

Kommentare zu Folien:

(1)

Statistik (Disk.)

29.06.09

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{bin}(1, p), v = p \in \Theta = (0, 1) \quad (9)$$

Schätzer: X_1

$$E(\hat{p}) = E(X_1) = p$$

Beispiel ML-Schätzer:

Little Likelihood - Fkt:

$$\begin{aligned} L(v | x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{sf. u. n.}}{=} \prod_{i=1}^n p_v(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-v} \frac{v^{x_i}}{x_i!} \\ &= e^{-vn} \cdot \frac{v^{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \end{aligned}$$

Log-Little Likelihood - Fkt:

$$\begin{aligned} e(v | x_1, \dots, x_n) &= \ln(L(v | x_1, \dots, x_n)) \\ &= -vn + n\bar{x} \ln(v) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) \end{aligned}$$

Differenzieren

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial v} e(v | x_1, \dots, x_n) = -n + \frac{n\bar{x}}{v}$$

nach v

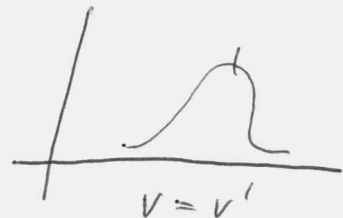
$$\Rightarrow e'(\hat{v} | x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \hat{v} = \bar{x}$$

(2)

$$\Rightarrow \text{Für } v < \hat{v} : e'(v | x_1, \dots, x_n) > 0$$

$$v = \hat{v} : e'(v | x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$v > \hat{v} : e'(v | x_1, \dots, x_n) < 0$$



$$\Rightarrow \text{ML-Schätzer } \hat{v} = \bar{x}$$

P24 $x_1, \dots, x_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ iid - independent identically distributed (st. un.) (normalverteilt)
 $v = \sigma^2$ unbekannt

$$\Rightarrow f_v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{x^2}{2v}\right)$$

Likelihood-Fkt.:

$$L(v | x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{st. un.}}{=} \prod_{i=1}^n f_v(x_i)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n v^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

Log-Likelihood-Fkt.

$$e(v | x_1, \dots, x_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{n}{2} \ln(v) - \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$e'(v | x_1, \dots, x_n) = -\frac{n}{2} \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{2v^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - nv \right)$$

> 0

$$\Rightarrow e'(\hat{v} | x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \hat{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\Rightarrow \text{Für } v < \hat{v} : e'(v | x_1, \dots, x_n) > 0$$

$$v = \hat{v} : e'(v | x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$v > \hat{v} : e'(v | x_1, \dots, x_n) < 0$$

$$\rightarrow \text{ML-Schätzer } \hat{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

(3)

Tschebyscheff-UngleichungSei X eine ZV mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 \in (0, \infty)$, dann gilt für $\varepsilon > 0$,

$$[P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq] \quad P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

P25 $x_1, \dots, x_n \stackrel{iid}{\sim} U[0, v]$, $v > 0$ unbekannt

$$\hat{V} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$a) \quad E_V(\hat{V}_n) = E\left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{v}{2} = v$$

 $\Rightarrow \hat{V}_n$ ist erwartungstreu für v

$$b) \quad \text{Var}(\hat{V}_n) = \text{Var}\left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \stackrel{\text{st. un.}}{=} \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i) = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \frac{v^2}{12} = \frac{v^2}{3n}$$

$$\begin{aligned} X &\sim U[a, b] \\ \Rightarrow E(X) &= \frac{b+a}{2} \\ \text{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

c) Für $v > 0$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(|\hat{V}_n - v| \geq \varepsilon) \stackrel{a)}{=} P_v(|\hat{V}_n - E_V(\hat{V}_n)| \geq \varepsilon)$$

$$\stackrel{\text{Tsch. Ungl.}}{\leq} \frac{\text{Var}(\hat{V}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{v^2}{3n} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

 $\Rightarrow (\hat{V}_n)_n$ konsistent für v

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{Gewinn im } j\text{-ten Spiel} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dann geg. Anzahlen $x_1 = 13, \dots, x_{10} = 11$ Realisationen
stoch. unabh. ZV $X_1, \dots, X_{10}$ ($\hat{=}$ Anzahl der Spiele)

mit $P_p(X_i = u) = P(Y_1 = 0, \dots, Y_{u-1} = 0, Y_u = 1)$

$$\stackrel{\text{st. un.}}{=} \left(\prod_{j=1}^{u-1} \underbrace{P(Y_j = 0)}_{1-p} \cdot \underbrace{P(Y_u = 1)}_{=p} \right)$$

$$= p \cdot (1-p)^{u-1}$$

für $i=1, \dots, 10, u \in \mathbb{N}$,

Bestimmung des ML-Schätzers

$$p \in (0, 1)$$

$$m := \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{\text{hier}}{=} 144$$

$$n = 10 \quad L(p) \stackrel{\text{st. un.}}{=} \prod_{i=1}^{n-1} P_p(\bar{X}_i = x_i) = \dots = p^n (1-p)^{m-n}$$

$$L'(p) = n \cdot p^{n-1} (1-p)^{n-m} - p^n (m-n) (1-p)^{m-n-1} \quad p \in (0, 1)$$

$$= \dots = m \cdot p^{n-1} (1-p)^{m-n-1} \left[\frac{n}{m} - p \right] \quad p \in (0, 1)$$

$$\Rightarrow L'(p) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \begin{cases} < \frac{n}{m} \\ = \frac{n}{m} \\ > \frac{n}{m} \end{cases} \quad \text{auf Basis der Daten}$$

$$\Rightarrow \hat{p}^1 = \frac{10}{144} = 0,0877$$

$$\Rightarrow \text{ML-Schätzer} \quad \hat{p}^1 = \frac{n}{m} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$$