Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Stens

Wiederholungsklausur zur Höheren Mathematik II
22. September 2011

Aufgabe 1 [4 Punkte]

(a) Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Definieren Sie die rechtsseitige Ableitung von f an einer Stelle $x_0 \in (a, b)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für alle $x > 0$ gilt

$$\sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}.$$

Aufgabe 2 [6 Punkte]

Berechnen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow 0} (\log(x) \sin(x))$$

Aufgabe 3 [9 Punkte]

(a) Geben Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung an.

(b) Berechnen Sie

$$\int \frac{-2x+1}{(4x^2+9)(x+2)} \, dx.$$

Aufgabe 4 [7 Punkte]

(a) Geben Sie die Definition einer Bernoulli'schen Differentialgleichung an. Über welchen Lösungsansatz wird die Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung transformiert?

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'(x) = 2y(x) - 3\sinh(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

bitte wenden!

Aufgabe 5 [8 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = A \cdot y, \; y(0) = y_0 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \; y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem für die folgende lineare Differentialgleichung an:

$$u'' - 6u' + 10u = 0.$$

Aufgabe 6 [8 Punkte]

(a) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende Integral konvergiert und für welche es divergiert

$$\int_1^\infty \frac{\log(3 + \sin(x))}{x^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \, dx.$$

(b) Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls seinen Wert

$$\int_0^\infty e^{-(2x+1)} \sin(x) \, dx.$$

Aufgabe 7 [8 Punkte]

(a) Gegeben Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\underline{x}$ ein innerer Punkt von M und $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\underline{e}\| = 1$. Geben Sie die Definition der Richtungsableitung von f im Punkt $\underline{x}$ in Richtung $\underline{e}$ an!

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) = y^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2xy$$

und untersuchen Sie, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

→ nochmal [illegible]

Viel Erfolg!