazu muss die Wahrscheinlichkeiten aller Zustände addiert werden und K_M passend gewählt werden. Das Schema ist in Tabelle 4..1 durchgeführt.

$$p^*(n) = K_M \frac{1}{n_1!} 4^{n_3} \quad (4..46)$$

Für $M = 3$ hat der Zustandsraum $\binom{5}{3} = 10$ Elemente.

n_1	n_3	n_4	$p^*(n)/K_M$		
3	0	0	$1/6$	=	$1/6$
2	1	0	$1/2 \cdot 4$	=	2
2	0	1	$1/2$	=	$1/2$
1	1	1	$1 \cdot 4$	=	4
1	2	0	$1 \cdot 4^2$	=	16
1	0	2	1	=	1
0	0	3	1	=	1
0	3	0	$1 \cdot 4^3$	=	64
0	2	1	$1 \cdot 4^2$	=	16
0	1	2	$1 \cdot 4^1$	=	4
$\frac{1}{K_M}$				=	$\frac{326}{3}$

Tabelle 4..1: Ermittlung von K_M .

$$K_M = \frac{3}{326} \quad (4..47)$$

also:

$$p^*(n) = \frac{3}{326} \frac{4^{n_3}}{n_1!} \quad (4..48)$$

2. Hyperexponentialverteilung

Eigene Lösung, *noch nicht* mit Lehrstuhl kontrolliert, jedoch gleiche Zahlenwerte.

a) Erwartungswert $E(Y)$ der Bedienzeit Y

Es handelt sich um eine Hyperexponentialverteilung. Die Parameter μ_1, μ_2, q_1 und q_2 sind gegeben. Im Skript ist die Laplace-Transformierte der Verteilung gegeben, aus der der Erwartungswert berechnet werden kann.

$$L_Y(s) = \sum_{i=1}^k q_i \frac{\mu_i}{\mu_i + s} \quad (4.49)$$

$$= q_1 \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + q_2 \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} \quad (4.50)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{(1+s)} + \frac{3}{4} \frac{2}{(2+s)} \quad (4.51)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{(1+s)} + \frac{3}{2} \frac{1}{(2+s)} \quad (4.52)$$

$$E(Y) = -L'_Y(0) \quad (4.53)$$

$$L'_Y(s) = \frac{1}{4} \frac{(-1)}{(1+s)^2} + \frac{3}{2} \frac{(-1)}{(2+s)^2} \quad (4.54)$$

$$E(Y) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2 \cdot 2^2} = \frac{5}{8} \quad (4.55)$$

b) Mittlere Anzahl an Anforderungen und mittlere Gesamtverweilzeit

α) Mittlere Anzahl an Anforderungen $E(X^*)$

Formel ? nach Formelsammlung

$$L_Y''(s) = \frac{1}{4} \frac{(-1)(-2)}{(1+s)^3} + \frac{3}{2} \frac{(-1)(-2)}{(2+s)^3} \quad (4..56)$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{4} \frac{2}{1} + \frac{3}{2} \frac{2}{8} = \frac{7}{8} \quad (4..57)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \quad (4..58)$$

$$= \frac{7}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{31}{64} \quad (4..59)$$

$$c_Y^2 = \frac{V(Y)}{(E(Y))^2} = \frac{31}{25} \quad (4..60)$$

$$\rho = \lambda E(Y) = \frac{5}{8} < 1 \quad (\text{OK}) \quad (4..61)$$

$$E(X^*) = \frac{5}{8} + \frac{25}{64} \frac{1 + \frac{31}{25}}{2 \left(1 - \frac{5}{8}\right)} = \frac{43}{24} \approx 1.79 \quad (4..62)$$

β) Mittlere Gesamtverweilzeit einer Anforderung $E(W^*)$

Little's Gesetz

$$E(W^*) = \frac{1}{\lambda} E(X^*) = \frac{43}{24} \quad (4..63)$$

c) $M/M/1$ -System mit gleichem Erwartungswert der Bedienzeit

Der Erwartungswert der Bedienzeit eines $M/M/1$ -Systems ist:

$$E(Y_{M/M/1}^*) = \frac{1}{\mu_{M/M/1}} \stackrel{!}{=} E(Y_{M/G/1}^*) \quad (4..64)$$

$$\mu_{M/M/1} = \frac{8}{5} \quad (4..65)$$

$$E(W_{M/M/1}^*) = \frac{\lambda_{M/M/1}}{\mu_{M/M/1} - \lambda_{M/M/1}} \quad (4..66)$$

$$= \frac{1}{\frac{8}{5} - 1} = \frac{5}{3} \quad (4..67)$$

Mit Little's Gesetz

$$E(W_{M/M/1}^*) = \frac{5}{3} \quad (4..68)$$

d) Stationäre Verteilung

Benutzung der vorgegebenen erzeugenden Funktion der Verteilung:

$$H(z) = \frac{\frac{9}{32}}{1 - \frac{2}{3}z} + \frac{\frac{3}{32}}{1 - \frac{2}{5}z} \quad (4.69)$$

Für p_0^* einfach $z = 0$ einsetzen

$$p_0^* = \frac{9}{32} + \frac{3}{32} = \frac{3}{8} \quad (4.70)$$

Für p_1^* die erste Ableitung bilden und dann $z = 0$ einsetzen

$$H'(z) = \frac{9}{32} \frac{(-1)\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}z\right)^2} + \frac{3}{32} \frac{(-1)\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(1 - \frac{2}{5}z\right)^2} \quad (4.71)$$

$$p_1^* = \frac{9}{32} \frac{2}{3} + \frac{3}{32} \frac{2}{5} = \frac{9}{40} \quad (4.72)$$

Für p_2^* die zweite Ableitung bilden, $\frac{1}{k!}$ nicht vergessen und dann $z = 0$ einsetzen

$$H''(z) = \frac{1}{2!} \left(\frac{9}{32} \frac{(-1)(-2)\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(1 - \frac{2}{3}z\right)^3} + \frac{3}{32} \frac{(-1)(-2)\left(-\frac{2}{5}\right)^2}{\left(1 - \frac{2}{5}z\right)^3} \right) \quad (4.73)$$

$$= \frac{9}{40} \quad (4.74)$$

Hier kann man schon das Schema der höheren Ableitungen erkennen: Im Zähler kommen die Faktoren $(-3), (-4), \dots$ hinzu. Dies kompensiert sich mit dem $\frac{1}{k!}$ vor der ganzen Ableitung. Der Exponent der inneren Ableitung erhöht sich jeweils um 1. Der Nenner ist für $z = 0$ immer 1.

$$p_n^* = \frac{9}{32} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{32} \left(\frac{2}{5}\right)^n \quad (4.75)$$

e) M/G/1-System

α) Intensitätsgraph

Der erste Eintrag steht für die Belegung des Warteschlangenplatzes, die beiden folgenden Einträge für die Server 1 und 2.

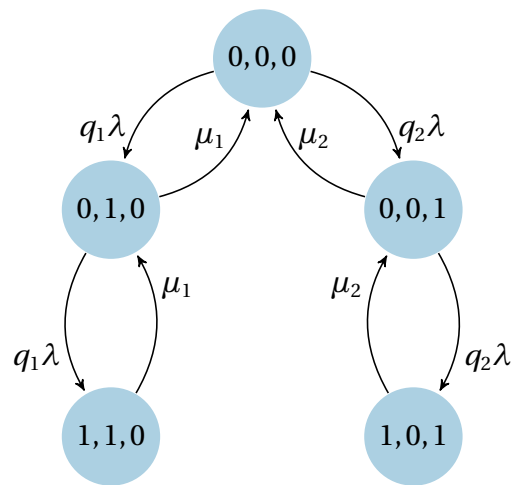


Abbildung 4..2: Modell des Systems.

β) Intensitätsmatrix

Einträge der Matrix wie die Reihenfolge der Zustände im Zustandsraum

$$Q = \begin{pmatrix} -(\lambda) & q_1 \lambda & q_2 \lambda & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(q_1 \lambda + \mu_1) & 0 & q_1 \lambda & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(q_2 \lambda + \mu_2) & 0 & q_2 \lambda \\ 0 & \mu_1 & 0 & -(\mu_1) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -(\mu_2) \end{pmatrix} \quad (4..76)$$

γ) Stationäre Verteilung

Die stationäre Verteilung lässt sich mit $0 = pQ$ berechnen. Sieht man jedoch, dass das System auch als Geburts- und Todesprozess auffassen lässt, ist die Rechnung leichter.

Reihenfolge der Zustände

$$(1 \ 1 \ 0) \rightleftharpoons (0 \ 1 \ 0) \rightleftharpoons (0 \ 0 \ 0) \rightleftharpoons (0 \ 0 \ 1) \rightleftharpoons (1 \ 0 \ 1) \quad (4..77)$$

Umbenennung der Zustände

$$A \rightleftharpoons B \rightleftharpoons C \rightleftharpoons D \rightleftharpoons E \quad (4..78)$$

Rechenschema wie GTP, λ_i ist die Intensität von „links-nach-rechts“, μ_i ist die Inten-

sität von „rechts-nach-links“

$$\vartheta_A = 1 \quad (4..79)$$

$$\vartheta_B = \vartheta_A \frac{\mu_1}{q_1 \lambda} \quad (4..80)$$

$$\vartheta_C = \vartheta_B \frac{\mu_1}{q_1 \lambda} \quad (4..81)$$

$$\vartheta_D = \vartheta_C \frac{q_2 \lambda}{\mu_2} \quad (4..82)$$

$$\vartheta_E = \vartheta_D \frac{q_2 \lambda}{\mu_2} \quad (4..83)$$

$$(4..84)$$

Mit Zahlen:

$$\vartheta_A = 1 \quad (4..85)$$

$$\vartheta_B = \vartheta_A \frac{1}{1/4} = 4 \quad (4..86)$$

$$\vartheta_C = \vartheta_B \frac{1}{1/4} = 16 \quad (4..87)$$

$$\vartheta_D = \vartheta_C \frac{3/4}{2} = 6 \quad (4..88)$$

$$\vartheta_E = \vartheta_D \frac{3/4}{2} = \frac{9}{4} \quad (4..89)$$

$$p_A^* = \frac{1}{\sum_{i \in \{A, B, C, D, E\}} \vartheta_i} \quad (4..90)$$

$$= \frac{1}{1 + 4 + 16 + 6 + 9/4} = \frac{4}{117} \quad (4..91)$$

$$p_B^* = \frac{16}{117} \quad (4..92)$$

$$p_C^* = \frac{64}{117} \quad (4..93)$$

$$p_D^* = \frac{24}{117} \quad (4..94)$$

$$p_E^* = \frac{9}{117} \quad (4..95)$$

Zurück-Umbenennung

$$p^*\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{117} \quad (4..96)$$

$$p^*\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{16}{117} \quad (4..97)$$

$$p^*\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{64}{117} \quad (4..98)$$

$$p^*\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{24}{117} \quad (4..99)$$

$$p^*\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{9}{117} \quad (4..100)$$

5. Zusatzübung Herbst 2009

1. Jackson Netz

a) Zustandsraum und Routingmatrix

α) Zustandsraum

Offenes Jackson-Netz mit 4 Stationen:

$$S = \mathbb{N}_0^4 \quad (5..1)$$

β) Routingmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & (1-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & (1-\delta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1-\beta) & \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5..2)$$

b) Stationäre Lösung

Eine stationäre Lösung existiert, wenn für alle Stationen gilt:

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1 \quad (5..3)$$

Dazu löse Flussgleichungen

$$\Lambda_1 = \alpha\lambda + \frac{2}{3}\Lambda_4 \quad (5..4)$$

$$\Lambda_2 = (1-\alpha)\lambda + \Lambda_3 \quad (5..5)$$

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2 \quad (5..6)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\Lambda_2 \quad (5..7)$$

Λ_4 in Λ_1 und Λ_3 in Λ_2

$$\Lambda_1 = \alpha\lambda + \frac{1}{3}\Lambda_2 \quad (5..8)$$

$$\Lambda_2 = (1 - \alpha)\lambda + \Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2 \quad (5..9)$$

$$= 2(1 - \alpha) + 2\Lambda_1 \quad (5..10)$$

Λ_1 in Λ_2

$$\Lambda_2 = 2\lambda - 2\alpha\lambda + 2\alpha\lambda + \frac{2}{3}\Lambda_2 \quad (5..11)$$

$$\Lambda_2 = 6\lambda \quad (5..12)$$

$$\Lambda_1 = \alpha\lambda + 2\lambda \quad (5..13)$$

$$= \lambda(\alpha + 2) \quad (5..14)$$

$$\Lambda_3 = 3\lambda + \lambda(\alpha + 2) \quad (5..15)$$

$$= \lambda(\alpha + 5) \quad (5..16)$$

$$\Lambda_4 = 3\lambda \quad (5..17)$$

$$\Lambda = \lambda \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 6 & \alpha + 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (5..18)$$

Die stationäre Verteilung lautet dann:

$$p^*(n) = \prod_{i=1}^4 (1 - \rho_i)^{n_i} \quad (5..19)$$

c) Gleiche Auslastung

$$\rho_1 = \rho_3 \quad (5..20)$$

$$\frac{\lambda(\alpha + 2)}{2} = \frac{\lambda(\alpha + 5)}{\mu_3} \quad (5..21)$$

$$\mu_3 = \frac{2\alpha + 10}{\alpha + 2}, \quad \alpha \in [0, 1) \quad (5..22)$$

Für $\alpha = 0$:

$$\mu_3 = \frac{12}{4} = 4 \quad (5..23)$$

Für $\alpha \rightarrow 1$

$$\mu_3 \rightarrow 5 \quad (5..24)$$

Da $\mu_3(\alpha)$ monoton fallend ist

$$\mu_3 \in (4, 5] \quad (5..25)$$

Dass $\mu_3(\alpha)$ monoton fallend ist sieht man an:

$$\frac{d}{d\alpha} \mu_3(\alpha) = \frac{2(\alpha+2) - (2\alpha+10)}{(\alpha+2)^2} = \frac{-6}{(\alpha+2)^2} < 0 \quad (5..26)$$

d) Stationäre Verteilung

S_2 ist nun eine $M/M/\infty$ -Station, so dass die Bedingung $\rho_2 < 1$ nicht mehr erfüllt werden muss. Es bleibt:

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1, \quad i \in \{1, 3, 4\} \quad (5..27)$$

$$p^* = \prod_{i \in \{1, 3, 4\}} (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} \cdot \exp(-\mu_2) \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} \quad (5..28)$$

e) Geschlossenes Jackson-Netz

α) Zustandsraum

$$S = \left\{ (n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4) \mid n_i \in \mathbb{N}_0, \sum_i n_i = M \right\} \quad (5..29)$$

$$|S| = \binom{M+J-1}{M} = \binom{M+3}{M} = \frac{(M+3)(M+2)(M+1)}{3!} \quad (5..30)$$

f) Flussgleichungen

$$\Lambda_1 = \Lambda_4 \quad (5..31)$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_3 \quad (5..32)$$

$$\Lambda_3 = \delta \Lambda_2 + \Lambda_1 \quad (5..33)$$

$$\Lambda_4 = (1 - \delta) \Lambda_2 \quad (5..34)$$

Λ_1 in Λ_4

$$\Lambda_1 = (1 - \delta)\Lambda_2 \quad (5..35)$$

$$2 = (1 - \delta)3 \quad (5..36)$$

$$\delta = \frac{1}{3} \quad (5..37)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (5..38)$$

Alles $M/M/1$ -Stationen, daher Rekursionsschema:

$$\mu = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5..39)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (5..40)$$

$$\vdots \quad (5..41)$$

$$K_M = \frac{8}{1155} \quad (5..42)$$

$$p^*(n) = \frac{8}{1155} \left(\frac{3}{2}\right)^{n_2} 3^{n_3} 2^{n_2} \quad (5..43)$$

g) Erwartete Anzahl Anforderungen, Auslastung und Durchsatz

$\alpha)$ Erwartete Anzahl an Anforderungen an Station S_2 $E(X_2^*)$

$$E(X_2^*) = \frac{8}{1155} \left(\frac{3}{2} \frac{145}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{15}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^3 \right) \quad (5..44)$$

$$= \frac{199}{385} \quad (5..45)$$

$\beta)$ Auslastung an Server S_2

$$\rho_1 = \frac{145}{4} \cdot \frac{8}{1155} \quad (5..46)$$

$$= \frac{58}{231} \quad (5..47)$$

$\gamma)$ Durchsatz an Server S_3

$$\lambda_3 = 3 \cdot \frac{145}{4} \cdot \frac{8}{1155} \quad (5..48)$$

$$= \frac{58}{77} \quad (5..49)$$

2. Callcenter

a) Modellierung

α) Zustandsraum

$$S = \{0, 1, \dots, n + m\} \quad (5..50)$$

$$|S| = n + m + 1 \quad (5..51)$$

β) Intensitätsgraph

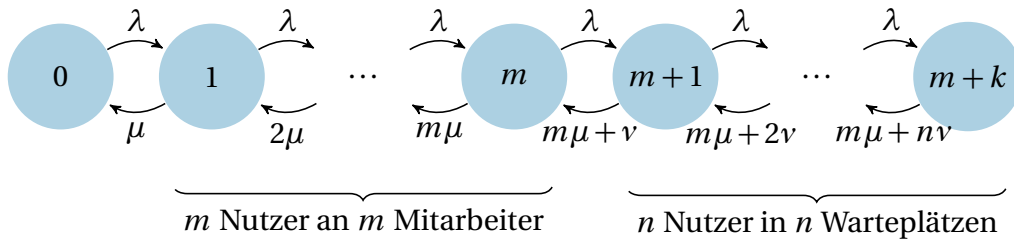


Abbildung 5..1: Intensitätsgraph.

γ) Intensitätsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & & & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & & & \\ & 2\mu & -(2\mu + \lambda) & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & m\mu & -(m\mu + \lambda) & \lambda & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m\mu + \nu & -(m\mu + \nu + \lambda) & \lambda \\ & & & m\mu + 2\nu & -(m\mu + 2\nu + \lambda) & \lambda \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & m\mu + n\nu & -(m\mu + n\nu) \end{pmatrix} \quad (5..52)$$

b) Eingebettete Markov-Kette

α) Intensitätsgraph

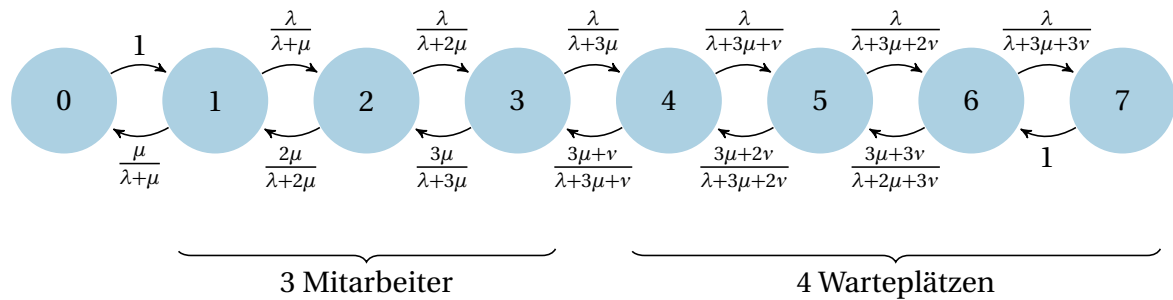


Abbildung 5..2: Übergangsgraph der eingebetteten Markovkette.

c) Bediensystem

Brechen die Nutzer in der Warteschlange nicht ab, handelt es sich um ein $M/M/3 - 4$ -System.

d) Parameter

$\lambda = 6$ Ankunftsrate, oben auf den Pfeilen von links nach rechts.

$\mu = 3$ Bedienrate, unten links.

$\nu = 2$ Abbruchrate, unten rechts.

$m = 2$ Übergang zwischen μ und ν unten.

$n = 4$ Warteplätze

e) Stationäre Verteilung

Stationäre Verteilung eines Geburts- und Todesprozesses:

$$\vartheta_0 = 1 \quad (5..53)$$

$$\vartheta_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{6}{3} = 2 \quad (5..54)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{6}{6} = 2 \quad (5..55)$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_2 \frac{6}{8} = \frac{3}{2} \quad (5..56)$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_3 \frac{6}{10} = \frac{9}{10} \quad (5..57)$$

$$\vartheta_5 = \vartheta_4 \frac{6}{12} = \frac{9}{20} \quad (5..58)$$

$$\vartheta_6 = \vartheta_5 \frac{6}{14} = \frac{27}{140} \quad (5..59)$$

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_i \vartheta_i} = \frac{1}{1 + 2 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{10} + \frac{9}{20} + \frac{27}{140}} = \frac{70}{563} \quad (5..60)$$

$$p_i^* = p_0^* \vartheta_i \quad (5..61)$$

$$p_1^* = \frac{140}{563} \quad (5..62)$$

$$p_2^* = \frac{140}{563} \quad (5..63)$$

$$p_3^* = \frac{105}{563} \quad (5..64)$$

$$p_4^* = \frac{63}{563} \quad (5..65)$$

$$p_5^* = \frac{63}{1126} \quad (5..66)$$

$$p_6^* = \frac{27}{1126} \quad (5..67)$$

f) Erwartete Gesamtanzahl und erwartete Anzahl von Kunden in der Warteschleife

α) Erwartete Gesamtanzahl von Kunden $E(X^*)$

$$E(X^*) = \sum_{i=1}^{m+k} i \cdot p_i^* \quad (5..68)$$

$$= \sum_{i=1}^6 i \cdot p_i^* \quad (5..69)$$

$$= \frac{1 \cdot 280 + 2 \cdot 280 + 3 \cdot 210 + 4 \cdot 126 + 5 \cdot 63 + 6 \cdot 27}{1126} = \frac{2451}{1126} \approx 2.177 \quad (5..70)$$

β) Erwartete Anzahl von Kunden in der Warteschleife $E(W^*)$

Mit der stationären Verteilung kann bestimmt werden, wie viele Nutzer warten. In Zustand 3 wartet ein Nutzer und in Zustand 4 warten zwei Nutzer und so weiter. Somit:

$$E(W^*) = p_3^* \cdot 1 + p_4^* \cdot 2 + p_5^* \cdot 3 + p_6^* \cdot 4 \quad (5..71)$$

$$= \frac{1 \cdot 210 + 2 \cdot 126 + 3 \cdot 63 + 4 \cdot 27}{1126} = \frac{759}{1126} \approx 0.674 \quad (5..72)$$

g) Blockierwahrscheinlichkeit

In Zustand 6 werden Anrufer abgewiesen.

$$p_B = p_6^* = \frac{27}{1126} \approx 2.40\% \quad (5..73)$$

h) Alternativen

α) Zusätzlicher Callcenter-Mitarbeiter

Nochmal rechnen, mit einem Mitarbeiter mehr, ϑ_0 bis ϑ_2 wie vorher:

$$\vartheta_2 = 2 \quad (5..74)$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_2 \frac{6}{9} = \frac{4}{3} \quad (5..75)$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_3 \frac{6}{11} = \frac{8}{11} \quad (5..76)$$

$$\vartheta_5 = \vartheta_4 \frac{6}{13} = \frac{48}{143} \quad (5..77)$$

$$\vartheta_6 = \vartheta_5 \frac{6}{15} = \frac{96}{715} \quad (5..78)$$

$$\vartheta_7 = \vartheta_6 \frac{6}{17} = \frac{576}{12155} \quad (5..79)$$

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_i \vartheta_i} \approx 0.13196 \quad (5..80)$$

$$p_7^* = \vartheta_7 p_0^* \approx 6.25\text{‰} \quad (5..81)$$

β) Weitere Warteplätze

Es ist klar, dass bei einem – ansonsten identischen System – die Blockierwahrscheinlichkeit bei zwei zusätzlichen Warteplätzen geringer ist, als bei nur einem zusätzlichen Warteplatz.

ϑ_0 bis ϑ_6 wie unter e)

$$\vartheta_6 = \frac{27}{140} \quad (5..82)$$

$$\vartheta_7 = \vartheta_6 \frac{6}{16} = \frac{81}{1120} \quad (5..83)$$

$$\vartheta_8 = \vartheta_7 \frac{6}{18} = \frac{27}{1120} \quad (5..84)$$

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_i \vartheta_i} = \frac{1}{\frac{563}{70} + \frac{81+27}{1120}} = \frac{280}{2279} \approx 0.12286 \quad (5..85)$$

$$p_7^* = \vartheta_7 p_0^* = \frac{280}{2279} \cdot \frac{27}{1120} = \frac{27}{9116} \approx 2.96\text{‰} \quad (5..86)$$

Die Alternative mit zwei zusätzlichen Warteplätzen ist die beste. (Bei einem zusätzlichen Warteplatz ergibt sich eine Blockierwahrscheinlichkeit von 8.92‰.)

6. Zusatzübung Frühjahr 2010

1. Warteschlangennetz

a) Modell und Zustandsraum

offenes Jackson-Netz

$$S = \mathbb{N}_0^4 \quad (6..1)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (1-\alpha) & 0 & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6..2)$$

b) Stationäre Verteilung

S_1, S_2, S_3 : $M/M/1$ -Stationen, S_4 : $M/M/\infty$ -Station.

Die stationäre Verteilung existiert, wenn $\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Sie lautet:

$$p_*(n) = \prod_{i=1}^3 (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} \exp(-\rho_4) \frac{\rho_4^{n_4}}{n_4!} \quad (6..3)$$

Die Flussgleichungen lauten:

$$\Lambda_1 = \lambda + \frac{1}{3}\Lambda_2 \quad (6..4)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \alpha\Lambda_4 \quad (6..5)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2 \quad (6..6)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{3}\Lambda_2 + \Lambda_3 \quad (6..7)$$

Λ_4 eliminieren durch Λ_4 in Λ_2

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\Lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda\Lambda_2 + \alpha\Lambda_3 \quad (6..8)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\Lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda\Lambda_2 + \frac{1}{2}\alpha\Lambda_1 + \frac{1}{3}\alpha\Lambda_2 \quad (6..9)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\Lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda\Lambda_2 + \frac{1}{2}\alpha\lambda + \frac{1}{2}\alpha\frac{1}{3}\Lambda_2 + \frac{1}{3}\alpha\Lambda_2 \quad (6..10)$$

$$\Lambda_2 \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{3}\alpha \right) = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\alpha\lambda \quad (6..11)$$

$$\Lambda_2 \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6}\alpha \right) = \frac{1}{2}\lambda(1 + \alpha) \quad (6..12)$$

$$\Lambda_2 = \lambda \frac{3(1 + \alpha)}{5(1 - \alpha)} \quad (6..13)$$

$$\Lambda_1 = \lambda \frac{5(1 - \alpha) + (1 + \alpha)}{5(1 - \alpha)} \quad (6..14)$$

$$= \lambda \frac{6 - 4\alpha}{5(1 - \alpha)} \quad (6..15)$$

$$\Lambda_3 = \lambda \frac{\frac{1}{2}(6 - 4\alpha) + (1 + \alpha)}{5(1 - \alpha)} \quad (6..16)$$

$$= \lambda \frac{(4 - \alpha)}{5(1 - \alpha)} \quad (6..17)$$

$$\Lambda_4 = \lambda \frac{\frac{1}{3}3(1 + \alpha) + (4 - \alpha)}{5(1 - \alpha)} \quad (6..18)$$

$$= \lambda \frac{5}{5(1 - \alpha)} \quad (6..19)$$

$$= \lambda \frac{1}{(1 - \alpha)} \quad (6..20)$$

c) Geschlossenes Jacksonnetz

Zustandsraum

$$S = \left\{ (n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4) \mid n_i \in \mathbb{N}_0, \sum_{i=1}^4 n_i = M \right\} \quad (6..21)$$

$$|S| = \binom{M + J - 1}{M} = \frac{(M + 3)(M + 2)(M + 1)}{3!} \quad (6..22)$$

d) Lösung Flussgleichungen

geschlossenes Jackson-Netz

$$\Lambda_1 = \frac{1}{3}\Lambda_2 \quad (6..23)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \Lambda_4 \quad (6..24)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2 \quad (6..25)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{3}\Lambda_2 + \Lambda_3 \quad (6..26)$$

Aus $\Lambda_1 = 2$

$$\Lambda_2 = 6 \quad (6..27)$$

$$\Lambda_3 = 3 \quad (6..28)$$

$$\Lambda_4 = 5 \quad (6..29)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (6..30)$$

e) Stationäre Verteilung

$$\mu = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (6..31)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6..32)$$

$$p^*(n) = K_M \prod_{i=1}^3 \rho_i^{n_i} \cdot \frac{\rho_4^{n_4}}{n_4!} \quad (6..33)$$

$$= K_M 3^{n_2} \frac{1}{n_4!} \quad (6..34)$$

Um K_M zu bestimmen kann *nicht* das Rekursionsschema genutzt werden, da es nicht nur $M/M/1$ -Stationen sind. Um zu vermeiden, dass alle Zustände aufgeschrieben werden fasst man die Zustände, bei denen $n_1 + n_3$ den gleichen Wert ergeben zusammen, da die Verteilung unabhängig von n_1 und n_3 ist.

$$K_M = \frac{3}{326} \quad (6..35)$$

$n_1 + n_3$	n_2	n_4	#	$3^{n_2}/n_4!$	
3	0	0	4	$1/1$	4
2	0	1	3	$1/1$	3
2	1	0	3	$3/1$	9
1	2	0	2	$9/1$	18
1	1	1	2	$3/1$	6
1	0	2	2	$1/2$	1
0	3	0	1	$27/1$	27
0	0	3	1	$1/6$	$1/6$
0	2	1	1	$1/9$	9
0	1	2	1	$3/2$	$3/2$
20				$\sum = \frac{236}{3}$	

Tabelle 6..1: K_M bestimmen.

f) Verteilung im nicht-blockierenden Fall

Jetzt wieder offenes Jackson-Netz:

$$\alpha = \frac{2}{3} \quad (6..36)$$

Aus (b) die Flüsse:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (6..37)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (6..38)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (6..39)$$

$$(6..40)$$

Im nicht-blockierenden Fall ist die Verteilung ein Produkt aus den Verteilungen zweier $M/M/1 - \infty$ -, einer $M/M/\infty$ - und einer $M/M/1 - 3$ -Station. Bei der $M/M/1 - 3$ -Station ist $\rho_3 \neq 1$. Da im Zustandsraum im nicht-blockierenden Fall so eingeschränkt ist, dass $n_3 \geq 3$ $K = 3$, kann in der Station 3 maximal eine Anforderung in Bedienung und zwei in der Warteschlange sein. Diese Station wird daher als $M/M/1 - 2$ -Station behandelt, also $K = 2$.

$$p_{nb}^* = (1 - \rho_1)\rho_1^{n_1} \cdot (1 - \rho_2)\rho_2^{n_2} \cdot \frac{1 - \rho_3}{1 - \rho_3^{K+2}} \rho_3^{n_3} \cdot \exp(-\rho_4) \frac{\rho_4^{n_4}}{n_4!} \quad (6..41)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{32}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_3} \cdot \exp(-1) \frac{1}{n_4!} \quad (6..42)$$

$$= \frac{8}{45} \exp(-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1+n_3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_2} \frac{1}{n_4!} \quad (6..43)$$

g) Blockierender Fall

@TODO Zeichnung

 α) Zustandsraum

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_4 \end{pmatrix} \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (6..44)$$

 β) Routingmatrix

Strom von außen: $\lambda = 1$ auf S_1 (wie bisher), $\mu_3 = 4$ auf S_4 . Ankünfte normieren für Routingmatrix.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \quad (6..45)$$

 γ) Stationäre Verteilung

Löse Flussgleichungen:

$$\Lambda_1 = 1 + \frac{1}{3}\Lambda_2 \quad (6..46)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{2}{3}\Lambda_4 \quad (6..47)$$

$$\Lambda_4 = 4 + \frac{1}{3}\Lambda_2 \quad (6..48)$$

Gleichungslöser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & -1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (6..49)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 30 & 57 & 63 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix} \quad (6..50)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 15 & 19 & 21 \\ 22 & 33 & 11 \end{pmatrix} \quad (6..51)$$

Die stationäre Verteilung existiert, da $\rho_1, \rho_2 < 1$.

$$p_O^* = (1 - \rho_1) \rho_1^{n_1} \cdot (1 - \rho_2) \rho_1^{n_2} \cdot \exp(-\rho_4) \frac{\rho_4^{n_4}}{n_4!} \quad (6..52)$$

$$= \frac{7}{22} \left(\frac{15}{22} \right)^{n_1} \cdot \frac{14}{33} \left(\frac{19}{33} \right)^{n_2} \cdot \exp\left(-\frac{21}{11}\right) \frac{\left(\frac{21}{11}\right)^{n_4}}{n_4!} \quad (6..53)$$

$$= \frac{49}{363} \exp\left(-\frac{21}{11}\right) \cdot \left(\frac{15}{22}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{19}{33}\right)^{n_2} \cdot \frac{\left(\frac{21}{11}\right)^{n_4}}{n_4!} \quad (6..54)$$

$$(6..55)$$

h) Wahrscheinlichkeit für den nicht-blockierenden Fall

$$\beta = (1 - \rho_3) (\rho_3^0 + \rho_3^1 + \rho_3^2 + \rho_3^3) \quad (6..56)$$

$$\rho_3 = \frac{1}{2} \text{ aus b)}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{15}{16} \quad (6..57)$$

2. Postfiliale

a) Modellierung

Ankommende Rate: $\frac{30}{\text{Stunde}} = \frac{\frac{1}{2}}{\text{Minute}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

Bediendauer Geld abheben: 3 Minuten $\Rightarrow \mu_G = \frac{1}{3}$

Bediendauer Briefmarken kaufen: $\mu_B = 1$ Kunden, die Geld abheben möchten $q_G = \frac{1}{3}$

Kunden, die Briefmarken kaufen möchten $q_B = \frac{2}{3}$

α) Systemtyp

Modellierung als $M/G/1 - \infty$ -FCFS-System.

M Ankunftsprozess Poisson

G General-independet Bedienprozess

1 Ein Schalter

∞ unendlich viele Warteplätze

β) Verteilungsfunktion der Bedienzeit

Das System ist vom Typ Hyper-Exponentialverteilung ([Mat, S.5])

$$F_X(x) = 1 - \sum_{i=1}^k q_i \exp(-\mu_i x), \quad x \geq 0 \quad (6..58)$$

$$= 1 - q_G \exp(-\mu_G x) - q_B \exp(-\mu_B x) \quad (6..59)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{1}{3}x\right) - \exp(-x) \quad (6..60)$$

b) Erwartete Anzahl von Kunden und Gesamtverweilzeit

α) Erwartete Anzahl von Kunden

Nach Proposition 6.4:

$$E(Y) = \frac{q_G}{\mu_B} + \frac{q_B}{\mu_B} \quad (6..61)$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{2}{3}}{1} \quad (6..62)$$

$$= \frac{5}{3} \quad (6..63)$$

$$E(Y^2) = q_G \frac{2}{\mu_G^2} + q_B \frac{2}{\mu_B^2} \quad (6..64)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{2}{3} \frac{2}{1} \quad (6..65)$$

$$= \frac{22}{3} \quad (6..66)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \quad (6..67)$$

$$= \frac{22}{3} - \frac{25}{9} \quad (6..68)$$

$$= \frac{41}{9} \quad (6..69)$$

$$c_Y^2 = \frac{V(Y)}{(E(Y))^2} \quad (6..70)$$

$$= \frac{\frac{41}{9}}{\frac{25}{9}} \quad (6..71)$$

$$= \frac{41}{25} \quad (6..72)$$

$$\rho = \lambda E(Y) \quad (6..73)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{5}{3} \quad (6..74)$$

$$= \frac{5}{6} < 1 \quad (6..75)$$

$$E(X^*) = \rho + \rho^2 \frac{1 + c_Y^2}{2(1 - \rho)} \quad (6..76)$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{25}{36} \frac{1 + \frac{41}{25}}{2 \left(1 - \frac{5}{6}\right)} \quad (6..77)$$

$$= \frac{19}{3} \approx 6.3 \text{ Kunden} \quad (6..78)$$

β) Erwartete Gesamtverweilzeit eines Kunden

Little's Gesetz:

$$E(W^*) = \frac{1}{\lambda} E(X^*) \quad (6..79)$$

$$= 2 \cdot \frac{19}{3} \quad (6..80)$$

$$= \frac{38}{3} = 12 \text{ Minuten und 40 Sekunden} \quad (6..81)$$

c) Laplace-Transformierte der Wartezeit

[Mat, S.57]

$$L_{W_Q}(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda L_Y(s)}, \quad s \geq 0 \quad (6..82)$$

Wobei $L_Y(s)$ die Laplace-Transformierte der Verteilung ist. Die wichtigsten sind im Skript. Für die vorliegende Hyperexponentialverteilung ist

$$L_Y(s) = \sum_{i=1}^k q_i \frac{\mu_i}{\mu_i + s}, \quad s \geq 0 \quad (6..83)$$

$$= q_G \frac{\mu_G}{\mu_G + s} + q_B \frac{\mu_B}{\mu_B + s} \quad (6..84)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1/3 + s} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 + s} \quad (6..85)$$

$$= \frac{1/3(1+s) + 2/3(1+3s)}{(1+3s)(1+s)} \quad (6..86)$$

$$= \frac{3+7s}{9s^2 + 12s + 3} \quad (6..87)$$

Dies wieder in $L_{W_Q}(s)$:

$$L_{W_Q}(s) = \frac{1/6s}{s - 1/2 + 1/2 \cdot \frac{3+7s}{9s^2+12s+3}} \quad (6..88)$$

$$= \frac{s}{6s - 3 + 3 \cdot \frac{3+7s}{9s^2+12s+3}} \quad (6..89)$$

$$= \frac{s(9s^2 + 12s + 3)}{(6s - 3)(9s^2 + 12s + 3) + 9 + 21s} \quad (6..90)$$

$$= \frac{9s^3 + 12s^2 + 3s}{54s^3 + 72s^2 + 18s - 27s^2 - 36s - 9 + 9 + 21s} \quad (6..91)$$

$$= \frac{9s^3 + 12s^2 + 3s}{54s^3 + 45s^2 + 3s} \quad (6..92)$$

$$= \frac{3s^2 + 4s + 1}{18s^2 + 15s + 1} \quad (6..93)$$

d) Erwartungswert der Wartezeit

Laplace-Transformierte ableiten, dann $s = 0$, dann negatives:

$$E(W_Q^*) = -L'_{w_Q}(0) \quad (6..94)$$

$$\frac{dL}{ds}_{w_Q}(s) = \frac{(6s+4)(18s^2+15s+1) - (3s^2+4s+1)(36s+15)}{(18s^2+15s+1)^2} \quad (6..95)$$

$$-L'_{w_Q}(0) = -\frac{4-15}{1} \quad (6..96)$$

$$= 11 \quad (6..97)$$

e) Begrenzte Wartekapazität

Hier gibt es zwei Lösungswege: Aus „Gotttsicht“ und „Mitarbeitersicht“.

α) „Gotttsicht“

Dies ist ein selbst erarbeitete Lösungsweg, der aufwändiger als die vorgestellte Lösung ist.

Zu jedem Kunden in der Schlange weiß der Beobachter¹ bereits bei Ankunft des Kunden, was er möchte. Der Zustandsraum ist:

$$S = \left\{ (s \quad w_1 \quad w_2) \mid s, w_1, w_2 \in \{0, G, B\}, w_1 \neq 0 \text{ nur wenn } s \neq 0, w_2 \neq 0 \text{ nur wenn } w_1 \neq 0 \right\} \quad (6..98)$$

Dabei steht der erste Eintrag s für den Kunden am Schalter, w_1 für den Kunden auf dem ersten Wartepplatz und w_2 für den Kunden auf dem zweiten Wartepplatz. 0 bedeutet, dass der Platz frei ist, G dass der Kunden Geld abheben möchte und B dass der Kunde Briefmarken kaufen möchte.

Da jeweils unterschieden werden muss welche Anforderungen die wartenden Kunden haben, wird der Graph recht groß.

¹Gott, fliegendes Spaghettimonster, ...

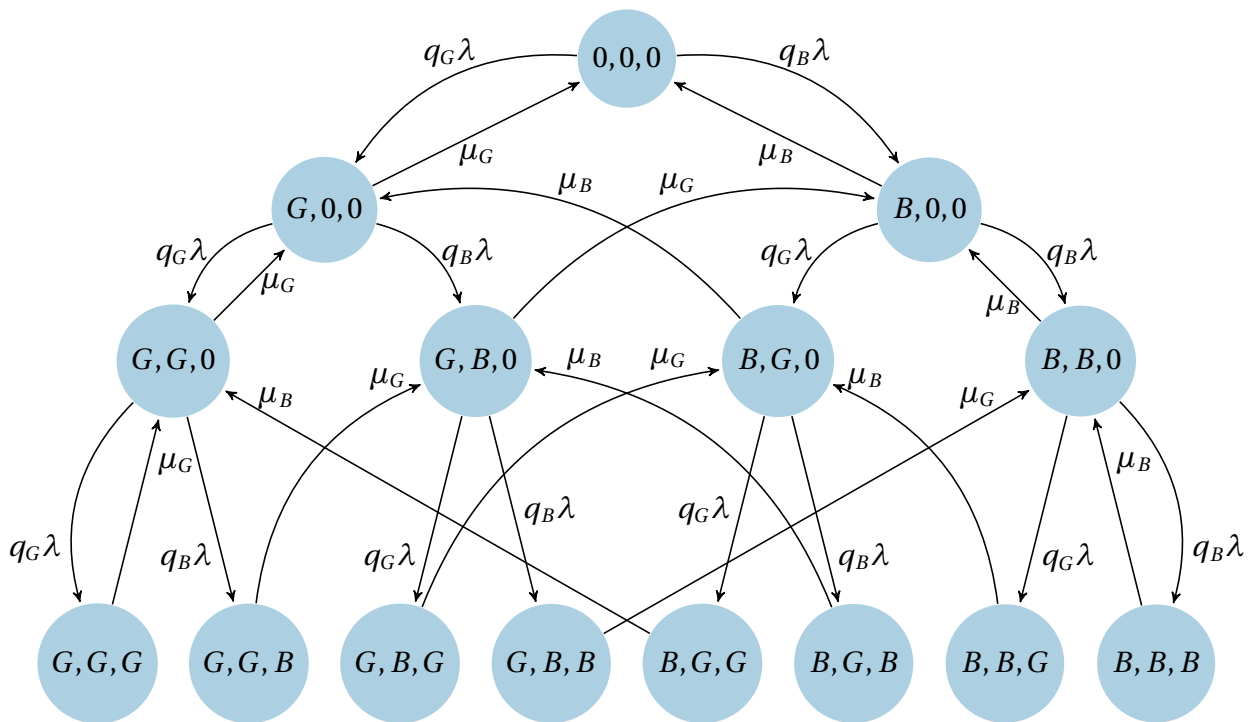


Abbildung 6..1: Intensitätsgraph.

β) „Mitarbeitersicht“

Bei dieser Variante wird nicht unterschieden von welchem Typ Kunde die wartenden Kunden sind. Es wird nur ihre Anzahl m gezählt. Unterschieden wird natürlich von welchem Typ der Kunde am Schalter ist, da davon die Bedienzeit abhängt. Erst wenn der Kunde am Schalter fertig bedient ist und der nächste Kunde aus der Schlange nachrückt, erfährt der Mitarbeiter am Schalter, welche Anforderung der Kunde hat. Das Ergebnis des Zufallsexperimentes wird in dieser Variante erst zu diesem Zeitpunkt sichtbar.

Der Zustandsraum ist:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} s & m \end{pmatrix} \mid s \in \{0, G, B\}, m \in \{0, 1, 2\}, m \neq 0 \text{ nur wenn } s \neq 0 \right\} \quad (6..99)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{Die Filiale ist leer.}) \right. \quad (6..100)$$

$$\begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{Typ } G \text{ wird bedient und die Warteschlange ist leer.}) \quad (6..101)$$

$$\begin{pmatrix} G & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{Typ } G \text{ wird bedient und ein Kunde wartet.}) \quad (6..102)$$

$$\begin{pmatrix} G & 2 \end{pmatrix}, \quad (\text{Typ } G \text{ wird bedient und zwei Kunden warten.}) \quad (6..103)$$

$$\begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{Typ } B \text{ wird bedient und die Warteschlange ist leer.}) \quad (6..104)$$

$$\begin{pmatrix} B & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{Typ } B \text{ wird bedient und ein Kunde wartet.}) \quad (6..105)$$

$$\begin{pmatrix} B & 2 \end{pmatrix} \} \quad (\text{Typ } B \text{ wird bedient und zwei Kunden warten.}) \quad (6..106)$$

Genauer wird der Übergang von $\begin{pmatrix} G & 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix}$ erläutert: In $\begin{pmatrix} G & 1 \end{pmatrix}$ wird eine Kunde vom Typ G bedient und ein Kunde mit unbekanntem Wunsch wartet in der Warteschlange. Die Bedienung erfolgt mit der Intensität μ_G .

Wenn die Bedienung abgeschlossen ist, ist relevant welchen Wunsch der aus der Warteschlange nachrückende Kunde hat: mit Wahrscheinlichkeit q_G will er auch Geld abheben, so dass der Filialmitarbeiter dann diese Anforderung bearbeitet und das System somit mit der Intensität $q_G\mu_G$ in Zustand $\begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}$ übergeht.

Mit Wahrscheinlichkeit q_B will er Briefmarken kaufen und das System geht mit der Intensität $q_B\mu_G$ in den Zustand $\begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix}$ über.

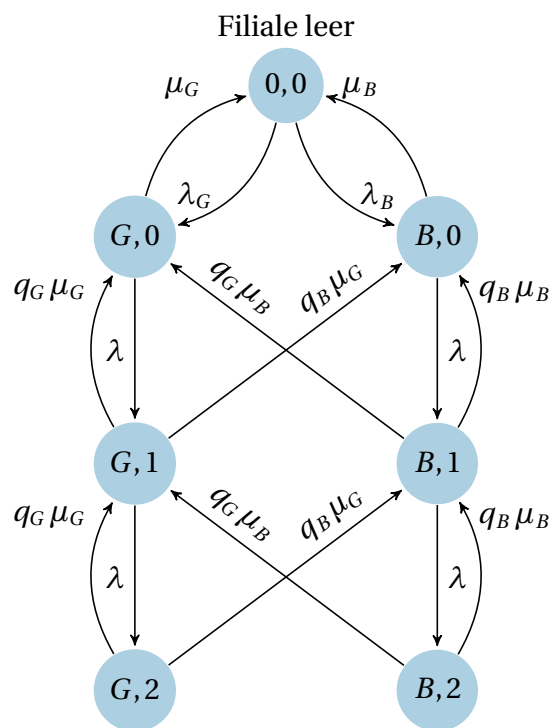


Abbildung 6..2: Intensitätsgraph.

7. Zusatzübung Herbst 2010

1. Jacksonnetz

a) Zustandsraum und Routingmatrix

Offenes Jacksonnetz, vier Stationen ($J = 4$).

α) Zustandsraum

Der Zustandsraum sind alle 4-Tupel auf dem Träger \mathbb{N}_0 .

$$S = \{(n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_i \in \mathbb{N}_0\} \quad (7..1)$$

$$= \mathbb{N}_0^4 \quad (7..2)$$

β) Routingmatrix

Die Routingmatrix kann man aus dem Graphen ablesen und enthält eine Spalte und Zeile für die Zu- und Abgänge. Die Zeilensumme muss immer 1 ergeben.

$$R = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \alpha & (1-\alpha) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \beta & \delta & 0 & (1-\beta-\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & (1-\gamma) & 0 \end{array} \right) \quad (7..3)$$

γ) Teilmatrix für Flussgleichungen

Die Routingmatrix ohne die erste Zeile und Spalte ergibt die Teilmatrix, mit der später die Flussgleichungen berechnet werden können. Die erste Zeile und Spalte steht für die Zu-/Abgänge von/nach außen.

$$\hat{R} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \delta & 0 & (1-\beta-\delta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\gamma) & 0 \end{array} \right) \quad (7..4)$$

δ) Flussgleichungen

Für das offene Jackson-Netz steht in den Flussgleichungen (hier in Matrixform) noch das λ für die Zuflüsse.

$$\Lambda = \lambda + \hat{R}\Lambda \quad (7..5)$$

b) Bedingung für stationäre Verteilung

α) Flussgleichungen

Aufstellen der Flussgleichungen, dann lösen. Hier ohne Zahlenwerte, $\delta = 0$ schon berücksichtigt. Wegen der stationären Lösung könnte man auch jedes Λ_i als Λ_i^* schreiben:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \alpha \lambda \\ \Lambda_2 &= (1 - \alpha) \lambda + \Lambda_3 \\ \Lambda_3 &= \frac{1}{2} \Lambda_1 + (1 - \beta) \Lambda_2 + \Lambda_3 + (1 - \gamma) \Lambda_4 \\ \Lambda_4 &= \frac{1}{2} \Lambda_1 \end{aligned} \quad (7..6)$$

Ineinander einsetzen:

$$\Lambda_1 = \alpha \lambda \quad (7..7)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \alpha \lambda \quad (7..8)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{2} \alpha \lambda + (1 - \beta) ((1 - \alpha) \lambda + \Lambda_3) + (1 - \gamma) \frac{1}{2} \alpha \lambda \quad (7..9)$$

$$\Lambda_3 (1 - 1 + \beta) = \frac{1}{2} \alpha \lambda + (1 - \beta) (1 - \alpha) \lambda + (1 - \gamma) \frac{1}{2} \alpha \lambda \quad (7..10)$$

$$\Lambda_3 = \frac{\lambda}{\beta} \left(1 - \beta(1 - \alpha) - \frac{1}{2} \alpha \gamma \right) \quad (7..11)$$

$$\Lambda_2 = (1 - \alpha) \lambda + \frac{\lambda}{\beta} \left(1 - \beta(1 - \alpha) - \frac{1}{2} \alpha \gamma \right) \quad (7..12)$$

$$= \frac{\lambda}{\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \gamma \right) \quad (7..13)$$

zusammen:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\beta} \left((\alpha\beta), \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \gamma \right), \left(1 - \beta(1 - \alpha) - \frac{1}{2} \alpha \gamma \right), \left(\frac{1}{2} \alpha \lambda \right) \right) \quad (7..14)$$

β) Bedingung

Wenn $\rho = \frac{\Lambda_i^*}{\mu_i} < 1$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ (alle $M/M/1$ Systeme), dann existiert eine stationäre Verteilung.

γ) Stationäre Verteilung

Allgemein ist die stationäre Verteilung:

$$p_i^*(n_1, n_2, n_3, n_4) = \prod_{i=1}^4 p_i^*(n_i) \quad (7..15)$$

Für $M/M/1$ -Systeme [Mat, S. 33]:

$$p_i^*(n_i) = (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (7..16)$$

Für das $M/M/\infty$ -System [Mat, S. 38]

$$p_4^*(n_4) = \exp(-\rho_4) \frac{\rho_4^{n_4}}{n_4!} \quad (7..17)$$

mit ρ_4 beliebig.

$$(7..18)$$

c) Erwartete Zahl an Anforderungen für Server S_4

$M/M/\infty$ -System

$$E(X_4^*) = \rho_4 = \frac{\Lambda_4^*}{\mu_4} = \frac{\alpha \lambda}{2} \frac{1}{\mu_4} \quad (7..19)$$

d) Gleicher Fluss

Interpretiere Λ_i^* als Fluss.

$$\Lambda_2^* \stackrel{!}{=} \Lambda_3^* \quad (7..20)$$

$$1 - \frac{1}{2} \alpha \gamma - \beta(1 - \alpha) = 1 - \frac{1}{2} \alpha \gamma \quad (7..21)$$

$$\beta(1 - \alpha) = 0 \quad (7..22)$$

$\beta \neq 0$ nach Aufgabenstellungen, daher ist die Bedingung

$$\alpha = 1 \quad (7..23)$$

die einzig richtige.

e) Fluss

$$\Lambda_1^* \stackrel{!}{\geq} \Lambda_2^* \quad (7..24)$$

$$\alpha\beta \geq 1 - \frac{1}{2}\alpha\gamma \quad (7..25)$$

$$\alpha\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \geq 1 \quad (7..26)$$

$\beta + \frac{\gamma}{2} > 0$, daher Relationszeichen beim Dividieren *nicht* umdrehen:

$$\alpha \geq \frac{1}{\beta + \frac{\gamma}{2}} \quad (7..27)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}:$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{\beta + \frac{\gamma}{2}} \quad (7..28)$$

$$\frac{2}{4} \geq \frac{2}{2\beta + \gamma} \quad (7..29)$$

Zähler gleich, also Nenner vergleichen:

$$4 < 2\beta + \gamma \quad (7..30)$$

Die Bedingung zu erfüllen ist nicht möglich, da $\beta, \gamma < 1$ nach Aufgabenstellung.

f) Neue Verteilung

$$\lambda = 2 \qquad \beta = \frac{1}{2} \qquad \gamma = \frac{1}{2} \quad (7..31)$$

$$\mu_1 = 1 \qquad \mu_2 = 4 \qquad \mu_3 = 3 \qquad \mu_4 = 1 \quad (7..32)$$

Prüfe für alle $M/M/1$ -Systeme:

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i^*}{\mu_i} < 1 \quad (7..33)$$

$$\rho_1 = \frac{\alpha\lambda}{\mu_1} \quad (7..34)$$

$$= \alpha \frac{2}{1} = 2\alpha < 1 \quad (7..35)$$

$$\Rightarrow \alpha < \frac{1}{2} \quad (7..36)$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\beta} \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\gamma \right) \frac{1}{\mu_2} \quad (7..37)$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\frac{1}{2} \right) \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}\alpha = 1 - \frac{1}{4}\alpha < 1 \quad (7..38)$$

$$\Rightarrow \alpha > 0 \quad (7..39)$$

$$\rho_3 = \frac{\lambda}{\beta} \left(1 - \beta(1 - \alpha) - \frac{1}{2}\alpha\gamma \right) \frac{1}{\mu_3} \quad (7..40)$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha) - \frac{1}{2}\alpha\frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \quad (7..41)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\alpha < 1 \quad (7..42)$$

$$\Rightarrow \alpha < 1 \quad (7..43)$$

Aus allen Bedingungen zusammen folgt, dass $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ gelten muss, damit eine stationäre Lösung existiert.

g) S_1 ändern

Es müssen nur ρ_1 und ρ_2 betrachtet werden. S_3 und S_4 sind nun $M/M/\infty$ -Systeme. Daher muss $0 < \alpha < 1$ gelten, damit eine stationäre Lösung existiert.

h) Geschlossenes Jacksonnetz

Die Änderung der Parameter ($\lambda = 0$, kein Zufluss, $\gamma = \beta = 0$, kein Abfluss) macht aus dem offenen Jacksonnetz ein geschlossenes.

α) Zustandsraum

In jeder Station ist die Anzahl an Anforderungen auf die Zahl der Anforderungen im System beschränkt. Damit ist die Anzahl an Zuständen endlich (sofern eine endliche

Zahl an Anforderungen im System existiert.)

$$S = \left\{ (n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_i \in \mathbb{N}_0, \sum_{i=1}^4 n_i = M \right\} \quad (7..44)$$

β) Mächtigkeit

Anzahl der Zustände nach [Mat, S. 50]:

$$|S| = \binom{J+M-1}{M} \quad (7..45)$$

$$= \frac{(J+M-1)!}{(J+M-1-M)!M!} = \frac{(4+M-1)!}{(4-1)!M!} = \frac{(3+M)!}{3!M!} \quad (7..46)$$

$$= \frac{(3+M)(2+M)(1+M)M!}{3!M!} = \frac{(3+M)(2+M)(1+M)}{6} \quad (7..47)$$

i) Lösung der Flussgleichung

Neue Flussgleichungen, da nun nicht gegeben ist, dass $\delta = 0$. Mit 7..4:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \delta & 0 & (1-\beta-\delta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\gamma) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7..48)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\Lambda_2 \quad (7..49)$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_3 \quad (7..50)$$

$$\Lambda_4 = \Lambda_1 \quad (7..51)$$

Mit Einsetzen von Λ_3 beginnen:

$$\Lambda_2 = 4 \quad (7..52)$$

$$\Lambda_1 = 2 \quad (7..53)$$

$$\Lambda_4 = 2 \quad (7..54)$$

Die Gleichung für Λ_3 wird eigentlich gar nicht benötigt, da Λ_3 bereits angegeben ist. Sie kann zur Verifizierung des Ergebnisses benutzt werden:

$$\Lambda_3 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2 + \Lambda_4 \quad (7..55)$$

$$= 1 + 1 + 2 = 4 \quad (\text{OK}) \quad (7..56)$$

Das Ergebnis ist:

$$\Lambda = (2, 4, 4, 1) \quad (7..57)$$

j) Stationäre Verteilung

Stationäre Verteilung nach Rechenschema, drei Anforderungen ($M = 3$), vier Stationen ($J = 4$):

$$\gamma_i = \frac{\Lambda_i^*}{\mu_i} \quad (7..58)$$

$$\Lambda_1 = 2 \quad \Lambda_2 = 4 \quad \Lambda_3 = 4 \quad \Lambda_4 = 1 \quad (7..59)$$

$$\mu_1 = 1 \quad \mu_2 = 4 \quad \mu_3 = 3 \quad \mu_4 = 1 \quad (7..60)$$

$$\gamma_1 = 2 \quad \gamma_2 = 1 \quad \gamma_3 = \frac{4}{3} \quad \gamma_4 = 1 \quad (7..61)$$

α) Rekursionsschema kurz

	$\gamma_1 = 2$	$\gamma_2 = 1$	$\gamma_3 = \frac{4}{3}$	$\gamma_4 = 1$
l/j	1	2	3	$4 = J$
0	1	1	1	$1 = \frac{1}{K_0}$
1	2	3	$\frac{13}{3}$	$\frac{16}{3} = \frac{1}{K_1}$
2	4	7	$\frac{115}{9}$	$\frac{163}{9} = \frac{1}{K_2}$
$3 = M$	8	15	$\frac{865}{27}$	$\frac{1354}{27} = \frac{1}{K_3}$

(7..62)

$$K_3 = \frac{27}{1354} \approx 0.0199 \quad (7..63)$$

Die stationäre Verteilung ist gegeben durch [Mat, S. 50]:

$$p^*(n) = K_M \prod_{i=1}^J (\gamma_i)^{n_i} \quad (7..64)$$

$$= \frac{27}{1354} (\gamma_1)^{n_1} \cdot (\gamma_2)^{n_2} \cdot (\gamma_3)^{n_3} \cdot (\gamma_4)^{n_4} \quad (7..65)$$

$$= \frac{27}{1354} (2)^{n_1} \cdot (1)^{n_2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n_3} \cdot (1)^{n_4} \quad (7..66)$$

$$= \frac{27}{1354} \cdot (2)^{n_1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n_3} \quad (7..67)$$

$$(7..68)$$

β) Rekursionsschema ausführlich

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
l/j	1	2	3	4	5
0	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_2 = 1$	$\gamma_3 = 1$	$\gamma_4 = 1$	$\gamma_5 = 1$
1	$C_1(1) = \gamma_1 = 1$	$C_1(2) = \gamma_1 + \gamma_2 = 2$	$C_1(3) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 3$	$C_1(4) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 4$	$C_1(5) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 5$
2	$C_2(1) = \gamma_1^2 = 1$	$C_2(2) = C_1(1) + \gamma_2 C_1(1) = 2$	$C_2(3) = C_1(2) + \gamma_3 C_1(2) = 5$	$C_2(4) = C_1(3) + \gamma_4 C_1(3) = 14$	$C_2(5) = C_1(4) + \gamma_5 C_1(4) = 39$
3 = M	$C_3(1) = \gamma_1^3 = 1$	$C_3(2) = C_2(1) + \gamma_2 C_2(1) = 4$	$C_3(3) = C_2(2) + \gamma_3 C_2(2) = 16$	$C_3(4) = C_2(3) + \gamma_4 C_2(3) = 67$	$C_3(5) = C_2(4) + \gamma_5 C_2(4) = 274$

(7..69)

k) Erwartete Anzahl an Anforderungen

Erwartungswert (Skript S. 51), die $C_{M-\ell}(J)$ sind die Einträge der letzten Spalte. Von unten nach oben durchgehen, bei der *vorletzten* Zeile beginnen. γ_i entsprechend des Servers wählen:

$$E(X_i^*) = K_M \sum_{\ell=1}^M \gamma_i^\ell C_{M-\ell}(J) \quad (7..70)$$

$$E(X_2^*) = \frac{27}{1354} \left(1^1 \frac{163}{9} + 1^2 \frac{16}{3} + 1^3 \cdot 1 \right) = \frac{330}{677} \quad (7..71)$$

Der Erwartungswert für S_4 ist der selbe, da $\gamma_4 = \gamma_2$:

$$E(X_4^*) = \frac{330}{677} \quad (7..72)$$

2. Tandem-Server

a) Bediensystemtyp, Verteilung der Bedienzeit

α) Bediensystemtyp

Zur Kendall-Notation siehe [TG06, S. 9]:

- Die Zufallsvariable des Ankunftsprozesses ist ein Poisson-Prozess ($PP(\lambda)$) und besitzt Markov-Eigenschaft, daher handelt es sich um einen Markov-Prozess (M).
- Der Bedienprozess wird mit Hilfe einer Zufallsvariable beschrieben (α) und die Realisierung dieser Zufallsvariablen sind statistisch unabhängig. Es handelt sich um eine allgemein verteilte Bedienzeit. Daher besitzt der Bedienprozess *nicht* die Markov-Eigenschaft und wird “general independent” (G) genannt.
- Es gibt eine Bedieneinheit, also (1).
- Der Warteraum ist unbegrenzt (∞).

Der Typ des Bediensystems ist also:

$$M/G/1 - \infty \quad (7..73)$$

Dieses System wird auch in [Mat, S. 53] und [TG06, S.156] behandelt.

β) Verteilung der Bedienzeit

Beide Pfade entlanggehen, hintereinanderliegende Bedienzeiten werden gefaltet (*):

$$Y \sim \alpha \text{Exp}(\mu_1) * \text{Exp}(\mu_2) + (1 - \alpha) \text{Exp}(\mu_1) \quad (7..74)$$

Diese Verteilung wird nach [Mat, S. 8] auch als Cox-Verteilung bezeichnet:

$$Y \sim \text{Cox}(\alpha; \mu_1, \mu_2) \quad (7..75)$$

b) Erwartungswert der Bedienzeit Y

Der Erwartungswert kann mit Hilfe der Laplacetransformation bestimmt werden. Nach [Mat, S. 5] gilt:

$$E(Y) = -L'_Y(0) \quad (7..76)$$

In der Notation der Systemtheorie bedeutet das:

$$E(Y) = - \left(\frac{d}{ds} (\mathcal{L}(Y)) \right) \Big|_{s=0} \quad (7..77)$$

Die Laplace-Transformierte der Cox-Verteilung ist in [Mat, S. 8] direkt angegeben:

$$v = L_Y(s) = \sum_{i=1}^k p_i \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\mu_j + s} \quad (7..78)$$

Für $k = 2$:

$$L_Y(s) = p_1 \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + p_2 \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} \quad (7..79)$$

$$= (1 - \alpha) \mu_1 \frac{1}{\mu_1 + s} + \alpha \mu_1 \mu_2 \frac{1}{\mu_1 + s} \frac{1}{\mu_2 + s} \quad (7..80)$$

für die Ableitung $\left(\frac{1}{x}\right)' = (-1) \frac{x'}{x^2}$

$$L'_Y(s) = (1 - \alpha) \mu_1 \cdot (-1) \frac{1}{(\mu_1 + s)^2} + \alpha \mu_1 \mu_2 \cdot (-1) \frac{\mu_1 + \mu_2 + 2s}{((\mu_1 + s)(\mu_2 + s))^2} \quad (7..81)$$

$$-L'_Y(0) = (1 - \alpha) \mu_1 \frac{1}{\mu_1^2} + \alpha \mu_1 \mu_2 \frac{\mu_1 + \mu_2}{(\mu_1 \mu_2)^2} \quad (7..82)$$

$$= (1 - \alpha) \frac{1}{\mu_1} + \alpha \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \quad (7..83)$$

$$-L'_Y(0) = \frac{\mu_2 - \mu_2 \alpha + \alpha \mu_1 + \alpha \mu_2}{\mu_1 \mu_2} = \frac{\mu_2 + \alpha \mu_1}{\mu_1 \mu_2} \quad (7..84)$$

$$= \frac{1}{\mu_1} + \frac{\alpha}{\mu_2} (= v) \quad (7..85)$$

c) Stationäre Verteilung

Die stationäre Verteilung existiert — genau wie bei $M/M/1$ -Systemen — wenn

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (7..86)$$

Nach [Mat, S. 53] ist $\frac{1}{v} = \mu$ die Bedienrate. Somit

$$\rho = \lambda v < 1 \quad (7..87)$$

$$\lambda \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{\alpha}{\mu_2} \right) < 1 \quad (7..88)$$

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{\alpha}{\mu_2} < \frac{1}{\lambda} \quad (7..89)$$

$$\alpha < \mu_2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu_1} \right) \quad (7..90)$$

d) Mittlere Anzahl und mittlere Gesamtverweilzeit im stationären Zustand

α) Stationärer Zustand

Überprüfung der Bedingung aus 7.2.c).

$$\alpha < \mu_2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu_1} \right) \quad (7..91)$$

$$\frac{5}{6} < 5 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right) \quad (7..92)$$

$$\frac{10}{12} < \frac{25}{12} \quad (\text{OK}) \quad (7..93)$$

Oder

$$\rho = \frac{\lambda}{\nu} \quad (7..94)$$

$$= \lambda \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{\alpha}{\mu_2} \right) < 1 \quad (7..95)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{5/6}{5} \right) = \frac{2}{3} < 1 \quad (\text{OK}) \quad (7..96)$$

β) Mittlere Anzahl an Anforderungen im Tandem-Server im stationären Zustand

Nach Proposition 6.4 [Mat, S. 56] gilt

$$E(X^*) = \rho + \rho^2 \frac{1 + c_Y^2}{2(1 - \rho)} \quad (7..97)$$

mit $c_Y = \frac{\sigma}{\nu} = \frac{\sqrt{V(Y)}}{E(Y)}$ (7..98)

$$c_Y^2 = \left(\frac{\sigma_Y}{\nu} \right)^2 \quad (7..99)$$

σ_Y^2 ist der Variationskoeffizient und kann als höheres Moment des Erwartungswertes berechnet werden [Mat, S. 5]:

$$\sigma_Y^2 = L_Y''(0) - \left(L_Y'(0) \right)^2 \quad (7..100)$$

Ausgehend von 7..81

$$L'_Y(s) = (1 - \alpha)\mu_1 \cdot (-1) \frac{1}{(\mu_1 + s)^2} + \alpha\mu_1\mu_2(-1) \frac{\mu_1 + \mu_2 + 2s}{((\mu_1 + s)(\mu_2 + s))^2} \quad (7..101)$$

$$L''_Y(s) = (1 - \alpha)\mu_1 \cdot (+1) \frac{2(\mu_1 + s)}{(\mu_1 + s)^4} + \alpha\mu_1\mu_2(-1) \frac{2((\mu_1 + s)(\mu_2 + s))^2 - (\mu_1 + \mu_2 + 2s) \cdot 2((\mu_1 + s)(\mu_2 + s))(2s + \mu_1 + \mu_2)}{((\mu_1 + s)(\mu_2 + s))^4} \quad (7..102)$$

$$L''_Y(0) = (1 - \alpha) \frac{2}{\mu_1^2} + \alpha\mu_1\mu_2(-1) \frac{2(\mu_1\mu_2)^2 - (\mu_1 + \mu_2)^2 2\mu_1\mu_2}{(\mu_1\mu_2)^4} \quad (7..103)$$

$$= (1 - \alpha) \frac{2}{\mu_1^2} + 2\alpha \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \mu_1\mu_2}{(\mu_1\mu_2)^2} \quad (7..104)$$

$$= \left(1 - \frac{5}{6}\right) \frac{2}{3^2} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{(3+5)^2 - 3 \cdot 5}{(3 \cdot 5)^2} = \frac{2}{5} \quad (7..105)$$

Für c_Y wird noch $L'_Y(0)$ benötigt:

$$L'_Y(0) = \left(1 - \frac{5}{6}\right) \cdot 3 \cdot (-1) \frac{1}{3^2} + \frac{5}{6} \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot \frac{3+5}{(3 \cdot 5)^2} = -\frac{1}{2} \quad (7..106)$$

$$-L'_Y(0) = \frac{1}{2} \quad (7..107)$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{20} \quad (7..108)$$

$$v = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\alpha}{\mu_2} = \frac{1}{2} \quad (7..109)$$

in 7..97

$$E(X^*) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \frac{1 + 2^2 \frac{3}{20}}{2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{26}{15} \quad (7..110)$$

Einschub Rechentechnik Für die Ableitung von $L''_Y(s)$ gibt es zwei Möglichkeiten:

- Quotientenregel:

$$\left(\frac{1}{(\mu_1 + s)^2}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' \quad (7..111)$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (7..112)$$

$$= \frac{0 \cdot (\mu_1 + s)^2 - 2(\mu_1 + s)}{(\mu_1 + s)^4} = \frac{-2}{(\mu_1 + s)^3} \quad (7..113)$$

- Kettenregel:

$$\left(\frac{1}{(\mu_1 + s)^2} \right)' = \left(\frac{1}{v^2} \right)' \quad (7..114)$$

$$= (-2) \frac{v'}{v^3} \quad (7..115)$$

$$= \frac{-2}{(\mu_1 + s)^3} \quad (7..116)$$

γ) Mittlere Gesamtverweilzeit

Nach dem Gesetz von Little:

$$E(W^*) = \frac{1}{\lambda} E(X^*) \quad (7..117)$$

$$= \frac{3}{4} \frac{26}{15} = \frac{13}{10} \quad (7..118)$$

e) Stationäre Verteilung berechnen

$$\lambda = 1 \quad \mu_1 = 2 \quad \mu_2 = 2 \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad (7..119)$$

In 7..80

$$L_Y(s) = \frac{1}{2} \frac{2}{2+s} + \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2}{(2+s)^2} = \frac{1}{2+s} + \frac{2}{(2+s)^2} \quad (7..120)$$

8. Zusatzübung Frühjahr 2011

1. Service-Hotline

Eigene Lösung, jedoch in Sprechstunde kontrolliert.

Ankunftsprozess	$PP(\lambda)$
Bedienrate	β
Bedienplätze	B
Warteplätze	P
Abbruchrate	Anzahl der Kunden vor einem Kunden

a) Modellierung

Modellierung als Geburts- und Todesprozess.

α) Zustandsraum

$$S = \{0, 1, \dots, B + P\} \quad (8..1)$$

$$|S| = B + P + 1 \quad (8..2)$$

β) Abbruchrate

Die Abbruchrate der wartenden Kunden hängt von der Anzahl der Kunden in der Warteschlange ab. Der erste Kunde in der Warteschlange wird das Gespräch nicht abbrechen. Der zweite Kunde hat einen Kunden vor sich, daher ist seine Abbruchrate 1. Der dritte Kunde bekommt angesagt, dass vor ihm zwei Kunden warten, so dass seine Abbruchrate 2 sein wird. Gleichzeitig kann auch der Kunde vor ihm mit der Rate 1 das Gespräch beenden, so dass in der Warteschlange die Intensität in einen niedrigeren Zustand überzugehen die Summe der Abbruchraten zuzüglich der Bedienintensität aller Berater ist (Tabelle 8..1).

γ) Intensitätsgraph

@TODO Graph

Platz in der Warteschlange	Abbruchrate	
1	0	= 0
2	1	= 1
3	1 + 2	= 3
4	1 + 2 + 3	= 6
⋮		
P	$1 + 2 + \dots + (P - 1)$	$= \sum_{i=1}^{P-1} i = \frac{P(P-1)}{2}$

Tabelle 8..1: Abbruchrate in Abhängigkeit vom Warteplatz**b) Übergangsgraph und Übergangsmatrix****α) Übergangsgraph****β) Übergangsmatrix**

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/7 & 0 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8..3)$$

c) Beispielsystem

$\alpha = 6$ Die Ankunftsintensität ist konstant und kann von den Pfeilen von links nach recht abgelesen werden.

$\beta = 1$ Die Bedienrate der Berater nimmt wie bei einem $M/M/\infty$ -System von einem Zustand zum nächsten zu.

$B = 3$ Dass alle Berater im Gespräch sind erkennt man daran, dass die Bedienintensität nicht mehr steigt. Im Zustand 4 ist der erste Kunde in der Warteschlange. Seine Abbruchintensität ist 0.

$P = 4$ Die Zustände 4 bis 7 sind Warteplätze.

d) Stationäre Verteilung und Blockierwahrscheinlichkeit

α) Stationäre Verteilung

$$\vartheta_0 = 1 = 1 \quad p_0^* = \frac{1}{421} \quad (8..4)$$

$$\vartheta_1 = \frac{6}{1} = 6 \quad p_0^* = \frac{6}{421} \quad (8..5)$$

$$\vartheta_2 = 6 \cdot \frac{6}{2} = 18 \quad p_0^* = \frac{18}{421} \quad (8..6)$$

$$\vartheta_3 = 18 \cdot \frac{6}{3} = 36 \quad p_0^* = \frac{36}{421} \quad (8..7)$$

$$\vartheta_4 = 36 \cdot \frac{6}{3} = 72 \quad p_0^* = \frac{72}{421} \quad (8..8)$$

$$\vartheta_5 = 72 \cdot \frac{6}{4} = 108 \quad p_0^* = \frac{108}{421} \quad (8..9)$$

$$\vartheta_6 = 108 \cdot \frac{6}{5} = 108 \quad p_0^* = \frac{108}{421} \quad (8..10)$$

$$\vartheta_7 = 108 \cdot \frac{6}{9} = 72 \quad p_0^* = \frac{72}{421} \quad (8..11)$$

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_i \vartheta_i} \quad (8..12)$$

$$= \frac{1}{1 + 6 + 18 + 36 + 72 + 108 + 108 + 72} = \frac{1}{421} \quad (8..13)$$

 β) Blockierwahrscheinlichkeit

Blockierwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Zustand 7 befindet, da dann Anfragen abgewiesen werden.

$$p_B = p_7^* = \frac{72}{421} \quad (8..14)$$

e) Erwartete Gesamtanzahl und Anzahl wartender Kunden **α) Erwartete Gesamtanzahl Kunden im System**

Mit der Kenntnis der Verteilung im stationären Zustand lässt sich die erwartete Gesamtanzahl Kunden im System bestimmen. Ein p_i^* kann auch interpretiert werden als die Zeitspanne in der sich das System in dem Zustand i befindet. In diesem Fall sind im

Zustand i genau i Kunden im System.

$$E(X^*) = \sum_{i=1}^{B+P=7} i \cdot p_i^* \quad (8..15)$$

$$= \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 36 + 72 \cdot 4 + 108 \cdot 5 + 108 \cdot 6 + 72 \cdot 6}{421} \quad (8..16)$$

$$= \frac{2130}{421} \approx 5.06 \text{ Kunden} \quad (8..17)$$

β) Erwartete Anzahl wartender Kunden

In den Zuständen 4 bis 7 warten 1 bis 4 Kunden im System. Mit der Gewichtung durch die stationäre Verteilung ergibt sich

$$E(W^*) = \sum_{i=B+1=4}^{B+P=7} (i - B) \cdot p_i^* \quad (8..18)$$

$$= \frac{1 \cdot 72 + 2 \cdot 108 + 3 \cdot 108 + 4 \cdot 72}{421} \quad (8..19)$$

$$= \frac{900}{421} \approx 2.13 \text{ Kunden} \quad (8..20)$$

f) Bewertung von Alternativen

α) Alternative 1

@TODO Graph

$$\vartheta_0 = 1 = 1 \quad (8..21)$$

$$\vartheta_1 = 1 \cdot \frac{6}{1} = 6 \quad (8..22)$$

$$\vartheta_2 = 6 \cdot \frac{6}{2} = 18 \quad (8..23)$$

$$\vartheta_3 = 18 \cdot \frac{6}{3} = 36 \quad (8..24)$$

$$\vartheta_4 = 36 \cdot \frac{6}{4} = 54 \quad (8..25)$$

$$\vartheta_5 = 54 \cdot \frac{6}{4} = 81 \quad (8..26)$$

$$\vartheta_6 = 81 \cdot \frac{6}{5} = \frac{486}{5} \quad (8..27)$$

$$\vartheta_7 = \frac{486}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2916}{35} \quad (8..28)$$

$$\vartheta_8 = \frac{8748}{175} \cdot \frac{6}{10} = \frac{8748}{175} \quad p_8^* = \frac{8748}{74368} \quad (8..29)$$

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_i \vartheta_i} \quad (8..30)$$

$$= \frac{175}{74638} \quad (8..31)$$

Die Blockierwahrscheinlichkeit ist

$$p_B = p_8^* = \frac{4374}{37319} \approx 11.7\% \quad (8..32)$$

β) Alternative 2

@TODO Graph

ϑ_0 bis ϑ_7 sind wie in Teil d.

$$\vartheta_7 = 72 \quad (8..33)$$

$$\vartheta_8 = 72 \cdot \frac{6}{13} = \frac{432}{13} \quad (8..34)$$

$$\vartheta_9 = \frac{432}{13} \cdot \frac{6}{18} = \frac{144}{13} \quad p_9^* = \frac{144}{6049} \quad (8..35)$$

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_i \vartheta_i} \quad (8..36)$$

$$= \frac{13}{6049} \quad (8..37)$$

Die Blockierwahrscheinlichkeit ist

$$p_B = p_9^* = \frac{144}{6049} \approx 2.4\% \quad (8..38)$$

Somit ist die Alternative 2 besser.

2. Jackson-Netz

a) Zustandsraum, Routingmatrix und Lösung der Flussgleichungen

α) Zustandsraum

$$S = \mathbb{N}_0^2 \quad (8..39)$$

β) Routingmatrix

Ankunftsströme normieren:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \alpha \quad (8..40)$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1 - \alpha \quad (8..41)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & (1 - \alpha) \\ (1 - \beta) & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8..42)$$

γ) Lösung der Flussgleichungen

$$\Lambda_1 = \alpha\lambda + \Lambda_2 \quad (8..43)$$

$$\Lambda_2 = (1 - \alpha)\lambda + \beta\Lambda_1 \quad (8..44)$$

Λ_1 in Λ_2

$$\Lambda_2 = (1 - \alpha)\lambda + \beta\alpha\lambda + \beta\Lambda_2 \quad (8..45)$$

$$\Lambda_2(1 - \beta) = \lambda(1 - \alpha + \alpha\beta) \quad (8..46)$$

$$\Lambda_2 = \lambda \frac{1 - \alpha + \alpha\beta}{1 - \beta} \quad (8..47)$$

$$= \frac{\lambda}{1 - \beta} - \alpha\lambda \quad (8..48)$$

$$\Lambda_1 = \alpha\lambda + \frac{\lambda}{1 - \beta} - \alpha\lambda \quad (8..49)$$

$$= \frac{\lambda}{1 - \beta} \quad (8..50)$$

$$\Lambda_2 = k\Lambda_1 \quad (8..51)$$

$$k = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \quad (8..52)$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{(1-\beta)-\alpha}}{\frac{1}{(1-\beta)}} \quad (8..53)$$

$$= 1 - \alpha(1 - \beta) \quad (8..54)$$

$$\Lambda_2 = (1 - \alpha(1 - \beta)) \Lambda_1 \quad (8..55)$$

b) Existenz stationäre Verteilung

Für ein $M/M/s - \infty$ -System existiert eine stationäre Verteilung, wenn

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{s\mu_i} < 1 \quad (8..56)$$

mit $s = 2$

$$\rho_1 = \frac{\frac{\lambda}{1-\beta}}{2\mu} = \frac{2}{5} < 1 \quad \text{OK} \quad \rho_2 = \frac{\frac{\lambda}{1-\beta} - \alpha\lambda}{2\mu} = \frac{7}{20} < 1 \quad \text{OK} \quad (8..57)$$

Die stationäre Verteilung eines $M/M/2$ -Systems ist ein Sonderfall von $M/M/s$. Die sonst notwendige Fallunterscheidung verschwindet für $s = 2$

$$p^* = 2\rho_1^{n_1} p_{0,1}^* \cdot 2\rho_2^{n_2} p_{0,2}^* \quad (8..58)$$

mit

$$(p_{0,i}^*)^{-1} = 1 + 2\rho_i + \frac{2\rho_i^2}{1-\rho_i} \quad (8..59)$$

$$(p_{0,1}^*)^{-1} = 1 + 2 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{3} \quad (p_{0,2}^*)^{-1} = 1 + 2 \cdot \frac{7}{20} + \frac{2 \cdot \frac{49}{400}}{\frac{13}{20}} = \frac{27}{13} \quad (8..60)$$

$$p_{0,1}^* = \frac{3}{7} \quad p_{0,2}^* = \frac{13}{27} \quad (8..61)$$

$$p^* = \frac{52}{63} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{7}{20}\right)^{n_2} \quad n_1, n_2 \geq 1 \quad (8..62)$$

Der Fall $n_i = 0$ muss noch unterschieden werden! kontrollieren @TODO.

$$p^* = \begin{cases} 2p_{0,1}^* \rho_1^{n_1} & n_1 \geq 1 \\ p_{0,1}^* & n_1 = 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} 2p_{0,2}^* \rho_2^{n_2} & n_2 \geq 1 \\ p_{0,2}^* & n_2 = 0 \end{cases} \quad (8..63)$$

Q: So richtig?

c) Erweiterung und stationäre Verteilung an Station 3

@TODO Graph

Stationäre Verteilung nur an Station 3 gefragt. Dazu neue Routingmatrix und Lösung der Flussgleichungen:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & (1-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \beta & (1-\beta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1-\gamma) & \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0.25 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8..64)$$

$$\Lambda_1 = 0.25 + \Lambda_2 + 0.25\Lambda_3 \quad (8..65)$$

$$\Lambda_2 = 0.75 + 0.5\Lambda_1 \quad (8..66)$$

$$\Lambda_3 = 0.5\Lambda_1 \quad (8..67)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0.25 \\ 0.5 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.75 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8..68)$$

$$\Lambda_1 = \frac{8}{3} \quad (8..69)$$

$$\Lambda_2 = \frac{25}{12} \quad (8..70)$$

$$\Lambda_3 = \frac{4}{3} \quad (8..71)$$

Symbolisch gelöst:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda}{(1-\beta)(1-\gamma)} \quad (8..72)$$

$$\Lambda_3 = \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad (8..73)$$

Existenz der stationären Verteilung:

$$\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{2\mu} = \frac{8}{15} < 1 \text{ (OK)} \quad \rho_2 = \frac{\Lambda_2}{2\mu} = \frac{5}{12} < 1 \text{ (OK)} \quad \rho_3 = \frac{\Lambda_3}{\nu} = \frac{8}{15} \text{ (egal)} \quad (8..74)$$

Die stationäre Verteilung existiert:

$$p_3^* = \exp(-\rho_3) \frac{\rho_3^{n_3}}{n_3!} = \exp(-8/15) \frac{\left(\frac{8}{15}\right)^{n_3}}{n_3!} \quad (8..75)$$

d) Wahrscheinlichkeit

Proposition 3.21 aus [Mat, S.28]

Fluss an Station 1:

$$\Lambda_1 = \frac{8}{3} \quad (8..76)$$

Intervall der Länge drei:

$$t - s = 3 \quad (8..77)$$

Genau zwei Anforderungen:

$$N_t = j - i = 2 \quad (8..78)$$

$$P(N_{(0,3]=2}) = \exp(-8) \frac{8^2}{2} \quad (8..79)$$

e) Geschlossenes Jackson-Netz

@TODO graph

Alles $M/M/2 - \infty$ Stationen.

α) Routingmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \beta & (1-\beta) \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8..80)$$

β) Zustandsraum

$$|S| = \binom{M+J-1}{M} = \binom{4}{2} = 6 \quad (8..81)$$

$$S = \{(0 \ 0 \ 2), (0 \ 2 \ 0), (2 \ 0 \ 0), (1 \ 0 \ 1), (1 \ 1 \ 0), (0 \ 1 \ 1)\} \quad (8..82)$$

f) Explizite stationäre Verteilung

Löse Flussgleichungen:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 + \Lambda_3 \quad (8..83)$$

$$\Lambda_2 = 0.25\Lambda_1 \quad (8..84)$$

$$\Lambda_3 = 0.75\Lambda_1 \quad (8..85)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \quad (8..86)$$

Q: Kann man nicht einfach wie mit $M/M/\infty$ rechnen, da keine der Stationen blockiert? Was unterscheidet eine $M/M/2$ -Station und eine $M/M/\infty$ -Station, wenn nur maximal 2 Anforderungen im System sind?

$$\mu = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (8..87)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (8..88)$$

$$p^*(n) = K_M \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{n_2}}{n_2!} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n_3}}{n_3!} \quad (8..89)$$

$$p^*(002) = K_M \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{8} K_M \quad (8..90)$$

$$p^*(020) = K_M \frac{\frac{1}{64}}{2} = \frac{1}{128} K_M \quad (8..91)$$

$$p^*(200) = K_M \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8} K_M \quad (8..92)$$

$$p^*(101) = K_M \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} K_M \quad (8..93)$$

$$p^*(110) = K_M \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} K_M \quad (8..94)$$

$$p^*(011) = K_M \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16} K_M \quad (8..95)$$

$$(8..96)$$

$$\sum_{n \in S} p^*(n) = 1 \quad (8..97)$$

$$K_M \left(\frac{9}{8} + \frac{1}{128} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} \right) = 1 \quad (8..98)$$

$$K_M = \frac{128}{289} \quad (8..99)$$

$$p^*(002) = \frac{144}{289} \quad (8..100)$$

$$p^*(020) = \frac{1}{289} \quad (8..101)$$

$$p^*(200) = \frac{16}{289} \quad (8..102)$$

$$p^*(101) = \frac{96}{289} \quad (8..103)$$

$$p^*(110) = \frac{8}{289} \quad (8..104)$$

$$p^*(011) = \frac{24}{289} \quad (8..105)$$

$$(8..106)$$

9. Zusatzübung Herbst 2011

Eigene Mitschrift aus der Zusatzübung am 2011-07-22.

1. Markov-Prozess

a) Zustandsraum und Intensitätsmatrix

α) Zustandsraum

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (9..1)$$

β) Intensitätsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -(\alpha + \beta) & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -(2\alpha + \beta) & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & -(\alpha + \beta) & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & \beta & -\beta \end{pmatrix} \quad (9..2)$$

b) Übergangsmatrix und Übergangsgraph der eingebetteten Markovkette

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\alpha + \beta} & 0 & \frac{\alpha}{\alpha + \beta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{2\alpha + \beta} & 0 & \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} & \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha + \beta} & 0 & \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (9..3)$$

@TODO Graph

c) Zustandswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markov-Kette

Die Anfangsverteilung ist mit $p_0(0) = 1$ angegeben. Das bedeutet, dass zum Zeitschritt 0 der erste Eintrag des Vektors p eins ist. Da der Vektor stochastisch ist (Summe aller Einträge eins), gibt das die Anfangsverteilung komplett an:

$$p(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9..4)$$

Die Zeitschritte berechnen sich mit folgender Rekursion:

$$p(1) = p(0)\Pi \quad (9..5)$$

$$p(2) = p(1)\Pi \quad (9..6)$$

$$p(3) = p(2)\Pi \quad (9..7)$$

$$p(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Pi \quad (9..8)$$

Das filtert die erste Zeile heraus:

$$p(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9..9)$$

$$p(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Pi \quad (9..10)$$

Das filtert die zweite Zeile heraus:

$$p(2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta}{\alpha+\beta} & 0 & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9..11)$$

Linearkombination aus 2. und 4. Zeile:

$$p(3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{\beta}{2\alpha+\beta} & 0 & \frac{\alpha}{2\alpha+\beta} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{2\alpha+\beta} \frac{\alpha}{2\alpha+\beta} \end{pmatrix} \quad (9..12)$$

$$= \frac{1}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)} \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha\beta + \beta^2 & 0 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad (9..13)$$

d) Eigenschaften der eingebetteten Markov-Kette

α) reduzibel oder irreduzibel

Die Markov-Kette ist irreduzibel, da von allen Zuständen jeweils alle anderen erreicht werden können, da $\alpha, \beta > 0$. (Wichtig ist hier das $>$, eine ≥ 0 ist nicht genug.)

β) rekurrent oder transient

Die Markov-Kette ist rekurrent, da sie irreduzibel und der Zustandsraum endlich ist. („irreduzibel“ + „Zustandsraum endlich“ \implies „rekurrent“).

γ) periodisch oder aperiodisch

Die Markov-Kette ist aperiodisch. Da sie irreduzibel ist, genügt es die Eigenschaft für einen Zustand zu untersuchen. Es gibt z.B. zwei Wege von Zustand 2 zu Zustand 2 zu gelangen: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ und $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$.

e) Stationäre Verteilung des Markov-Prozesses

Wegen Prozess: $0 = \begin{pmatrix} p_0^* & p_1^* & p_2^* & p_3^* & p_4^* \end{pmatrix} Q$

$$0 = p^* \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad (9..14)$$

$$0 = -p_0^* + 2p_1^* \quad (9..15)$$

$$0 = p_0^* - 3p_1^* + 2p_2^* \quad (9..16)$$

$$0 = p_1^* - 4p_2^* + 2p_3^* + 2p_4^* \quad (9..17)$$

$$0 = p_2^* - 3p_3^* + 2p_4^* \quad (9..18)$$

$$0 = p_2^* + p_3^* - 4p_4^* \quad (9..19)$$

$$1 = p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* \quad (9..20)$$

Aus Gleichung 1

$$p_1 = \frac{1}{2} p_0 \quad (9..21)$$

Das in Gleichung 2

$$p_2 = \frac{1}{4} p_0 \quad (9..22)$$

Aus Gleichung 2 und 3

$$0 = 3p_2 - 5p_3 \quad (9..23)$$

$$\frac{3}{4} p_0 - 5p_3 = 0 \quad (9..24)$$

$$p_3 = \frac{3}{20} p_0 \quad (9..25)$$

In Gleichung 2

(9..26)

$$0 = \frac{1}{4}p_0 - \frac{9}{20}p_0 + 2p_4 \quad (9..27)$$

$$p_4 = \frac{1}{10}p_0 \quad (9..28)$$

Dies alles in die letzte Gleichung

$$1 = p_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{10} \right) \quad (9..29)$$

$$p_0 = \frac{1}{2} \quad (9..30)$$

$$p_1 = \frac{1}{4} \quad (9..31)$$

$$p_2 = \frac{1}{8} \quad (9..32)$$

$$p_3 = \frac{3}{40} \quad (9..33)$$

$$p_4 = \frac{1}{20} \quad (9..34)$$

f) Modellierung

α) Zustandsraum

Für den Zustandsraum genügt es nicht die Anzahl der Anforderungen im System zu zählen. Beispielsweise macht es einen Unterschied, ob eine Anforderung in Warteschlange 1 oder 2 wartet. Wartet sie in W_1 wird eine Anforderung, die auf diese Warteschlange geroutet wird, verworfen, da W_1 nur die Kapazität 1 hat. Ist die Anforderung jedoch in W_2 und wird eine ankommende Anforderung auf jeden Fall aufgenommen (entweder in die leere W_1 oder in W_2 , wo noch ein Platz frei ist).

Daher ist der Zustandsraum komplizierter. Ein Zustand soll durch das Tripel

$$(s \quad w_1 \quad w_2) \quad (9..35)$$

beschrieben werden.

Auslastung des Servers

$$s \in \{0, 1\} = \{\text{frei, belegt}\} \quad (9..36)$$

Anforderungen in Warteschlange 1

$$w_1 \in \{0, 1\} = \{W_1 \text{ frei}, W_1 \text{ belegt}\} \quad (9.37)$$

Anforderungen in Warteschlange 2

$$w_2 \in \{0, 1, 2\} = \{W_2 \text{ frei}, W_2 \text{ eine Anforderung}, W_2 \text{ belegt}\} \quad (9.38)$$

Den Zustandsraum muss man jetzt anhand des Graphen entwickeln:

$$S = \left\{ (0 \ 0 \ 0), (1 \ 0 \ 0), (1 \ 1 \ 0), (1 \ 0 \ 1), (1 \ 1 \ 1), (1 \ 0 \ 2), (1 \ 1 \ 2) \right\} \quad (9.39)$$

β) Intensitätsgraphen

@TODO

γ) Intensitätsmatrix

Durchnummerierung des Zustände von links nach rechts.

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda/2 & \lambda/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda/2 + \mu) & 0 & \lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -(\lambda + \mu) & \lambda/2 & \lambda/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu/2 & \mu/2 & -(\lambda/2 + \mu) & 0 & \lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & -(\lambda/2 + \mu) & \lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu/2 & \mu/2 & -\mu \end{pmatrix} \quad (9.40)$$

2. Jackson-Netz

a) Routingmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9..41)$$

b) Lösung Flussgleichungen

$$\Lambda = \lambda + \Lambda \hat{R} \quad (9..42)$$

$$\Lambda_1 = 1 + \frac{1}{3}\Lambda_4 + \frac{1}{2}\Lambda_5 \quad (9..43)$$

$$\Lambda_2 = 2 \quad (9..44)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_4 \quad (9..45)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (9..46)$$

$$\Lambda_5 = \Lambda_3 \quad (9..47)$$

Λ_3 und Λ_5 in Λ_1

$$\Lambda_1 = 1 + \frac{1}{3}\Lambda_4 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\Lambda_4 \quad (9..48)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\Lambda_4 + \frac{1}{4}\Lambda_1 \quad (9..49)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2 + \frac{1}{4}\Lambda_1 \quad (9..50)$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\Lambda_1 + 1 + \frac{1}{4}\Lambda_1 \quad (9..51)$$

$$= 4 \quad (9..52)$$

$$\Lambda_4 = 4 \quad (9..53)$$

$$\Lambda_3 = \frac{10}{3} \quad (9..54)$$

$$\Lambda_5 = \frac{10}{3} \quad (9..55)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \frac{10}{3} & 4 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad (9..56)$$

c) Stationäre Verteilung des offenen Jackson-Netzes

Die stationäre Verteilung hat immer die Produktform:

$$p^*(n) = \prod_{i=1}^5 p_i^*(n_i) \quad (9..57)$$

$$p_i^*(n) = \begin{cases} (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} & M/M/1 - \text{Stationen} \\ \exp(-\rho_i) \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} & M/M/\infty - \text{Stationen} \\ \begin{cases} p_0^* & n_i = 0 \\ \frac{(2\rho_i)^{n_i}}{n_i!} p_0^* & n_i = 1 \\ 2\rho_i^{n_i} p_0^* & n_i > 1 \end{cases} & M/M/2 - \text{Stationen} \end{cases} \quad (9..58)$$

$$(p_0^*)^{-1} = 1 + 2\rho_i + \frac{(2\rho_i)^2}{2} \frac{1}{1 - \rho_i} \quad (9..59)$$

Mit den Werten der Aufgabe:

$$(p_0^*)^{-1} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \quad (9..60)$$

$$p_0^* = \frac{1}{2} \quad (9..61)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \frac{10}{3} & 4 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad (9..62)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (9..63)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \quad (9..64)$$

$$\rho_2 = \frac{2}{3} \quad (9..65)$$

$$\rho_3 = \frac{2}{3} \quad (9..66)$$

$$\rho_4 = 4 \quad (9..67)$$

$$\rho_5 = \frac{\Lambda_5}{s\mu_5} = \frac{1}{3} \quad (9..68)$$

Somit ist die stationäre Verteilung:

$$p^*(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1+1} \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{(n_2+n_3)} \exp(-4) \frac{4^{n_4}}{n_4!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n_5} \quad (9..69)$$

Der Term für das $M/M/2$ -System fällt auf eine sehr einfache Form zusammen.

d) Wartewahrscheinlichkeit und Warteschlangenlänge

α) Wartewahrscheinlichkeit

$$E_2\left(2, \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \quad (9..70)$$

β) Warteschlangenlänge

$$L_Q = \frac{1}{2} \frac{\left(2\frac{1}{3}\right)^2}{2!} \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{12} \quad (9..71)$$

e) Geschlossenes Jackson-Netz

Die Station 2 kann wegfallen, da ihr Fluss 0 ist ($\lambda_2 = 0$ nach Aufgabenstellung).

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9..72)$$

f) Stationäre Verteilung

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\Lambda_4 + \Lambda_5 \quad (9..73)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_4 \quad (9..74)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\Lambda_1 \quad (9..75)$$

$$\Lambda_5 = \Lambda_3 \quad (9..76)$$

$$12 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4 + \Lambda_5 \quad (9..77)$$

Durch Einsetzen lösen:

$$\Lambda_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 12 \quad (9..78)$$

Oder mit $\Lambda_3 = \Lambda_5$ kann man da ein Gleichungssystem mit nur drei Unbekannten machen, so dass man das mit dem Taschenrechner lösen kann.

$$-\Lambda_1 + \Lambda_3 + \frac{1}{2}\Lambda_4 = 0 \quad (9..79)$$

$$\frac{1}{2}\Lambda_1 - \Lambda_3 + \frac{1}{2}\Lambda_4 = 0 \quad (9..80)$$

$$-\frac{1}{2}\Lambda_1 + \Lambda_4 = 0 \quad (9..81)$$

$$\Lambda_1 + 2\Lambda_3 + \Lambda_4 = 12 \quad (9..82)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (9..83)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (9..84)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & 2 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad (9..85)$$

$$(9..86)$$

Rekursionsschema für K_M

	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	2	$\frac{3}{5}$
0	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{91}$	$\frac{31}{711}$	$\frac{37}{933}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{100}{671}$	$\frac{100}{14891}$	$\frac{100}{20489}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1000}{1000}$	$\frac{1000}{1000}$	$\frac{1000}{1000}$

$$K_M = \frac{1000}{20489} \quad (9..87)$$

$$p^*(n) = 0.0488 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n_3+n_5} \cdot (2)^{n_4} \quad (9..88)$$

g) Durchsatz und Auslastung

α) Durchsatz an Server S_4

$$\lambda_4 = \Lambda_4 \frac{C_2(3)}{C_3(3)} \quad (9..89)$$

$$= 2 \cdot \frac{9.33}{20.489} = \frac{18660}{20489} \approx 0.911 \quad (9..90)$$

β) Auslastung an Server S_5

$$\rho_5 = \lambda_5 \frac{C_2(3)}{C_3(3)} \tag{9..91}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{9.33}{20.489} = \frac{5598}{20489} \approx 0.273 \tag{9..92}$$

10. Klausur Herbst 2011

Eigenes Klausurprotokoll von der Klausur am 2011-08-02.

Irgendwo war noch die Frage, wie hoch die W'keit ist, dass mindestens eine Anforderung im System ist. Ich glaube es war bei Aufgabe 2. Aber sicher bin ich mir nicht mehr. Ist sowieso irgendwie alles weg :-)

1. Einwohnermeldeamt

35 Punkte.

Im Einwohnermeldeamt arbeiten drei Mitarbeiter. Ein Mitarbeiter braucht unter optimalen Bedingungen zwölf Minuten um eine Anfrage eines Bürgers zu bearbeiten. Insgesamt arbeiten drei Mitarbeiter. Ist nur ein Mitarbeiter beschäftigt wird er durch seine beiden Kollegen so gestört, dass er nur 80 % seiner Leistung erbringen kann. Wenn zwei Mitarbeiter arbeiten werden sie durch den sich langweilenden Kollegen so gestört, dass sie nur 30 % ihrer Leistung erbringen. Sind alle beschäftigt arbeiten sie mit maximaler Leistung.

Im Amt kommen pro Stunde 10 Kunden an. Sie gehen sofort zu einem freien Mitarbeiter. Sind alle Mitarbeiter beschäftigt, warten sie. Das Einwohnermeldeamt hat eine unbegrenzte Wartekapazität. Ihre Ankunft kann als Poisson-Prozess modelliert werden und die Bedienzeiten seien exponentialverteilt.

a) Bedienzeiten

Wie sind die Bedienzeiten verteilt?

b) Ankunftswahrscheinlichkeit

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufällig gewählten Intervall von $t = \frac{1}{2}$ Stunde kein Kunde ankommt?

c) Intensitätsgraph

Geben Sie den Intensitätsgraph dieses Systems an.

d) Stationäre Verteilung

Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

e) Wahrscheinlichkeit

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Anforderung im System ist?

f) Variation

Wenn ankommende Kunden nicht sofort einen freien Mitarbeiter vorfinden, entscheiden sie sich zu 50% das Amt sofort wieder zu verlassen. Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

Hinweis: kann als unabhängiges Zufallsexperiment modelliert werden.

2. Jackson-Netz

55 Punkte.

- Jackson-Netz
- offen
- vier Stationen
- Station 1: $M/M/2 - \infty, \mu_1 = 3$
- Station 2 bis 4: $M/M/1 - \infty$

a) Zustandsraum, Routingmatrix

Geben Sie Zustandsraum und Routingmatrix an.

b) Flussgleichungen

Lösen Sie die Flussgleichungen. Verwenden Sie dazu $\Lambda_1 = ?$ und $\Lambda_2 = ?$. (Es waren konkrete Zahlenwerte gegeben, die das Lösen der Flussgleichungen stark vereinfacht haben.) Verifizieren Sie Ihr Ergebnis.

c) Stationäre Verteilung

Verifizieren Sie, dass eine stationäre Verteilung existiert und bestimmen Sie diese.

d) Auslastung

Bestimmen Sie die Auslastung der Stationen 1 bis 4!

e) geschlossenes Jackson-Netz

Das Netz wird verändert zu einem geschlossenen Jackson-Netz mit $M = 4$ Anforderungen. Die $M/M/2$ -Station wird zu einer $M/M/1$ -Station mit $\mu_1 = 6$ umgewandelt. Die Abflüsse werden umgeleitet und die Zuflüsse entfernt. Die Routingwahrscheinlichkeiten wurden auch geändert.

Skizzieren Sie das geschlossene Jackson-Netz.

f) Zustandsraum, Mächtigkeit

Stellen Sie den Zustandsraum auf und geben Sie seine Mächtigkeit an.

g) Routingmatrix, Flussgleichungen

Stellen Sie die Routingmatrix auf und geben Sie eine Lösung der Flussgleichungen mit $\Lambda_1 = 6$ an.

h) Stationäre Verteilung, Durchsatz, Auslastung

Geben Sie die stationäre Verteilung an. Bestimmen Sie Durchsatz und Auslastung der Stationen 1 bis 4.

11. Rezepte

1. Intensitätsgraph

μ_i (Bedienraten) und λ_i (Ankunftsrate) sind Intensitäten. Der Intensitätsgraph ist eine Darstellung aller (diskreten) Zustände. Die durch Pfeile gekennzeichneten Übergänge zwischen den Zuständen sind die entsprechenden Intensitäten.

Übliches Aussehen:

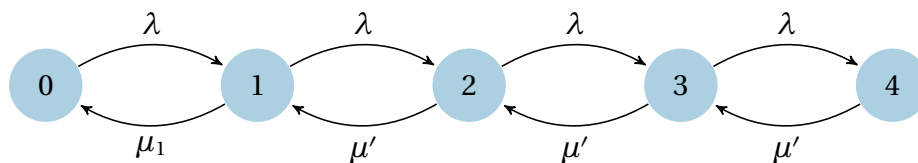


Abbildung 11..1: Intensitätsgraph.

Von links nach rechts Zunahme der Anforderungen im System durch den Ankunftsprozess (λ).

Von rechts nach links Abnahme der Anforderungen im System durch die Bedienprozesse. Wenn in einem Zustand mehrere Systeme aktiv sind (parallele Bearbeitung) addieren sich die Bedienraten ($\mu' = \mu_1 + \mu_2$).

Ist geklärt, welcher Server priorisiert Anforderungen bearbeitet, ist er auch der Server, der die letzte Anforderung bearbeitet ($1 \xrightarrow{\mu_1} 0$).

2. Intensitätsmatrix

Die Intensitätsmatrix Q kann aus dem Intensitätsgraphen direkt abgelesen werden.

Eine *Zeile* steht dabei für die Übergangsintensitäten *in* die anderen Zustände. Die Zeilensumme muss immer null ergeben und wird durch den Diagonaleintrag ausgeglichen.

Beispiel:

$$Q = \begin{pmatrix} -(\lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu' & -(\mu' + \lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu' & -(\mu' + \lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \mu' & -(\mu') \end{pmatrix} \quad (11..1)$$

3. Übergangsgraph

Der Übergangsgraph stellt Übergangswahrscheinlichkeiten dar. Die Zahlen an den Pfeilen geben die Übergangswahrscheinlichkeit von einem zu einem anderen Zustand an. Da die Wahrscheinlichkeiten stochastisch sein sollen, werden die Intensitäten so normiert, dass die Summe aller Abgänge *von* einem Zustand *eins* ergibt. Geht von einem Zustand nur ein Pfeil ab, so ist dieser automatisch 1 (meiste die Zustände am Rand).

Beispiel:

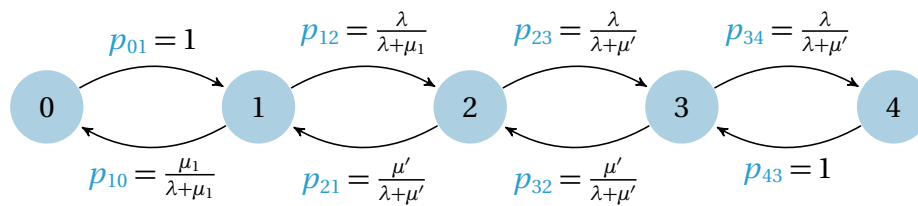


Abbildung 11..2: Übergangsgraph.

4. Übergangsmatrix

Bei der Übergangsmatrix werden die Intensitäten so normiert, dass die Summe aller Abgänge von einem Zustand eins ergibt. Die Diagonaleinträge werden zu null gesetzt und die Zeilensumme ist somit immer eins.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\mu_1 + \lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu_1 + \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu'}{\mu' + \lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu' + \lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu'}{\mu' + \lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu' + \lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11..2)$$

5. Geburts- und Todesprozesse (GTP)

Systeme, die aus mehreren $M/M/n/k$ mit n, k endlich, bestehen, können als GTP modelliert werden. Voraussetzung ist, dass nur Übergänge zwischen zwei direkt benachbarten Zuständen möglich ist (siehe H08).

a) Stationäre Verteilung

α) Existenz

[Mat, S. 30]

$$\sum_{j \in S} \vartheta_j < \infty \quad (11..3)$$

β) Berechnung

Q: Hier ist in H08 zwei verschiedene Ansätze verwendet wurden, die unterschiedliche Ergebnisse liefern. Noch klären!

Stationäre Verteilung nach Seite 30. gegeben: Übergangsgraph oder Übergangsmatrix. Die λ_j und μ_j sind nach dem Zustand benannt, von dem sie ausgehen. In der Übergangsmatrix stehen die λ_j auf der oberen Nebendiagonale und die μ_j auf der unteren Nebendiagonale.

$$Q = \begin{pmatrix} \ddots & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & \ddots & \lambda_1 & \\ & \mu_2 & \ddots & \lambda_2 \\ & & \mu_3 & \ddots & \lambda_3 \\ & & & \mu_4 & \ddots \end{pmatrix} \quad (11..4)$$

$$\vartheta_0 = 1 \quad (11..5)$$

$$\vartheta_j = \frac{\lambda_0 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_j}, \quad j \geq 1 \quad (11..6)$$

oder rekursiv:

$$\vartheta_j = \vartheta_{j-1} \cdot \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \quad (11..7)$$

und ausgeschrieben also:

$$\vartheta_0 = 1 \quad (11..8)$$

$$\vartheta_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \quad (11..9)$$

$$\vartheta_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} = \vartheta_1 \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_2} \quad (11..10)$$

$$\vartheta_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \vartheta_2 \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_3} \quad (11..11)$$

$$\vartheta_4 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = \vartheta_3 \cdot \frac{\lambda_3}{\mu_4} \quad (11..12)$$

$$\vdots \quad (11..13)$$

Die stationäre Verteilung ist dann:

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_{j \in S} \vartheta_j} \quad (11..14)$$

$$p_j^* = \vartheta_j \cdot p_0^*, \quad j \in S \quad (11..15)$$

Ausgeschrieben also:

$$p_0^* = \frac{1}{1 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots} \quad (11..16)$$

$$p_1^* = \vartheta_1 \cdot p_0^* \quad (11..17)$$

$$p_2^* = \vartheta_2 \cdot p_0^* \quad (11..18)$$

$$p_3^* = \vartheta_3 \cdot p_0^* \quad (11..19)$$

$$p_4^* = \vartheta_4 \cdot p_0^* \quad (11..20)$$

$$\vdots \quad (11..21)$$

Test:

$$\sum_{j \in S} p_j^* = 1 \quad (11..22)$$

Stationäre Verteilung mit $p = p\Pi$. Gegeben: Übergangsmatrix Π .

Im stationären Fall soll gelten

$$p = p \Pi \quad (11..23)$$

$$(p_0 \ p_1 \ p_2 \ \dots) = (p_0 \ p_1 \ p_2 \ \dots) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1 & & & 0 \\ \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_1} & & \\ & \frac{\mu_2}{\mu_2 + \lambda_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2} & \\ & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & & & \frac{\mu_{m-1}}{\mu_{m-1} + \lambda_{m-1}} & 0 & \frac{\lambda_{m-1}}{\mu_{m-1} + \lambda_{m-1}} \\ & & & & \frac{\mu_m}{\mu_m} = 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11..24)$$

Das ergibt $m + 1$ Gleichungen für p_0 bis p_m . Zum Lösen p_1 bis p_m durch p_0 ausdrücken.

$$p_j = \alpha_j p_0 \quad (11..25)$$

Mit der Zusatzbedingung

$$\sum_{j \in S} p_j = 1 \quad (11..26)$$

ergibt sich ein Wert für p_0 und somit für alle p_j .

b) Blockierwahrscheinlichkeit

Bei Systemen mit endlicher Anzahl an Bedien- und Warteplätzen ist die Blockierwahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit mit der alle Plätze belegt sind. Z.B. $p_B = p_4^*$ wenn im System vier Anforderungen vorliegen können.

Vorgehen: stationäre Verteilung bestimmen, nur $p_{j_{\max}}$ interessiert.

6. Offenes Jackson Netz

a) Ankunftsprozess

Normierte Ankunftsströme auf die einzelnen Stationen.

$$\underline{\lambda} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, 0, 0 \right)$$

b) Routingmatrix

Zeilensumme muss 1 sein, daher auch Ankunftsströme normieren. „0“ für Außenwelt. Zeile steht für Quelle („von“) Spalte für Ziel („nach“).

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} & \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad (11..27)$$

Teilmatrix ohne Außenwelt

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad (11..28)$$

α) Flussgleichungen

$$\underline{\Lambda} = \underline{\lambda} + \hat{R}\underline{\Lambda} \quad (11..29)$$

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{pmatrix} \quad (11..30)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{2}\Lambda_3 + \frac{1}{3}\Lambda_4 \quad (11..31)$$

$$\Lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{3}\Lambda_1 \quad (11..32)$$

$$\Lambda_3 = 0 + \frac{1}{3}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_4 \quad (11..33)$$

$$\Lambda_4 = 0 + \frac{1}{3}\Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (11..34)$$

Einsetzen und lösen. Die Lösung ist unterbestimmt. Wähle ganze Zahlen für Komfort. Manchmal ist auch die Summe $\sum_i \Lambda_i$ vorgegeben.

$$\underline{\Lambda}^* = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

c) Stationäre Lösung

Die stationäre Lösung des Netzes hat immer die Form

$$\underline{p}(\underline{n}) = \prod_{i=1}^J p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_J^{n_J} \quad (11..35)$$

und setzt sich somit aus den stationären Lösungen der einzelnen Stationen zusammen

Bei der stationären Lösung der einzelnen Stationen muss die Art der Station unterschieden werden. Es gibt $M/M/1$, $M/M/\infty$ und $M/M/s$ Stationen.

n_i ist ein Element des Trägers (Anzahl Anforderungen in Station i).

α) $M/M/1$ -Station

[Mat, S. 33]

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1 \quad (11..36)$$

$$p_i(n_i) = (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} \quad (11..37)$$

β) $M/M/\infty$ -Station

[Mat, S. 38]

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \text{ egal!} \quad (11..38)$$

$$p_i(n_i) = \exp(-\rho_i) \cdot \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} \quad (11..39)$$

γ) $M/M/s$ -Station

[Mat, S. 39], Voraussetzung:

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{s\mu_i} < 1 \quad (11..40)$$

$$p_i(n_i) = \begin{cases} p_0^* & n_i = 0 \\ \frac{(s\rho_i)^{n_i}}{n_i!} p_0^* & n_i = 1, \dots, s-1 \\ \frac{s^s}{s!} \rho_i^{n_i} p_0^* & n_i \geq s \end{cases} \quad (11..41)$$

mit

$$(p_0^*)^{-1} = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(s\rho_i)^j}{j!} + \frac{(s\rho_i)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho_i} \quad \text{invertieren nicht vergessen!} \quad (11..42)$$

Den expliziten Summanden getrennt aufschreiben, kann für die zweite Erlangfunktion sehr nützlich sein! Der erste Summand der Summe ist 0.

Sonderfall $s = 2$

$$p_i(n_i) = \begin{cases} 2\rho_i p_0^* & n_i = 1 \\ 2\rho_i^{n_i} p_0^* & n_i \geq 2 \end{cases} \quad (11..43)$$

$$p_i(n_i) = 2p_0^* \rho_i^{n_i} \quad (11..44)$$

mit

$$(p_0^*)^{-1} = 1 + 2\rho_i + \frac{2\rho_i^2}{1-\rho_i} \quad \text{invertieren nicht vergessen!} \quad (11..45)$$

d) Wartewahrscheinlichkeit

$\alpha)$ $M/M/s$ -Station

Wahrscheinlichkeit, dass ein ankommender Kunde in der Warteschlange warten muss:

$$E_2(s, \rho_i) = \frac{\frac{(s\rho_i)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho_i}}{\sum_{j=0}^{s-1} \frac{(s\rho_i)^j}{j!} + \frac{(s\rho_i)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho_i}} \quad (11..46)$$

Sonderfall $s = 2$

$$E_2(2, \rho_i) = \frac{\frac{2\rho_i^2}{1-\rho_i}}{1 + 2\rho_i + \frac{2\rho_i^2}{1-\rho_i}} \quad (11..47)$$

e) Erwartete mittlere Anzahl von Anforderungen **α) $M/M/1$ -Station**

[Mat, S.35]

$$E(X_i^*) = \frac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i} \quad (11..48)$$

 β) $M/M/\infty$ -Station

[Mat, S.38]

$$E(X_i^*) = \rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \quad (11..49)$$

f) Mittlere Gesamtverweilzeit **α) $M/M/1$ -Station**

[Mat, S.35]

$$E(W_i^*) = \frac{1}{\mu_i - \Lambda_i} \quad (11..50)$$

 β) $M/M/\infty$ -Station**g) Warteschlangenlänge** **α) $M/M/s$ -Station**

Die erwartete Warteschlangenlänge im stationären Zustand ergibt sich als

$$L_Q = p_0^* \frac{(s\rho_i)^s}{s!} \frac{\rho_i}{(1-\rho)^2} \quad (11..51)$$

h) Lösung einer komischen Aufgabe **α) Hilfsgröße**

$$\gamma_1 = \frac{\Lambda_1^*}{\mu_1} \quad \gamma_2 = \frac{\Lambda_2^*}{\mu_2} \quad \gamma_3 = \frac{\Lambda_3^*}{\mu_3} \quad \gamma_4 = \frac{\Lambda_4^*}{\mu_4} \quad (11..52)$$

$$\gamma_1 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \gamma_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \gamma_3 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \gamma_4 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad (11..53)$$

β) Stationäre Lösung

$$p^*(n_1, n_2, n_3, n_4) = p_1^*(n_1) \cdot p_2^*(n_2) \cdot p_3^*(n_3) \cdot p_4^*(n_4) \quad (11..54)$$

$$p_i^*(n_i) = K_i \gamma_i^{n_i} \quad (11..55)$$

$$K_i = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma_i^{\ell} \right)^{-1} = 1 - \gamma_i \quad (11..56)$$

Mit Werten

$$K_1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad (11..57)$$

$$K_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad (11..58)$$

$$K_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad (11..59)$$

$$K_4 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \quad (11..60)$$

$$p^*(n_1, n_2, n_3, n_4) = \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{2}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^{n_1} \left(\frac{3}{4} \right)^{n_2} \left(\frac{2}{3} \right)^{n_3} \left(\frac{3}{5} \right)^{n_4} \quad (11..61)$$

$$= \frac{1}{120} \left(\frac{3}{4} \right)^{n_1+n_2} \left(\frac{2}{3} \right)^{n_3} \left(\frac{3}{5} \right)^{n_4} \quad (11..62)$$

7. Geschlossenes Jackson-Netz

a) Stationäre Verteilung**α) Nur M/M/1-Stationen****β) M/M/1- und M/M/∞-Stationen gemischt**

$$p^*(n) = K_M \prod_{i=1}^J p_i^*(n_i) \quad (11..63)$$

M/M/1-Stationen:

$$p_i(n_i) = (\rho_i)^{n_i} \quad (11..64)$$

M/M/∞-Stationen:

$$p_i(n_i) = \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} \quad (11..65)$$

K_M muss so bestimmt werden, dass $\sum_{i \in S} p^*(n) = 1$ ist. Dazu alle Zustände manuell aufschreiben, die Wahrscheinlichkeiten addieren und K_M entsprechend wählen:

Beispiel aus Frühjahr 2009, Aufgabe 1

$$p^*(n) = K_M \frac{1}{n_1!} 4^{n_3} \quad (11..66)$$

Für $M = 3$ hat der Zustandsraum $\binom{5}{3} = 10$ Elemente.

n_1	n_3	n_4	$p^*(n)/K_M$		
3	0	0	$1/6$	=	$1/6$
2	1	0	$1/2 \cdot 4$	=	2
2	0	1	$1/2$	=	$1/2$
1	1	1	$1 \cdot 4$	=	4
1	2	0	$1 \cdot 4^2$	=	16
1	0	2	1	=	1
0	0	3	1	=	1
0	3	0	$1 \cdot 4^3$	=	64
0	2	1	$1 \cdot 4^2$	=	16
0	1	2	$1 \cdot 4^1$	=	4
			$\frac{1}{K_M}$	=	$\frac{326}{3}$

Tabelle 11..1: Ermittlung von K_M .

$$K_M = \frac{3}{326} \quad (11..67)$$

also:

$$p^*(n) = \frac{3}{326} \frac{4^{n_3}}{n_1!} \quad (11..68)$$

8. M/G/1-Systeme

Aufgaben dieses Typs sind rar. Z.B. Frühjahr und Herbst 2010, Aufgabe 2.

a) Erwartungswert $E(Y)$ der Bedienzeit Y

Zwei Wege: allgemein per Laplace-Transformation oder aus Tabelle entnehmen.

α) Laplace-Transformation

Der Erwartungswert kann mit Hilfe der Laplacetransformation bestimmt werden. Nach [Mat, S. 5] gilt:

$$E(Y) = -L'_Y(0) \quad (11..69)$$

In der Notation der Systemtheorie bedeutet das:

$$E(Y) = - \left(\frac{d}{ds} (\mathcal{L}(Y)) \right) \bigg|_{s=0} \quad (11..70)$$

Die Laplace-Transformation einiger Verteilungen ist direkt ab Seite 5 angegeben.

β) Tabelle

Zu einigen Verteilungen sind die Erwartungswerte direkt angegeben.

b) Höhere Momente des Erwartungswertes $E(Y^k)$

Ganz allgemein durch die Laplace-Transformation:

$$E(Y^k) = (-1)^k L_Y^{(k)}(0), \quad k \in \mathbb{N} \quad (11..71)$$

Ist zu der gewünschten Verteilung $E(Y)$ und $V(Y)$ tabelliert kann man

$$V(Y) = \underbrace{L_Y''(0)}_{E(Y^2)} - \underbrace{(L_Y'(0))^2}_{(E(Y))^2} \quad (11..72)$$

$$E(Y^2) = V(Y) + (E(Y))^2 \quad (11..73)$$

benutzen.

c) Varianz $V(Y)$

$$V(Y) = (E(Y))^2 - E(Y^2) \quad (11..74)$$

$$V(Y) = \underbrace{L_Y''(0)}_{E(Y^2)} - \underbrace{(L_Y'(0))^2}_{(E(Y))^2} \quad (11..75)$$

d) Mittlere Anzahl Anforderungen im System $E(X^*)$

Auch „mittlere Anzahl an Kunden“ genannt. Die Lösung ist Proposition 6.4 aus [Mat, S.56]. Aufwändig ist ggf. $E(Y)$ und $E(Y^2)$ zu bestimmen. Einige $V(Y)$ sind jedoch tabelliert, dann kann direkt mit c_Y^2 begonnen werden.

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \quad (11..76)$$

$$c_Y^2 = \frac{V(Y)}{(E(Y))^2} \quad (11..77)$$

$$\rho = \lambda E(Y) < 1 \text{ Testen!} \quad (11..78)$$

$$E(X^*) = \rho + \rho^2 \frac{1 + c_Y^2}{2(1 - \rho)} \quad (11..79)$$

e) Mittlere Gesamtverweilzeit einer Anforderung $E(W^*)$

Little's Gesetz:

$$E(W^*) = \frac{1}{\lambda} E(X^*) \quad (11..80)$$

f) Stationäre Verteilung p_i^*

Ist die erzeugende Funktion $H(z)$ der stationären Verteilung gegeben, ist die Verteilung

$$p_k^* = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} H(z) \Big|_{z=0} \quad (11..81)$$

also:

$$p_0^* = H(0) \quad (11..82)$$

$$p_1^* = H'(0) \quad (11..83)$$

$$p_2^* = \frac{1}{2} H''(0) \quad (11..84)$$

Beispiel: Frühjahr 2009, Aufgabe 2.

g) Laplace-Transformierte der Wartezeit

[Mat, S.57]

$$L_{W_Q}(s) = \frac{(1 - \rho)s}{s - \lambda + \lambda L_Y(s)}, \quad s \geq 0 \quad (11..85)$$

Wobei $L_Y(s)$ die Laplace-Transformierte der Verteilung ist. Die wichtigsten sind im Skript.

(11..86)

h) Hyperexponentialverteilung

[Mat, S. 5] Anforderungen werden mit Wahrscheinlichkeit q_i auf Server i mit $\text{Exp}(\mu_i)$ -verteilter Bedienzeit geleitet. Beispiel: F10 Aufgabe 2.

α) Verteilung der Bedienzeit

$$F_Y(y) = 1 - \sum_{i=1}^k q_i \exp(-\mu_i y) \quad , y \geq 0 \quad (11..87)$$

β) Erwartete Anzahl an Kunden $E(X^*)$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{\mu_i} \quad (11..88)$$

$$E(Y^2) = \int_0^{\infty} y^2 \sum_{i=1}^k q_i \mu_i \exp(-\mu_i y) dy \quad (11..89)$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_0^{\infty} y^2 q_i \mu_i \exp(-\mu_i y) dy \quad (11..90)$$

ohne Begründung

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^k q_i \frac{2}{\mu_i^2} \quad (11..91)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \quad (11..92)$$

$$c_Y^2 = \frac{V(Y)}{(E(Y))^2} \quad (11..93)$$

$$\rho = \lambda E(Y) < 1 \quad (11..94)$$

Proposition 6.4

$$E(X^*) = \rho + \rho^2 \frac{1 + c_Y^2}{2(1 - \rho)} \quad (11..95)$$

γ) Mittlere Gesamtverweilzeit eines Kunden

$$E(W^*) = \frac{1}{\lambda} E(X^*) \quad (11..96)$$

$$= E(Y) + \lambda \frac{V(Y) + (E(Y))^2}{2(1 - \rho)} \quad (11..97)$$

i) Gesamtsystem leer

Sonderfall aus Prop. 6.3

$$p_0^* = 1 - \rho \quad (11..98)$$

12. Formelsammlung

1. Reihen

endliche geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (12..1)$$

Laplace-Transformation

$$L_f(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (12..2)$$

Erwartungswert

$$E(W) = -L'_W(0) \quad (12..3)$$

2. Binominalkoeffizient

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!b!} \quad (12..4)$$

3. Geschlossenes Jackson Netz

a) Stationäre Lösung

α) Ankunftsprozess

gibt es nicht mehr, da es ein geschlossenes Netz ist.

β) Routingmatrix

verändert, da erste Zeile und Spalte wegfällt. Zeilensumme weiterhin 1.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (12..5)$$

γ) Flussgleichungen

Schema wie oben, nur dass dieses Gleichungssystem unterbestimmt ist und eine Komponente gesetzt werden muss.

$$\Lambda_1 = \Lambda_3 + \frac{1}{2}\Lambda_4 \quad (12..6)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{3}\Lambda_1 \quad (12..7)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{3}\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_4 \quad (12..8)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{3}\Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (12..9)$$

Mit $\Lambda_1 = 3$

$$\Lambda_1 = 3 \quad \Lambda_2 = 1 \quad \Lambda_3 = 2 \quad \Lambda_4 = 2 \quad (12..10)$$

δ) Hilfsgröße

anders als oben, da Λ neu.

$$\gamma_1 = \frac{\Lambda_1^*}{\mu_1} \quad \gamma_2 = \frac{\Lambda_2^*}{\mu_2} \quad \gamma_3 = \frac{\Lambda_3^*}{\mu_3} \quad \gamma_4 = \frac{\Lambda_4^*}{\mu_4} \quad (12..11)$$

$$\gamma_1 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \gamma_2 = \frac{1}{8} \quad \gamma_3 = \frac{2}{9} \quad \gamma_4 = \frac{2}{15} \quad (12..12)$$

ε) Rekursion

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
l/j	1	2	3	4
0	1	1	1	1
1	$C_1(1) = \gamma_1$	$C_1(2) = \gamma_1 + \gamma_2$	$C_1(3) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$	$C_1(4) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$
2	$C_2(1) = \gamma_1^2$	$C_2(2) = C_2(1) + \gamma_2 C_1(2)$	$C_2(3) = C_2(2) + \gamma_3 C_1(3)$	$C_2(4) = C_2(3) + \gamma_4 C_1(4)$
3	$C_3(1) = \gamma_1^3$	$C_3(2) = C_3(1) + \gamma_2 C_2(2)$	$C_3(3) = C_3(2) + \gamma_3 C_2(3)$	$C_3(4) = C_3(3) + \gamma_4 C_2(4)$
4	$C_4(1) = \gamma_1^4$	$C_4(2) = C_4(1) + \gamma_2 C_3(2)$	$C_4(3) = C_4(2) + \gamma_3 C_3(3)$	$C_4(4) = C_4(3) + \gamma_4 C_3(4)$

(12..13)

„Zelle = links + Spaltenkopf \times oben“, kann man gut zeilenweise bearbeiten.

$\frac{1}{K_M}$ = Eintrag rechts unten

$$K_M = 7.7915$$

ζ) Stationäre Lösung

$$p^*(n_1, n_2, n_3, n_4) = K_M (\gamma_1)^{n_1} (\gamma_2)^{n_2} (\gamma_3)^{n_3} (\gamma_4)^{n_4} \quad (12..14)$$

$$= 7.7915 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n_3} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^{n_4} \quad (12..15)$$

b) Auslastung Station i

Bei M Nachrichten:

$$\rho_i = \gamma_i \frac{C_{M-1}(J)}{C_M(J)} \quad (12..16)$$

$$\rho_1 = \gamma_1 \frac{C_2(4)}{C_3(4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{0.3395}{0.1283} = 0.6615 \quad (12..17)$$

c) Erwartete Auslastung Station i

$$E(X_i^*) = \frac{1}{C_M(J)} \sum_{\ell=1}^M \gamma_i^\ell C_{M-\ell}(J) \quad (12..18)$$

$$E(X_4^*) = \frac{1}{C_3(4)} (\gamma_4 C_2(4) + \gamma_4^2 C_1(4) + \gamma_4^3 C_0(4)) \quad (12..19)$$

Literaturverzeichnis

- [Mat] Prof. Dr. Rudolf Mathar. Kommunikationsnetz ii modelle und analyse. Aachen, Deutschland.
- [TG06] Phuoc Tran-Gia. *Einführung in die Leistungsbewertung und Verkehrstheorie*. Oldenbourg, München, Deutschland, July 2006.

Index

Symbols

$M/G/1$ -System 149

B

Blockierwahrscheinlichkeit 93

I

Intensitätsmatrix 88

J

Jackson-Netz, geschlosse

 Mächtigkeit 68, 144

Jackson-Netz, geschlossen 143

 Flussgleichung 144

 Stationäre Verteilung, Berechnung
 145

 Zustandsraum 143

Jackson-Netz, offen 139

 Erwartete Zahl Anforderungen 141

 Flussgleichungen 140

Gleicher Fluss 141

Routingmatrix 139

stationäre Verteilung 140

 Berechnung 141

 Existenz 140

Zustandsraum 139

S

Stationäre Verteilung

$M/G/1$ 153

T

Tandem-Server 149

 Mittlere Anzahl Anforderungen 151

 Mittlere Gesamtverweilzeit 153

 Stationäre Verteilung

 Berechnung 153

 Existenz 150

 Verteilung der Bedienzeit 149

 Verteilung des Erwartungswertes
 149