

GGET III Großübung

Michael Gansen
Mitschrift: Marius Geis

12. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

Blatt 1	7
Aufgabe 1	7
Aufgabe 2	9
Aufgabe 3	10
Aufgabe 4	12
Aufgabe 5	14
Aufgabe 6	17
Blatt 2	18
Aufgabe 7	18
Aufgabe 8	19
Aufgabe 9	22
Aufgabe 10	23
Aufgabe 11	25
Aufgabe 12	26
Aufgabe 13	32
Blatt 3	35
Aufgabe 14	35
Aufgabe 15	37
Aufgabe 16	39
Blatt 4	42
Aufgabe 17	42
Aufgabe 18	44
Aufgabe 20	48
Blatt 5	50
Aufgabe 23	50
Aufgabe 24	51
Aufgabe 26	54
Aufgabe 27	55
Aufgabe 28	56
Aufgabe 29	61
Blatt 6	62
Aufgabe 30	62
Aufgabe 31	65
Aufgabe 32	66
Aufgabe 33	68
Aufgabe 34	71

Betreuer vom Lehrstuhl:

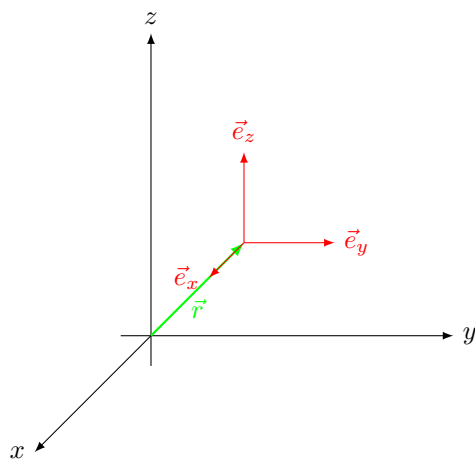
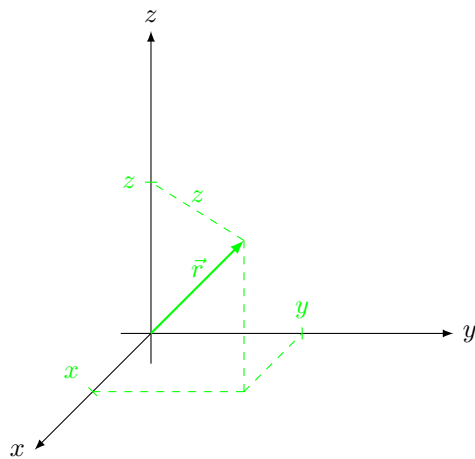
- Thomas Coenen, Raum 313, Tel.: 80-97694
- Michael Gansen, Raum 420, Tel.: 80-97610
- Robert Schwann, Raum 322, Tel.: 80-97577
- Email: $\begin{cases} \text{coenen} \\ \text{gansen} \\ \text{schwann} \end{cases} @\text{eecs.rwth-aachen.de}$
- Sprechstunden: Mittwochs, 10.00 - 12.00 Uhr

Fachstudienbetreuer

- Achim Stephan
- st@ithe.rwth-aachen.de

Einführung in die Koordinatensysteme

1) Kartesische Koordinaten



- Ortsvektor

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$-\infty < z < \infty$$

- Einheitsvektoren (d.h. $|\vec{e}_{...}| = 1$)

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \text{ konstant}$$

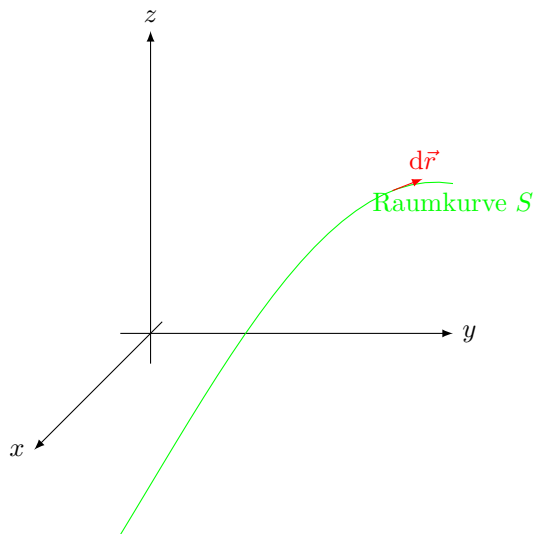
- Skalarfeld:

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z)$$

- Vektorfeld:

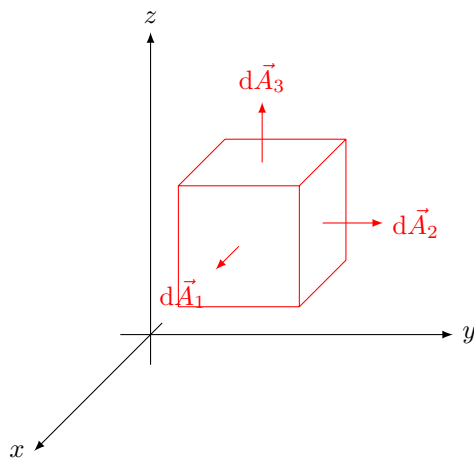
$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= F_x(x, y, z) \cdot \vec{e}_x \\ &+ F_y(x, y, z) \cdot \vec{e}_y \\ &+ F_z(x, y, z) \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

- Wegelement



$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$$

- Flächenelemente

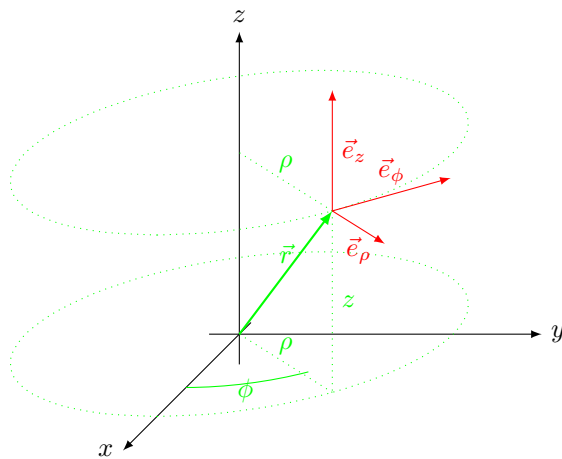


$$d\vec{A}_1 = dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x$$

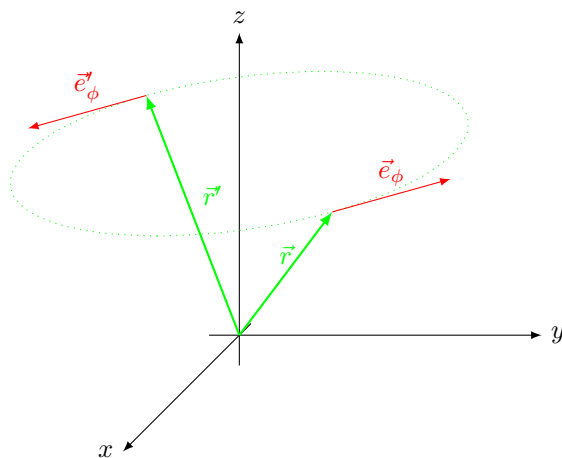
$$d\vec{A}_2 = dz \cdot dx \cdot \vec{e}_y$$

$$d\vec{A}_3 = dx \cdot dy \cdot \vec{e}_z$$

2) Zylinderkoordinaten



Anmerkung: Einheitsvektoren sind tangential zu „Koordinatenlinien“ gerichtet.
z.B. bzgl. ϕ .



Koordinatenlinien bzgl. ρ : Radialstrahlen \perp z -Achse.

Koordinatenlinien bzgl. ϕ : Kreise um z -Achse, Radius ρ .

Koordinatenlinien bzgl. z : Geraden, parallel zur z -Achse

- Ortsvektor:

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$0 \leq \rho < \infty$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

$$-\infty < z < \infty$$

- Einheitsvektoren: $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$
ändern Richtung mit ϕ !

- Skalarfeld:

$$f(\vec{r}) = f(\rho, \phi, z)$$

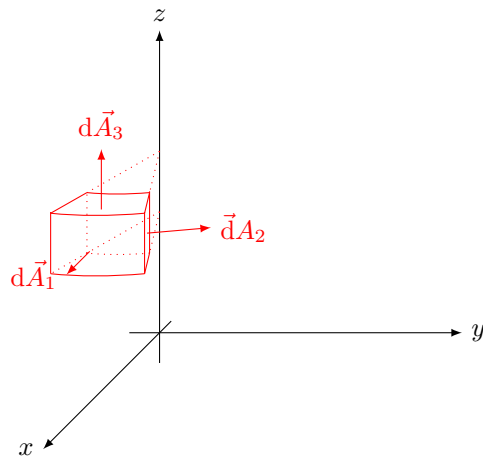
- Vektorfeld:

$$\begin{aligned} F(\vec{r}) &= F_\rho(\rho, \phi, z) \cdot \vec{e}_\rho \\ &+ F_\phi(\rho, \phi, z) \cdot \vec{e}_\phi \\ &+ F_z(\rho, \phi, z) \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

- Wegelement:

$$d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi + dz \cdot \vec{e}_z$$

- Flächenelemente:



$$d\vec{A}_1 = \rho \cdot d\phi \cdot dz \cdot \vec{e}_\rho$$

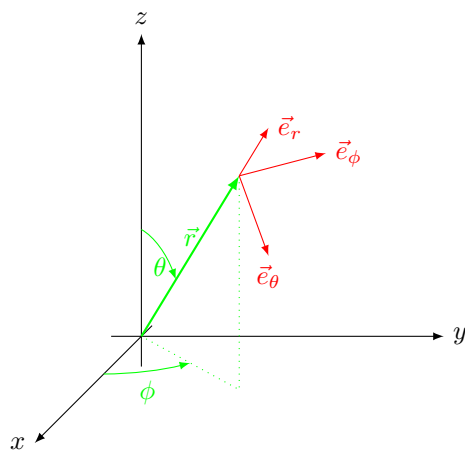
$$d\vec{A}_2 = d\rho \cdot dz \cdot \vec{e}_\phi$$

$$d\vec{A}_3 = \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \cdot \vec{e}_z$$

- Volumenelement:

$$dV = \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \cdot dz$$

3) Kugelkoordinaten



Anmerkung: Koordinatenlinien bzgl θ :

Koordinatenlinien bezüglich r : Radialstrahlen vom Ursprung aus.

Koordinatenlinien bezüglich θ : Halbkreise um Ursprung, Radius r .

Koordinatenlinien bezüglich ϕ : Kreise um z -Achse, Radius $r \sin \theta$.

- Ortsvektor:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$$

$$r = |\vec{r}|$$

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

- Einheitsvektoren:

$$\underbrace{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta}_{\text{Richtung ändert sich mit } \theta \text{ und } \phi!}, \quad \underbrace{\vec{e}_\phi}_{\text{Richtung ändert sich mit } \phi}$$

- Skalarfeld:

$$f(\vec{r}) = f(r, \theta, \phi)$$

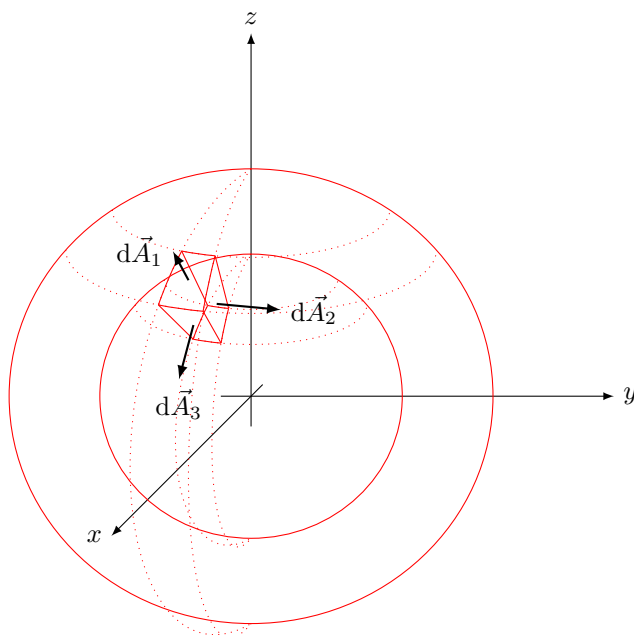
- Vektorfeld:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= F_r(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_r \\ &+ F_\theta(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_\theta \\ &+ F_\phi(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

- Wegelement:

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= dr \cdot \vec{e}_r \\ &+ r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta \\ &+ r \cdot \sin \theta \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

- Flächenelemente:



$$d\vec{A}_1 = r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$d\vec{A}_2 = r \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\theta$$

$$d\vec{A}_3 = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\phi$$

- Volumenelement:

$$dV = r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$$

Skalarprodukt, Vektorprodukt

- Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &:= |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \angle(\vec{A}, \vec{B}) \\ &= \vec{B} \cdot \vec{A} \\ &= A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z\end{aligned}$$

Anmerkung: Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor entspricht einer Projektion.

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_y = |\vec{F}| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = F_y$$

Insbesondere:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$$

(analog für $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ und $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$)

NB:

$\vec{E} \cdot \vec{e}_x = E_0$ ist eine skalare Gleichung ($E_x = E_0$).

$\vec{E} = E_0 \cdot \vec{e}_x$ ist eine vektorielle Gleichung und entspricht drei skalaren Gleichungen ($E_x = E_0, E_y = 0, E_z = 0$)

• **Vektorprodukt (Kreuzprodukt)**

$$- \vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}, \vec{B}$$

$$- |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$- \vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B} \text{ bilden ein rechtshändiges System (Bsp: } \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z).$$

$$- \vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$

- Merksatz:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y) \cdot \vec{e}_x + (A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z) \cdot \vec{e}_y + (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x) \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$$

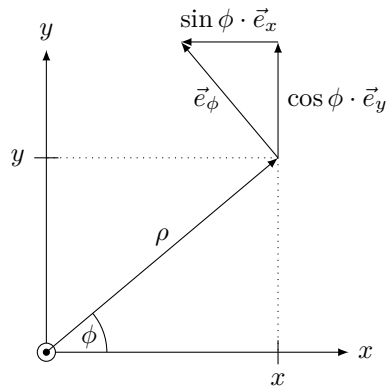
Analog für $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ und $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$.

Blatt 1

Aufgabe 1

Koordinatentransformation

a)



$$\vec{B}_1 = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$B_{1\phi} = \frac{1}{\rho}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \cdot \vec{e}_x + \cos \phi \cdot \vec{e}_y$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot [-y \cdot \vec{e}_x + x \cdot \vec{e}_y]$$

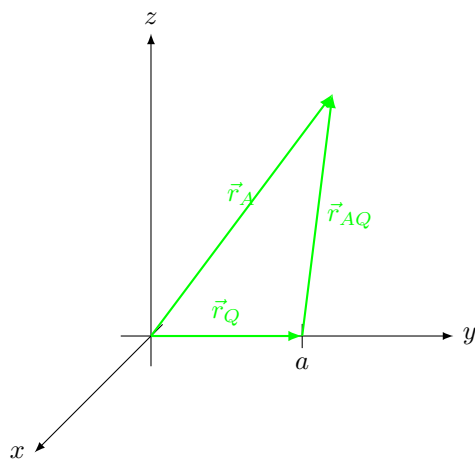
$$\text{b) } \vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r$$

$$= \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{c) } \vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{1}{r_{AQ}^2} \cdot \vec{e}_{r_{AQ}}$$

$$\left[\text{vgl. } \vec{F}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot q \cdot Q \cdot \frac{1}{r_{qQ}^2} \cdot \vec{e}_{r_{qQ}} \right]$$

mit $\vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_y$ (\vec{r}_A Aufpunkt, \vec{r}_Q Quellpunkt:)



$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q, \vec{e}_{r_{AQ}} = \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}}$$

In kartesischen Koordinaten (allgemein):

$$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{e}_x + y_A \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_Q = x_Q \cdot \vec{e}_x + y_Q \cdot \vec{e}_y + z_Q \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = (x_A - x_Q) \cdot \vec{e}_x + (y_A - y_Q) \cdot \vec{e}_y + (z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z$$

$$\stackrel{\text{hier}}{=} x_A \cdot \vec{e}_x + (y_A - a) \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

Achtung: Komponentenweise Subtraktion von Ortsvektoren ist nur in kartesischen Koordinaten erlaubt (wegen konstanten Einheitsvektoren)

Beispiel Kugelkoordinaten:

$$\vec{r}_A = r_A \cdot \vec{e}_{r_A}$$

$$\vec{r}_Q = r_Q \cdot \vec{e}_{r_Q}$$

$$\vec{e}_{r_A} \neq \vec{e}_{r_Q}$$

Addition/Subtraktion von Vektorfeldern an einem eindeutigen Aufpunkt ist in allen drei Koordinatensystemen erlaubt (da Einheitsvektoren eindeutig). z.B.:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(\vec{r}_A) + \vec{F}_2(\vec{r}_A) &= (F_{1r} + F_{2r}) \cdot \vec{e}_{r_A} \\ &\quad + (F_{1\theta} + F_{2\theta}) \cdot \vec{e}_{\theta_A} \\ &\quad + (F_{1\phi} + F_{2\phi}) \cdot \vec{e}_{\phi_A} \end{aligned}$$

$$\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3} = \frac{x_A \cdot \vec{e}_x + (y_A - a) \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z}{(x_A^2 + (y_A - a)^2 + z_A^2)^{3/2}}$$

Aufgabe 2

Ort der Masse: $\vec{r} = \vec{l} = l \cdot \vec{e}_r$

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &= F_{g,z} \cdot \vec{e}_z \\ &= -m \cdot g \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

\vec{F}_g in Kugelkoordinaten:

1) Wegen $\vec{e}_z \perp \vec{e}_\phi$: $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\phi = 0$:

$$F_{g,\phi} = \underbrace{\vec{F}_g \cdot \vec{e}_\phi}_{=0} = 0$$

Projektion von \vec{F}_g auf \vec{e}_ϕ Richtung

2) $F_{g,r}$ und $F_{g,\theta}$: Zerlege

(Skizze)

$$\vec{e}_z = \cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta$$

Insgesamt:

$$\vec{F}_g = \underbrace{-m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_r}_{F_{g,r}} + \underbrace{m \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta}_{F_{g,\theta}}$$

Zugkraft auf Stab:

$$F_l = \vec{F}_g \cdot \frac{\vec{l}}{l} = \vec{F}_g \cdot \vec{e}_r = F_{g,r} = -m \cdot g \cdot \cos \theta$$

Anmerkung:

$$F_l < 0 \text{ für } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \hat{=} z > 0 \Rightarrow \text{Druckkraft}$$

$$F_l > 0 \text{ für } \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \hat{=} z < 0 \Rightarrow \text{Zugkraft}$$

Drehmoment

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{l} \times \vec{F}_g \\
&= (l \cdot \vec{e}_r) \times (-m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_r + m \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta) \\
&= (-l \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta) \cdot \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_r)}_0 + (+l \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta) \cdot \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta)}_{\vec{e}_\phi} \\
\vec{L} &= l \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi
\end{aligned}$$

Anmerkung: Der Betrag von \vec{L} gibt die Größe des Drehmoments an, die Richtung von \vec{L} gibt die Drehachse an (Drehsinn und \vec{L} sind im „Rechtsschraubensinn“ verknüpft). (Skizze)

Aufgabe 3

a) (Skizze)

$$Q = \iint_A \sigma_e(\theta) \cdot dA \text{ mit } dA = R \cdot \sin \theta \cdot d\phi \cdot R \cdot d\theta$$

$$dQ = \sigma_e(\theta) \cdot dA$$

$$Q_1 = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sigma_{e0} \cdot \cos \theta \cdot R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

$$= R^2 \cdot \sigma_{e0} \cdot 2\pi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

$$= R^2 \cdot \sigma_{e0} \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 u \cdot du$$

$$= R^2 \cdot \sigma_{e0} \cdot \pi$$

$u = \sin \theta$	$\theta = 0 \Rightarrow u = 0$
$du = \cos \theta \cdot d\theta$	$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$

b) $Q_{ges} = Q_1 + Q_2$

$$Q_2 = R^2 \cdot 2\pi \cdot \int_1^0 u \cdot du = -R^2 \cdot \sigma_{e0} \cdot \pi$$

$$Q_{ges} = 0$$

c) Jetzt Raumladung $\rho_e(r)$

$$Q_{ges} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_e(r) \cdot dV$$

mit $dV = r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\phi \cdot d\theta \cdot dr$

$$\begin{aligned}
Q_{ges} &= \frac{\rho_{e0}}{R} \cdot \underbrace{\int_{r=0}^R r^3 \cdot dr}_{\frac{R^4}{4}} \cdot \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta}_{[-\cos \theta]_0^\pi = 2} \cdot \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \\
&= \frac{\rho_{e0}}{R} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2 \cdot 2\pi = \rho_{e0} \cdot R^3 \cdot \pi
\end{aligned}$$

Einschub: Divergenz

Quelleneigenschaften eines Vektorfeldes, z.B. \vec{D}

- integrale Aussage:

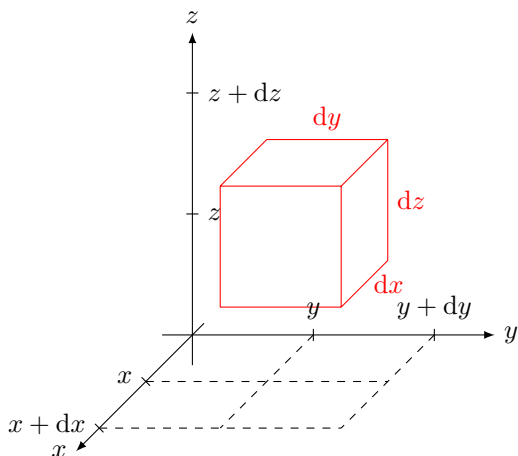
$$Q = \oiint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} \hat{=} \text{Quellenstärke des Feldes im von } H \text{ eingeschlossenem Gebiet}$$

- lokale Aussage:

$$\operatorname{div} \vec{D} := \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \cdot \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} \right) \triangleq \text{Quelldichte des Feldes in einem Punkt „Divergenz“}$$

Berechnung in kartesischen Koordinaten:

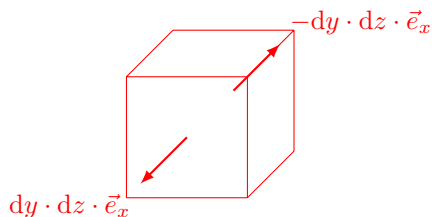
infinitesimal kleiner Quader, Oberfläche H



Fluss aus dem Quader heraus: $\oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A}$

- 1) Teilflüsse in x -Richtung (durch Vorder-und Rückseite)

i)



$$\begin{aligned} d\vec{A} &= dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x \text{ (bei } x + dx) \\ \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \vec{D}(x + dx, y, z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x \\ &= D_x(x + dx, y, z) \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad d\vec{A} &= -dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x \text{ (bei } x) \\ \vec{D} \cdot d\vec{A} &= -\vec{D}(x, y, z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x \\ &= -D_x(x, y, z) \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

Beiträge i) und ii) zusammengefasst:

$$\begin{aligned} &[D_x(x + dx, y, z) - D_x(x, y, z)] \cdot dy \cdot dz \\ \text{Taylor: } &D_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial x} D_x(x, y, z) \cdot dx \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} D_x(x, y, z) \cdot dx \right] \cdot dy \cdot dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} D_x \cdot dV \end{aligned}$$

- 2) Analog Teilflüsse in y -Richtung: ... Beitrag

$$\frac{\partial}{\partial y} D_y \cdot dV$$

3) Analog Teilflüsse in z -Richtung: ... Beitrag

$$\frac{\partial}{\partial z} D_z \cdot dV$$

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z \right) \cdot dV \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \cdot \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{1}{dV} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z \right)}_{\operatorname{div} \vec{D}} \cdot dV \end{aligned}$$

Deutung (formal) als Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \right)}_{\substack{=:\nabla \\ \text{„Nabla-Operator“}}} \cdot \underbrace{(D_x \cdot \vec{e}_x + D_y \cdot \vec{e}_y + D_z \cdot \vec{e}_z)}_{\vec{D}} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \nabla \cdot \vec{D} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) wegen Rotationssymmetrie bzgl. der z -Achse hier sinnvoll: Zylinderkoordinaten

Aufpunktvektor: $\vec{r}_A = b \cdot \vec{e}_z$

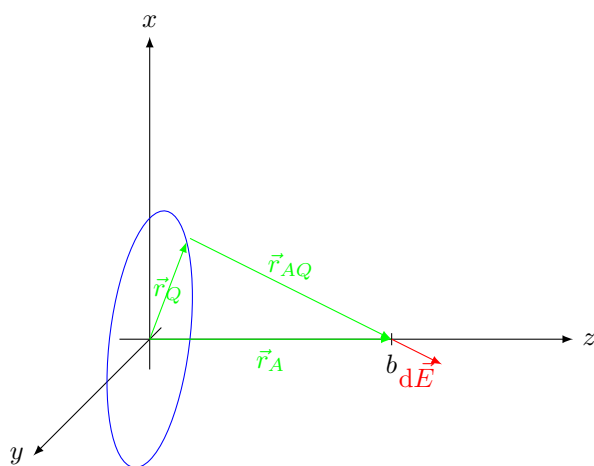
Quellpunktvektor: $\vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_{\rho_Q}$ (abhängig von ϕ_Q)

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_{\rho_Q}$$

(Quellengebiet: $\rho_Q = a, 0 \leq \phi_Q < 2\pi, z_Q = 0$)

b) Feldstärkebeitrag eines Ladungselements

$$dQ = q_L \cdot ds$$



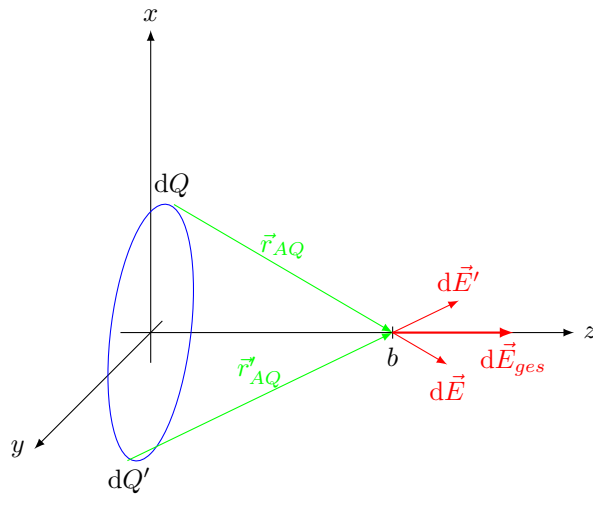
$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}$$

mit $r_{AQ} = |\vec{r}_{AQ}| = \sqrt{b^2 + a^2}$, also

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_{\rho_Q}}{\sqrt{b^2 + a^2}^3}$$

(Anmerkung: $d\vec{E}$ hat keine ϕ -Komponente)

Feldstärkebeitrag eines spiegelsymmetrisch zu dQ angeordneten Ladungselements dQ' :



insgesamt folgt aus der Rotationssymmetrie der Anordnung:

$$\vec{E}(0,0,b) = E_z(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}(0,0,b) = \int_S dE_z(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

mit

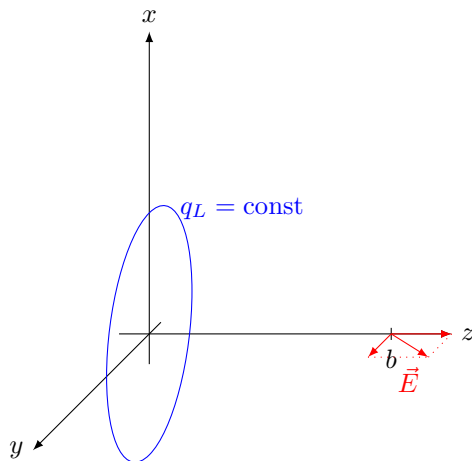
$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}^3}$$

und

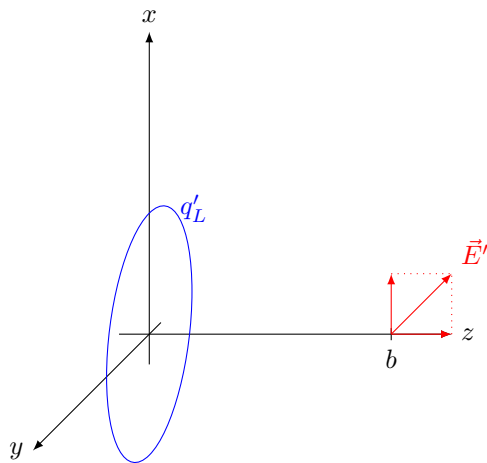
$$\begin{aligned} dQ &= q_L \cdot ds = q_L \cdot a \cdot d\phi_Q \\ \vec{E}(0,0,b) &= \frac{q_L}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}^3} \cdot a \cdot \underbrace{\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} d\phi_Q}_{2\pi} \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{q_L}{2\epsilon_0} \cdot \frac{b \cdot a}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Andere Symmetrieüberlegung:

- Annahme: $\vec{E}(0,0,b)$ hat auch eine Komponente \perp zur z -Achse, z.B. in y -Richtung:



- Drehung um die z -Achse, z.B. um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ ergibt:



- Beobachtung

1) $q'_L(\vec{r}) = q_L(\vec{r})$

2) $\vec{E}' \neq \vec{E}$

Widerspruch! $\Rightarrow \vec{E}(0,0,b)$ kann keine Komponente \perp zur z -Achse haben.

c) „Fernfeld“: $b \gg a$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{q_L \cdot b \cdot a}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}^3}_{\approx \sqrt{b^2}^3 = |b|^3 \stackrel{b>0}{=} b^3}} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}(0,0,b) \approx \frac{q_L \cdot a}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z$$

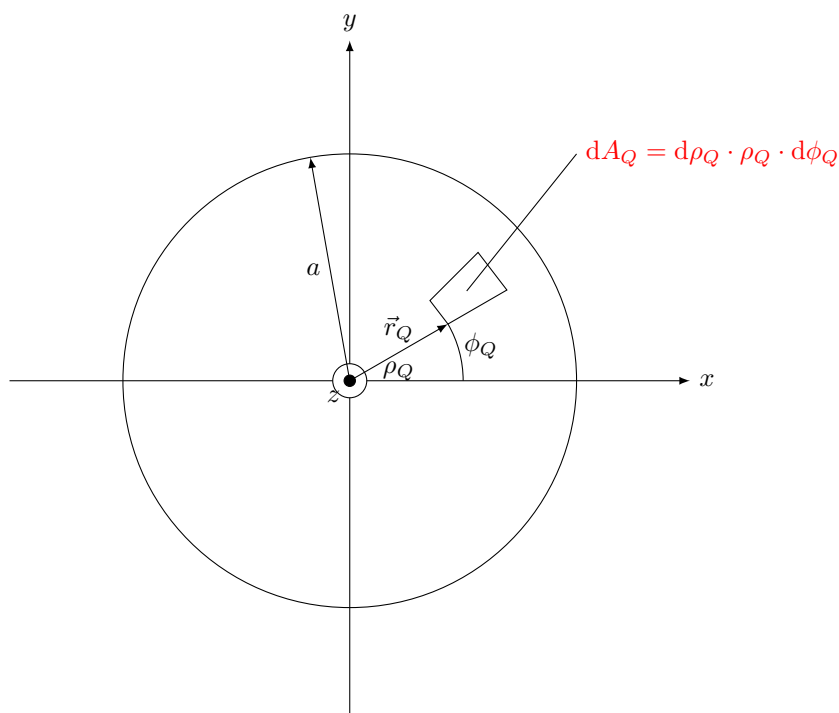
Mit $Q = 2\pi a \cdot q_L$ (Gesamtladung der Linienladung)

$$\begin{aligned} \vec{E}(0,0,b) &\stackrel{b \gg a}{\approx} \frac{q_L \cdot a \cdot 2\pi}{2\pi \cdot 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z \text{ für } b > 0 \end{aligned}$$

entspricht dem Feld einer Punktladung Q im Ursprung.

Aufgabe 5

a)



$$dQ = \sigma_e \cdot dA_q$$

$$= \sigma_e \cdot d\rho_Q \cdot \rho_Q \cdot d\phi_Q$$

$$\vec{r}_Q = \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q} \text{ (abh. von } \phi_Q)$$

$$\vec{r}_A = b \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = b \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q}$$

Quellengebiet:

$$0 \leq \rho_Q \leq a$$

$$0 \leq \phi_Q < 2\pi$$

$$z_Q = 0$$

$$\text{b) } \vec{E}(0,0,b) = \int_{\rho_Q}^a \int_{\phi_Q=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}}_{d\vec{E}}$$

Aus Rotationssymmetrie (vgl Aufgabe 4) folgt:

$$\vec{E}(0,0,b) = E_z(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

$$dE_z(0,0,b) = d\vec{E}(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

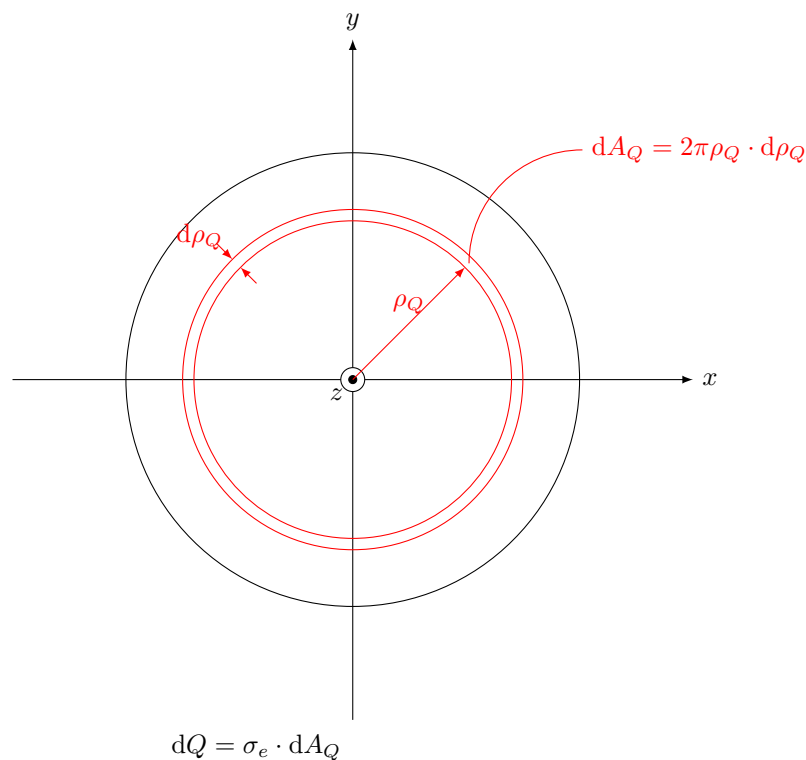
$$= \frac{\vec{r}_{AQ} \cdot \vec{e}_z}{r_{AQ}^3} \cdot \frac{\sigma_e \cdot \rho_Q \cdot d\phi_Q \cdot d\rho_Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\underbrace{\frac{b}{(\rho_Q^2 + b^2)^{3/2}}}$$

Die Teilintegration über ϕ_z ist trivial.

$$E_z(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\rho_Q=0}^a \frac{\rho_Q \cdot d\rho_Q}{(\rho_Q^2 + b^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} d\phi_Q}_{2\pi}$$

Ansatz mit dem Ergebnis aus Aufgabe 4b, angewandt auf einen Kreisring mit dem Radius ρ_Q und der Breite $d\rho_Q$:



Annäherung durch ringförmige Linienladung mit dem Radius ρ_Q und dem Ladungsbelag dq_L

$$dQ = \sigma_e \cdot 2\pi\rho_Q \cdot d\rho_Q \stackrel{!}{=} dq_L \cdot 2\pi\rho_Q \\ \Rightarrow dq_L = \sigma_e \cdot d\rho_Q$$

Ersetze in Aufgabe 4b:

$$\begin{array}{lll} E_z(0,0,b) & \text{durch} & dE_z(0,0,b) \\ q_L & \text{durch} & dq_L \\ a & \text{durch} & \rho_Q \end{array}$$

$$dE_z(0,0,b) = \frac{dq_L}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{b \cdot \rho_Q}{(b^2 + \rho_Q^2)^{3/2}} \\ E_z(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_{\rho_Q=0}^a \frac{\rho_Q \cdot d\rho_Q}{(b^2 + \rho_Q^2)^{3/2}}$$

$$c) \quad E_z(0,0,b) \stackrel{\text{Hinweis}}{=} \frac{\sigma_e \cdot b}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{[\rho_Q^2 + b^2]^{1/2}} \right]_{\rho_Q=0}^{\rho_Q=a}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(0,0,b) &= E_z(0,0,b) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\sigma_e \cdot b}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underbrace{\frac{1}{|b|}}_{= \frac{1}{b}, \text{ wg. } b > 0} \right] \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Fernfeld: $b \gg a$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \cdot \left[-\frac{1}{\underbrace{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}}_{\ll 1}} + 1 \right] \cdot \vec{e}_z$$

Hinweis mit $x = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

$$\approx \frac{\sigma_e}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \underbrace{\left[-\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) + 1 \right]}_{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2} \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma_e \cdot a^2 \cdot \pi}{4\varepsilon_0 \cdot b^2 \cdot \pi} \cdot \vec{e}_z$$

mit Gesamtladung $Q = \sigma_e \cdot \pi \cdot a^2$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z$$

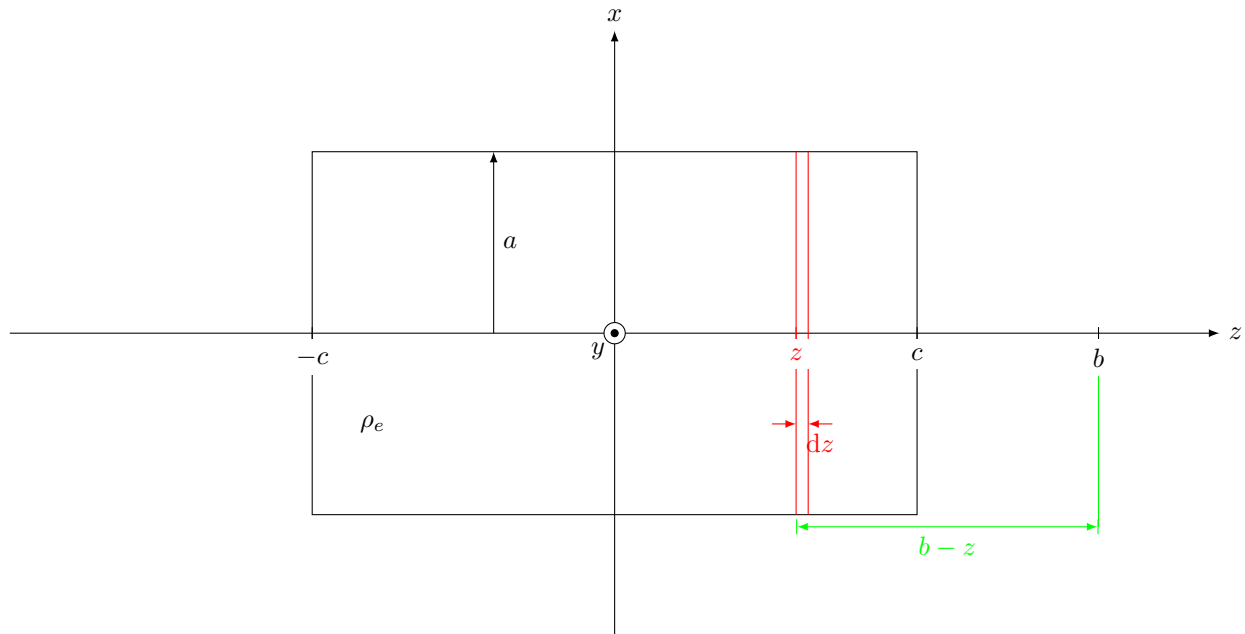
(auch hier näherungsweise das Feld einer Punktladung Q im Ursprung)

Hausaufgabe: Ü-Blatt 2 Aufgabe 8

E-Feld einer kugelförmigen Raumladungsverteilung

Abgabe bis Dienstag, 16.11.2010, 14⁰⁰ in grünen Briefkasten gegenüber Raum 213 (Seminarraum)

Aufgabe 6



$$\begin{aligned}
 \text{a) } dQ &= \rho_e \cdot dV \\
 &= \rho_e \cdot \pi a^2 \cdot dz \stackrel{!}{=} d\sigma_e \cdot \pi a^2 \\
 \Rightarrow d\sigma_e &= \rho_e \cdot dz
 \end{aligned}$$

Ersetzung im Ergebnis aus Aufgabe 5c)

$$\begin{array}{lll}
 \vec{E}(0,0,b) & \text{durch} & d\vec{E}(0,0,b) \\
 \sigma_e & \text{durch} & d\sigma_e \\
 b & \text{durch} & b-z
 \end{array}$$

In Aufgabe 5c): $b \stackrel{!}{>} 0$

hier: $b-z \stackrel{!}{>} 0$
 $b \stackrel{!}{>} c \geq z$

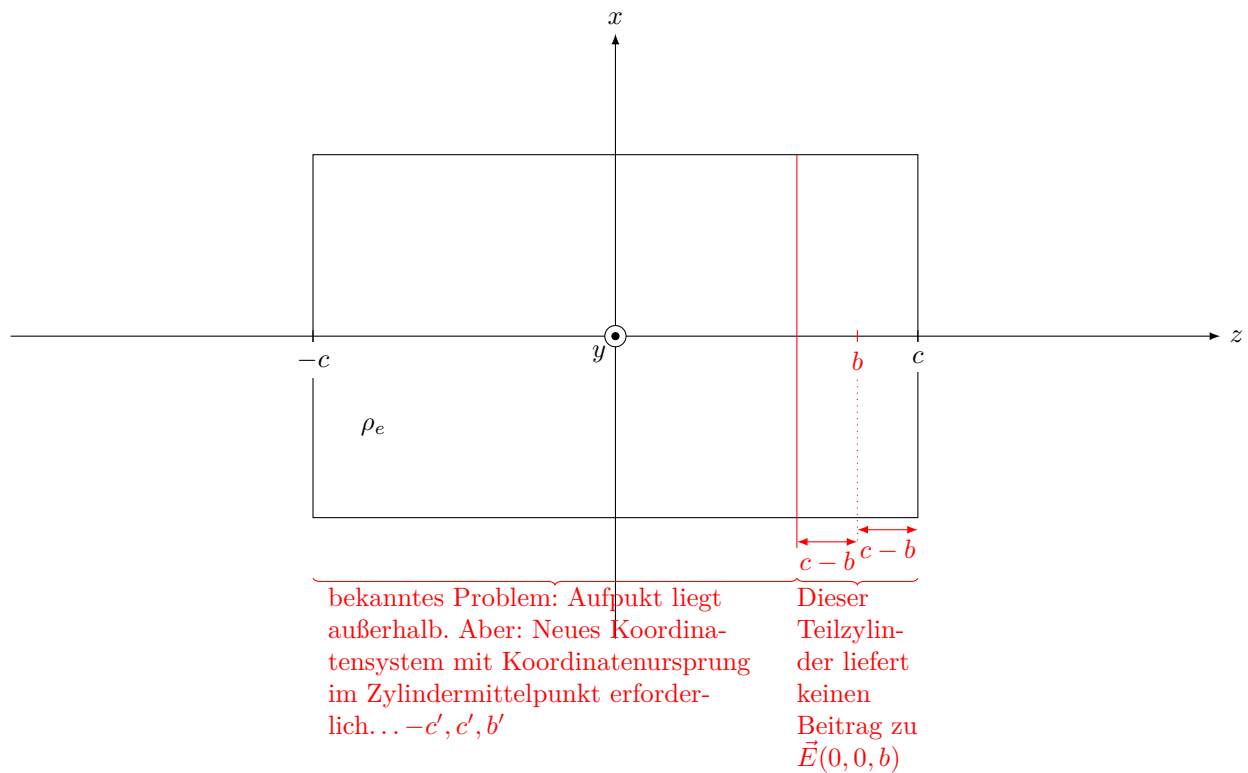
$$d\vec{E}(0,0,b) = \frac{d\sigma_e \cdot (b-z)}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}} + \underbrace{\frac{1}{|b-z|}}_{=\frac{1}{b-z} > 0} \right] \cdot \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \vec{E}(0,0,b) &= \int_{z=-c}^{+c} d\vec{E}(0,0,b) \\
 &= \frac{\rho_e}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_{z=-c}^c \left[-\underbrace{\frac{b-z}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}}}_{\frac{d}{dz}(\sqrt{a^2 + (b-z)^2})} + 1 \right] dz \cdot \vec{e}_z \\
 &= \frac{\rho_e}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\left[\sqrt{a^2 + (b-z)^2} \right]_{z=-c}^{z=c} + 2c \right) \cdot \vec{e}_z \\
 &= \frac{\rho_e}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\sqrt{a^2 + (b-c)^2} - \sqrt{a^2 + (b+c)^2} + 2c \right) \cdot \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

(für $b > c$)

Das Ergebnis gilt **nicht** für $b < c$.

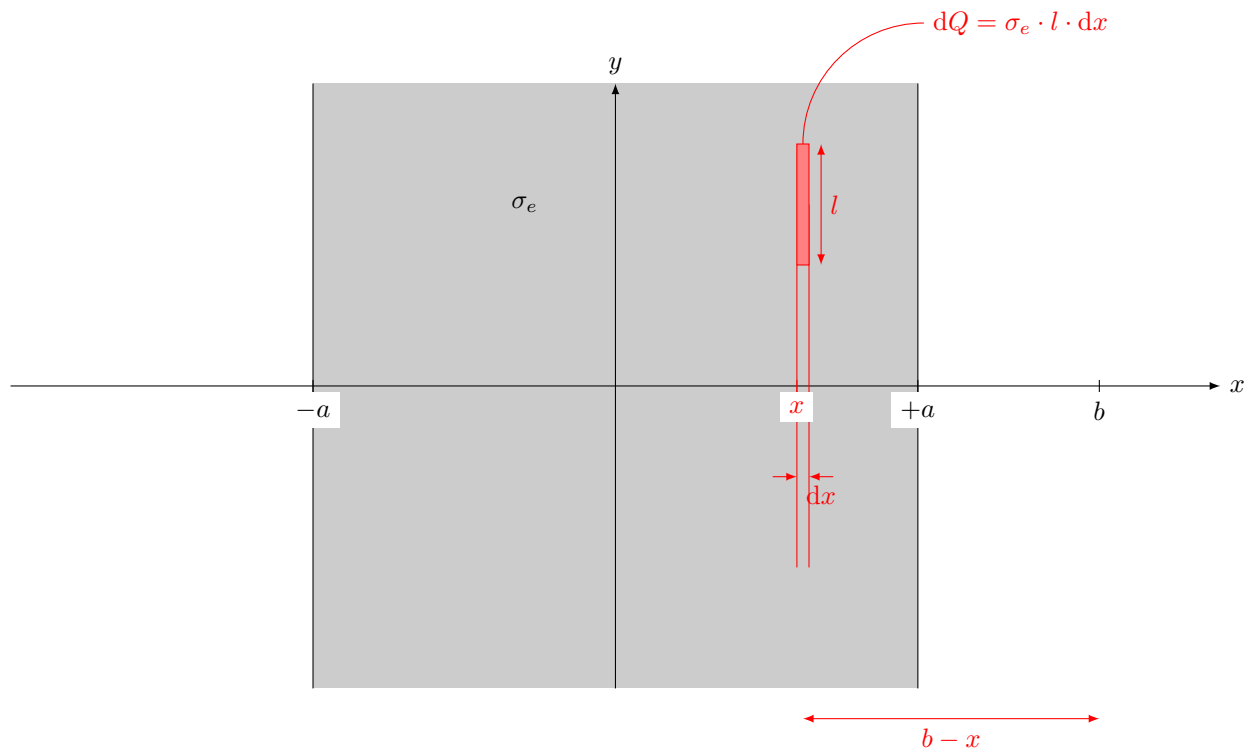
Anmerkung: Ansatz für $0 < b < c$:



Blatt 2

Aufgabe 7

a)



$$dQ = \sigma_e \cdot l \cdot dx \stackrel{!}{=} dq_L \cdot l$$

$$\Rightarrow dq_L = \sigma_e \cdot dx$$

b) Aus Vorlesung, für Linienladung in der z -Achse: $\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\rho$

Ersetze: ρ durch $b - x$
 \vec{e}_ρ durch \vec{e}_x
 q_L durch dq_L
 \vec{E} durch $d\vec{E}$

$$dE_x = \frac{dq_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{b-x}$$

$$d\vec{E} = \frac{dq_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{b-x} \cdot \vec{e}_x$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{E}(b, 0, 0) &= \int_{x=-a}^a \underbrace{\frac{dx}{b-x}}_{\frac{d \ln|x-b|}{dx}} \cdot \vec{e}_x \\ &= \frac{dx}{x-b} = \frac{d \ln|x-b|}{dx} \cdot dx \\ &= \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot [-\ln|x-b|]_{x=-a}^{x=a} \cdot \vec{e}_x \\ &= \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left| \frac{-a-b}{a-b} \right| \cdot \vec{e}_x \\ &\stackrel{b \geq a}{=} \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{a+b}{b-a} \right) \cdot \vec{e}_x \end{aligned}$$

d) Fernfeld: $b \gg a$, d.h. $\frac{a}{b} \ll 1$

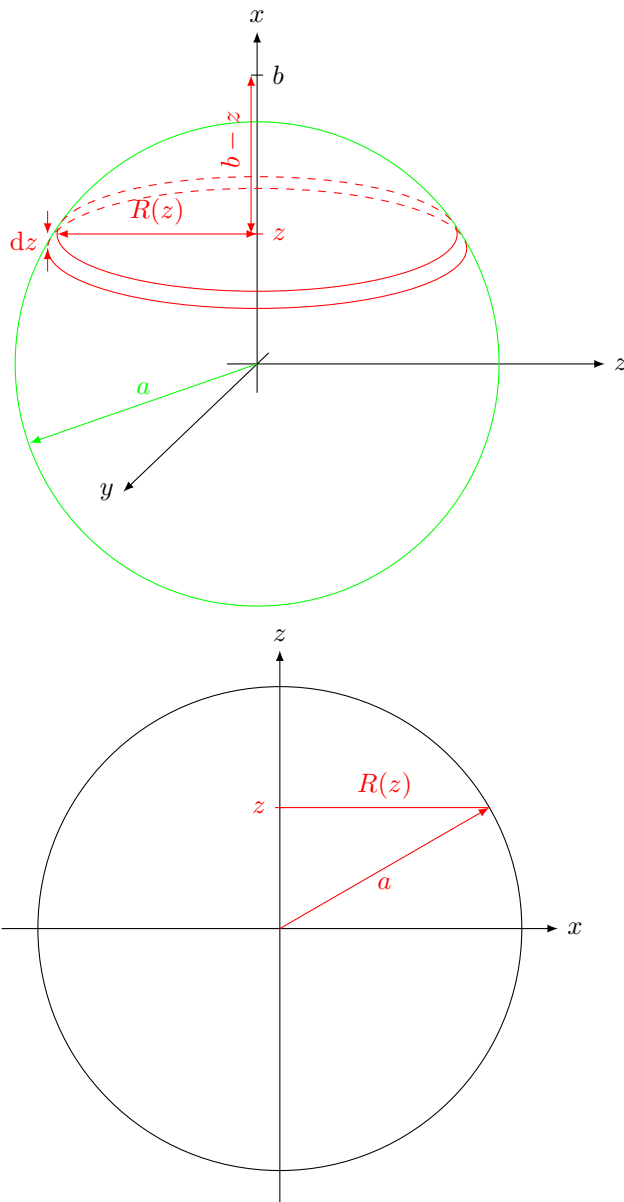
$$\begin{aligned} \vec{E}(b, 0, 0) &= \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{\frac{a}{b} + 1}{1 - \frac{a}{b}} \right) \cdot \vec{e}_x \\ &= \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\underbrace{\ln \left(1 + \frac{a}{b} \right)}_{\approx \frac{a}{b}} - \underbrace{\ln \left(1 - \frac{a}{b} \right)}_{\approx -\frac{a}{b}} \right] \cdot \vec{e}_x \\ &\stackrel{\text{HINWEIS}}{\approx} \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \vec{e}_x \\ &\stackrel{!}{=} \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \cdot \vec{e}_x \\ \text{für } q_L &= \underbrace{2 \cdot a}_{\substack{\triangleq \text{Breite des} \\ \text{Streifens}}} \cdot \sigma_e \end{aligned}$$

Hausaufgabe 2:

Abgabe in grünen Briefkasten gegenüber Raum 213 (Seminarraum) bis Dienstag, 23.11. 2010, 14⁰⁰

Aufgabe 8

Zerlegung der Kugel in Kreisscheiben mit der Dicke dz :



Scheibenradius

$$R(z) = \sqrt{a^2 - z^2}$$

$$dV = \pi R^2(z) \cdot dz$$

$$-a \leq z \leq +a$$

$$dQ = \rho_e \cdot dV = \rho_e \cdot \pi \cdot R^2(z) \cdot dz$$

$$\stackrel{!}{=} d\sigma_e \cdot \pi R^2(z)$$

$$\Rightarrow d\sigma_e = \rho_e \cdot dz \text{ (vgl. Aufgabe 6)}$$

a) Mit dem Ergebnis aus Aufgabe 5c) und Ersetzungen:

$\vec{E}(0,0,b)$	durch	$d\vec{E}(0,0,b)$
σ_e	durch	$d\sigma_e$
a	durch	$R(z)$
b	durch	$b-z$

$$\begin{aligned}
 d\vec{E}(0,0,b) &= \frac{\overbrace{d\sigma_e}^{\rho_e \cdot dz}}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{b-z}{\underbrace{\sqrt{R^2(z) + (b-z)^2}}_{a^2 - z^2 + b^2 - 2bz + z^2}} \right] \cdot \vec{e}_z \\
 &= \frac{\rho_e \cdot dz}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bz}} \right] \cdot \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \vec{E}(0,0,b) &= \int_{z=-a}^a d\vec{E} \\
 &= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_{z=-a}^a \left[1 - \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bz}} \right] \cdot dz \\
 &\stackrel{\text{HINWEIS}}{=} \frac{\rho_e \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \cdot \left[z - \frac{1}{3b} \cdot \left(z + \frac{a^2 - b^2}{-b} \right) \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2bz} \right]_{z=-a}^{z=a} \\
 &= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \cdot \left[2a - \frac{1}{3b} \cdot \left(a + \frac{a^2 - 2b^2}{b} \right) \cdot \underbrace{\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}}_{|a-b| = -(a-b)} + \frac{1}{3b} \cdot \left(-a + \frac{a^2 - 2b^2}{b} \right) \cdot \underbrace{\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}}_{|a+b| = (a+b)} \right] \\
 &= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[2a + \frac{1}{3b^2} \cdot \{ (ab + a^2 - 2b^2) \cdot (a-b) + (-ab + a^2 - 2b^2) \cdot (a+b) \} \right] \\
 &= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \cdot \left[2a + \frac{1}{3b^2} \cdot \{ -2ab^2 + 2a^3 - 4ab^2 \} \right] \\
 &= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \cdot \left[2a - \frac{6ab^2}{3b^2} + \frac{2a^3}{3b^2} \right] \\
 &= \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{a^3}{b^2} \cdot \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Mit Gesamtladung $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho_e$:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(0,0,b) &= \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_e \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \vec{e}_z \\
 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

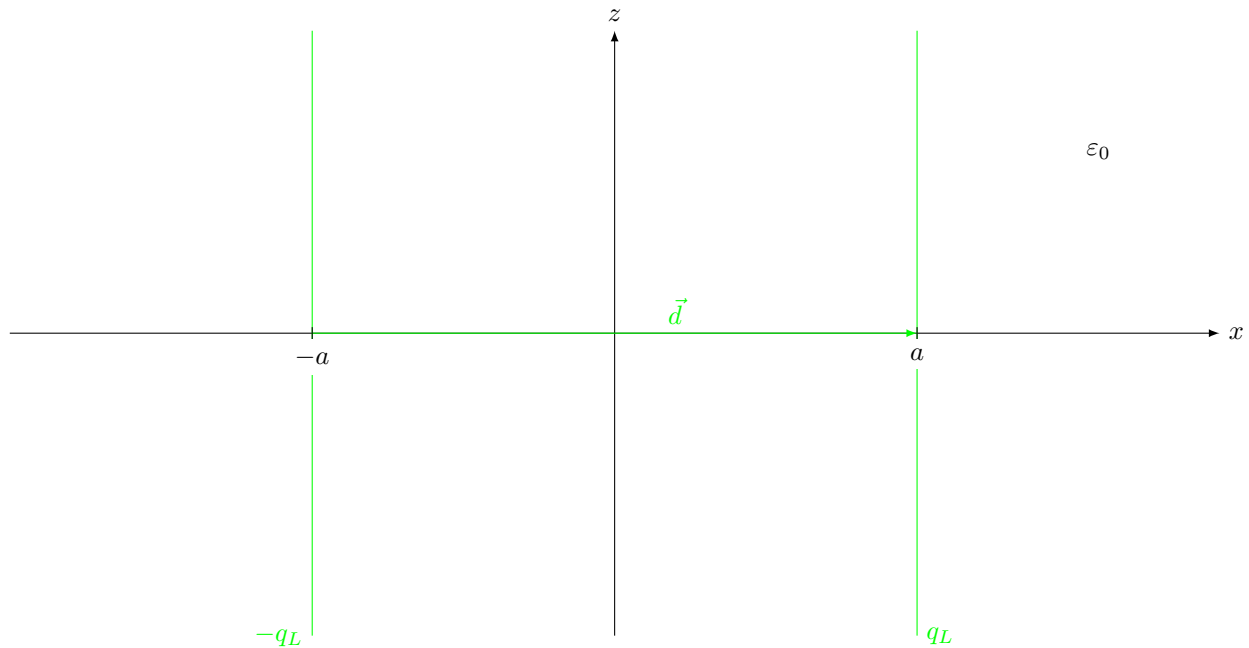
Entspricht für $b > a$ dem Feld einer Punktladung Q im Ursprung. Aus der Kugelsymmetrie folgt:

$$E_r(\vec{r}) = E_r(r); E_\theta = 0, E_\phi = 0$$

also

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad (r \geq a)$$

Aufgabe 9



Liniendipolmoment: $\vec{p}_L = q_L \cdot \vec{d} = \text{const}$

Bekannt: Feld einer Linienladung q_L in der z -Achse in Zylinderkoordinaten

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_\rho}{\rho}$$

Hier: Zwei Linienladungen parallel zur z -Achse, um $\pm a \cdot \vec{e}_x$ verschoben \rightarrow keine zylindersymmetrische Anordnung. Zylinderkoordinaten sind hier ungeeignet.

Zunächst Koordinatentransformation:

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho \cdot \vec{e}_\rho}{\rho^2} = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y}{x^2 + y^2}$$

Dann Verschiebung

1) q_L bei $x = a$:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x-a) \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y}{(x-a)^2 + y^2}$$

2) $-q_L$ bei $x = -a$:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{-q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x+a) \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y}{(x+a)^2 + y^2}$$

Superposition: $\vec{E}_{\text{ges}}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$

x -Komponente:

$$E_{\text{ges},x}(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

mit Abkürzungen:

$$(x-a)^2 + y^2 =: \rho_1^2$$

$$(x+a)^2 + y^2 =: \rho_2^2$$

$$\begin{aligned} E_{\text{ges},x} &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{(x-a) \cdot [(x+a)^2 + y^2] - (x+a) \cdot [(x-a)^2 + y^2]}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} \right] \\ &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{(x-a)(x+a) \cdot \overbrace{[(x+a)^2 - (x-a)^2]}^{2a} + y^2 \cdot \overbrace{[(x-a) - (x+a)]}^{-2a}}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} \right] \\ &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 - a^2 - y^2) \cdot 2a}{\rho_1^2 \rho_2^2} \end{aligned}$$

mit $p_L = q_L \cdot d = q_L \cdot 2 \cdot a$

$$\begin{aligned} E_{\text{ges},x} &= \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x^2 - a^2 - y^2}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2} \\ E_{\text{ges},y}(\vec{r}) &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y \cdot [(x-a)^2 + y^2 - (x+a)^2 - y^2]}{\rho_1^2 \rho_2^2} \\ &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y \cdot 4xa}{\rho_1^2 \rho_2^2} \\ &= \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2xy}{\rho_1^2 \rho_2^2} \end{aligned}$$

Grenzübergang: $d \rightarrow 0$ (d.h. $a \rightarrow 0$) $q_L \rightarrow \infty$ mit $p_L = d \cdot q_L = \text{const}$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_1^2 = x^2 + y^2$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_2^2 = x^2 + y^2$$

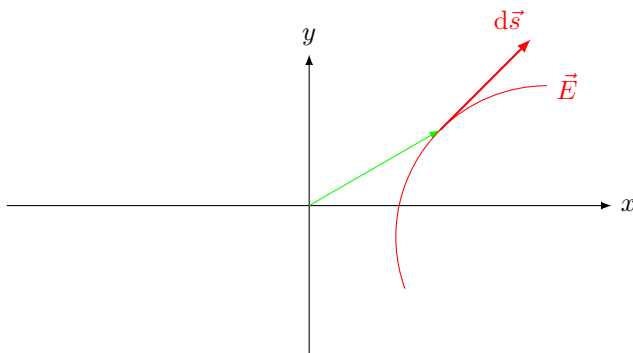
Damit:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} E_{\text{ges},x}(\vec{r}) &= \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \lim_{a \rightarrow 0} E_{\text{ges},y}(\vec{r}) &= \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \vec{E}_{\text{ges}}(\vec{r}) &= \frac{p_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 - y^2) \cdot \vec{e}_x + 2xy \cdot \vec{e}_y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 10

„Ebenes Problem“: Keine Abhängigkeit von z , keine z -Komponente.

Feldliniengleichung:



$d\vec{s} \parallel \vec{E}$ in jedem Punkt der Feldlinie

$$\frac{E_\rho}{d\rho} = \frac{E_\phi}{\rho \cdot d\phi}$$

(Hier: $d\vec{s} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi + d\cancel{z} \cdot \vec{e}_z$.
 $\vec{E} = E_\rho \cdot \vec{e}_\rho + E_\phi \cdot \vec{e}_\phi + \cancel{E_z \cdot \vec{e}_z}$.)

a) Transformation von $\vec{E}(\vec{r})$ aus Aufgabe 9 in Zylinderkoordinaten. mit

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cdot \cos \phi \\
 y &= \rho \cdot \sin \phi \\
 \vec{e}_x &= \cos \phi \cdot \vec{e}_\rho - \sin \phi \cdot \vec{e}_\phi \\
 \vec{e}_y &= \sin \phi \cdot \vec{e}_\rho + \cos \phi \cdot \vec{e}_\phi \\
 \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{pL}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho^4} \\
 &\quad \cdot [(\rho^2 \cos^2 \phi - \rho^2 \sin^2 \phi) \cdot (\cos \phi \cdot \vec{e}_\rho - \sin \phi \cdot \vec{e}_\phi) + 2\rho^2 \cos \phi \sin \phi \cdot (\sin \phi \cdot \vec{e}_\rho + \cos \phi \cdot \vec{e}_\phi)] \\
 &= \frac{pL}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho^2} \\
 &\quad \cdot \left[(\cos^3 \phi - \sin^2 \phi \cos \phi + 2 \cos \phi \sin^2 \phi) \cdot \vec{e}_\rho + (-\cos^2 \phi \sin \phi + \sin^3 \phi + 2 \cos^2 \phi \sin \phi) \cdot \vec{e}_\phi \right] \\
 &= \frac{pL}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot \left[\underbrace{(\cos^3 \phi + \cos \phi \cdot \sin^2 \phi)}_{\cos \phi \cdot (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \cos \phi} \cdot \vec{e}_\rho + \underbrace{(\sin^3 \phi + \cos^2 \phi \sin \phi)}_{\sin \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \sin \phi} \cdot \vec{e}_\phi \right] \\
 &= \frac{pL}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot [\cos \phi \cdot \vec{e}_\rho + \sin \phi \cdot \vec{e}_\phi]
 \end{aligned}$$

b) DGL (umgeformt):

$$\frac{d\rho}{\rho \cdot d\phi} = \frac{E_\rho}{E_\phi} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$$

(für $\rho > 0$ und $0 < \phi < 2\pi, \phi \neq \pi$)

Trennung der Variablen:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \cdot d\phi$$

Integration:

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \cdot d\phi$$

Mit $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$ gilt

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + C_1 &= \ln |\sin \phi| + C_2 \\
 \frac{\rho}{\rho_0} &= |\sin \phi| \cdot e^{C_2 - C_1} \\
 \rho &= |\sin \phi| \cdot \underbrace{e^{C_2 - C_1} \cdot \rho_0}_C
 \end{aligned}$$

Entspricht einer parametrischen Beschreibung der Feldlinien (jeder Feldlinie ist eine Konstante C zugeordnet).

$$\underline{\rho = C \cdot |\sin \phi|} \quad (\text{für } \rho > 0 \text{ und } 0 < \phi < 2\pi, \phi \neq \pi)$$

c) Transformation in kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + y^2} &= C \cdot \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\
 x^2 + y^2 &= C \cdot |y|
 \end{aligned}$$

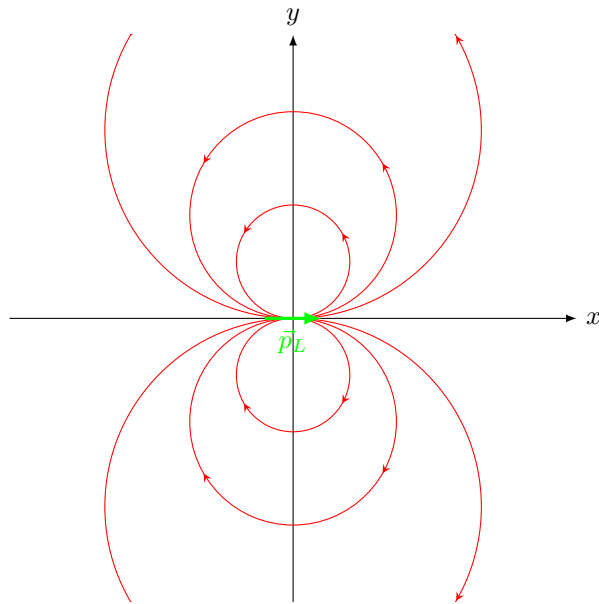
zu zeigen: Diese Gleichung entspricht einer Kreisgleichung ($x'^2 + y'^2 = R^2$)

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - C \cdot |y| &= 0 \\
 \underbrace{x^2 + y^2 - C \cdot |y| + \left(\frac{C}{2}\right)^2}_{\left(|y| - \frac{C}{2}\right)^2} &= \left(\frac{C}{2}\right)^2 =: R^2
 \end{aligned}$$

Also:

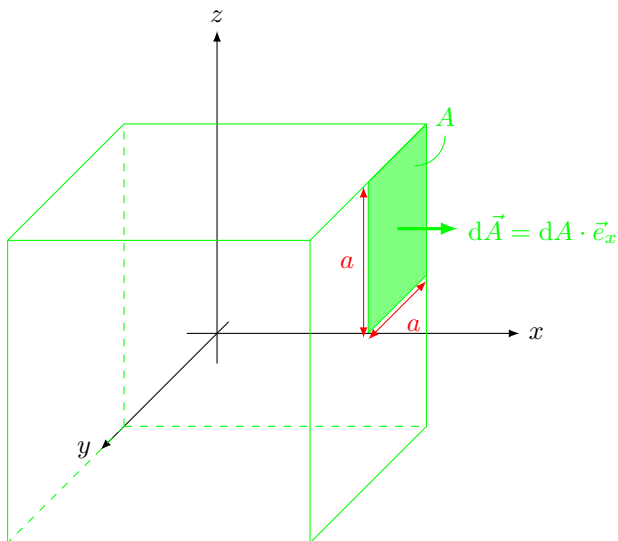
$$x^2 + (|y| - R)^2 = R^2$$

$\hat{=}$ Kreisgleichung für Kreise mit dem Radius R und dem Mittelpunktskoordinaten $x_M = 0$ und $|y_M| = R \Leftrightarrow y_M = \pm R$



Anmerkung: Die Feldlinien sind **nicht** geschlossen, sondern beginnen bei $x = +0$ und enden bei $x = -0$. $\text{rot } \vec{E} = 0$ ist erfüllt.

Aufgabe 11



a) Gesucht:

$$\Psi = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Wegen der Geometrie der Fläche A am einfachsten: Berechnung des Integrals in kartesischen Koordinaten.

Integrationsgebiet: $x = a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$.

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x \\ \vec{D}(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ d\Psi &= \vec{D} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\vec{D} \cdot \vec{e}_x}_{D_x(x=a,y,z)} \cdot dy \cdot dz \\ \Psi &= \frac{Q}{4\pi} \cdot \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a \frac{a}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot dz \cdot dy \end{aligned}$$

2. Hinweis mit x ersetzt durch z , B^2 ersetzt durch $(a^2 + y^2)$

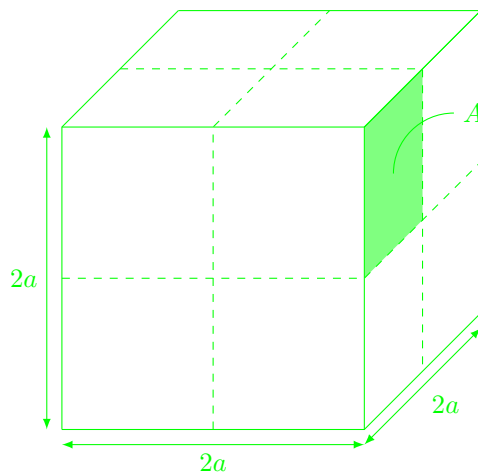
$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{Q}{4\pi} \cdot \int_{y=0}^a a \cdot \left[\frac{z}{(a^2 + y^2) \cdot \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} \right]_{z=0}^{z=a} \cdot dy \\ &= \frac{Q}{4\pi} \cdot a^2 \cdot \int_{y=0}^a \frac{1}{(a^2 + y^2) \cdot \sqrt{2a^2 + y^2}} dy \end{aligned}$$

3. Hinweis mit x ersetzt durch y , z^2 ersetzt durch y^2 :

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{Q}{4\pi} \cdot a^2 \cdot \left[\frac{1}{2a^2} \cdot \arctan \left(\frac{y \cdot \sqrt{y^2 + 2a^2}}{a^2} \right) \right]_{y=0}^{y=a} \\ &= \frac{Q}{8\pi} \left[\underbrace{\arctan \left(\frac{a \cdot \sqrt{3a^2}}{a^2} \right)}_{\substack{\sqrt{3} \\ \text{1. Hinweis: } = \frac{\pi}{3}}} - \underbrace{\arctan(0)}_{=0} \right] \end{aligned}$$

$$\Psi = \frac{Q}{24}$$

b)



Wegen der Kugelsymmetrie von $\vec{D}(\vec{r})$ (u.a. Rotationssymmetrie bzgl. der x -/ y -/ z -Achse) wird jeder Quadrant jeder der sechs Würfelseiten vom gleichen Fluss Ψ durchsetzt.

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{ges}} &= \sum_{i=1}^{24} \Psi_i \text{ mit } \Psi_i = \frac{Q}{24}, \text{ also} \\ \Psi_{\text{ges}} &= Q \end{aligned}$$

Aufgabe 12

a) Zu Aufgabe 8: Kugelförmige, homogene Raumladungsverteilung ρ_e mit Radius a

Gesucht: $\vec{D}(\vec{r})$ bzw. $\vec{E}(\vec{r})$ für $|\vec{r}| \geq a$ d.h. **drei** skalare Unbekannte.

Ansatz:

$$\oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_e \cdot dV \hat{=} \text{eine skalare Gleichung}$$

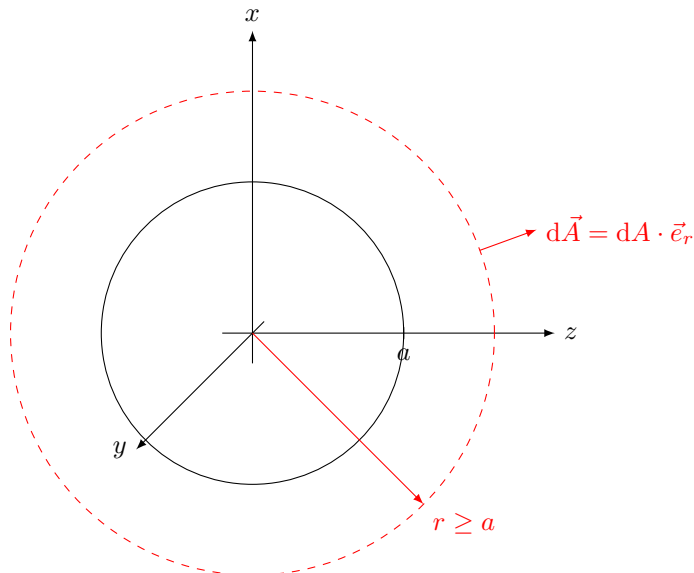
und Symmetrieüberlegungen

$\rho_e(\vec{r})$ ist konstant, d.h. kugelsymmetrisch (gilt allgemein auch für $\rho_e = \rho_e(r)$)

$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r})$ muss auch kugelsymmetrisch sein.

$D_\theta = 0, D_\phi = 0, D_r(\vec{r}) = D_r(r)$, also $\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r) \cdot \vec{e}_r$ (nur noch **eine** skalare Unbekannte)

Geeignete Hüllfläche



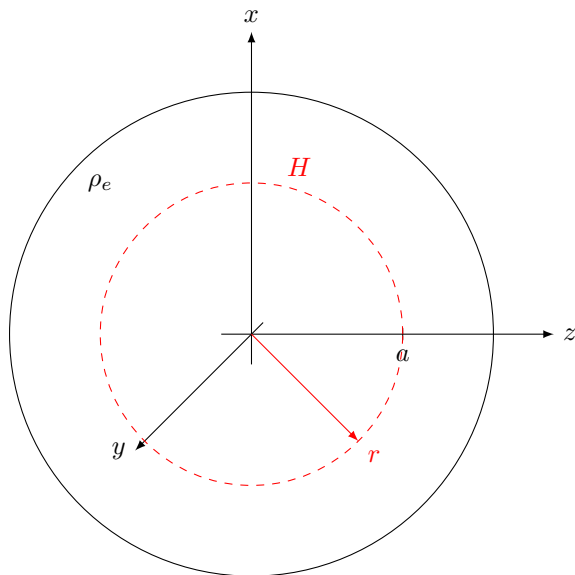
$\Rightarrow \vec{D} \parallel d\vec{A}$ und $D_r = \text{const}$ (wegen $r = \text{const}$ in H)

$$\begin{aligned} \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \oint_H D_r(r) \cdot dA = D_r(r) \cdot \underbrace{\oint_H dA}_{4\pi r^2} \\ &\stackrel{!}{=} Q_{\text{ein}} = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho_e \\ \Rightarrow D_r(r) &= \frac{a^3 \cdot \rho_e}{3r^2} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot D_r(r) \cdot \vec{e}_r = \frac{a^3 \cdot \rho_e}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \text{ für } r \geq a \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 11 (el. Fluss Ψ_A durch Fläche A).

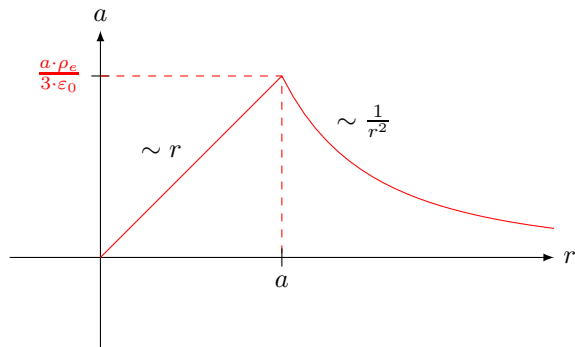
$$\begin{aligned} \Psi_{\text{ges}} &= \oint_{H_{\text{Würfel}}} \underbrace{\vec{D} \cdot d\vec{A}}_{|\vec{D}(x,y,z)| \cdot dA \cdot \cos \alpha} \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} 24 \cdot \Psi_A \\ &\stackrel{!}{=} Q_{\text{ein}} = Q \\ \text{also } \Psi_A &= \frac{Q}{24} \end{aligned}$$

b) Feld der Kugelförmigen Raumladungsverteilung $\rho_e = \text{const}$ für $|\vec{r}| < a$:

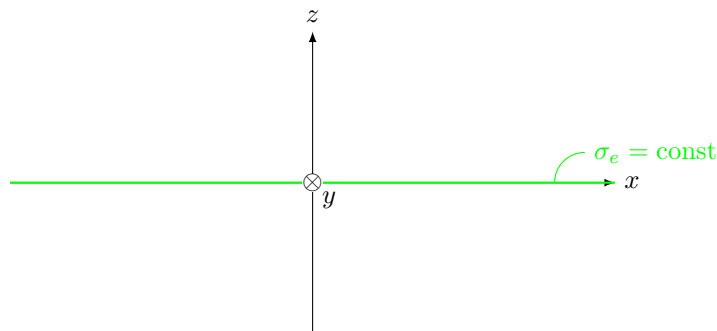


$$\begin{aligned}
 \oiint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} &= D_r(r) \cdot 4\pi r^2 \text{ wie zuvor} \\
 &= \iiint_V \rho_e \cdot dV = \rho_e \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \\
 \Rightarrow D_r(r) &= \frac{\rho_e \cdot r}{3} \text{ und} \\
 \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho_e \cdot r}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \vec{e}_r \text{ f\"ur } |\vec{r}| < a
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung



c)



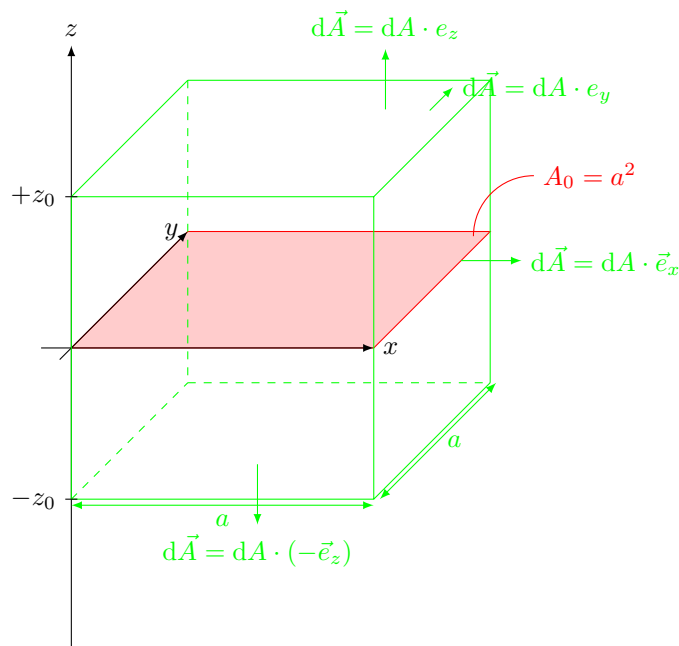
Symmetrie: Die Ladungsverteilung und damit die elektrische Flussdichte $\vec{D}(\vec{r})$ sind

- invariant bezüglich einer Rotation um die z -Achse (und jeder zur z -Achse parallelen Achse)
 $\Rightarrow D_x = 0, D_y = 0$
- invariant bezüglich einer Verschiebung in x - oder y -Richtung
 $\Rightarrow D_z(\vec{r}) = D_z(z) \neq D_z(x, y)$

- symmetrisch zur x - y -Ebene
 $\Rightarrow D_z(-z) = -D_z(z)$ (ungerade Funktion)

Also $\vec{D}(\vec{r}) = D_z(z) \cdot \vec{e}_z$

Gaußscher Satz der Elektrostatik, angewendet auf eine quaderförmige Hüllfläche



H: Einhüllende eines Quaders mit

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq a \\ 0 &\leq y \leq a \\ -z_0 &\leq z \leq z_0 \end{aligned}$$

- Seitenflächen $\vec{D} \perp d\vec{A}$ (wg. $d\vec{A} \parallel \vec{e}_x$ oder $d\vec{A} \parallel \vec{e}_y$) $\Rightarrow \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$, kein Beitrag zum Hüllflächenintegral
- Deckel:

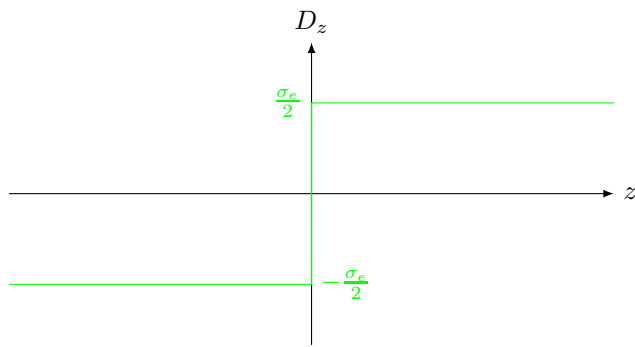
$$\begin{aligned} d\vec{A} &= dA \cdot \vec{e}_z \\ \vec{D} &= D_z(z_0) \cdot \vec{e}_z = \text{const} \\ \vec{D} \cdot \vec{A} &= D_z(z_0) \cdot dA \end{aligned}$$

- Boden

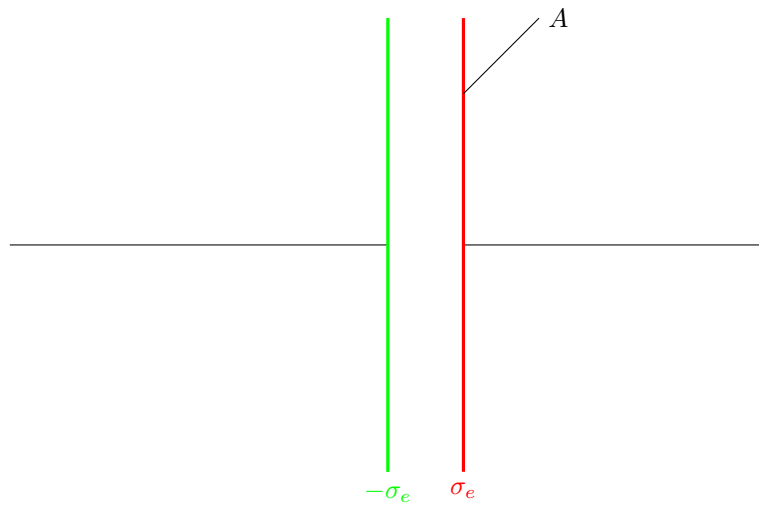
$$\begin{aligned} d\vec{A} &= dA \cdot (-\vec{e}_z) \\ \vec{D} &= D_z(-z_0) \cdot \vec{e}_z = \text{const} \\ \vec{D} \cdot d\vec{A} &= -D_z(-z_0) \cdot dA \\ \oiint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} &= D_z(z_0) \cdot A_0 - \underbrace{D_z(-z_0)}_{-D_z(z_0)} \cdot A_0 \\ &\stackrel{!}{=} Q_{\text{ein}} = \sigma_e \cdot A_0 \text{ für beliebige } z_0 > 0 \end{aligned}$$

Insgesamt

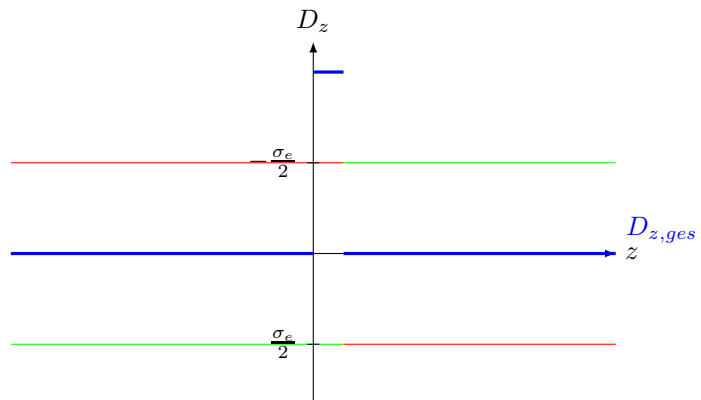
$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{2} \cdot \vec{e}_z & , \text{ für } z > 0 \\ -\frac{\sigma_e}{2} \cdot \vec{e}_z & , \text{ für } z < 0 \end{cases}$$

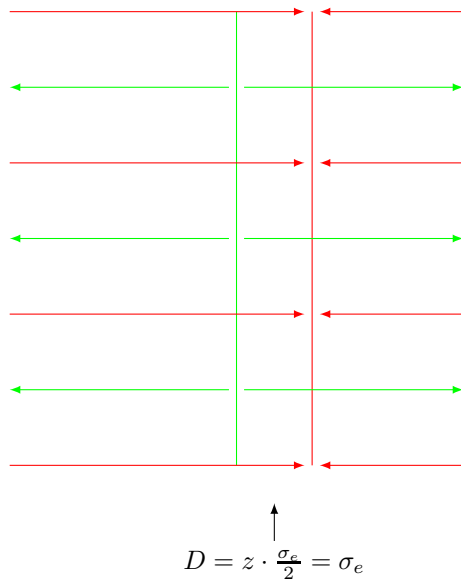


Vgl. idealer Plattenkondensator:

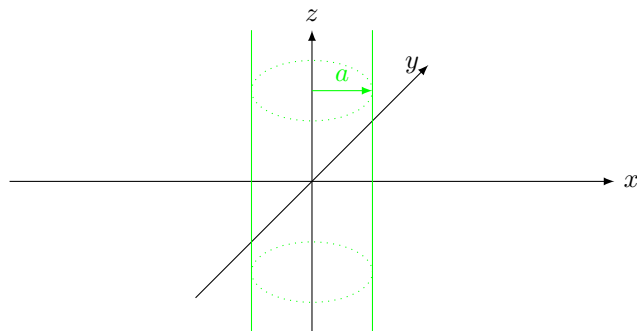


mit $\sigma_e = \frac{Q}{A}$.





d)



Symmetrie: Die Ladungsverteilung und die elektrische Flussdichte \vec{D} sind

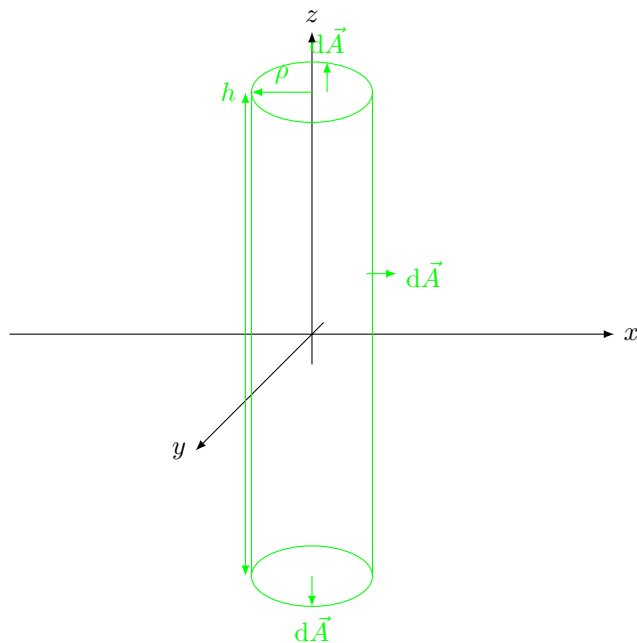
- invariant bzgl. einer Drehung um π (180°) um die x -Achse und die y -Achse
 $\Rightarrow D_\phi = 0, D_z = 0$
- invariant bzgl. einer beliebigen Drehung um die z -Achse
 $\Rightarrow D_\rho(\vec{r}) \neq D_\rho(\phi)$
- invariant bzgl. einer Verschiebung in z -Richtung
 $\Rightarrow D_\rho(\vec{r}) \neq D_\rho(z)$

Zusammenfassung:

$$\vec{D}(\vec{r}) = D_\rho(\rho) \cdot \vec{e}_\rho$$

(zylindrisches Radialfeld)

Geeignete Hüllfläche: Zylinder um die z -Achse mit einer Höhe h und dem Radius ρ

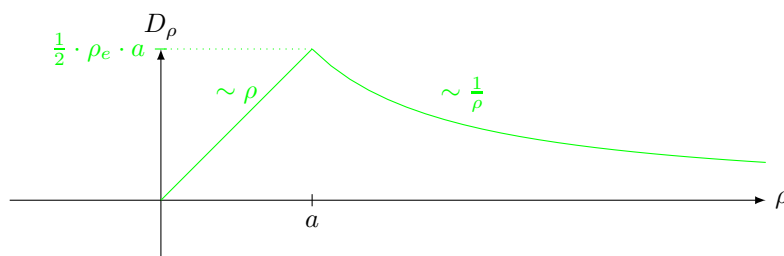


- Deckel und Boden: $d\vec{A} \parallel \vec{e}_z$, $d\vec{A} \perp \vec{D}$, also $\vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$ (kein Beitrag zum Integral)
- Zylindermantel: $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_\rho \parallel \vec{D}$

$$\vec{D} \cdot d\vec{A} = \underbrace{D_\rho(\rho)}_{\text{const wg. } \rho = \text{const}} \cdot dA$$

$$\begin{aligned} \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \iint_{A_{\text{Mantel}}} D_\rho(\rho) \cdot dA = D_\rho(\rho) \cdot \iint_{A_{\text{Mantel}}} dA \\ &= D_\rho(\rho) \cdot 2\pi\rho \cdot h \\ &\stackrel{!}{=} Q_{\text{ein}} = \iiint_V \rho_e(\vec{r}) \cdot dV = \begin{cases} \rho_e \cdot h \cdot \pi \cdot \rho^2 & \text{für } \rho \leq a \\ \rho_e \cdot h \cdot \pi \cdot a^2 & \text{für } \rho > a \end{cases} \end{aligned}$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = D_\rho(\rho) \cdot \vec{e}_\rho = \frac{1}{2}\rho_e \cdot \vec{e}_\rho \cdot \begin{cases} \rho & \text{für } \rho \leq a \\ \frac{a^2}{\rho} & \text{für } \rho > a \end{cases}$$



Aufgabe 13

Elektrostatistisches Potential allgemein:

$$\varphi_e(P) = \varphi_e(\underbrace{(P_0)}_{\text{Bezugspunkt}}) - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} \text{ entlang beliebiger Kurve zwischen } P_0 \text{ und } P$$

Bezugspotential (meist $\varphi(P_0) = 0$)

Elektrische Feldstärke aus Aufgabe 8,12 a/b:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_{r,\max} \cdot \vec{e}_r \cdot \begin{cases} \frac{r}{a^2} & \text{für } r \leq a \\ \frac{a^2}{r^2} & \text{für } r > a \end{cases}$$

mit $E_{r,\max} = \frac{\rho_e \cdot a}{3 \cdot \varepsilon_0}$

a) $d\vec{s} \stackrel{\text{allg.}}{=} dr \cdot \vec{e}_r + \underbrace{r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \sin \theta \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi}_{\text{und wegen } \vec{E} \parallel \vec{e}_r \text{ hier nicht benötigt}}$

Hier:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_r(r) \cdot dr (\rightarrow \text{gewöhnliches Integral})$$

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi(r) \text{ kugelsymmetrisches Potential}$$

$$P_0 \text{ im Ursprung } \hat{=} r_0 = 0, \varphi_e(r = 0) = 0$$

Also:

$$\varphi_e(r) = \underbrace{\varphi_e(r=0)}_{=0} - \int_{r'=0}^r E_r(r') \cdot dr'$$

(i) innen, $0 \leq r \leq a$

$$\varphi_e(r) = -E_{r,\max} \cdot \int_{r'=0}^r \frac{r'}{a} \cdot dr' = \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot r^2$$

(ii) außen, $a < r < \infty$

$$\begin{aligned} \varphi_e(r) &= \varphi(r=0) - \underbrace{\int_{r'=0}^a E_r(r') \cdot dr'}_{=\varphi_e(r=a)} - \int_{r'=a}^r E_r(r') \cdot dr' \\ &= -\frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot a^2 - E_{r,\max} \cdot \underbrace{\int_{r'=a}^r \frac{a^2}{r'^2} \cdot dr'}_{a^2 \cdot \left[-\frac{1}{r'}\right]_{r'=a}^{r'=r} = a^2 \cdot \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)} \\ \varphi_e(r) &= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot \left[-a^2 + 2 \cdot a^3 \cdot \frac{1}{r} - 2a^2\right] \\ &= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot \left[2 \frac{a^3}{r} - 3a^2\right] \end{aligned}$$

Zusammenfassung: $0 \leq r < \infty$

$$\varphi_e(r) = \frac{\rho_e}{6 \cdot \varepsilon_0} \cdot \begin{cases} -r^2 & 0 \leq r \leq a \\ 2 \cdot \frac{a^3}{r} - 3a^2 & a < r < \infty \end{cases}$$

b) $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_e(\vec{r})$

mit

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi_e &= \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \underbrace{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi}_{=0} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{\rho_e}{6 \cdot \varepsilon_0} \cdot \vec{e}_r \cdot \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r}(r^2) & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(2 \cdot \frac{a^3}{r} - 3a^2\right) & a < r < \infty \end{cases} \\ &= -\frac{\rho_e}{6 \varepsilon_0} \cdot \vec{e}_r \cdot \begin{cases} -2r & 0 \leq r \leq a \\ -2 \cdot \frac{a^3}{r^2} & a < r < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

c) Jetzt $r_0 = a, \varphi_e(r = a) = 0$

(i) innen, $0 \leq r \leq a$:

$$\begin{aligned}\varphi_e(r) &= \underbrace{\varphi(r=a)}_{=0} - \int_{r'=a}^r E_r(r') \cdot dr' \\ &= -E_{r,\max} \cdot \int_{r'=a}^r \frac{r'^3}{a} \cdot dr' = \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot [a^2 - r^2]\end{aligned}$$

(ii) außen, $a < r < \infty$

$$\begin{aligned}\varphi_e(r) &= -E_{r,\max} \cdot \underbrace{\int_{r'=a}^r \frac{a^2}{r'^2} \cdot dr'}_{a^2 \cdot \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right]} \\ &= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot \left[2 \cdot \frac{a^3}{r} - 2a^2\right]\end{aligned}$$

Zusammenfassung: $0 \leq r < \infty$:

$$\varphi_e(r) = \frac{\varphi_e}{6 \cdot \varepsilon_0} \cdot \begin{cases} a^2 - r^2 & 0 \leq r \leq a \\ 2 \cdot \frac{a^3}{r} - 2a^2 & a < r < \infty \end{cases}$$

Jetzt $r_0 \rightarrow \infty$

(i) außen: $a < r < \infty$

$$\begin{aligned}\varphi_e(r) &= \underbrace{\varphi_e(r \rightarrow \infty)}_{=0} - \int_{r'=\infty}^r E_r(r') \cdot dr' \\ &= -E_{r,\max} \cdot \int_{r'=\infty}^r \frac{a^2}{r'^2} \cdot dr' \\ &= E_{r,\max} \cdot \left[\frac{a^2}{r} - 0\right] = \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot 2\frac{a^3}{r}\end{aligned}$$

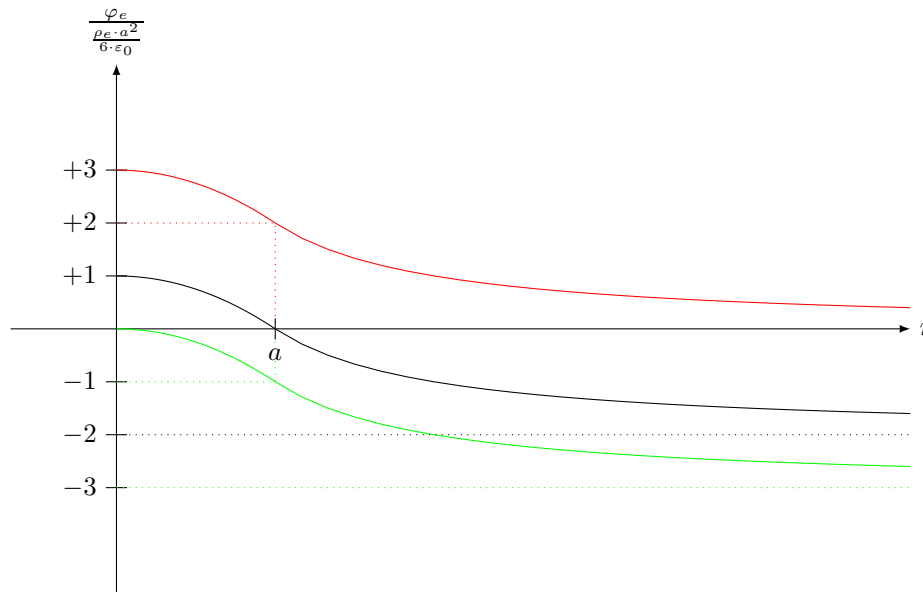
(ii) innen, $0 \leq r \leq a$

$$\begin{aligned}\varphi_e(r) &= \underbrace{\varphi_e(r \rightarrow \infty) - \int_{r'=\infty}^a E_r(r') \cdot dr'}_{\varphi(r=a) = \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot 2a^2} - \int_{r'=a}^r E_r(r') \cdot dr' \\ &= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot 2a^2 - E_{r,\max} \cdot \underbrace{\int_{r'=a}^r \frac{r'}{a} \cdot dr'}_{\frac{1}{2a} \cdot [r^2 - a^2]} \\ &= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot [2a^2 - r^2 + a^2] \\ &= \frac{E_{r,\max}}{2a} \cdot [3a^2 - r^2]\end{aligned}$$

Zusammenfassung, $0 \leq r < \infty$

$$\varphi_e(r) = \frac{\rho_e}{6\varepsilon_0} \cdot \begin{cases} 3a^2 - r^2 & 0 \leq r \leq a \\ 2\frac{a^3}{r} & a < r < \infty \end{cases}$$

d)

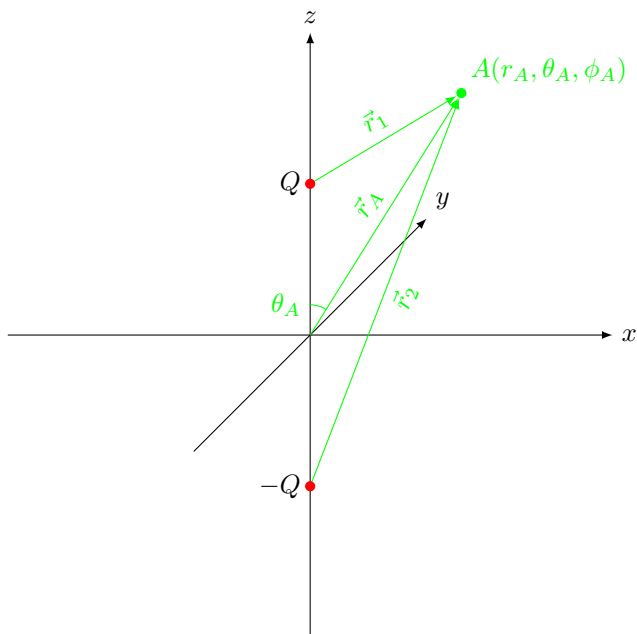


Hausaufgabe zu GGET III für Di, 14.12.2010, 14⁰⁰:

Übungs-Blatt 4, Aufgabe 21 (Plattenkondensator,-widerstand)

Blatt 3

Aufgabe 14



a) $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$

$$\varphi_{e1}(r_1) = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} + \underbrace{\varphi_{e1,\infty}}_{\text{für } r_1 \rightarrow \infty}$$

$$\varphi_{e2}(r_2) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2} + \underbrace{\varphi_{e2,\infty}}_{\text{für } r_2 \rightarrow \infty}$$

Anmerkung: Gleicher Bezugspunkt für φ_{e1} , φ_{e2} und φ_e sinnvoll

Hier: $\varphi_{e1,\infty} = \varphi_{e2,\infty} = \varphi_{e,\infty} := 0$

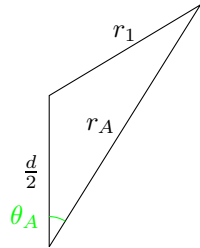
Superposition:

$$\varphi_e(r_1, r_2) = \varphi_{e1}(r_1) + \varphi_{e2}(r_2)$$

$$\varphi_e(r_1, r_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

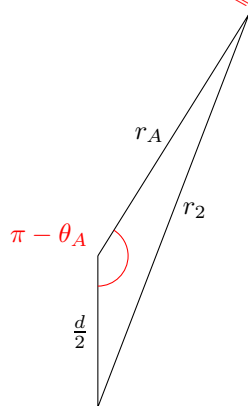
b) Ersetze r_1, r_2 (genauer: $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$) durch r_A, θ_A .

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$



$$r_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r_A^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot r_A \cdot \cos \theta_A$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{d}{r_A}\right)^2}_{\ll \frac{d}{r_A} \ll 1} + 1 - \frac{d}{r_A} \cdot \cos \theta_A}}$$



$$r_2^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r_A^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot r_A \cdot \underbrace{\cos(\pi - \theta_A)}_{= -\cos \theta_A}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{d}{r_A}\right)^2}_{\ll \frac{d}{r_A} \ll 1} + 1 + \frac{d}{r_A} \cdot \cos \theta_A}}$$

Näherungen:

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r_A} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r_A} \cos \theta_A \right)$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r_A} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d}{r_A} \cos \theta_A \right)$$

für $\frac{d}{r_A} \ll 1$

- c) Dipolmoment: $p = Q \cdot d = \text{const}$
 bzw. $\vec{p} = Q \cdot d \cdot \vec{e}_z = \text{const}$

$$\begin{aligned}\varphi_e(r_A, \theta_A) &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r_A} \cdot \cos \theta_A - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r_A} \cdot \cos \theta_A\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d}{r_A^2} \cdot \cos \theta_A \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A^2} \cdot \cos \theta_A \quad (\text{für } \frac{d}{r_A} \ll 1)\end{aligned}$$

Punktdipol: $d \rightarrow 0, p = \text{const}$

$$\varphi_{eD}(r_A, \theta_A) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A^2} \cdot \cos \theta_A$$

Anmerkung: Dieser Ausdruck gilt nur für $\vec{p} = p \cdot \vec{e}_z$

Verallgemeinerung (mit $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{r_A} = \cos \theta_A$ kann $p \cdot \cos \theta_A$ als Skalarprodukt gedeutet werden: $\vec{p} \cdot \vec{e}_{r_A} = p \cdot \cos \theta_A$).

$$\varphi_{eD}(\vec{r}_A) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_{r_A}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A^2} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_A}{r_A^3}$$

- d) (In Folgendem: \vec{r} anstatt \vec{r}_A)

$$\begin{aligned}\vec{E}_D(\vec{r}) &= -\text{grad } \varphi_{eD}(\vec{r}) \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi_{eD} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_{eD} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \phi} \varphi_{eD} \cdot \vec{e}_\phi}_{=0}\right) \\ &= \frac{-p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-2 \cdot \frac{\cos \theta}{r^3} \cdot \vec{e}_r - \frac{\sin \theta}{r^3} \cdot \vec{e}_\theta\right] \\ &= +\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot [2 \cos \theta \cdot \vec{e}_r + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta]\end{aligned}$$

Vergleich der r -Abhängigkeiten:

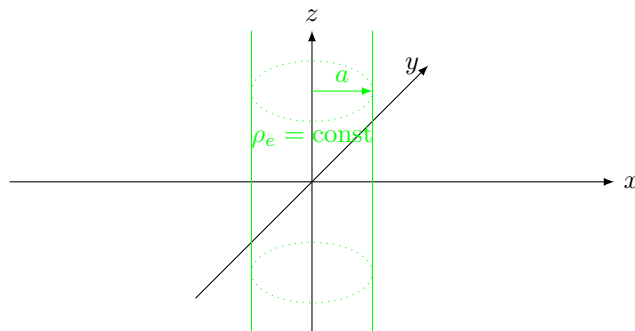
$$\varphi_{eD} \sim \frac{1}{r^2}, \quad |\vec{E}_D| \sim \frac{1}{r^3}$$

Punktladung:

$$\varphi_e \sim \frac{1}{r}, \quad |\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$$

Aufgabe 15

- a)



Zylindersymmetrie $\rightarrow \Delta \varphi_e = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$ in Zylinderkoordinaten mit $\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(\rho)$

$$\Delta \varphi_e = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial \phi^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial z^2}}_{=0 \text{ wegen Symmetrie}}$$

$$\Delta \varphi_e = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) = \begin{cases} -\frac{\rho_e}{\epsilon} & \text{für } 0 \leq \rho < a \\ 0 & \text{für } a < \rho < \infty \end{cases}$$

b) (i) innen, $0 \leq \rho \leq a$:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} = \text{const (Poisson-Gl.)}$$

$$\text{für } \rho > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \cdot \rho$$

1. Integration

$$\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \cdot \int \rho \, d\rho = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \cdot \frac{\rho^2}{2} + C_1$$

$$\text{für } \rho > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho}}_{=-E_\rho} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \cdot \frac{\rho}{2} + \frac{C_1}{\rho}$$

Hier: \vec{E} überall stetig, d.h. auch für $\rho \rightarrow 0$ gilt $|\vec{E}| < \infty \Rightarrow C_1 = 0$.

Anmerkung: $C_1 \neq 0$ wäre möglich, wenn sich in der z -Achse eine Linienladung befände. \vec{E} wäre dann nicht stetig.

Also:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} = -\frac{\rho_e}{2\varepsilon} \cdot \rho \quad (*)$$

2. Integration:

$$\varphi_e = -\frac{\rho_e}{4\varepsilon} \cdot \rho^2 + C_2$$

Mit Bezugspunkt $\rho_0 = 0$ und $\varphi_e(\rho = \rho_0) = 0$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

Also

$$\varphi_e(\rho) = -\frac{\rho_e}{4\varepsilon} \cdot \rho^2 \text{ für } 0 \leq \rho \leq a \text{ stetige Ergänzung für } \rho = 0$$

(ii) außen, $a < \rho < \infty$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) = 0 \text{ (Laplace-Gl.)}$$

$$\rho > a > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) = 0$$

1. Integration

$$\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} = C_3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho}}_{-E_\rho \text{ stetig bei } \rho = a} = \frac{C_3}{\rho}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow a+0} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \stackrel{!}{=} \lim_{\rho \rightarrow a-0} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \text{ aus } (*)$$

$$\frac{C_3}{a} \stackrel{!}{=} -\frac{\rho_e}{2\varepsilon} \cdot a$$

$$\Leftrightarrow C_3 = -\frac{\rho_e}{2\varepsilon} \cdot a$$

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} = -\frac{\rho_e}{2\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{\rho}$$

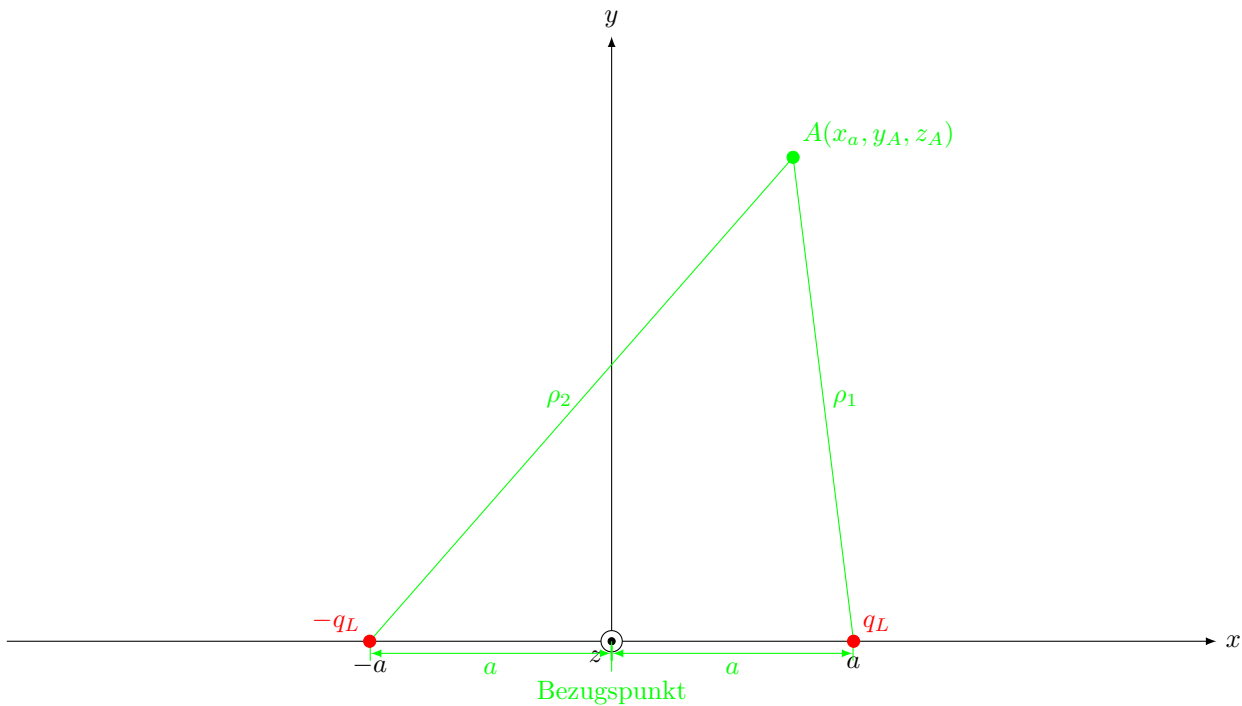
$$\underbrace{\phantom{-\frac{\rho_e}{2\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{\rho}}}_{E_\rho}$$

Anmerkung: Ein Sprung von E_ρ wäre möglich, falls bei $\rho = a$ eine Flächenladung σ_e oder ein Sprung der Permittivität ε vorläge.

2. Integration: φ_e stetig bei $\rho = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_e(\rho) &= \varphi_e(\rho = a) - \int_{\rho'=a}^{\rho} \frac{\rho}{2\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{\rho'} \cdot d\rho' \\ &= \frac{-\rho_e}{4\varepsilon} \cdot a^2 - \frac{\rho_e}{2\varepsilon} \cdot a^2 \cdot \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \\ &= -\frac{\rho_e \cdot a^2}{4\varepsilon} \cdot \left(1 + 2 \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)\right) \text{ für } a < \rho < \infty\end{aligned}$$

Aufgabe 16



a) Potential **einer** Linienladung **in der z-Achse**:

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(\rho) = \underbrace{\varphi_e(\rho = \rho_0)}_{=0} - \frac{qL}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

$\rho \hat{=}$ Abstand des Bezugspunktes von der Linienladung

Hier:

$$\begin{aligned}\varphi_{e1}(\rho_1) &= -\frac{qL}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_1}{a}\right) \\ \varphi_{e2}(\rho_2) &= +\frac{qL}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{a}\right) \\ \varphi_e(\rho_1, \rho_2) &= \varphi_{e1}(\rho_1) + \varphi_{e2}(\rho_2) \\ &= \frac{qL}{2\pi\varepsilon} \cdot \left[\ln\left(\frac{\rho_2}{a}\right) - \ln\left(\frac{\rho_1}{a}\right)\right] \\ &= \frac{qL}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\end{aligned}$$

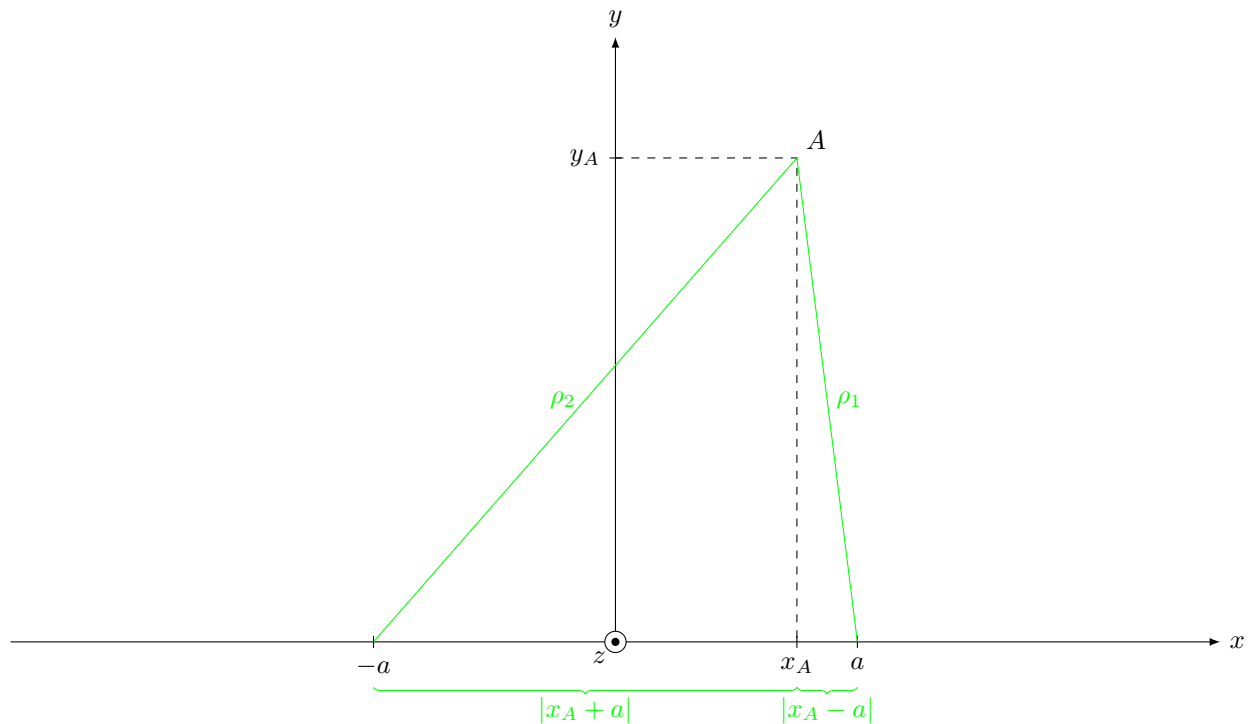
b) Äquipotentialflächen:

$$\begin{aligned}\varphi_e(\rho_1, \rho_2) &\stackrel{!}{=} \text{const} \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) &= \text{const}\end{aligned}$$

ln ist streng monoton wachsend

$$\Leftrightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} =: k = \text{const}$$

$$\text{und } k^2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 = \text{const}$$



c)

$$\rho_1^2 = (x_A - a)^2 + y_A^2, \rho_2^2 = (x_A + a)^2 + y_A^2$$

$$k^2 = \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{(x_A + a)^2 + y_A^2}{(x_A - a)^2 + y_A^2} = \text{const}$$

d)

$$(x_A + a)^2 + y_A^2 = k^2 \cdot (x_A - a)^2 + k^2 \cdot y_A^2$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + 2x_A a + a^2 + y_A^2 - k^2 \cdot (x_A^2 - 2x_A a + a^2) - k^2 \cdot y_A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 \cdot (1 - k^2) + 2x_A \cdot a \cdot (1 + k^2) + a^2 \cdot (1 - k^2) + y_A^2 \cdot (1 - k^2) = 0$$

$$\stackrel{\text{falls } k^2 \neq 1}{\Leftrightarrow} x_A^2 + \underbrace{\frac{1 + k^2}{1 - k^2} \cdot 2 \cdot a \cdot x_A + a^2 + y_A^2}_{=: -2 \cdot x_0} = 0$$

$$\begin{aligned} &=: -2 \cdot x_0 \\ x_0 &= -\frac{1+k^2}{1-k^2} \cdot a = \frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot a \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung:

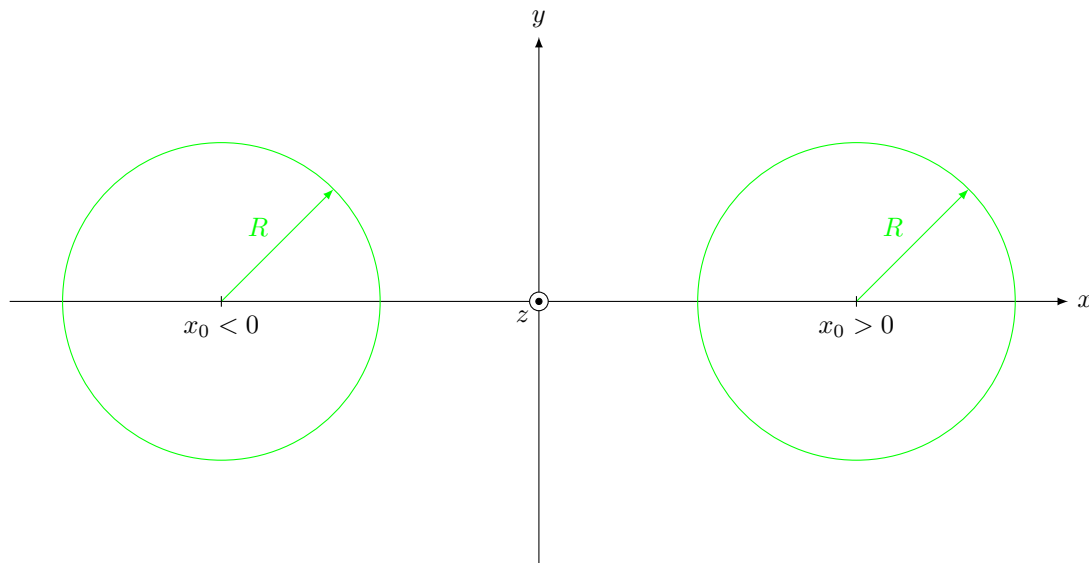
$$x_A^2 - 2 \cdot x_0 \cdot x_A + x_0^2 + a^2 + y_A^2 = x_0^2$$

$$\Leftrightarrow (x_A - x_0)^2 + y_A^2 = \underbrace{x_0^2 - a^2}_{\text{vgl. KGÜ}} =: R^2$$

mit

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 \cdot a^2 - a^2 \\
 &= \frac{(k^2 + 1)^2 - (k^2 - 1)^2}{(k^2 - 1)^2} \cdot a^2 \\
 &= \frac{4k^2}{(k^2 - 1)^2} \cdot a^2 \\
 R &= \sqrt{\frac{4k^2}{(k^2 - 1)^2} \cdot a^2} = \frac{2 \cdot k}{|k^2 - 1|} \cdot a
 \end{aligned}$$

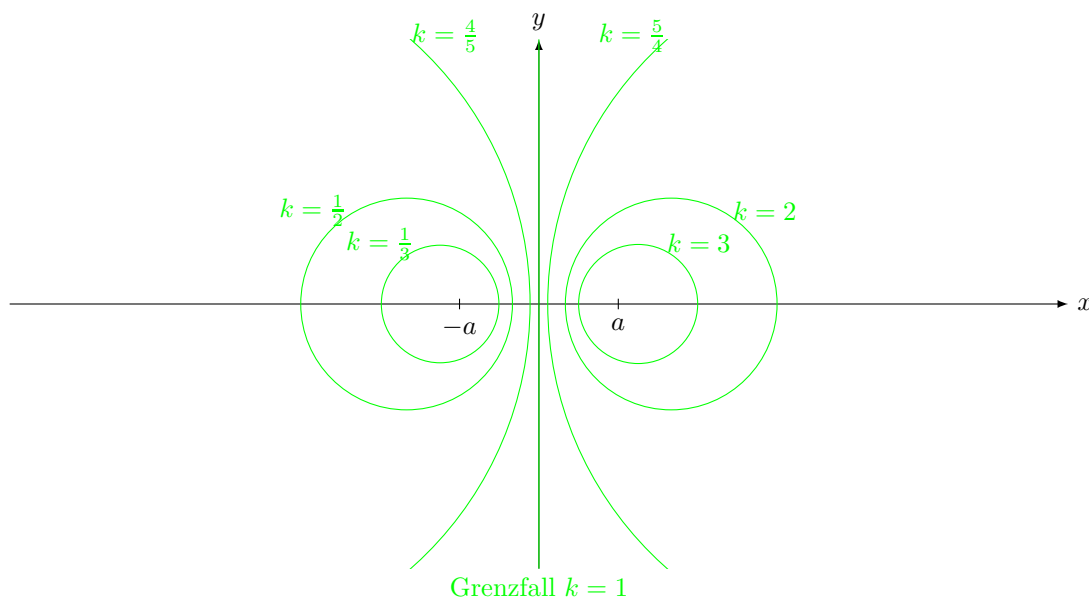
e) (d) ergab eine Gleichung für Kreise in der x - y -Ebene mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $x_M = x_0, y_M = 0$



Mit $k := \frac{\rho_2}{\rho_1}$ und $\rho_2 > 0, \rho_1 > 0$ gilt:

- $k > 0$
- $R > 0$
- $x_0 > 0$ falls $k > 1$ (d.h. $\rho_2 > \rho_1$, „rechter Halbraum“)
- $x_0 < 0$ falls $k < 1$ (d.h. $\rho_2 < \rho_1$, „linker Halbraum“)

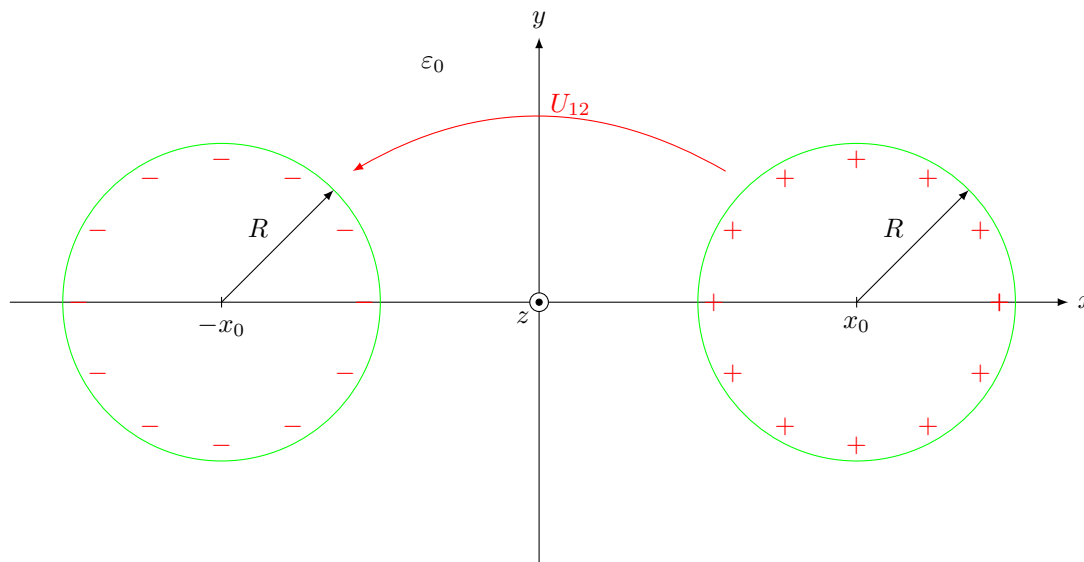
Die Kreise entsprechen Schnittlinien der Äquipotentialflächen mit der x - y -Ebene. Die Äquipotentialflächen sind zur z -Achse achsenparallele Zylinderflächen.



Sonderfall $k = 1 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$ beschreibt alle Punkte in der y - z -Ebene ($\hat{=}$ Symmetrieebene der Ladungsverteilung).

Blatt 4

Aufgabe 17



Gesucht: $\varphi_e(\vec{r}_A)$ im Lösungsgebiet zwischen den Zylindern.

Ansatz: Erstauchladungsverteilung, die im Lösungsgebiet das gleiche elektrostatische Feld erzeugt. (Dazu müssen die Randbedingungen und im Lösungsgebiet $\Delta\varphi_e = 0$ erfüllt sein.)

a) Aus Aufgabe 16: Äquipotentialflächen zweier paralleler Linienladungen $\pm q_L$ bei $x = \pm a$ sind Zylinderflächen:

$$(x_A - x_0)^2 + y_A^2 = R^2$$

mit

$$x_0 = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \cdot a, R = \frac{2k}{|k^2 - 1|} \cdot a, k = \frac{\rho_2}{\rho_1} > 0$$

$$k > 1 \Leftrightarrow x_0 > 0, \quad k < 1 \Leftrightarrow x_0 < 0$$

bekannt: x_0, R

gesucht: $k_1, k_2(a)$

(i) rechter Zylinder: $k_1 > 1$

$$x_0 = \frac{k_1^2 + 1}{k_1^2 - 1} \cdot a > 0$$

$$R = \frac{2 \cdot k_1}{k_1^2 - 1} \cdot a$$

(ii) linker Zylinder: $k_2 < 1$

$$-x_0 = \frac{k_2^2 + 1}{k_2^2 - 1} \cdot a > 0$$

$$R = \frac{2 \cdot k_2}{-(k_2^2 - 1)} \cdot a$$

Aus (i):

$$\frac{x_0}{R} = \frac{k_1^2 + 1}{2 \cdot k_1}$$

$$\Leftrightarrow k_1^2 - 2 \cdot \frac{x_0}{R} \cdot k_1 + 1 = 0 \text{ (quadratische Gl.)}$$

Aus (ii):

... (gleiche quadr. Gl.)

Lösung:

$$k_{1,2} = \frac{x_0}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{„+“} \hat{=} k_1 \\ \text{„-“} \hat{=} k_2 \end{array} \right)$$

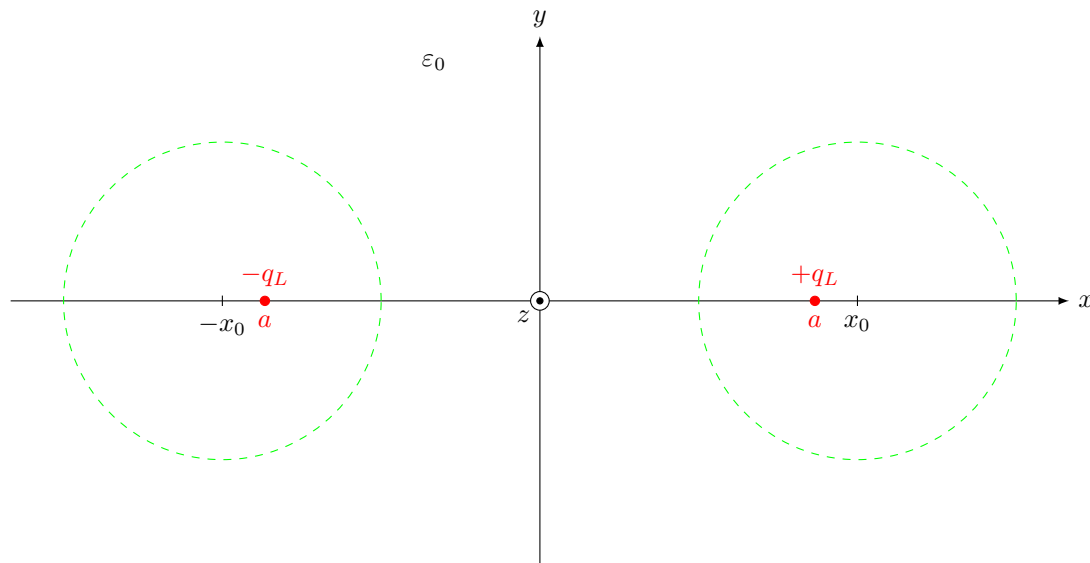
3. Binomische Formel liefert:

$$k_1 \cdot k_2 = \left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - \left[\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1\right] = 1$$

Anmerkung: Definition aus Aufgabe 15, $R^2 := x_0^2 - a^2$ liefert

$$a = \sqrt{x_0^2 - R^2}$$

Ersatzladung:



b) Aus Aufgabe 16:

$$\varphi_e(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \underbrace{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}_{=:k} = \varphi_e(k)$$

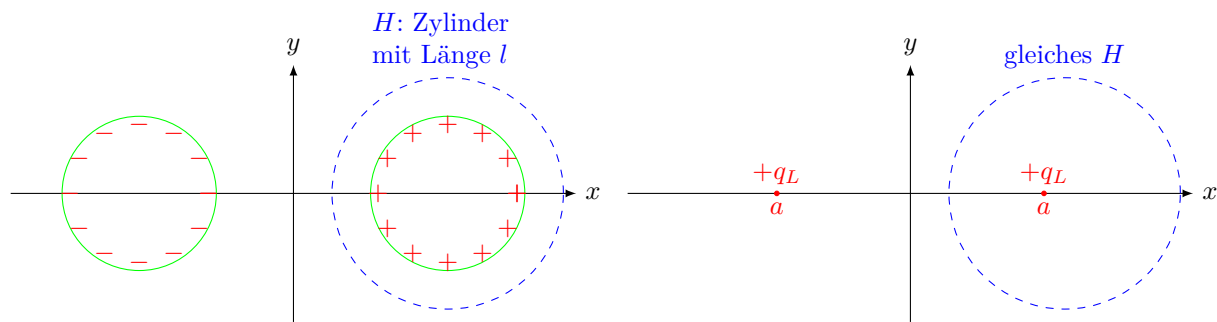
$$\begin{aligned} U_{12} &= \varphi_e(k_1) - \varphi_e(k_2) \\ &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\ln(k_1) - \underbrace{\ln(k_2)}_{\substack{\frac{1}{k_1} \\ 2 \cdot \ln(k_1)}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{12} &= \frac{q_L}{\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln(k_1) \\ &= \frac{q_L}{\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{x_0}{R} + \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

Anmerkung: $\varphi_e(k_2) = -\varphi_e(k_1)$. Diese Symmetrie folgt aus der Wahl des Bezugspunktes in der z -Achse.
Zylinderladung pro Länge Δl :

$$\pm \Delta Q = \pm q_L \cdot \Delta l, \text{ ergibt sich mit dem Gaußschen Satz.}$$

Originalanordnung:

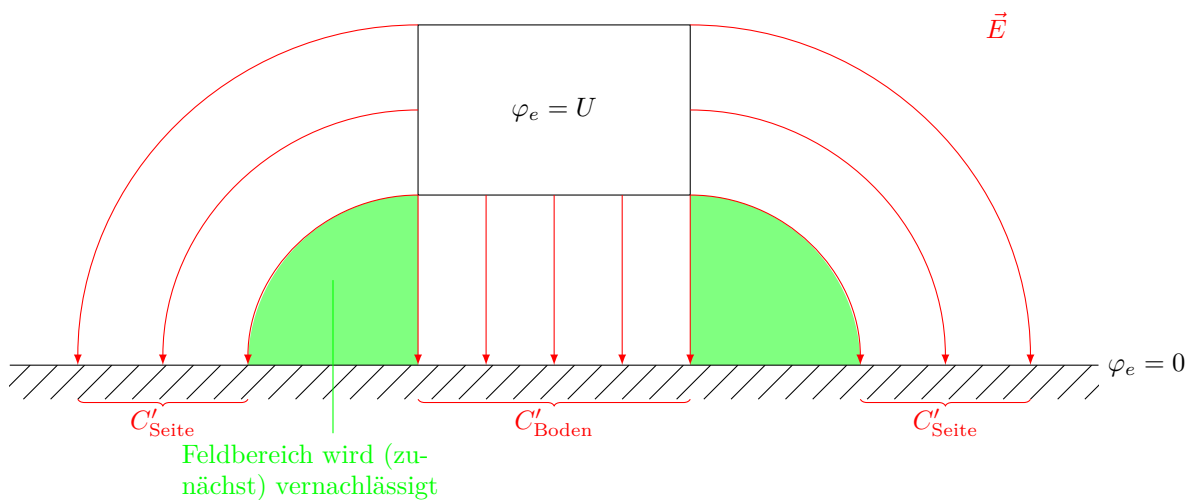


Gleiches \vec{D} -Feld im Lösungsgebiet, gleiches $H \Rightarrow$ gleiches Q_{ein} .

(Anmerkung: Innerhalb des Zylinderleiters entspricht \vec{D} nicht der Ersatzladung, aber Deckel und Bodenflächen von H liefern keinen Beitrag zu $\iint_H \vec{D} \cdot d\vec{A}$.)

$$\begin{aligned} \text{c) } C' &= \frac{\Delta C}{\Delta l} = \frac{\Delta Q}{U_{12} \cdot \Delta l} = \frac{qL}{\frac{qL}{\pi \epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{x_0}{R} + \sqrt{\left(\frac{x_0}{R} \right)^2 - 1} \right)} \\ &= \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln \left(\frac{x_0}{R} + \sqrt{\left(\frac{x_0}{R} \right)^2 - 1} \right)} \end{aligned}$$

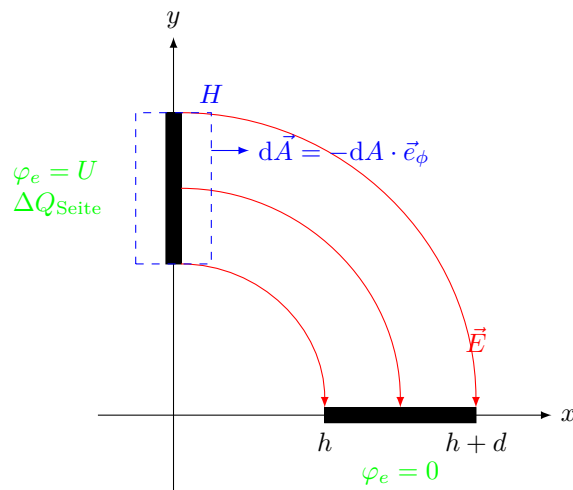
Aufgabe 18



a) Näherung:

$$\begin{aligned} C' &\approx C'_{\text{Boden}} + 2 \cdot C'_{\text{Seite}} \\ C'_{\text{Boden}} &= \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{w \cdot \Delta l}{h} \cdot \frac{1}{\Delta l} \\ &= \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{w}{h} = 56,7 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \end{aligned}$$

C'_{Seite} entspricht einem Winkeldkondensator (vgl. Vorlesung/Hausaufgabe) mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$



$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{\text{Seite}} &= -\frac{U}{\frac{\pi}{2} \cdot \rho} \cdot \vec{e}_\phi \\
 \vec{D}_{\text{Seite}} &= \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}_{\text{Seite}} \\
 \Delta Q_{\text{Seite}} &= \iint_H \vec{D}_{\text{Seite}} \cdot d\vec{A} \\
 &= \int_{\rho=h}^{h+d} \left(-\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{2U}{\pi} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\phi \right) \cdot (-\Delta l \cdot d\rho \cdot \vec{e}_\phi) \\
 &= \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{2U}{\pi} \cdot \Delta l \cdot \ln \left(\frac{h+d}{h} \right) \\
 C'_{\text{Seite}} &= \frac{\Delta Q_{\text{Seite}}}{U \cdot \Delta l} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{h+d}{h} \right) \\
 &= 15,6 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \\
 C' &= C'_{\text{Boden}} + 2 \cdot C'_{\text{Seite}} = 88 \frac{\text{pF}}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

(wegen Vernachlässigung von Feldanteilen: Abschätzung nach unten.)

b)



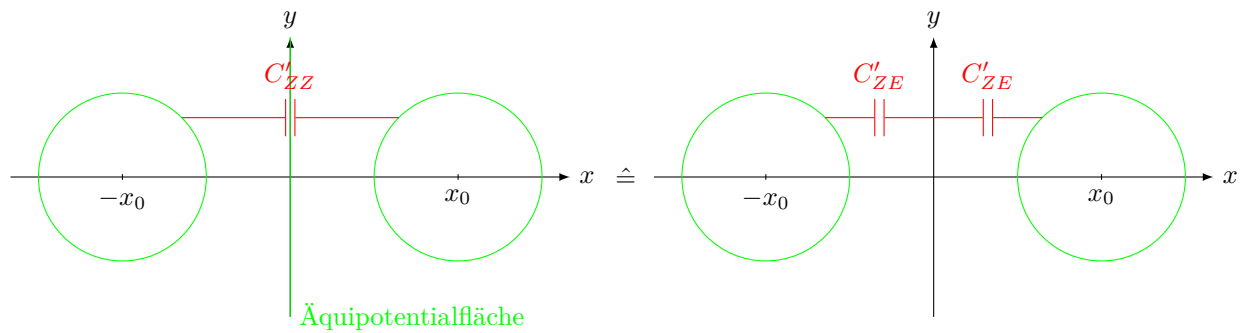
\approx
 $+$

 (Abschätzung von C' nach oben!)

Aus Aufgabe 17c) bekannt:

C'_{ZZ} zwischen Zylinderleitern mit Achsenabstand $2 \cdot x_0$.

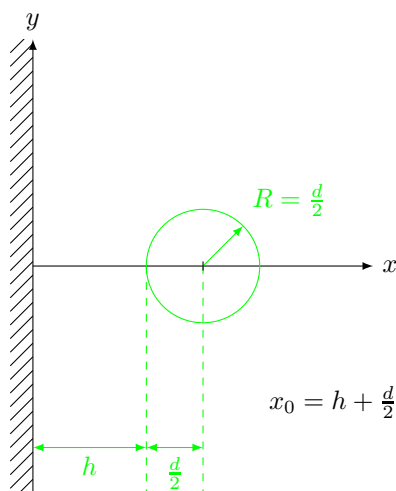
Gesucht: C'_{ZE} zwischen einem Zylinderleiter und einer leitenden Ebene.



C'_{ZZ} entspricht Serienschaltung zweier C'_{ZE} .

$$C'_{ZZ} = \frac{1}{2} C'_{ZE} \quad \Leftrightarrow \quad C'_{ZE} = 2 \cdot C'_{ZZ}$$

Hier:

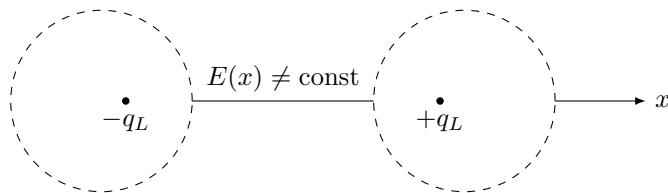
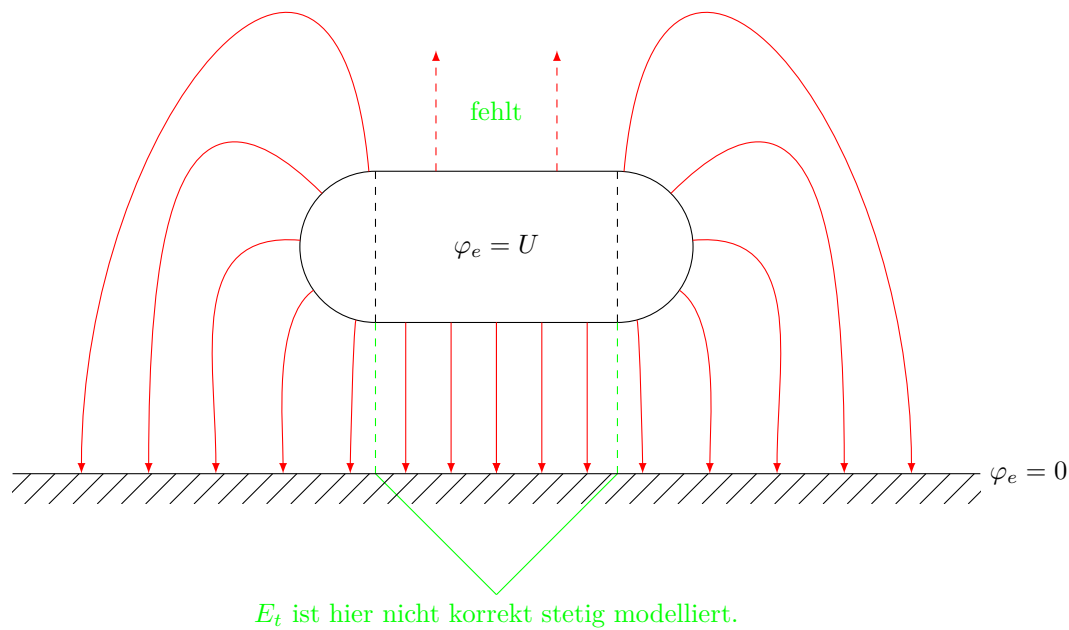


Damit:

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{R} &= \frac{h + \frac{d}{2}}{\frac{d}{2}} = 2 \frac{h}{d} + 1 \\ C'_{ZE} &= 2 \cdot \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln \left[\left(2 \frac{h}{d} + 1 \right) + \sqrt{\left(2 \frac{h}{d} + 1 \right)^2 - 1} \right]} \\ &= 126 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \\ &\hat{=} 2 \cdot C'_{\text{Seite}} \end{aligned}$$

c) Insgesamt: $C' = C'_{\text{Boden}} + C'_{ZE} = 183 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$

Anmerkung: Das Feld der Ersatzladung wird nicht exakt modelliert:



zu (a) Ergänzung:

Der vernachlässigte Anteil der Leiterkanten kann zu je $C'_{\text{Kante}} = 0,8 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ abgeschätzt werden. Damit:

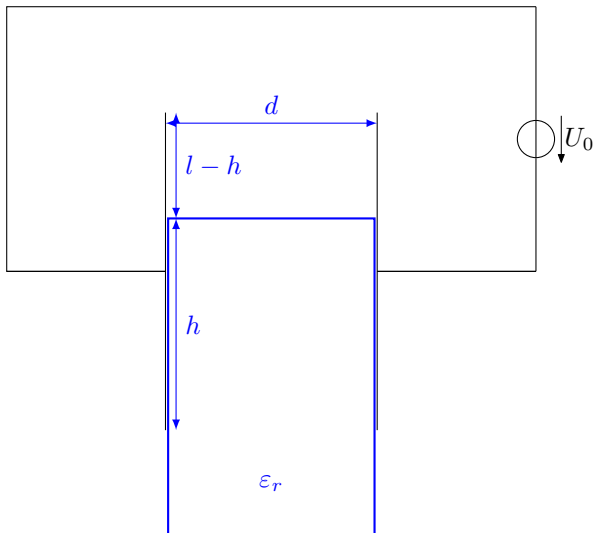
$$\begin{aligned} C'_{\text{korrigiert}} &= C' + 2 \cdot 0,8 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \\ &= 88 \frac{\text{pF}}{\text{m}} + 57 \frac{\text{pF}}{\text{m}} = 145 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Übungsklausur (Midterm):

- Freitag, 14.01.2011, 18:30 - 19:30 Uhr (60 min)
- 3, Aufgaben, Themen bis einschließlich Durchflutungsgesetz
- Hörsaalverteilung wird noch bekannt gegeben

Abgabe der neuen Hausaufgabe bis Di 11.01.2011, 14⁰⁰.

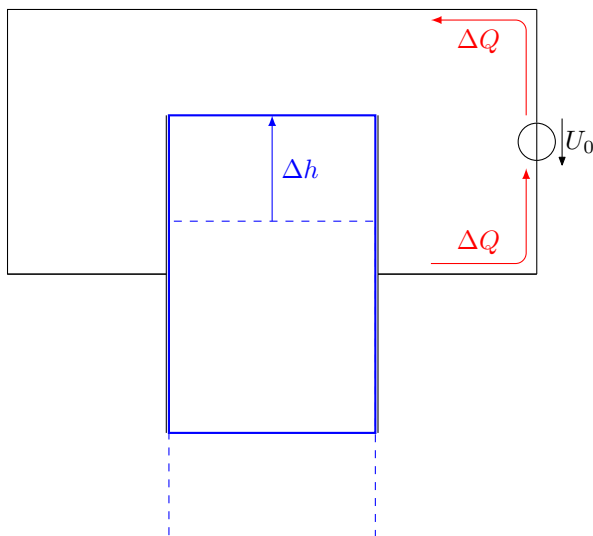
Aufgabe 20



Gesucht: Kraft auf das Dielektrikum

a) Parallelschaltung zweier Kondensatoren (mit/ohne Dielektrikum):

$$\begin{aligned}
 C'(h) &= \varepsilon_0 \cdot \frac{l \cdot (l - h)}{d} + \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{l \cdot h}{d} \\
 &= \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d} \cdot [l + (\varepsilon_r - 1) \cdot h] \\
 W_C(h) &= \frac{1}{2} U_0^2 \cdot C'(h) \\
 Q(h) &= U_0 \cdot C'(h)
 \end{aligned}$$



Mit $h_1 = h$, $h_2 = h + \Delta h$:

$$\begin{aligned}
 \Delta Q &= Q(h_2) - Q(h_1) \\
 &= Q(h + \Delta h) - Q(h) \\
 &= U_0 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \Delta h \\
 \underbrace{\Delta W_Q}_{\text{Quelle}} &= U_0 \cdot \Delta Q = U_0^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \Delta h
 \end{aligned}$$

b) Energiebilanz des Systems mit zwei Energiespeichern, Kondensator und Spannungsquelle.

$$(W_C + W_Q) \Big|_{\text{nachher}} = (W_C + W_Q) \Big|_{\text{vorher}} - \underbrace{\int \vec{F} \cdot d\vec{s}}_{W_{\text{mech}}}$$

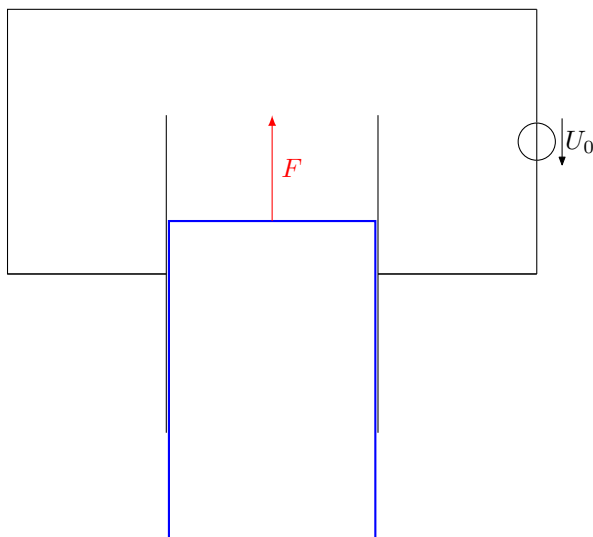
\vec{F} : Kraft, die durch das elektrische Feld auf das Dielektrikum ausgeübt wird.

$$\begin{aligned}
 W_C(h + \Delta h) + \underbrace{W_Q(h + \Delta h)}_{=W_Q(h) - \Delta W_Q} &= W_C(h) + W_Q(h) - W_{\text{mech}} \\
 W_{\text{mech}} &= \underbrace{-W_C(h + \Delta h) + W_C(h)}_{-\Delta W_C} + \Delta W_Q \\
 &= -\frac{1}{2} U_0^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \Delta h \quad \left. \vphantom{-\frac{1}{2} U_0^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \Delta h} \right\} - \Delta W_C \\
 &\quad + \quad \frac{1}{2} U_0^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \Delta h \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2} U_0^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \Delta h} \right\} \Delta W_Q \\
 &= +\frac{1}{2} \cdot U_0^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \Delta h > 0
 \end{aligned}$$

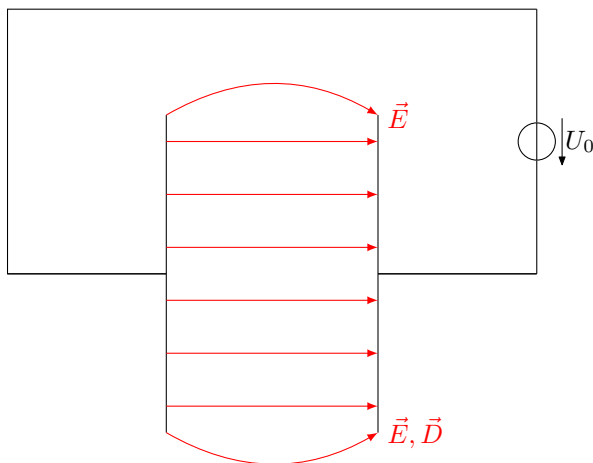
Anmerkung: Auch $\Delta W_C > 0$.

c) Kraft auf das Dielektrikum (vgl. Prinzip der virtuellen Verschiebung)

$$\begin{aligned}
 F &= -\frac{\Delta W_{\text{elektr}}}{\Delta h} = +\frac{W_{\text{mech}}}{\Delta h} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot U_0^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\varepsilon_r - 1)
 \end{aligned}$$



Anmerkung: Tatsächlich ist \vec{E} nicht homogen und verläuft nicht überall senkrecht zu den Platten:



Blatt 5

Aufgabe 23

Randwertproblem mit Ladungsverteilung

Gesucht: \vec{E} -Feld (im Folgenden wird nur φ_e betrachtet.)

Ansatz: Zerlegung des Problems in einfachere Teilprobleme. Anschließend Superposition der Teillösungen.

Allgemein: Falls im Lösungsgebiet gilt

$$\Delta\varphi_{e1} = -\frac{\rho_{e1}}{\varepsilon} \text{ und } \varphi_{e1,\text{Rand}} \text{ bekannt}$$

sowie

$$\Delta\varphi_{e2} = -\frac{\rho_{e2}}{\varepsilon} \text{ und } \varphi_{e2,\text{Rand}} \text{ bekannt,}$$

dann gilt auch für $\varphi_e = \varphi_{e1} + \varphi_{e2}$:

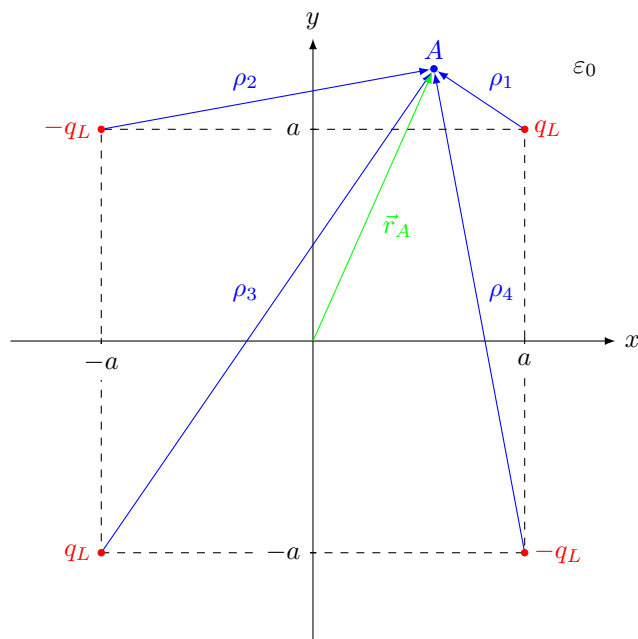
$$\Delta\varphi_e = \Delta(\varphi_{e1} + \varphi_{e2}) = -\frac{\rho_{e1} + \rho_{e2}}{\varepsilon}$$

und

$$\varphi_{e,\text{Rand}} = \varphi_{e1,\text{Rand}} + \varphi_{e2,\text{Rand}}$$

a) 1. Teilproblem: $\varphi_{e1} = 0$ auf dem gesamten Rand, q_L bei $x = y = a$.

Lösung mit Spiegelungsprinzip



$$\varphi_{e1}(\vec{r}_A) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_4}{\rho_3}\right)$$

mit

$$\rho_1 = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - a)^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x_A + a)^2 + (y_A - a)^2}$$

etc.

Probe bzgl. der Randbedingungen:

$$\text{In der } x\text{-}z\text{-Ebene gilt } \rho_1 = \rho_4 \text{ und } \rho_2 = \rho_3 \text{ also } \varphi_{e1} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_3} \cdot \frac{\rho_4}{\rho_1}\right)}_{=1} = 0$$

$$\text{In der } y\text{-}z\text{-Ebene gilt } \rho_1 = \rho_2 \text{ und } \rho_3 = \rho_4 \text{ also } \varphi_{e1} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_4}{\rho_3}\right)}_{=1} = 0$$

b) 2. Teilproblem:

$$\varphi_{e2} = 0 \text{ in der } x\text{-}z\text{-Ebene für } x \geq 0$$

$$\varphi_{e2} = U \text{ in der } y\text{-}z\text{-Ebene für } y \geq 0$$

$$\Delta\varphi_{e2} = 0 \text{ im Lösungsgebiet}$$

(Anmerkung: $\varphi_{e,\text{Rand}} = \varphi_{e1,\text{Rand}} + \varphi_{e2,\text{Rand}}$ ist erfüllt.)

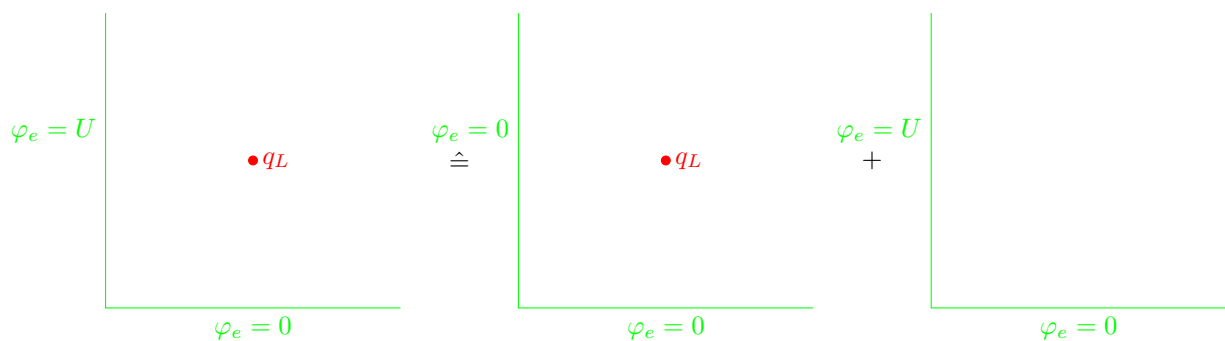
vgl. Aufgabe zum Winkelkondensator, hier $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\varphi_{e2}(\vec{r}_A) = U \cdot \frac{\phi_A}{\frac{\pi}{2}} = U \cdot 2 \cdot \frac{\phi_A}{\pi}$$

$$\left(\vec{E}_2(\vec{r}_A) = -2 \cdot \frac{U}{\pi \cdot \rho_A} \cdot \vec{e}_{\phi_A} \right)$$

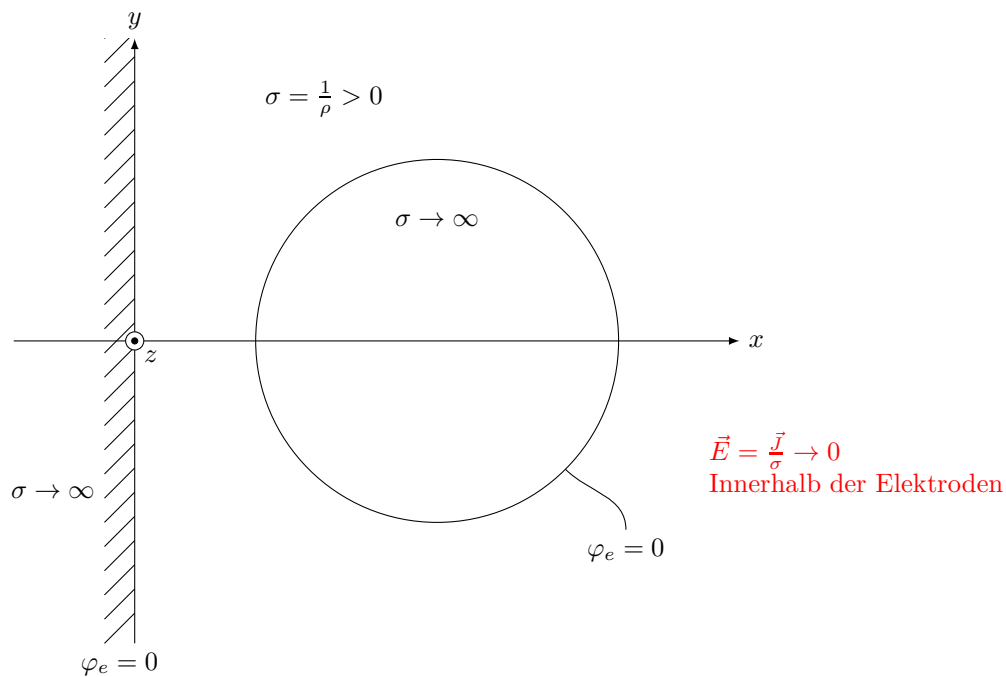
$$\varphi_e(\vec{r}_A) = \varphi_{e1}(\vec{r}_A) + \varphi_{e2}(\vec{r}_A) = \dots$$

$$\vec{E}(\vec{r}_A) = -\text{grad}\varphi_e(\vec{r}_A)$$

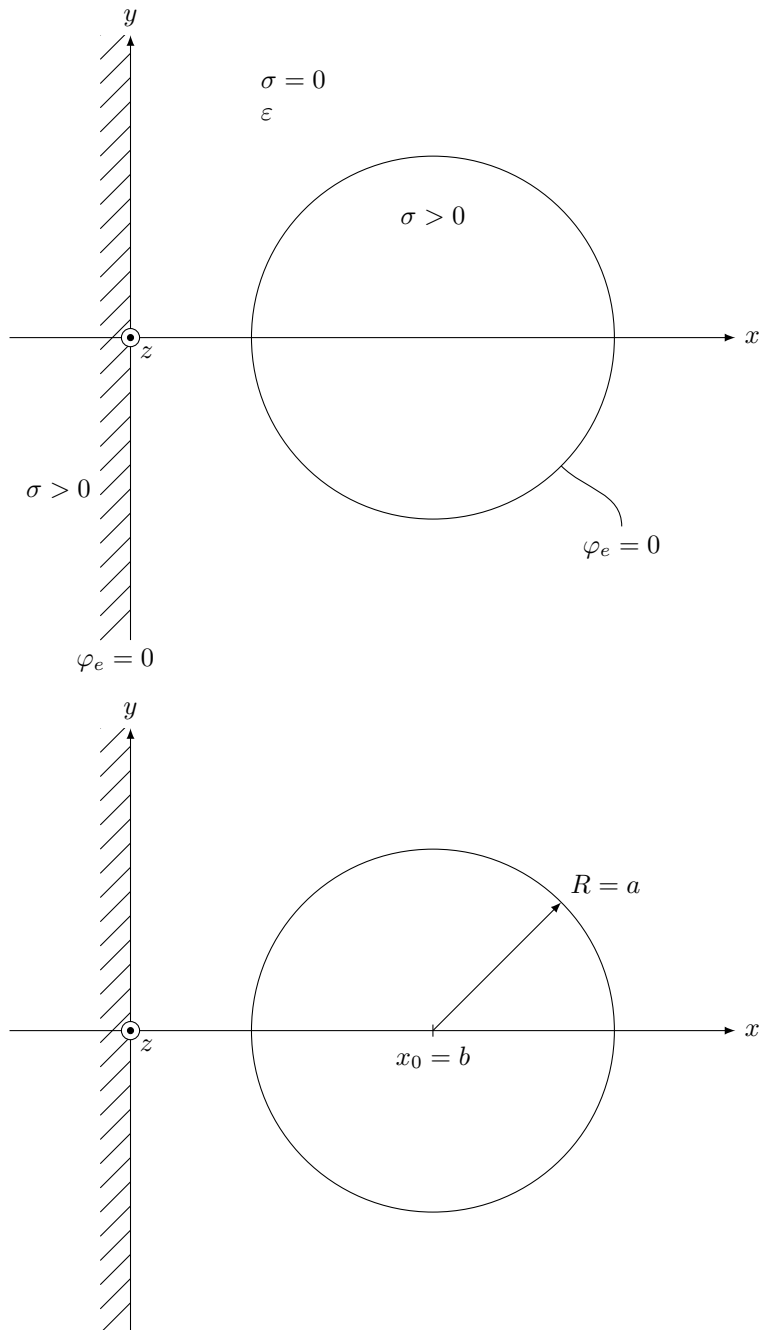


Aufgabe 24

a)

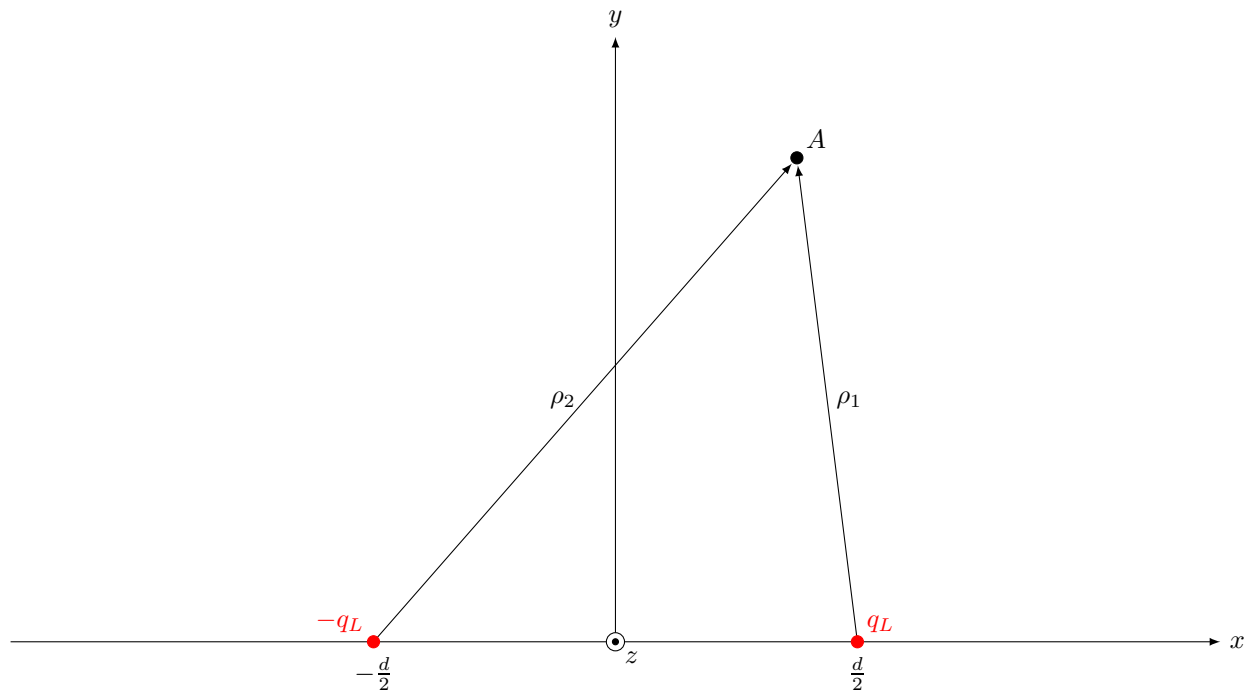


analoges **elektrostatisches** Feld: $\vec{J} = 0, \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$ (da statisch)



$$\begin{aligned}
 k_1 &\stackrel{\text{vgl. Aufgabe 17}}{=} \frac{x_0}{R} + \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1} \\
 &= \frac{b}{a} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Ersatzanordnung:



zu bestimmen: q_L und d

$$(i) \quad U = \varphi_e(k_1) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \cdot \ln(k_1)$$

$$\Leftrightarrow q_L = \frac{2\pi\epsilon \cdot U}{\ln(k_1)}$$

(ii) Aus Aufgabe 16:

$$\underbrace{a}_{\text{dort Koordinate der Linienladung } q_L} = \sqrt{x_0^2 - R^2}$$

Hier:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{x_0^2 - R^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$\begin{aligned} \varphi_e(\vec{r}_A) &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_{2A}}{\rho_{1A}}\right) \\ &= \frac{U}{\ln(k_1)} \cdot \ln\left(\frac{\rho_{2A}}{\rho_{1A}}\right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_{1A} &= \sqrt{\left(x_A - \frac{d}{2}\right)^2 + y_A^2} \\ \rho_{2A} &= \sqrt{\left(x_A + \frac{d}{2}\right)^2 + y_A^2} \end{aligned}$$

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ mit $\vec{E} = -\text{grad } \varphi_e = \dots$ oder mithilfe von Aufgabe 9 zum Liniendipol (dort Abstand der Linienladungen $2a$, hier d).

$$\begin{aligned}
E_x(\vec{r}_A) &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\left(x_A^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 - y_A^2\right) \cdot d}{\rho_{1A}^2 \cdot \rho_{2A}^2} \\
&= \frac{U}{\ln(k_1)} \cdot \frac{\left(x_A^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 - y_A^2\right) \cdot d}{\rho_{1A}^2 \cdot \rho_{2A}^2} \\
E_y(\vec{r}_A) &= \frac{U}{\ln(k_1)} \cdot \frac{2 \cdot x_A \cdot y_A \cdot d}{\rho_{1A}^2 \cdot \rho_{2A}^2} \\
\vec{J} &= \sigma \cdot \frac{U \cdot d}{\ln(k_1)} \cdot \frac{1}{\rho_{1A}^2 \cdot \rho_{2A}^2} \cdot \left[\left(x_A^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 - y_A^2\right) \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot x_A \cdot y_A \cdot \vec{e}_y \right]
\end{aligned}$$

c)

$$I' = \iint_{\text{Zylindermantel}} \vec{J} \cdot d\vec{A} \cdot \frac{1}{l} = \dots$$

um den Zylinder-
leiter, Länge l

Einfacher:

$$I' = U \cdot G' = U \cdot \frac{G}{l} \leftarrow \text{Leitwert eines Abschnitts der Länge } l$$

(vgl. Aufgabe 18b))

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(k_1)}$$

$$\frac{C}{G} = \frac{C' \cdot l}{G' \cdot l} = C \cdot R = \frac{\epsilon}{\sigma}, \text{ also}$$

$$G' = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot C'$$

$$I' = U \cdot G' = U \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot C' = \frac{U}{\ln(k_1)} \cdot 2\pi\sigma$$

Aufgabe 26

a) Beschleunigung zwischen den Gittern bedeutet Umwandlung potentieller Energie in kinetische:

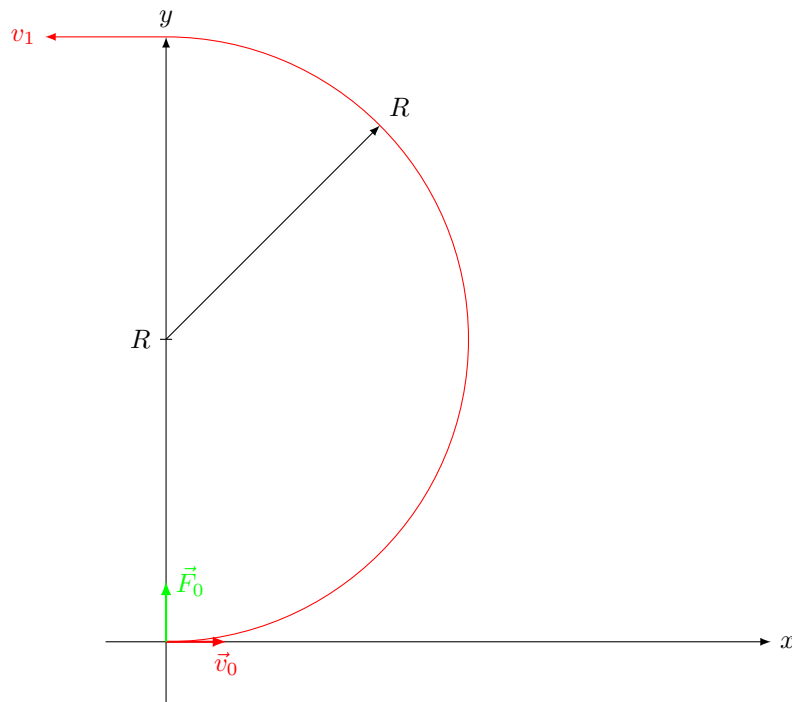
$$\begin{aligned}
-e(\varphi_{e,\text{links}} - \varphi_{e,\text{rechts}}) &= -e \cdot (-U) \\
&\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m_0 v_0^2 \\
v_0 &= \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} \\
\vec{v}_0 &= v_0 \cdot \vec{e}_x
\end{aligned}$$

b) Lorentzkraft \vec{F}_0 für $t = +0$:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_0 &= -e \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{B}_0) \\
&= -e \cdot v_0 \cdot B_0 \cdot \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}_{=-\vec{e}_y} \\
&= e \cdot v_0 \cdot B_0 \cdot \vec{e}_y
\end{aligned}$$

c) Es gilt stets $\vec{F}_m \perp \vec{v}$ und damit $dW_{\text{mech}} = \vec{F}_m \cdot d\vec{s} = \vec{F}_m \cdot \vec{v} \cdot dt = 0$. Das Elektron kann keine kinetische Energie aus dem Magnetfeld gewinnen oder an das Magnetfeld abgeben, d.h. $|\vec{v}| = \text{const.}$ Damit ist auch $|\vec{F}_m| = e \cdot |\vec{v}_0| \cdot |\vec{B}_0| = \text{const} \hat{=} \text{konstante Zentripetalkraft } |\vec{F}_z|$.
 \Rightarrow Die Flugbahn entspricht einem Kreisbogen. Gesucht: Radius R .

$$\begin{aligned}
|\vec{F}_e| &\stackrel{!}{=} |\vec{F}_m| \Leftrightarrow m_0 \cdot \frac{v_0^2}{R} \stackrel{!}{=} e \cdot v_0 \cdot B_0 \\
\Leftrightarrow R &= \frac{m_0 \cdot v_0}{e \cdot B_0}
\end{aligned}$$



d) Austritt aus dem Magnetfeld bei

$$x = 0, y = 2R$$

Austrittsgeschwindigkeit:

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_0 = -\sqrt{\frac{2eU}{m_0}} \cdot \vec{e}_x$$

Flugzeit im Magnetfeld:

$$t_1 = \frac{\pi \cdot R}{v_0} = \frac{\pi \cdot m_0}{e \cdot B_0}$$

e) $W_{\text{kin},1} = W_{\text{kin},0} = \frac{1}{2}m_0 \cdot v_0^2 = eU$

Aufgabe 27

Gleichung (4.5.48) aus dem Vorlesungsumdruck mit

$$\rho_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[-\vec{e}_x \cdot \left(I_1 \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} + I_2 \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right) + \vec{e}_y \cdot \left(I_1 \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} + I_2 \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right) \right]$$

a) Definition der Feldlinie:

$$d\vec{s} \parallel \vec{H} \Rightarrow d\vec{s} \times \vec{H} = 0$$

(Hier ebenes Problem $\rightarrow H_z = 0$)

$$d\vec{s} \times d\vec{H} = (dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y) \times (H_x \cdot \vec{e}_x + H_y \cdot \vec{e}_y)$$

$$= (dx \cdot H_y - dy \cdot H_x) \cdot \vec{e}_z \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow dx \cdot H_y = dy \cdot H_x$$

b)

$$\begin{aligned}
\int H_x \, dy &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int \left(I_1 \cdot \underbrace{\frac{\overbrace{f_1'(y)}{2} y}{(x+a)^2 + y^2}}_{f_1(y)} + I_2 \cdot \underbrace{\frac{\overbrace{f_2'(y)}{2} y}{(x-a)^2 + y^2}}_{f_2(y)} \right) dy \\
&= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left[I_1 \cdot \underbrace{\ln |(x+a)^2 + y^2|}_{\rho_1^2} + I_2 \cdot \underbrace{\ln |(x-a)^2 + y^2|}_{2 \cdot \ln \rho_2} \right] + C_1 \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2 \cdot \ln \rho_1} \\
\int H_y \, dx &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(I_1 \cdot \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} + I_2 \cdot \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \cdot [I_1 \cdot 2 \cdot \ln \rho_1 + I_2 \cdot 2 \cdot \ln \rho_2] + C_2
\end{aligned}$$

Aus (a):

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \int H_y \cdot dx - \int H_x \cdot dy \\
&= \frac{1}{4\pi} \cdot [I_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ln \rho_1 + I_2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ln \rho_2] + \underbrace{C_2 - C_1}_{=C_3}
\end{aligned}$$

$$C_3 = \frac{1}{\pi} \cdot [I_1 \cdot \ln \rho_1 + I_2 \cdot \ln \rho_2]$$

1. Fall: $I_1 = I_2 = I > 0$:

$$C_4 = \pi \cdot C_3 = I \cdot [\ln \rho_1 + \ln \rho_2]$$

$$= I \cdot \ln(\rho_1 \cdot \rho_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 \cdot \rho_2 = \text{const}}$$

2. Fall: $I_1 = -I_2 = \text{const} > 0$

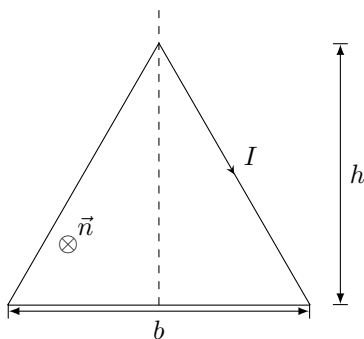
$$C_4 = I \cdot [\ln \rho_1 - \ln \rho_2] = I \cdot \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

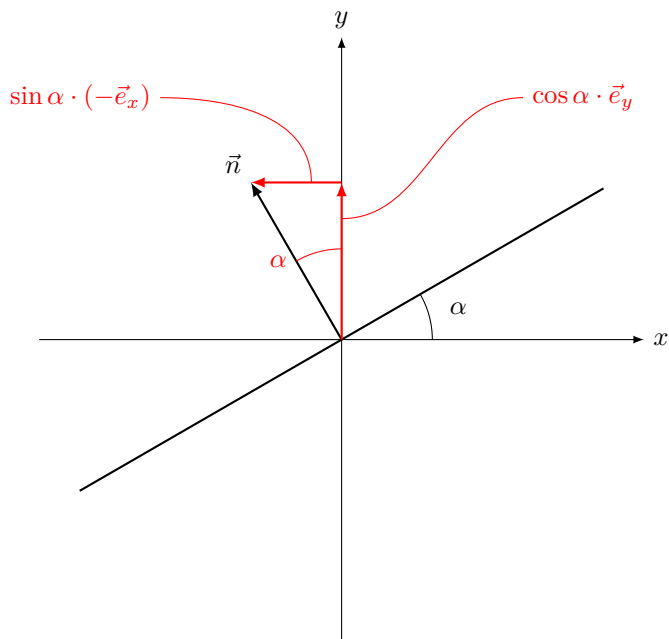
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} = \text{const}} \quad (\text{vgl. Aufgabe 16})$$

 $\rho_1 \cdot \rho_2 = \text{const}$ (Cassinische Kurve) $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \text{const}$ (Appolonische Kreise)

Aufgabe 28

Leiterschleife





a) Magnetisches Moment der Leiterschleife:

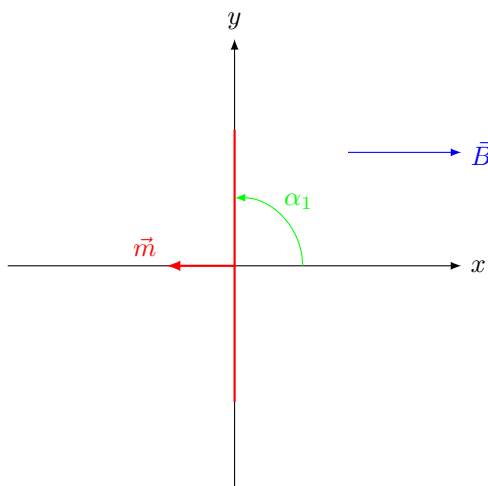
$$\vec{m} = A \cdot I \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} b \cdot h \cdot I \cdot \vec{n}$$

Wegen Homogenität von \vec{B} gilt:

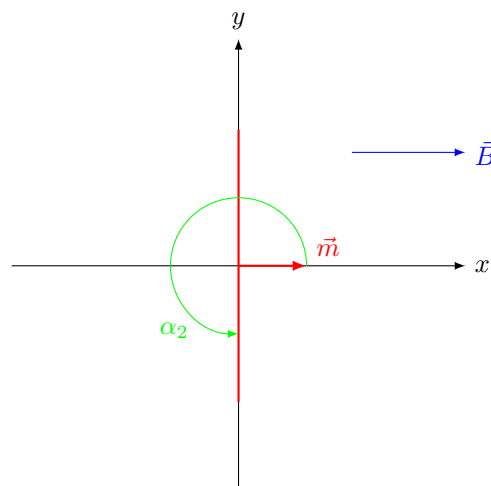
$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{m} \times \vec{B} \\ &= \frac{b \cdot h}{2} \cdot I \cdot (-\sin \alpha \cdot \vec{e}_x + \cos \alpha \cdot \vec{e}_y) \times (B_0 \cdot \vec{e}_x) \\ &= \underbrace{-\frac{b \cdot h}{2} \cdot I \cdot B_0 \cdot \cos \alpha \cdot \vec{e}_z}_{L_z} \end{aligned}$$

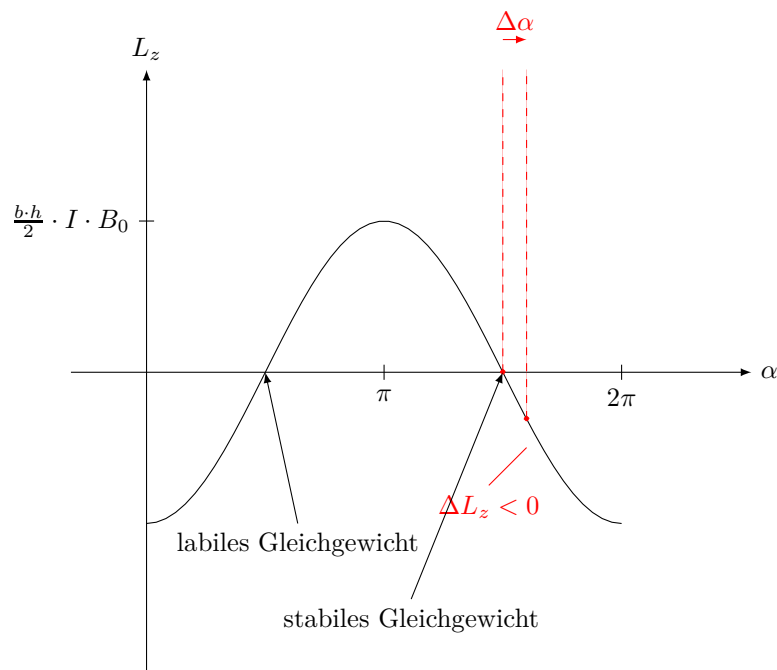
b) $L_z \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0$
 also (für $0 \leq \alpha < 2\pi$): $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$

α_1 :



α_2 :

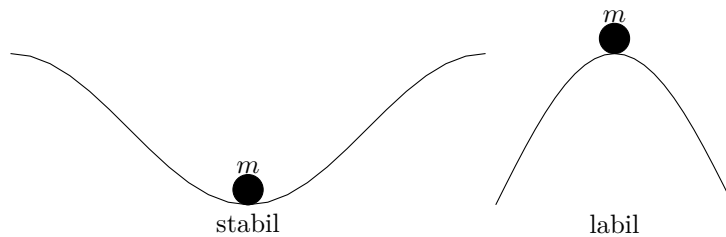




Anmerkung: Der Bezugssinn von α ist mit dem Bezugssinn von L_z im Rechtsschraubensinn verknüpft. Dann ist ein **stabiles** Gleichgewicht gegeben, falls

$$L_z(\alpha) = 0 \text{ und } \frac{d}{d\alpha} L_z(\alpha) < 0$$

(Eine kleine Auslenkung $\Delta\alpha$ bewirkt eine der Auslenkung entgegengerichtetes Drehmoment).



$$\frac{d}{d\alpha} L_z(\alpha) = + \underbrace{\frac{b \cdot h}{2} \cdot I \cdot B_0}_{>0} \cdot \sin \alpha$$

- $\sin \alpha_1 = 1 > 0 \rightarrow$ labiles Gleichgewicht
- $\sin \alpha_2 = -1 < 0 \rightarrow$ stabiles Gleichgewicht

c) Jetzt $\vec{B} \neq \text{const}$, d.h. der Ansatz $\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$ ist nicht möglich.
Stattdessen:

- 1) Unterteilung der Leiterschleife in Wegelemente $d\vec{s}$,
- 2) Bestimmung der Lorentzkräfte

$$d\vec{F}_m = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$

- 3) Bestimmung der Beträge

$$d\vec{L} = \underbrace{\vec{r}}_{\text{Hebelarm}} \times d\vec{F}_m$$

- 4) Integration

$$\vec{L} = \oint_{\text{Schleife}} d\vec{L}$$

Hier interessiert nur L_z , d.h. Vereinfachung der Rechnung möglich:

zu (3): Hebelarm $\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z$. (vom Ursprung zum Wegelement $d\vec{s}$)

$$\begin{aligned} d\vec{L} &= (\rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z) \times (dF_{m,\rho} \cdot \vec{e}_\rho + dF_{m,\phi} \cdot \vec{e}_\phi + dF_{m,z} \cdot \vec{e}_z) \\ &= \dots + \rho \cdot dF_{m,\phi} \cdot \underbrace{(\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi)}_{\vec{e}_z} + \dots \\ &\quad \text{einzigster Beitrag in } z\text{-Richtung} \end{aligned}$$

$$dL_z = \rho \cdot dF_{m,\phi}$$

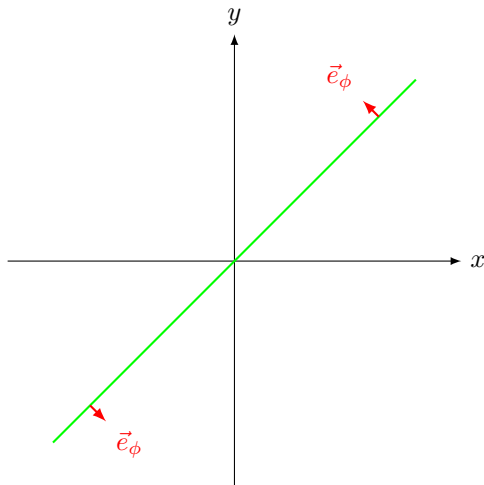
Nur $dF_{m,\phi}$ interessiert

zu (2): Aus der Schleifengeometrie ergibt sich:

$$d\vec{s} = (d\rho \cdot \vec{e}_\rho + dz \cdot \vec{e}_z)$$

Aus $\vec{B} \parallel \vec{e}_x$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= (B_\rho \cdot \vec{e}_\rho + B_\phi \cdot \vec{e}_\phi) \\ d\vec{s} \times \vec{B} &= \dots + dz \times B_\rho \cdot \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho)}_{\vec{e}_\phi} \\ &\quad \text{einzigster Beitrag in } \phi\text{-Richtung} \\ dF_{m,\phi} &= I \cdot B_\rho \cdot dz \end{aligned}$$



\Rightarrow Nur B_ρ interessiert, nur Schleifensegmente mit $dz \neq 0$ tragen zu L_z bei.

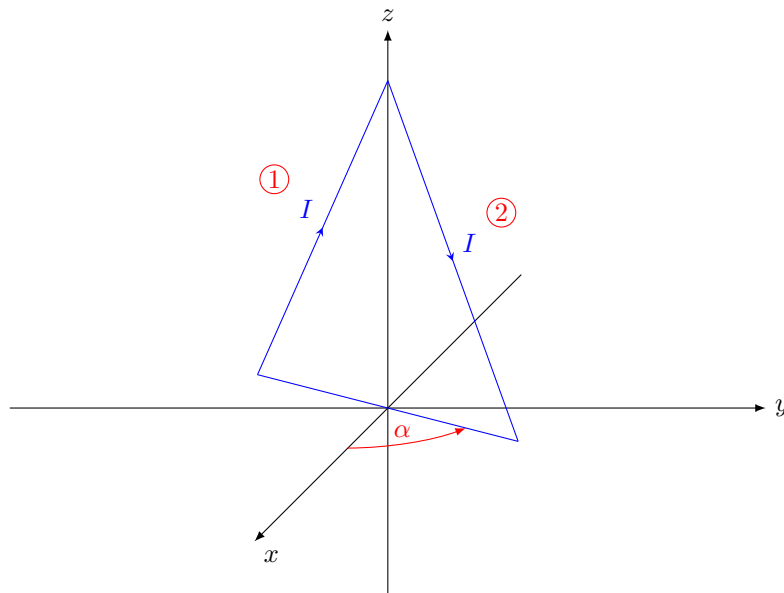
\Rightarrow Das Schleifensegment in der x - y -Ebene liefert keinen Beitrag.

d)

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= B_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cdot \vec{e}_x \\ &= B_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cdot (\cos \phi \cdot \vec{e}_\rho - \sin \phi \cdot \vec{e}_\phi) \end{aligned}$$

also

$$B_\rho(\vec{r}) = B_\rho(z, \phi) = B_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cdot \cos \phi$$



Segment (1):

$$\begin{aligned}\phi &= \alpha + \pi \\ \cos \phi &= \cos(\alpha + \pi) \\ &= -\cos \alpha\end{aligned}$$

Segment (2):

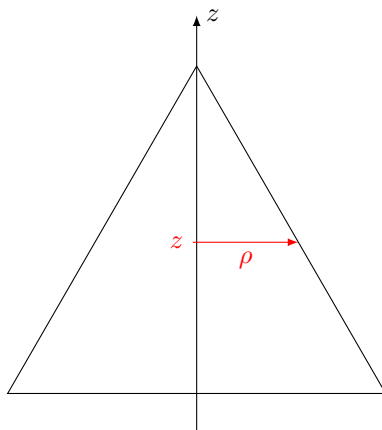
$$\begin{aligned}\phi &= \alpha \\ \cos \phi &= \cos \alpha \\ dF_{m,\phi} &= I \cdot B_\rho(z, \phi) \cdot dz \\ &= I \cdot B_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cdot \cos \phi \cdot dz \\ dL_z &= \rho(z) \cdot dF_{m,\phi}\end{aligned}$$

mit

$$\rho(z) = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

für Segment (1) und (2)

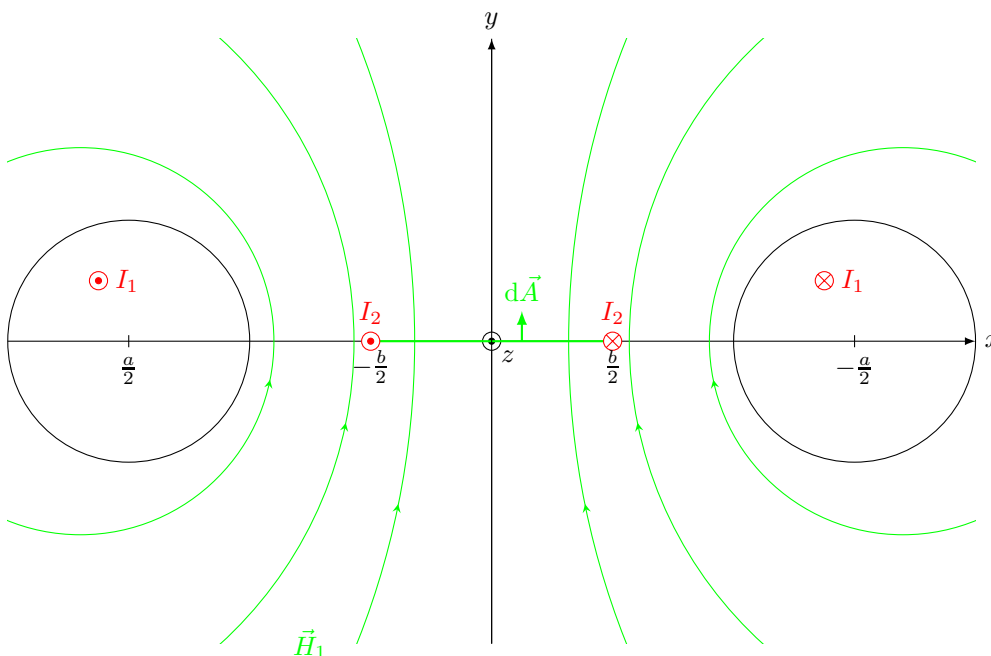
$$dL_z = I \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos \phi \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right)}_{\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)}$$



e) Begründung siehe c)

$$\begin{aligned}
 L_z &= \int_{\text{Segment (1) und (2)}} dL_z \\
 &= I \cdot \frac{b}{2} \cdot B_0 \cdot \left[\underbrace{\int_{z=0}^h (-\cos \alpha) \cdot \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \cdot dz}_{\text{Segment (1)}} + \underbrace{\int_{z=h}^0 \cos \alpha \cdot \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \cdot dz}_{\text{Segment (2)}} \right] \\
 &= I \cdot \frac{b}{2} \cdot B_0 \cdot \cos \alpha \cdot \underbrace{\left\{ -\left[z - \frac{z^3}{3h^2} \right]_{z=0}^{z=h} + \left[z - \frac{z^3}{3h^2} \right]_{z=h}^{z=0} \right\}}_{-\frac{4}{3}h} \\
 &= -\frac{2}{3} \cdot I \cdot b \cdot h \cdot B_0 \cdot \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Aufgabe 29



a) Gesucht: $\vec{H}_1(\vec{r}_A)$ für $\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{e}_x$ mit $-\frac{b}{2} < x_A < \frac{b}{2}$ (insbesondere $y_A = 0$).

Außerhalb der beiden Zylinderleiter mit I_1 entspricht \vec{H}_1 dem Feld zweier paralleler Linienströme $\pm I_1$ bei $x_Q = \mp \frac{a}{2}$:

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_1(\vec{r}_A) &= \frac{I_1}{2\pi} \cdot \left[\frac{-(y_A - \overbrace{0}^{y_Q})}{(\underbrace{x_A + \frac{a}{2}}_{-x_Q})^2 + y_A^2} \cdot \vec{e}_x + \frac{(x_A + \frac{a}{2})}{(x_A + \frac{a}{2})^2 + y_A^2} \cdot \vec{e}_y \right] \\
 &\quad - \frac{I_1}{2\pi} \cdot \left[\frac{-(y_A - 0)}{(x_A - \frac{a}{2})^2 + y_A^2} \cdot \vec{e}_x + \frac{(x_A - \frac{a}{2})}{(x_A - \frac{a}{2})^2 + y_A^2} \cdot \vec{e}_y \right] \\
 &\stackrel{y_A=0}{=} \frac{I_1}{2\pi} \cdot \left[\frac{x_A + \frac{a}{2}}{(x_A + \frac{a}{2})^2} - \frac{x_A - \frac{a}{2}}{(x_A - \frac{a}{2})^2} \right] \cdot \vec{e}_y \\
 &= \frac{I_1}{2\pi} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{x_A + \frac{a}{2}}}_{>0} - \underbrace{\frac{1}{x_A - \frac{a}{2}}}_{<0} \right] \cdot \vec{e}_y
 \end{aligned}$$

wegen $-\frac{a}{2} < -\frac{b}{2} < x_A < \frac{b}{2} < \frac{a}{2}$

b) Gesucht: $L' \underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_1$ (Gegeninduktivität pro Länge)
durchsetzt Fluss erzeugt
Schleife 2 von Schleife 1

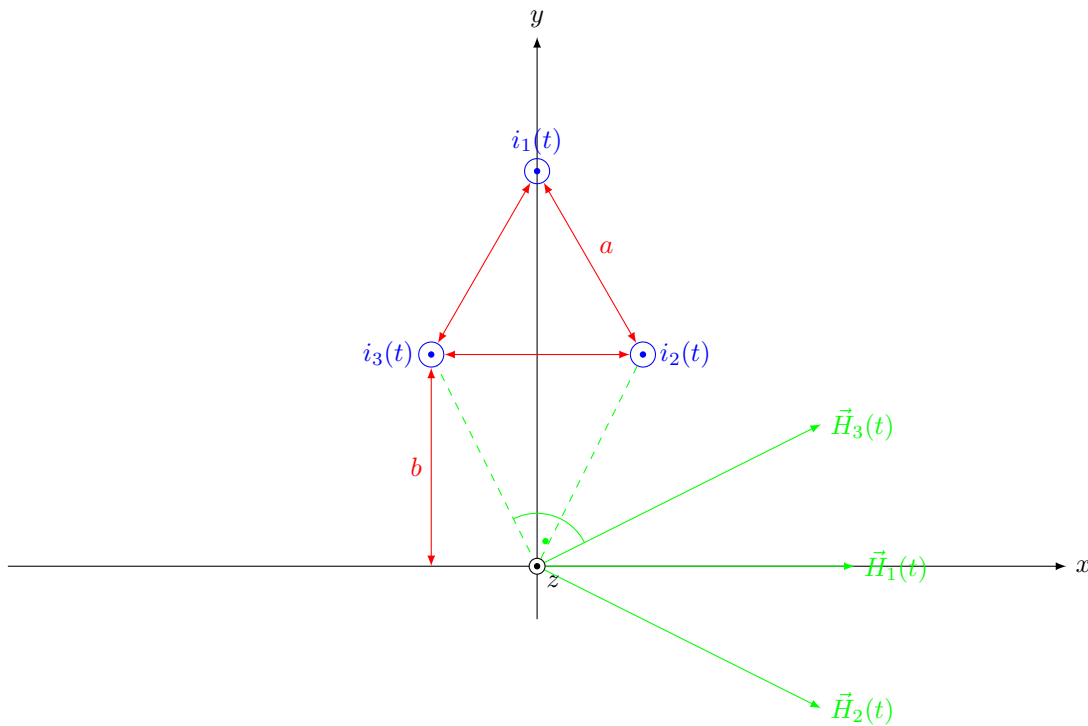
Mit

$$\begin{aligned}
 d\vec{A} &= l \cdot dx \cdot \vec{e}_y \\
 \Phi_{21} &= \iint_{A_2} \mu_0 \cdot \vec{H}_1 \cdot d\vec{A} \\
 &= \mu_0 \cdot l \cdot \frac{I_1}{2\pi} \cdot \int_{x=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{x + \frac{a}{2}} - \frac{1}{x - \frac{a}{2}} \right] dx \\
 &= \mu_0 \cdot l \cdot \frac{I_1}{2\pi} \cdot \left[\ln \left| x + \frac{a}{2} \right| - \ln \left| x - \frac{a}{2} \right| \right]_{x=-\frac{b}{2}}^{x=\frac{b}{2}} \\
 &= \mu_0 \cdot l \cdot \frac{I_1}{2\pi} \cdot \ln \underbrace{\left(\frac{\frac{b}{2} + \frac{a}{2}}{-\frac{b}{2} + \frac{a}{2}} \cdot \frac{\left| -\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right|}{\left| \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right|} \right)}_{\left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2} \\
 &= \mu_0 \cdot l \cdot \frac{I_1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \ln \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \\
 L'_{21} &= \frac{\overset{=\Phi_{21}}{\Psi_{21}}}{l \cdot I_1} \\
 &= \frac{\Phi_{21}}{l \cdot I_1} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \\
 L'_{12} &= L'_{21}
 \end{aligned}$$

Blatt 6

Aufgabe 30

Magnetfeld einer 3-Phasigen Freileitung



Gesucht: $\vec{H}_{A,\text{ges}}$ bei $\vec{r}_A = 0$

a) (Wieder zweidimensionale Rechnung)

Feldstärke am Ort (x_A, y_A) eines geraden Linienstroms I_Q in z -Richtung mit Koordinaten (x_Q, y_Q) .

$$\begin{aligned}\vec{H}_A &= \frac{I_Q}{2\pi\rho_{AQ}} \cdot \vec{e}_{\phi_{AQ}} \\ &= \frac{I_Q}{2\pi\rho_{AQ}} \cdot [-\sin\phi_{AQ} \cdot \vec{e}_x + \cos\phi_{AQ} \cdot \vec{e}_y] \\ &= \frac{I_Q}{2\pi} \cdot \left[\frac{y_Q - y_A}{\rho_{AQ}^2} \cdot \vec{e}_x + \frac{x_A - x_Q}{\rho_{AQ}^2} \cdot \vec{e}_y \right]\end{aligned}$$

mit

$$\rho_{AQ}^2 = (x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2$$

Hier:

$$\begin{aligned}x_A &= y_A = 0 \\ x_Q, y_Q : \quad x_1 &= 0 \quad , \quad y_1 = b + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \\ x_2 &= \frac{a}{2} \quad , \quad y_2 = b \\ x_3 &= -\frac{a}{2} \quad , \quad y_3 = b \\ \vec{H}_{A1}(t) &= \frac{i_1(t)}{2\pi} \cdot \left[\frac{y_1}{y_1^2} \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y \right] \\ &= \frac{i_1(t)}{2\pi} \cdot \frac{1}{b + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a} \cdot \vec{e}_x \\ \vec{H}_{A2}(t) &= \frac{i_2(t)}{2\pi} \cdot \left[\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \cdot \vec{e}_x - \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} \cdot \vec{e}_y \right] \\ &= \frac{i_2(t)}{2\pi} \cdot \left[\frac{b}{\frac{a^2}{4} + b^2} \cdot \vec{e}_x - \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a^2}{4} + b^2} \cdot \vec{e}_y \right] \\ \vec{H}_{A3}(t) &= \dots = \frac{i_3(t)}{2\pi} \cdot \left[\frac{b}{\frac{a^2}{4} + b^2} \cdot \vec{e}_x + \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a^2}{4} + b^2} \cdot \vec{e}_y \right]\end{aligned}$$

Hinweis:

$$\sin(\alpha) \pm \sin \beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$$

Also (1):

$$\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = 2 \cdot \underbrace{\sin(\omega t - \pi)}_{-\sin(\omega t)} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{1/2} = -\sin(\omega t)$$

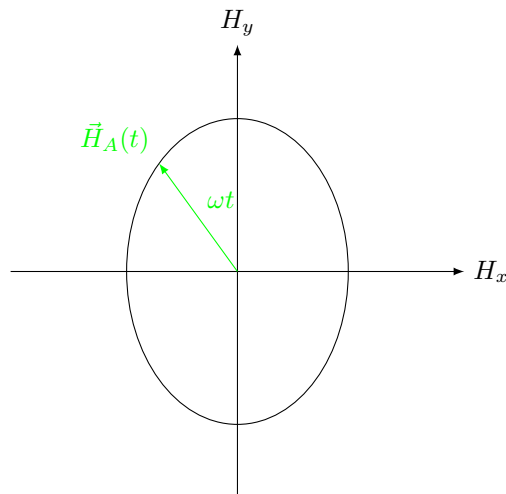
(2):

$$\begin{aligned} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) &= 2 \cdot \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \pi)}_{-\cos(\omega t)} \\ &= \sqrt{3} \cos(\omega t) \\ H_{A,\text{ges},y}(t) &\stackrel{(2)}{=} \frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a^2}{4} + b^2} \cdot \cos(\omega t) \\ H_{A,\text{ges},x}(t) &\stackrel{(1)}{=} \underbrace{-\frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{b}{\frac{a^2}{4} + b^2} \cdot \sin(\omega t)}_{H_{A2,x} + H_{A3,x}} + \underbrace{\frac{\hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{1}{b + \frac{\sqrt{3}}{2}a} \cdot \sin(\omega t)}_{H_{A1,x}} \end{aligned}$$

b) Mit $\hat{i} = 500 \text{ A}$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 10 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} H_{A,\text{ges},x}(t) &= -1,47 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \sin(\omega t) \\ H_{A,\text{ges},y}(t) &= 2,02 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Anmerkung: $\max(|\vec{H}_{A,\text{ges}}|) = 2,02 \frac{\text{A}}{\text{m}}$



Zum Vergleich: $\max(|\vec{H}_{A,1}|) = 6,32 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

Hausaufgabe 8:

Nächste Hausaufgabe: Auf Blatt 6, Abgabe bis Montag vor der Vorlesung.

Hausaufgabe 9:

Hausaufgabe bis Di., 01.02.2011, 14⁰⁰ Uhr:

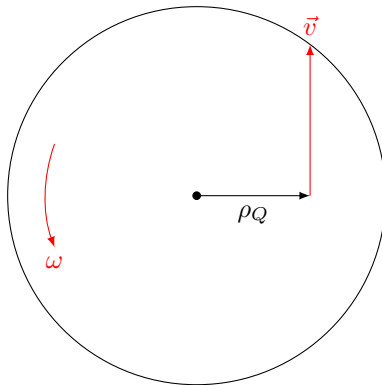
Gegeben ist eine Linienleiterschleife mit dem Strom I und einer Konturkurve C , die den Strom I einfach im Rechtsschraubensinn umschließt.

Zeigen Sie mithilfe des Biot-Savart-Gesetzes, dass für beliebig gekrümmte Schleifen und beliebig gekrümmte Konturkurven gilt:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

Aufgabe 31

a) **Flächenstromdichte:** $J'_Q = \sigma_e \cdot \vec{v}$ (vgl. Vorlesung \vec{J}_A), $[\vec{J}'_Q] = \frac{A}{m}$



$$\vec{v} = \omega \cdot \rho_Q \cdot \vec{e}_{\phi_Q}$$

$$\vec{J}'_Q = \sigma_e \cdot \omega \cdot \rho_Q \cdot \vec{e}_{\phi_Q} \text{ für } 0 \leq \rho_Q < a$$

b) Integral

- $\vec{r}_A = z_A \cdot \vec{e}_z$
 $\vec{r}_Q = \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q}$
 $\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = z_A \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q}$
 $r_{AQ} = |\vec{r}_{AQ}| = \sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2}$
- $\vec{J}'_Q \times \vec{r}_{AQ} = \sigma_e \cdot \omega \cdot \rho_Q \cdot \underbrace{\vec{e}_{\phi_Q} \times (z_A \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q})}_{\text{rot: } \vec{e}_{\rho_Q}, \text{ grün: } -\vec{e}_z}$
 $= \sigma_e \cdot \omega \cdot \rho_Q \cdot (z_A \cdot \vec{e}_{\rho_Q} + \rho_Q \cdot \vec{e}_z)$
- $dA_Q = \rho_Q \cdot d\phi_Q \cdot d\rho_Q$
- Grenzen:

$$0 \leq \rho_Q < a$$

$$0 \leq \phi_Q < 2\pi$$

$$\vec{H}_A(\vec{r}_A) = \frac{\sigma_e \cdot \omega}{4\pi} \cdot \int_{\rho_Q=0}^a \int_{\phi_Q=0}^{2\pi} \frac{\rho_Q^2 \cdot z_A \cdot \vec{e}_{\rho_Q} + \rho_Q^3 \cdot \vec{e}_z}{(z_A^2 + \rho_Q^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi_Q d\rho_Q$$

c) Für Aufpunkte in der z -Achse gilt allgemein:

$$\vec{H}_A = H_{A,\rho} \cdot \vec{e}_{\rho_A} + H_{A,z} \cdot \vec{e}_z,$$

also

$$H_{A,\phi} = 0$$

Hier, wegen Rotationssymmetrie:

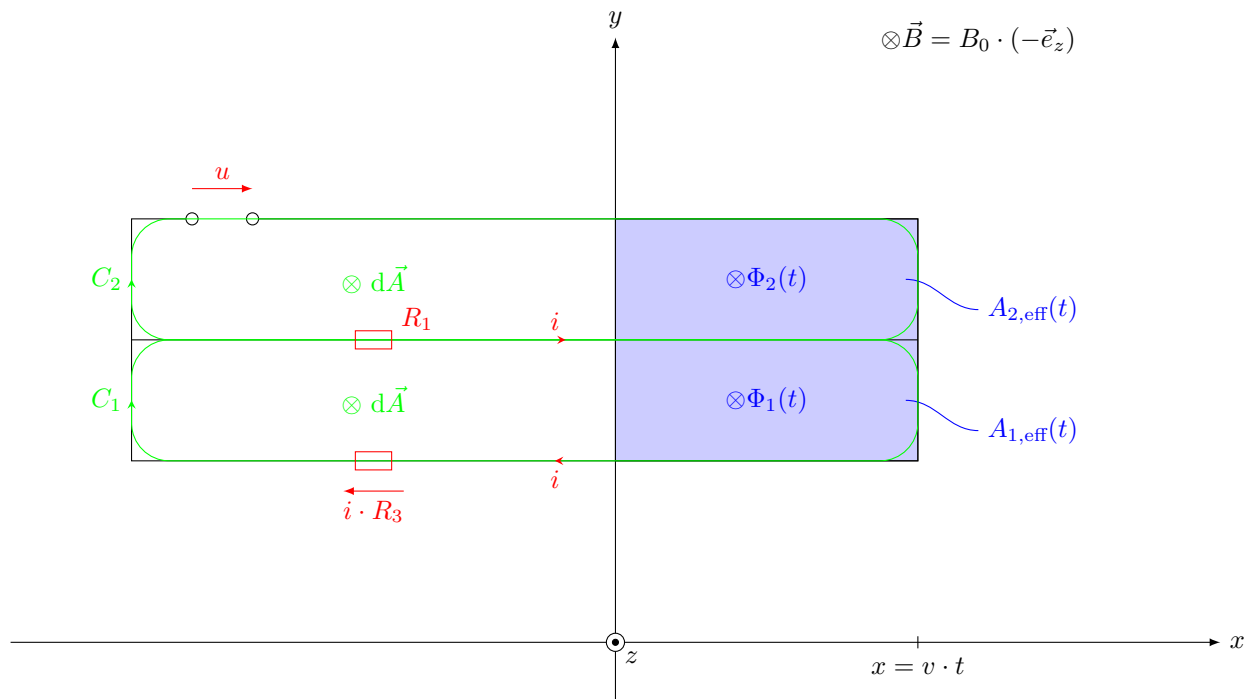
$$H_{A,\rho}(\vec{r}_A) = 0$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned}
\vec{H}_A(\vec{r}_A) &= H_{A,z}(\vec{r}_A) \cdot \vec{e}_z \\
\vec{H}_A(\vec{r}_A) &= \frac{\sigma_e \cdot \omega}{4\pi} \cdot \vec{e}_z \cdot \int_{\rho_Q}^a \frac{\rho_Q^3 \cdot d\rho_Q}{(z_A^2 + \rho_Q^2)} \cdot \underbrace{\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} d\phi_Q}_{2\pi} \\
&\stackrel{\text{HINWEIS}}{=} \frac{\sigma_e \cdot \omega}{2} \cdot \vec{e}_z \cdot \left[\sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2} + \frac{z_A^2}{\sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2}} \right]_{\rho_Q=0}^{\rho_Q=a} \\
&= \frac{\sigma_e \cdot \omega}{2} \cdot \vec{e}_z \cdot \left[\frac{z_A^2 + \rho_Q^2 + z_A^2}{\sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2}} \right]_{\rho_Q=0}^{\rho_Q=a} \\
&= \frac{\sigma_e \cdot \omega}{2} \cdot \vec{e}_z \cdot \left[\frac{2 \cdot z_A^2 + a^2}{\sqrt{z_A^2 + a^2}} - \frac{2 \cdot z_A^2}{|z_A|} \right] \\
&\stackrel{z_A=a}{=} \frac{\sigma_e \cdot \omega}{2} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right) \cdot a \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Aufgabe 32

- a) • $t < 0$ (vgl. Aufgabenblatt, Bild 3)
 $\phi(t) = 0 = \text{const} \Rightarrow i = 0, u = 0$
 • $0 \leq t \leq \frac{a}{v}$



Induktionsgesetz (bzgl. Masche 1):

Maschenumlauf

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_1(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\iint_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}}_{=B_0 \cdot A_{1,\text{eff}}(t)} \quad \text{wegen } \vec{B} \parallel d\vec{A} \text{ und } \vec{B} \text{ homogen.}$$

$\underbrace{\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{=i \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}$

Also:

$$\begin{aligned}
i \cdot R_{\text{ges}} &= -\frac{d}{dt}(B_0 \cdot b \cdot v \cdot t) = -B_0 \cdot b \cdot v \\
i &= -\frac{B_0 \cdot b \cdot v}{R_{\text{ges}}} = \dots = -5 \text{ mA für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} = 0,3 \text{ s}
\end{aligned}$$

- $t > \frac{a}{v}$:

$$\Phi_1 = B_0 \cdot b \cdot a = \text{const}$$

$$i = -\frac{1}{R_{\text{ges}}} \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = 0 \text{ für } t > 0,3 \text{ s}$$

b) Masche 2: Aus der Schleifengeometrie ergibt sich $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)$

$$\underbrace{\oint_{C_2} \vec{E} d\vec{s}}_{u - R_1 \cdot i} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = \begin{cases} -B_0 \cdot b \cdot v & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

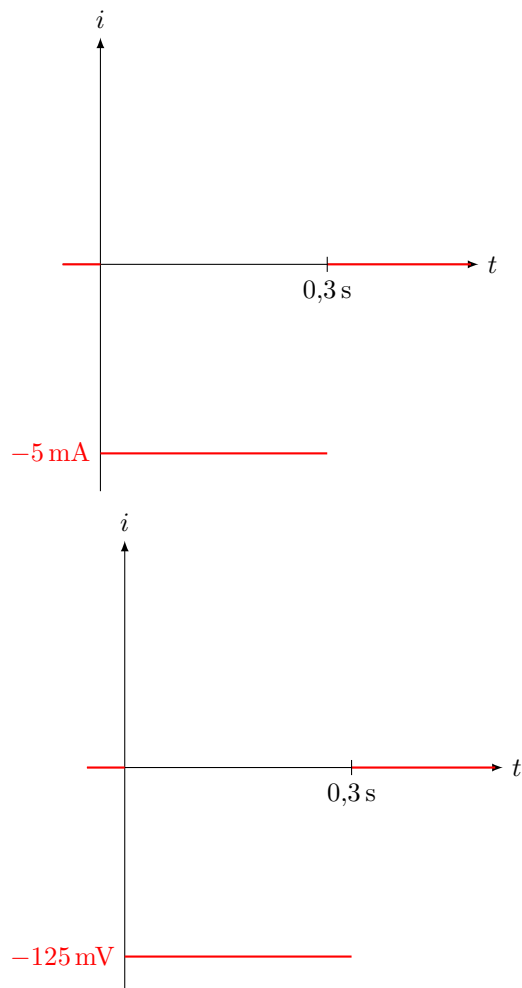
- Für $0 \leq t \leq \frac{a}{v} = 0,3 \text{ s}$:

$$\begin{aligned} u &= R_1 \cdot i - B_0 \cdot b \cdot v \\ &= -B_0 \cdot b \cdot v \cdot \left(\frac{R_1}{R_{\text{ges}}} + 1 \right) \\ &= -125 \text{ mV} \end{aligned}$$

- Für $t < 0$ und $t > \frac{a}{v} = 0,3 \text{ s}$:

$$u = 0$$

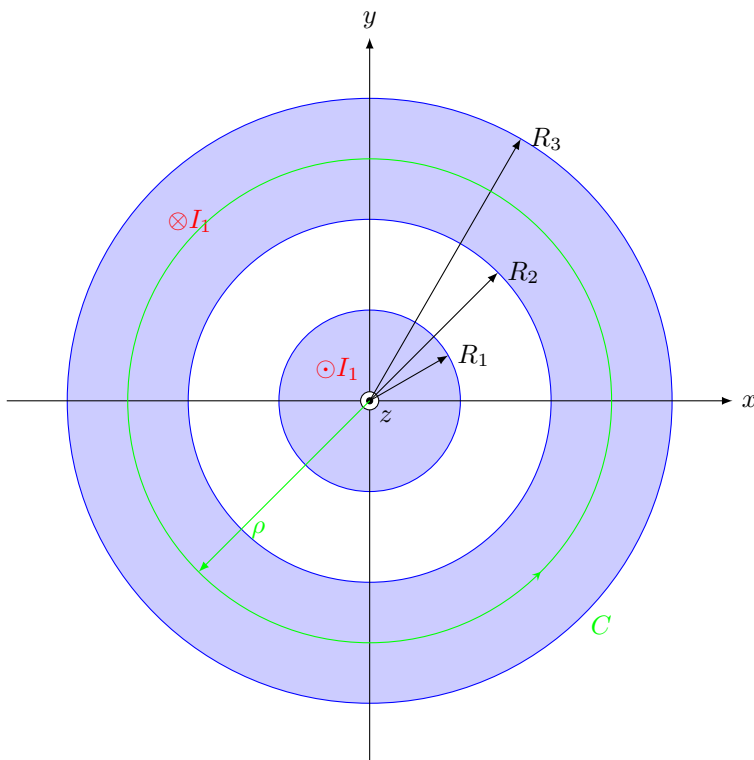
c)



d) Jetzt

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= \iint_{\underline{A}_t(t)} \underline{\vec{B}}(t) \cdot d\vec{A} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ B_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot b \cdot v \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \\ \underbrace{B_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\underline{B(t)}} \cdot \underbrace{b \cdot a}_{A_{1,\text{eff}}} & \text{für } t > \frac{a}{v} \end{cases} \\
i &= -\frac{1}{R_{\text{ges}}} \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ B_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot b \cdot v \cdot \left[1 - \frac{t}{\tau}\right] & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \\ B_0 \cdot b \cdot a \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left[-\frac{1}{\tau}\right] & \text{für } t > \frac{a}{v} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ -5 \text{ mA} \cdot e^{-\frac{t}{0,1 \text{ s}}} \cdot \left[1 - \frac{t}{0,1 \text{ s}}\right] & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \\ 15 \text{ mA} \cdot e^{-\frac{t}{0,1 \text{ s}}} & \text{für } t > \frac{a}{v} \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 33



Anmerkung: \vec{J} ist jeweils homogen im Hin- und Rückleiter.

Aus Symmetrie: $\vec{H}(\vec{r}) = H_\phi(\rho) \cdot \vec{e}_\phi$.

Für eine kreisförmige, zur z -Achse konzentrische Konturkurve C mit dem Radius ρ gilt:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = 2\pi\rho \cdot H_\phi(\rho) = I_{\text{ein}}$$

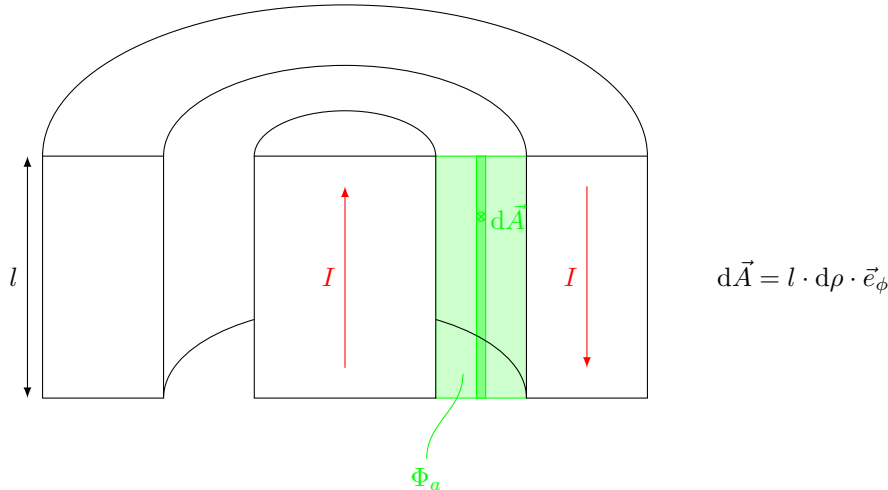
$$= \begin{cases} I \cdot \frac{\pi \cdot \rho^2}{\pi \cdot R_1^2} & \text{für } 0 \leq \rho \leq R_1 \\ I & \text{für } R_1 \leq \rho < R_2 \\ I - I \cdot \frac{\pi \cdot \rho^2 - \pi \cdot R_2^2}{\pi \cdot R_3^2 - \pi \cdot R_2^2} & \text{für } R_2 \leq \rho \leq R_3 \\ 0 & \text{für } R_3 < \rho < \infty \end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \mu_0 \cdot \frac{I_{\text{ein}}}{2\pi\rho} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$= \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot \vec{e}_\phi \cdot \begin{cases} \frac{\rho}{R_1^2} & \text{für } 0 \leq \rho \leq R_1 \\ \frac{1}{\rho} & \text{für } R_1 \leq \rho < R_2 \\ \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot \frac{1}{\rho} & \text{für } R_2 \leq \rho \leq R_3 \\ 0 & \text{für } R_3 < \rho < \infty \end{cases}$$

a) Induktivität eines Abschnitts der Länge l

- (i) Äußere Induktivität $L_a = \frac{\Psi_a}{I} = \frac{\Phi_a}{I}$ mit Φ_a : Fluss im Zwischenraum (Außerhalb der Anordnung, d.h. für $\rho > R_3$ kein Beitrag wg. $\vec{B} = 0$)



$$\Phi_a = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot l \cdot \int_{\rho=R_2}^{R_3} \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi \cdot d\rho$$

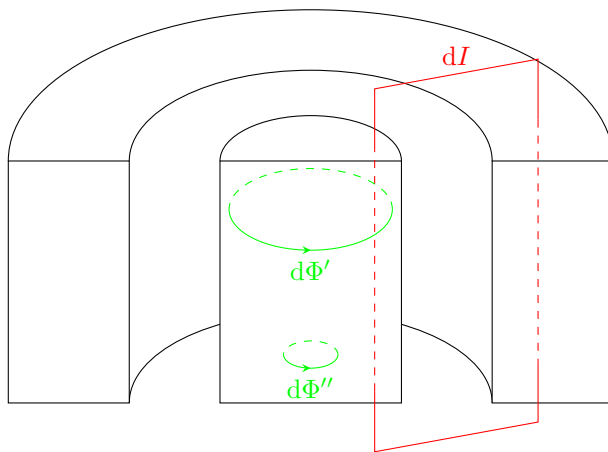
$$= \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

$$L_a = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

- (ii) Innere Induktivität des Innenleiters

Problem: Nicht der gesamte innere magnetische Fluss ist mit dem gesamten Strom verkettet.

Abhilfe: Einteilung in infinitesimale Stromröhren dI entlang \vec{J} -Feldlinien **oder** in infinitesimale Flussröhren $d\Phi$ entlang \vec{B} -Feldlinien.

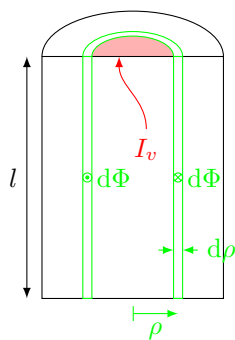


Bsp: dI und $d\Phi'$ sind verkettet, dI und $d\Phi''$ nicht.

Verketteter Fluss:

$$\Psi = \frac{1}{I} \cdot \iint_{\substack{\text{alle verketteten} \\ dI \text{ und } d\Phi}} dI \cdot d\Phi$$

Hier: Betrachtung von Teilflüssen $d\Phi$



$d\Phi = l \cdot d\rho \cdot B_\phi(\rho)$ ist verkettet mit

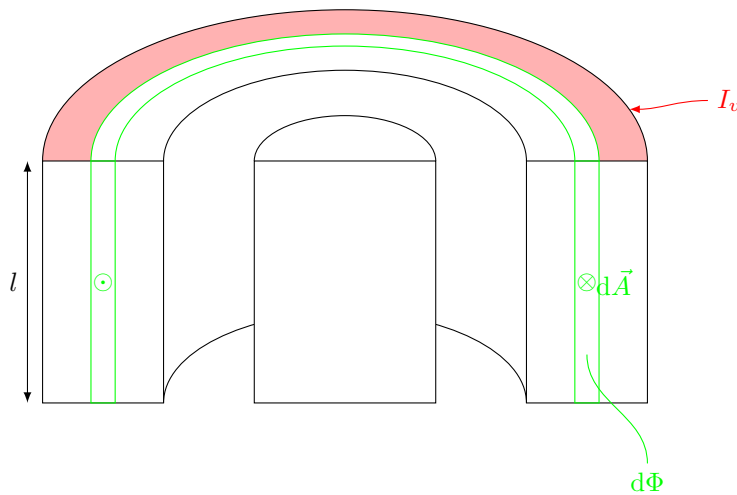
$$I_v = \pi \cdot \rho^2 \cdot \frac{I}{\pi \cdot R_1^2} = I \cdot \frac{\rho^2}{R_1^2}$$

Also

$$\begin{aligned} d\Psi &= \frac{I_v}{I} \cdot d\Phi \\ &= l \cdot \underbrace{B_\phi(\rho)}_{\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{\rho}{R_1^2}} \cdot \frac{\rho^2}{R_1^2} \cdot d\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{i,\text{Innenleiter}} &= \int_{\rho_0}^{R_1} d\Psi = \mu_0 \cdot l \cdot \int_{\rho_0}^{R_1} \frac{\rho}{R_1^2} \cdot \frac{\rho^2}{R_1^2} d\rho \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{2\pi \cdot R_1^4} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho_0}^{\rho=R_1} \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{8\pi} \\ L_{i,\text{Innenleiter}} &= \frac{\Psi_{i,\text{Innenleiter}}}{I} = \frac{\mu_0 \cdot l}{8\pi} \end{aligned}$$

(iii) Innere Induktivität des Außenleiters



$d\Phi$ ist verkettet mit

$$I_v = \frac{\pi \cdot R_3^2 - \pi \cdot \rho^2}{\pi \cdot R_3^2 - \pi \cdot R_2^2} \cdot I$$

$$d\Psi = \frac{I_v}{I} \cdot d\Phi = \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot B_\phi(\rho) \cdot l \cdot d\rho$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i, \text{Außenleiter}} &= \int_{\rho=R_2}^{R_3} d\Psi \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{2\pi} \cdot \int_{\rho=R_2}^{R_3} \left(\frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot d\rho \\ &= \dots = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_3^2 - R_2^2} \cdot \left[\frac{R_3^4}{R_3^2 - R_2^2} \cdot \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) - \frac{3}{4}R_3^2 + \frac{1}{4}R_2^2 \right] \\ L_{i, \text{Außenleiter}} &= \frac{\Psi_{i, \text{Außenleiter}}}{I} = \dots \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$L' = \frac{1}{l} \cdot (L_a + L_{i, \text{Innenleiter}} + L_{i, \text{Außenleiter}})$$

b) Induktivitätsberechnung über Energie: Einerseits:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} L' \cdot l \cdot I^2$$

Andererseits:

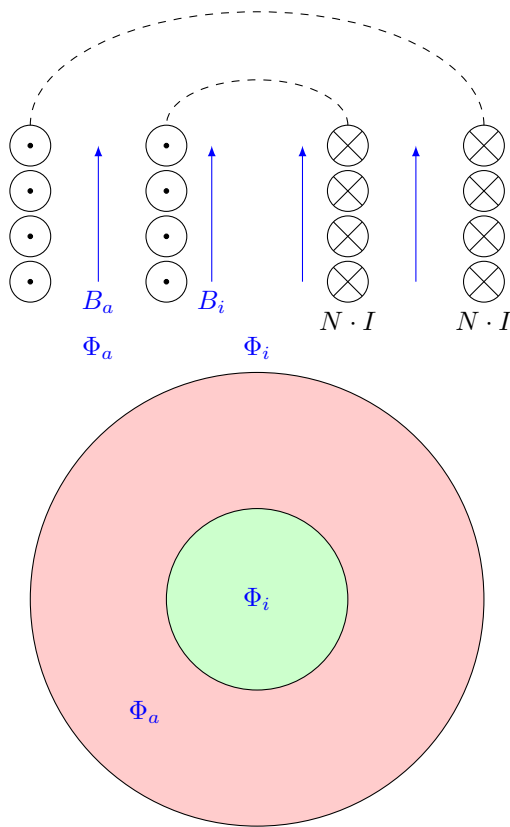
$$\begin{aligned} W_m &= \iiint_V w_m \cdot dV \\ &= \iiint_V \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2 \cdot dV \end{aligned}$$

$V : 0 \leq \rho \leq R_3, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq z \leq l$ (für $\rho > R_3 : B = 0, w_m = 0$)

$$L' = \frac{2 \cdot W_m}{I^2 \cdot l} = \dots$$

Aufgabe 34

Anordnung vergleichbar mit zwei konzentrisch gewickelten Zylinderspulen, die in Reihe geschaltet sind. (Aber: $L_{\text{ges}} \neq L_1 + L_2$, da beide magnetisch verkoppelt sind)



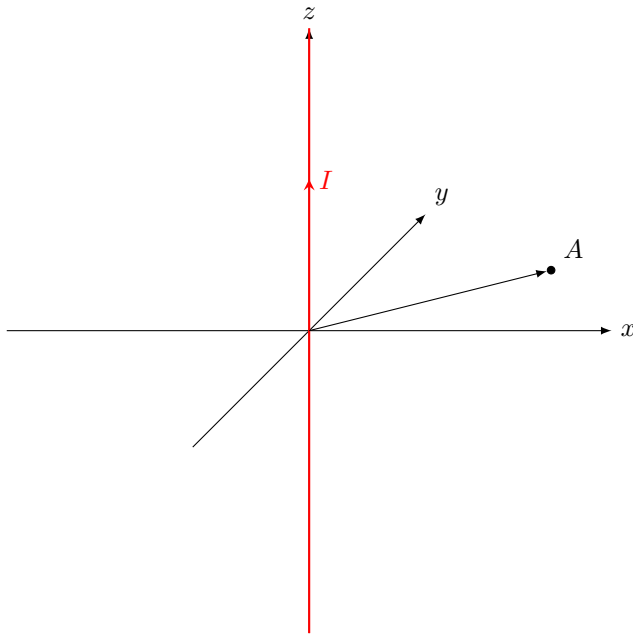
$$a) \quad \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \cdot \frac{(N_i + N_a) \cdot I}{l} \cdot \vec{e}_z & \text{für } 0 \leq \rho < R_i \\ \mu_0 \cdot \frac{N_a \cdot I}{l} \cdot \vec{e}_z & \text{für } R_i < \rho < R_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier: $N_i = N_a = N$

$$\begin{aligned} b) \quad \Psi_i &= N_i \cdot \Phi_i = N_i \cdot B_{i,z} \cdot \pi \cdot R_i^2 \\ &= \mu_0 \cdot \frac{N_i \cdot (N_i + N_a) \cdot I}{l} \cdot \pi \cdot R_i^2 \\ &= 2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot \pi \cdot R_i^2}{l} \cdot I \\ \Psi_a &= N_a \cdot (\Phi_a + \Phi_i) \\ &= N_a \cdot B_{a,z} \cdot \pi \cdot (R_a^2 - R_i^2) + N_a \cdot B_{i,z} \cdot R_i^2 \\ &\stackrel{N_i=N_a=N}{=} \mu_0 \cdot \pi \cdot \frac{I}{l} \cdot N^2 \cdot \underbrace{[2 \cdot R_i^2 + (R_a^2 - R_i^2)]}_{R_i^2 + R_a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad L &= \frac{\Psi_{\text{ges}}}{I} = \frac{\Psi_i + \Psi_a}{I} \\ &= \mu_0 \cdot \pi \cdot \frac{N^2}{l} \cdot (3R_i^2 + R_a^2) \end{aligned}$$

Ergänzung: \vec{A}_m eines ∞ -langen, geraden Linienstroms



$$\begin{aligned}
 \vec{r}_A &= \rho_A \cdot \vec{e}_{\rho_A} \\
 \vec{r}_Q &= z_Q \cdot \vec{e}_z \\
 r_{AQ} &= \sqrt{z_Q^2 + \rho_A^2} \\
 \vec{A}_{m,A} &= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \oint_{C_Q} \frac{d\vec{s}}{r_{AQ}} \\
 &= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \vec{e}_z \cdot \underbrace{\int_{z_Q=-\infty}^{\infty} \frac{dz_Q}{\sqrt{z_Q^2 + \rho_A^2}}}_{\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{z_Q=-a}^a \frac{dz_Q}{\sqrt{z_Q^2 + \rho_A^2}}} \\
 \vec{A}_{m,A} &= \dots = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \vec{e}_z \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_A}{a}\right)^2} + 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_A}{a}\right)^2} - 1} \right) \right] \\
 &\quad \underbrace{a \gg \rho_A: -\approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_A}{a}\right)^2}_{\ll 2} \\
 &\approx \ln \left(\frac{2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_A}{a}\right)^2}{\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_A}{a}\right)^2} \right) \\
 &\approx \ln \left(4 \cdot \frac{a^2}{\rho_A^2} \right) \\
 &= 2 \cdot \ln \left(2 \frac{a}{\rho_A} \right) \\
 &= 2 \cdot \left[\underbrace{\ln \left(\frac{2a}{\rho_0} \right)}_{=: K(\text{const})} + \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho_A} \right) \right]
 \end{aligned}$$

ρ_0 beliebig, aber endlich

Für $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_m$ interessiert der (∞ große) konstante Term nicht.

$$\begin{aligned}\vec{A}'_{m,A} &= \vec{A}_{m,A} - \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \vec{e}_z \cdot 2 \lim_{a \rightarrow \infty} K \\ &= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot 2 \cdot \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho_A} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= -\frac{\mu \cdot I}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{\rho_A}{\rho_0} \right) \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

Vergleiche mit dem elektrischen Potential φ_e einer ∞ langen, geraden Linienladung:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_e &= -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \stackrel{\text{hier}}{=} -\frac{q_L \cdot \delta(x) \cdot \delta(y)}{\varepsilon} \\ \Delta A_{m,A,z} &= -\mu \cdot J_z = -\mu \cdot I \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \\ \varphi_e(\vec{r}_A) &= -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln \left(\frac{\rho_A}{\rho_0} \right)\end{aligned}$$