

Allgemeines

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx \quad \frac{dy(x(t))}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t)$$

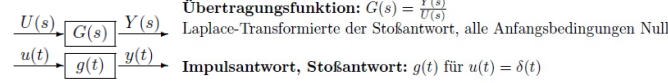
$$\frac{d \sin(x)}{dt} = \cos(x) \quad \frac{d \cos(x)}{dt} = -\sin(x) \quad \frac{d \tan(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad j = \sqrt{-1}$$

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cdot \cos(x) \quad e^{jx} - e^{-jx} = 2j \cdot \sin(x) \quad e^x + e^{-x} = 2 \cdot \cosh(x) \quad e^x - e^{-x} = 2 \cdot \sinh(x)$$

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b) \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \quad \log(a^b) = b \cdot \log(a)$$

Systeme



$$y(t) = f[u(t), y(t)] \quad \text{Übergangsfunktion, Sprungantwort: } h(t) = \epsilon(t) * g(t)$$

$$\text{Impuls: } \text{Impuls}(t) = g(t) = \frac{dy_{\text{sprung}}(t)}{dt} = \frac{dh(t)}{dt}$$

Linearität: $u(t) = c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t) \Rightarrow y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t) \quad \forall \quad u_1(t), u_2(t) \text{ und } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Beispiel lineares Übertragungsglied: $y(t) = \int u(\tau) d\tau$

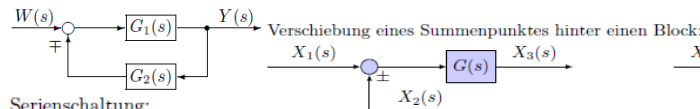
Beispiel nicht-lineares Übertragungsglied: $y(t) = e^{u(t)}$

$$\text{Zeitinvarianz: } y(t - t_0) = f[u(t - t_0), y(t - t_0)]$$

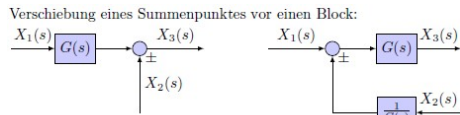
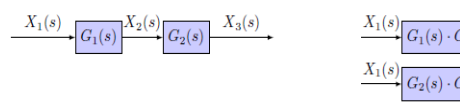
$$\text{Faltung: } y(t) = u(t) * g(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$\text{Reihenschaltung: } G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$\text{Rückkopplung (Kreisstruktur): } G(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s) \cdot G_2(s)}$$



Serienschaltung:



Laplace-Transformation

$$\text{Laplace-Transformation: } \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \text{ mit } x(t) = 0 \quad \forall t < 0, s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$$

$$\text{Linearität: } \mathcal{L}\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot X_1(s) + b \cdot X_2(s)$$

$$\text{Verschiebungssatz: } \mathcal{L}\{x(t - t_0)\} = e^{-st_0} \cdot X(s) \quad (\text{Eine Totzeit destabilisiert den Regelkreis!})$$

$$\text{Dämpfungssatz: } \mathcal{L}\{x(t) \cdot e^{-at}\} = X(s + a)$$

$$\text{Ähnlichkeitssatz: } \mathcal{L}\{x(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\text{Differentiationssatz: } \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s \cdot X(s) - x(t=0^-) \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(t=0^-) - \dot{x}(t=0^-)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n \cdot X(s) - s^{n-1} \cdot x(t=0^-) - s^{n-2} \cdot \dot{x}(t=0^-) - \dots - x^{(n-1)}(t=0^-)$$

$$\text{Integrationssatz: } \mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$$

$$\text{Faltungssatz: } \mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

$$\text{Multiplikationssatz: } \mathcal{L}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(s) * X_2(s)$$

$$\text{Grenzwertsätze: Für stetige Funktionen gilt } x(t=0) = x(t=0^+) = x(t=0^-).$$

$$\text{Voraussetzung ist die Existenz der Grenzwerte!}$$

$$\text{Gegenbeispiel: } \lim_{t \rightarrow \infty} \sin(t)$$

$$\text{Anfangswert: } x(t=0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot X(s))$$

$$x(t) \text{ stetig oder maximal eine sprungförmige Unstetigkeitsstelle bei } t=0.$$

$$\text{Anfangssteigung: } \dot{x}(t=0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(t=0^+))$$

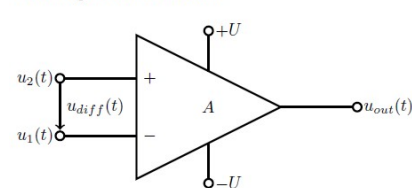
$$\text{Endwertsatz: } x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot X(s))$$

$$\text{Polstellen haben negative Realteile, maximal einer im Ursprung!}$$

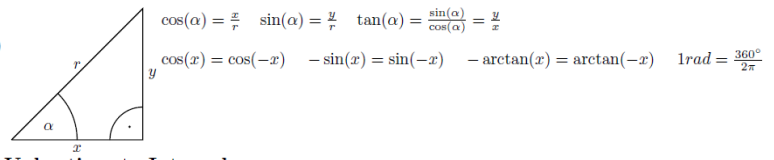
$$\text{Endsteigung: } \dot{x}(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 \cdot X(s))$$

aktive Schaltungselemente:

idealer Operationsverstärker:



- Differenzspannung $u_{diff}(t) = u_2(t) - u_1(t) \rightarrow 0$
- hoher Eingangswiderstand $Z_{in} \rightarrow \infty$
- geringer Ausgangswiderstand $Z_{out} \rightarrow 0$
- unendliche Verstärkung $A \rightarrow \infty$
- symmetrische Betriebsspannung U
- Ausgangsspannung $u_{out}(t) = A \cdot (u_2(t) - u_1(t))$



Unbestimmte Integrale

$$\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \quad \int t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (at - 1) \quad \int t^2 e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^3} (t^2 - \frac{2t}{a} + \frac{2}{a^2})$$

$$\int e^{at} \sin(bt) dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \sin(bt) - b \cos(bt)) \quad \int e^{at} \cos(bt) dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \cos(bt) + b \sin(bt))$$

Testsignale

$$\text{Sprungfunktion: } \sigma(t) = \epsilon(t) = u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \text{---} \bullet \quad W(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{Rampe: } r(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \text{---} \bullet \quad W(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\text{Parabel: } par(t) = \begin{cases} \frac{C \cdot t^2}{2} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \text{---} \bullet \quad W(s) = \frac{C}{s^3}$$

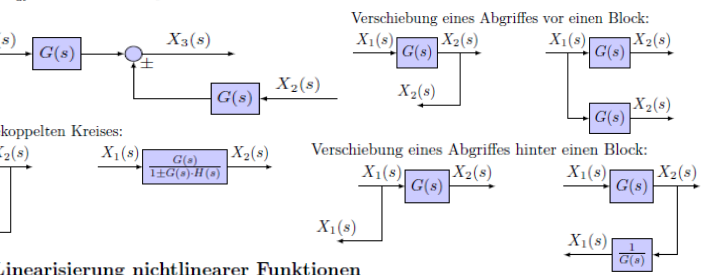
$$\text{Rechteck-Impuls: } p(t) = \begin{cases} 1/\Delta T & \text{für } 0 \leq t < \Delta T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{vgl. } rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Dirac-Impuls: } \delta(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \begin{cases} 1/\Delta T & \text{für } 0 \leq t < \Delta T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\text{Zeitverschiebung: } x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0) \quad \text{Verschiebung um } t_0 \text{ nach rechts bei } t_0 > 0$$

$$\text{Siebeeigenschaft: } x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = \delta(t) \quad \text{und} \quad \int \delta(t) dt = \epsilon(t)$$



Linearisierung nichtlinearer Funktionen

$$\text{Linearisierung im Arbeitspunkt } U_0 \text{ bei einer dort stetig differenzierbaren Funktion } y = f(u):$$

$$y = f(u) \approx f(U_0) + \frac{df(u=U_0)}{du} \cdot (u - U_0) = y_{lin} = Y_0 + m(u - U_0) \Leftrightarrow y - Y_0 = m(u - U_0) \Leftrightarrow \Delta y = m \Delta u$$

$$\text{Linearisierung im Arbeitspunkt } (U_{0,1}, U_{0,2}) \text{ bei einer dort stetig differenzierbaren Funktion } y = f(u_1, u_2):$$

$$= f(u_1, u_2) \approx f(U_{0,1}, U_{0,2}) + \frac{\partial f(U_{0,1}, U_{0,2})}{\partial u_1} \cdot (u_1 - U_{0,1}) + \frac{\partial f(U_{0,1}, U_{0,2})}{\partial u_2} \cdot (u_2 - U_{0,2}) = y_{lin}$$

Linearisierung nichtlinearer DGLn

$$f(X(t), \dot{X}(t), \dots, Y(t), \dot{Y}(t), \dots) = 0$$

$$\text{Linearisierung der nichtlinearen DGL durch Bilden des vollständigen Differentials:}$$

$$\Delta f(X(t), \dot{X}(t), Y(t), \dot{Y}(t)) = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X_0, Y_0} \cdot \Delta X + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{X}} \right|_{X_0, Y_0} \cdot \Delta \dot{X} + \left. \frac{\partial f}{\partial Y} \right|_{X_0, Y_0} \cdot \Delta Y + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{Y}} \right|_{X_0, Y_0} \cdot \Delta \dot{Y} = 0$$

Schritte:

- Stationären Arbeitspunkt (X_0, Y_0) bestimmen: $X_{AP} = X_0, \dot{X}_{AP} = 0, Y_{AP} = Y_0, \dot{Y}_{AP} = 0$
- Kleine Änderungen vom Arbeitspunkt: $x(t) = X(t) - X_0 = \Delta X(t), \dot{x}(t) = \dot{X}(t) - \dot{X}_0 = \Delta \dot{X}(t), \dots$
- Vollständiges Differential bilden: $\frac{\partial f}{\partial \dots}$ einsetzen $\Rightarrow$ lineare DGL

Analyse elektrischer Netze

$$\text{Knotenregel: } \sum_k I_k = 0 \quad \text{Maschenregel: } \sum_k U_k = 0 \quad \text{Spannungsteiler: } U_i = \frac{Z_i}{Z_1 + \dots + Z_n} \cdot U_{ges}$$

$$\text{Reihenschaltung: } Z_{ges} = Z_1 + Z_2 \quad \text{Parallelschaltung: } Z_{ges} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\text{Strom-Ladungs-Beziehung: } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

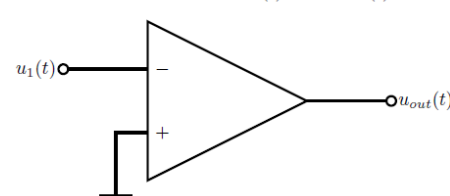
passive Schaltungselemente:

	Spannung	Strom	Ladung	Impedanz $Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$	Admittanz $Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)}$
C	$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = \frac{q(t)}{C}$	$\frac{1}{C \cdot s}$	$C \cdot s$
R	$u(t) = R \cdot i(t)$	$i(t) = \frac{u(t)}{R}$	$u(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R}$
L	$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$	$u(t) = L \cdot \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$	$L \cdot s$	$\frac{1}{L \cdot s}$

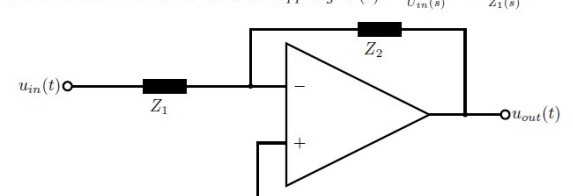
Maschenanalyse: m linear unabhängige Maschengleichungen bei m Maschen.

Knotenanalyse: $(k - 1)$ linear unabhängige Knotengleichungen bei k Knoten.

$$\text{invertierender Verstärker: } u_{out}(t) = -A \cdot u_1(t)$$



$$\text{invertierender Verstärker mit Rückkopplung: } G(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



Translatorische mechanische Systeme

1. **Newtonsches Gesetz:** $\vec{p} = m\vec{v} = \text{const}$

2. **Newtonsches Gesetz:** $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

3. **Newtonsches Gesetz:** Zu jeder Kraft gibt es eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Gegenkraft. (actio = reactio)

Energiequellen bei linearer Bewegung:

- Kraftquellen entsprechen Spannungsquellen
- Geschwindigkeit entspricht dem elektrischen Strom

Bauteil	Kraft-Geschwindigkeit	Kraft-Bewegung	mechanische Impedanz $Z_M(s) = \frac{F(s)}{s \cdot X(s)}$
lineare Feder	$F(t) = K \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau$	$F(t) = K \cdot x(t)$	$\frac{K}{s}$
linearer Dämpfer	$F(t) = d \cdot v(t)$	$F(t) = d \cdot \frac{dx(t)}{dt}$	d
Masse	$F(t) = m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$	$F(t) = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$	$m \cdot s$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Freischnitten der Kräfte

Systemdynamik und zeitliches Verhalten

Sowohl Nullstellen (O) als auch Polstellen (X) beeinflussen den Verlauf der dynamischen Systemantwort auf vorgegebene Eingangssignale $u(t)$.

- Die Pole des Eingangssignals generieren die erzwungene Antwort.
- Die Pole der Übertragungsfunktion generieren die natürliche Systemantwort.
- Die Nullstellen und Pole beeinflussen die Amplituden der erzwungenen und der natürlichen Systemantwort.

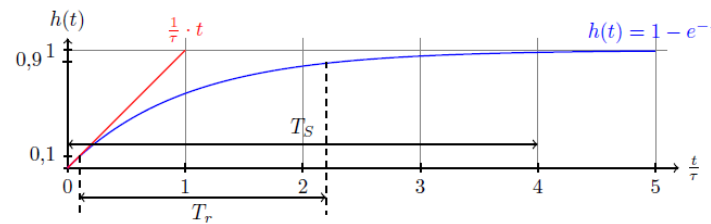
Systeme erster Ordnung

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = au(t) \quad \text{---} \bullet \quad G(s) = \frac{a}{s+a}$$

Zeitkonstante: $\tau = \frac{1}{a}$

exponentielle Frequenz, Anfangssteigung: $a = \frac{1}{\tau}$

Sprungantwort: $h(t) = 1 - e^{-at} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$



Systeme zweiter Ordnung

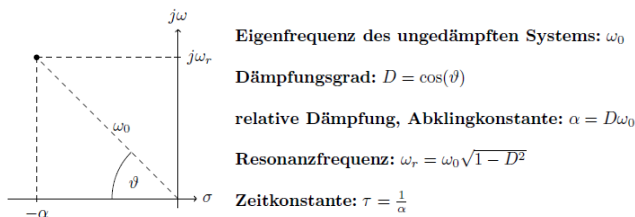
Systeme höherer Ordnung werden häufig durch Systeme zweiter Ordnung approximiert.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2D\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 u(t) \quad \text{---} \bullet \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\text{RLC-Schwingkreis: } G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Polstellen: $s_{1,2} = -\alpha \pm j \cdot \omega_r = -D\omega_0 \pm j \cdot \omega_0 \sqrt{1-D^2}$

stabil, wenn die Pole nur in der linken Halbebene und auch nicht auf der imaginären Achse liegen.



Eigenfrequenz des ungedämpften Systems: ω_0

Dämpfungsgrad: $D = \cos(\vartheta)$

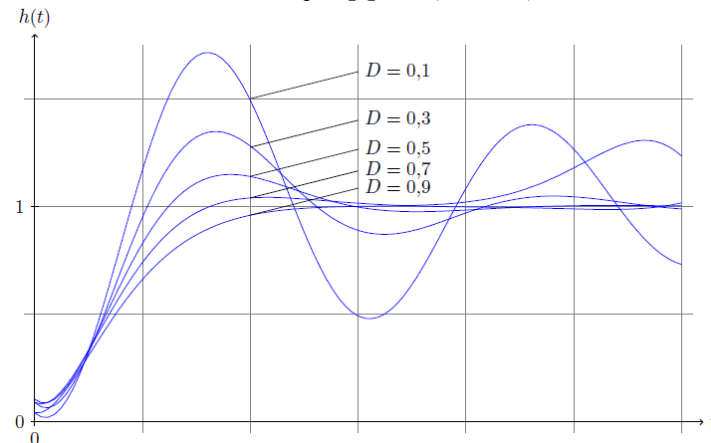
relative Dämpfung, Abklingkonstante: $\alpha = D\omega_0$

Resonanzfrequenz: $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-D^2}$

Zeitkonstante: $\tau = \frac{1}{\alpha}$

Sprungantwort (bei $0 \leq D < 1$): $h(t) = 1 - \frac{\omega_0}{\omega_r} e^{-\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1) = 1 - \frac{\omega_0}{\omega_r} e^{-\alpha t} \cos(\omega_r t - \varphi_2)$
mit $\varphi_1 = \arctan(\frac{\omega_r}{\alpha})$ und $\varphi_2 = \arctan(\frac{\alpha}{\omega_r})$

Einfluss unterschiedlicher Dämpfungsgrade $0,1 \leq D \leq 0,9$:



Rotatorische mechanische Systeme

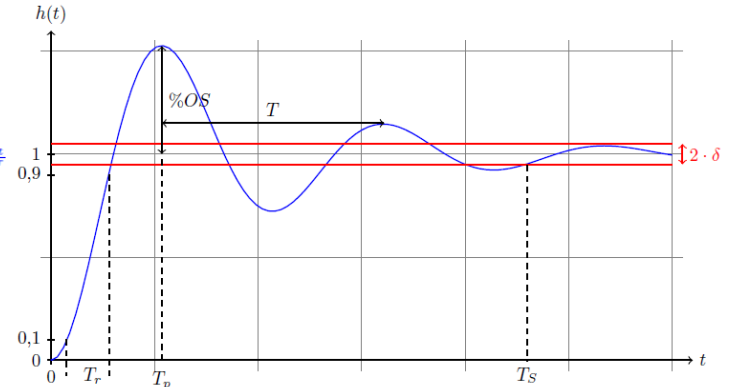
- Trägheit J ersetzt Masse m
- Drehfeder K ersetzt lineare Feder K
- Drehdämpfer D ersetzt linearen Dämpfer d
- Drehmoment T (oder M) ersetzt Kraft F
- Drehwinkel θ ersetzt lineare Bewegung x

Bauteil	Drehmoment-Drehzahl	Drehmoment-Winkel	mechanische Impedanz $Z_M(s) = \frac{T(s)}{\omega(s)}$
Drehfeder	$T(t) = K \cdot \int_0^t \omega(\tau) d\tau$	$T(t) = K \cdot \theta(t)$	$\frac{K}{s}$
Drehdämpfer	$T(t) = D \cdot \omega(t)$	$T(t) = D \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$	D
Trägheit	$T(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$J \cdot s$

Drehzahl $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ Ableitung des Drehwinkels

D	Polstellen	Sprungantwort h(t)
$D \leq -1$	$s_{1,2} = a_{1,2}$	instabil
$-1 < D < 0$	$s_{1,2} = a \pm j\omega_r$	instabil, schwingt auf
$D = 0$ (ungedämpft)	$s_{1,2} = \pm j\omega_0$	ungedämpfte Schwingung
$0 < D < 1$ (periodisch gedämpft)	$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_r$	gedämpfte Schwingung
$D = 1$ (aperiodischer Grenzfall)	$s_{1,2} = -\omega_0$	ähnlich PT_1
$D > 1$ (aperiodisch gedämpft)	$s_{1,2} = -a_{1,2}$	ähnlich PT_1

Kennwerte der Sprungantwort (periodisch gedämpft)



Periodendauer: $T = \frac{2\pi}{\omega_r}$

Anstiegszeit: $T_r = \frac{\pi - \arccos(D)}{\omega_0 \sqrt{1-D^2}} = \frac{\pi - \arccos(D)}{\omega_r}$ Abschätzung siehe Kap. 5, Seite 29, unten

Überschwingzeit: $T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-D^2}} = \frac{\pi}{\omega_r}$

Maximales Überspringen: $\%OS = MP = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \cdot 100\% = e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}} \cdot 100\% = e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega_r}} \cdot 100\%$

mit $y_{ss} = 1$ und $y_{max} = 1 + e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}}$

$$D = \sqrt{\frac{\ln^2(\frac{\%OS}{100})}{\pi^2 + \ln^2(\frac{\%OS}{100})}} \quad OS_{abs} = \frac{\%OS \cdot y_{ss}}{100\%}$$

Einstellzeit, Schnelligkeit der Sprungantwort:

$$T_S \approx -\frac{\ln(0,02 \cdot \sqrt{1-D^2})}{D\omega_0} \approx \frac{4}{D\omega_0} \text{ bei } \delta = 0,02$$

$$T_S \approx -\frac{\ln(0,05 \cdot \sqrt{1-D^2})}{D\omega_0} \approx \frac{3}{D\omega_0} \text{ bei } \delta = 0,05$$

- je kleiner $|j\omega_r|$, desto größer ist T_p
- je kleiner $|\alpha|$, desto größer ist T_S
- je kleiner D , desto größer ist $\%OS$ bzw. ϑ

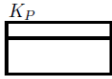
Einfluss zusätzlicher Polstellen

- zusätzlicher Pol nahe dem komplex konjugierten Polpaar ($\alpha_r \approx D\omega_0$): deutlich spürbar
 - zusätzlicher Pol weit weg vom komplex konjugierten Polpaar ($\alpha_r \gg D\omega_0$): vernachlässigbar
 - zusätzlicher Pol sehr weit weg vom komplex konjugierten Polpaar ($\alpha_r \rightarrow \infty$): vernachlässigbar
- dominante Pole/Polpaare:**
ein Pol/Polpaar nahe der $j\omega$ -Achse, so dass andere Pole, die weit links liegen, vernachlässigt werden können oder ein Pol in der Nähe der $j\omega$ -Achse bei einer Nullstelle gelegen, dann ist dieser auch vernachlässigbar.

Einfluss zusätzlicher Nullstellen

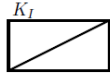
- zusätzliche *negative* Nullstellen: machen das System schneller
- zusätzliche *positive* Nullstellen: Die Sprungantwort verläuft initial in die entgegengesetzte Richtung (nicht-minimalphasiges System, schwer zu regeln!)

Elementare Übertragungsglieder



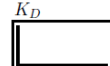
Proportionalglied, P-Glied:

$$x_a(t) = K_P \cdot x_e(t) \quad \longleftrightarrow \quad X_a(s) = K_P \cdot X_e(s)$$



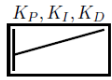
Integrierglied, I-Glied:

$$x_a(t) = K_I \cdot \int_0^t x_e(\tau) d\tau = \frac{1}{T_I} \cdot \int_0^t x_e(\tau) d\tau \quad \longleftrightarrow \quad X_a(s) = \frac{K_I}{s} \cdot X_e(s)$$



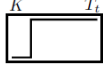
Differenzierglied, D-Glied:

$$x_a(t) = K_D \cdot \dot{x}_e(t) = T_D \cdot \dot{x}_e(t) \quad \longleftrightarrow \quad X_a(s) = K_D s \cdot X_e(s)$$



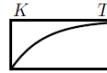
PID-Glied:

$$x_a(t) = K_P \cdot x_e(t) + K_I \cdot \int_0^t x_e(\tau) d\tau + K_D \cdot \dot{x}_e(t) \quad \longleftrightarrow \quad X_a(s) = (K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s) \cdot X_e(s)$$



Totzeitglied, PTt-Glied:

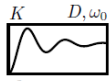
$$x_a(t) = K \cdot x_e(t - T_t) \quad \longleftrightarrow \quad X_a(s) = K \cdot e^{-s \cdot T_t} \cdot X_e(s) \text{ mit } T_t > 0$$



Verzögerungsglied 1. Ordnung, PT1-Glied:

$$T \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K \cdot x_e(t) \quad \longleftrightarrow \quad X_a(s) = \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} \cdot X_e(s)$$

Zeitkonstante: T Verstärkungsfaktor: K



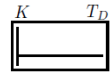
Verzögerungsglied 2. Ordnung, PT2-Glied: Verzögerungsglied n-ter Ordnung, PTn-Glied:

$$T_2^2 \cdot \ddot{x}_a(t) + T_1 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K \cdot x_e(t)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{x}_a(t) + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K \cdot x_e(t)$$

$$\longleftrightarrow X_a(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot X_e(s)$$

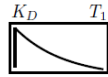
$$\text{Kennkreisfrequenz: } \omega_0 = \frac{1}{T_2} \quad \text{Dämpfungsgrad: } D = \frac{T_1}{2} \cdot \omega_0$$



Vorhaltglied 1. Ordnung, PD-Glied:

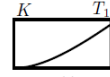
voreilender Phasenwinkel; phasenminimal

$$x_a(t) = K \cdot x_e(t) + T_D \cdot K \cdot \dot{x}_e(t) \quad \longleftrightarrow \quad X_a(s) = K \cdot (1 + T_D \cdot s) \cdot X_e(s)$$



Vorhaltglied mit Verzögerung, DT1-Glied:

$$T_1 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K_D \cdot \dot{x}_e(t) \quad \longleftrightarrow \quad X_a(s) = \frac{K_D \cdot s}{1 + T_1 \cdot s} \cdot X_e(s)$$



Verzögerndes Integrierglied, IT1-Glied:

$$T_1 \cdot \dot{x}_a(t) + \dot{x}_a(t) = K \cdot x_e(t) \quad \longleftrightarrow \quad X_a(s) = \frac{K}{s(1 + T_1 \cdot s)} \cdot X_e(s)$$

Rückkopplung

• positive Rückkopplung (Mitkopplung): tendiert zur Destabilisierung, System schwingt

• negative Rückkopplung (Gegenkopplung): tendiert zur Stabilisierung, für Regelung

• Verschieben von Polen durch Rückkopplung und damit die Lage der dominanten Pole und somit die wesentliche Dynamik des Gesamtsystems beeinflussen

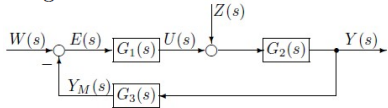
• zusätzliche Pol- oder Nullstellen hinzufügen

• unerwünschte Pole kompensieren

• durch geeignete Rückkopplung:

- Verminderung des Einflusses von Parameteränderungen in der Regelstrecke
- Verbesserung des stationären Verhaltens eines Systems (stationärer Fehler)
- Beeinflussung des transienten Verhaltens eines Systems, das System wird «schneller» (kleinere Zeitkonstante)
- Verringerung des Einflusses von Störgrößen

Regelkreis



$W(s)$ Führungsgröße $G_1(s)$ Stellerinrichtung
 $E(s)$ Regelabweichung $G_2(s)$ Regelstrecke
 $U(s)$ Stellgröße $G_3(s)$ Messeinrichtung
 $Z(s)$ Störgröße
 $Y(s)$ Regelgröße
 $Y_M(s)$ Messgröße

Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises (Schleifenübertragungsfunktion):

$$G_o(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

Dynamischer Regelfaktor: $R(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)}$

Regelgröße: $Y(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_o(s)} \cdot W(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_o(s)} \cdot Z(s)$

bleibende Regelabweichung (stationäres Verhalten):

$$E(s) = R(s) \cdot W(s) = \frac{W(s)}{1 + G_o(s)} \quad \text{und} \quad E(s) = -\frac{G_2(s) \cdot G_3(s)}{1 + G_o(s)} \cdot Z(s)$$

Führungsübertragungsfunktion: $G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot R(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_o(s)}$ mit $Z(s) = 0$

Störübertragungsfunktion: $G_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = G_2(s) \cdot R(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_o(s)}$ mit $W(s) = 0$

Eigenverhalten eines Standard-Regelkreises:

$$\text{charakteristische Gleichung des Regelkreises: } 1 + G_o(s) = 1 + \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{Z(s) + N(s)}{N(s)} = 0 \Rightarrow Z(s) + N(s) = 0$$

- bestimmt die Eigendynamik mit der die Anfangsbedingungen im geschlossenen Regelkreis abklingen
- bestimmt die Stabilitätseigenschaften

Robustheit

je kleiner $|S_G|$, desto unempfindlicher gegen Parameteränderungen

Empfindlichkeit des Systems auf eine Änderung der Regelstrecke: $G_2 \rightarrow G_2 + \Delta G_2$

$$S_{G_2} = \frac{1}{1 + G_o(s)} \quad \text{günstig für } G_o(s) \rightarrow \infty, \text{ da } S_{G_2} \rightarrow 0 \text{ und } S_{G_2} = 1 \text{ für eine Steuerung da } G_3(s) = 0$$

Empfindlichkeit des Systems auf eine Änderung des Messgliedes: $G_3 \rightarrow G_3 + \Delta G_3$

$$S_{G_3} = \frac{G_2(s)}{1 + G_o(s)} \quad \text{ungünstig für } G_o(s) \rightarrow \infty, \text{ da } S_{G_3} \rightarrow 1$$

Stabilität linearer Systeme

Instabilität ist ein gefährlicher Systemzustand, da er das System zerstören und Benutzer gefährden kann.

Der Nachweis der Stabilität ist für ein Regelungssystem sehr wichtig.

Ein kontinuierliches System ist stabil, wenn

- $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$
- die homogene Lösung (Antwort auf die Anfangsbedingungen) abklingt, d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0$
- ein beschränktes Eingangssignal $u(t)$ immer eine beschränkte Systemantwort $y(t)$ erzeugt (BIBO-stabil) $\Rightarrow \int_0^t |g(\tau)| d\tau < \infty \quad \forall t$

Stabilitätsaussagen für LTI-Systeme:

- asymptotisch stabil: alle Pole haben einen negativen Realteil
- grenzstabil: ein oder mehrere verschiedene Pole auf der imaginären Achse und die restlichen Pole haben einen negativen Realteil
- instabil: Pole mit positivem Realteil oder Mehrfachpole auf der imaginären Achse

Grad der Stabilität: Abstand des Pols von der imaginären Achse

Hurwitz-Kriterium

Bestimmung der Stabilität ohne die exakte Lage der Pole zu bestimmen, daher aber auch keine Aussage über den Grad der Stabilität.

Anwendung auf den **geschlossenen** Regelkreis, *nicht* den offenen Regelkreis $G_o(s)$!

Notwendige Bedingung für Stabilität: $a_i \neq 0$ und alle Koeffizienten haben das gleiche Vorzeichen
Hinreichende Bedingung für Stabilität: für alle n Hurwitz-Determinanten gilt $D_i > 0$

$$\text{z.B. für } G(s) = \frac{Z(s)}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$

$$H = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad D_1 = |a_3|, D_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

mit den Hurwitz-Determinanten

Routh-Hurwitz-Kriterium, Routh-Schema

Ebenfalls zur Bestimmung der Stabilität ohne die exakte Lage der Pole zu bestimmen, vermeidet jedoch die Berechnung der Hurwitz-Determinanten.

Anwendung auf den **geschlossenen** Regelkreis, *nicht* den offenen Regelkreis $G_o(s)$!

z.B. für $G(s) = \frac{Z(s)}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$ mit $a_i \neq 0$ und alle Koeffizienten haben das gleiche Vorzeichen.

Routh-Schema:

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3}$	$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3}$	$b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	0
s^0	$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1}$	$d_2 = 0$	0

Eine komplette Zeile darf mit einer beliebigen positiven Zahl skaliert werden.

Spezialfall Nulleintrag in der ersten Spalte:

- ersetze Null durch $\epsilon \rightarrow 0$
- nutze ϵ wie eine normale Zahl
- nach dem Aufstellen des Schemas beide Möglichkeiten des Vorzeichens von ϵ annehmen ($\epsilon \rightarrow 0^+$, $\epsilon \rightarrow 0^-$) und die Anzahl der Vorzeichenwechsel bestimmen

Spezialfall Nullzeile:

symmetrische Polstellen zum Ursprung (Re, Im, Re+Im) durch gerades Teilpolynom $N'(s) = N'(-s)$ im Nennerpolynom $N(s)$.

- bilde das Hilfspolynom $P(s)$ aus der Zeile oberhalb der Nullzeile
- z.B. Zeile: $s^4|1|6|8 \Rightarrow P(s) = s^4 + 6 \cdot s^2 + 8$
- bilde $\frac{dP(s)}{ds}$, die neu bestimmten Koeffizienten dann in die Nullzeile einsetzen

Stabilitätsaussage des Routh-Hurwitz-Kriteriums:

- die Zahl der Pole in der rechten Halbebene (instabile Pole) ist gleich der Zahl der Vorzeichenwechsel in der zweiten Spalte des Routh-Schemas
- ein stabiles System hat also keinen Vorzeichenwechsel in der zweiten Spalte des Routh-Schemas

Reglerauslegung mit der Routh-Hurwitz-Methode:

Mit Hilfe des Routh-Schemas kann man die Stabilitätsbereiche für bestimmte Parameter bestimmen.

Frequenzgang

Der Zusammenhang zwischen dem Ausgang $Y(s)$ und einem harmonischen Eingangssignal $U(s)$ im eingeschwungenen Zustand.

$$A_y(\omega) \angle \varphi_y(\omega) = A_u(\omega) \cdot A(\omega) \angle (\varphi_u(\omega) + \varphi(\omega))$$

$$G(j\omega) = G(s)|_{s \rightarrow j\omega} \text{ entspricht der einseitigen Fourier-Transformation}$$

Amplitudengang: $|G(j\omega)|$

Phasengang: $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctan\left\{\frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}}\right\}$ bei $\text{Re}\{G(j\omega)\} > 0$

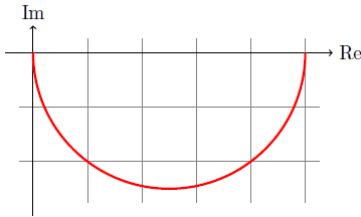
Knickfrequenz/Eckfrequenz: bei $\varphi(\omega_{\text{knick}}) = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}$ also wenn $\text{Re}\{G(j\omega)\} = -\text{Im}\{G(j\omega)\}$

Ortskurve (Nyquist-Diagramm)

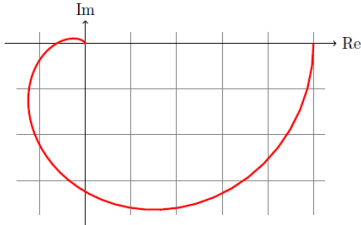
Darstellung des Frequenzgangs als Funktion des Parameters ω mit $0 \leq \omega < \infty$ in der s -Ebene.

Die Ortskurve eines PT_n -Gliedes durchläuft n Quadranten im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ), daher $\varphi_{max} = -n \cdot \frac{\pi}{2}$

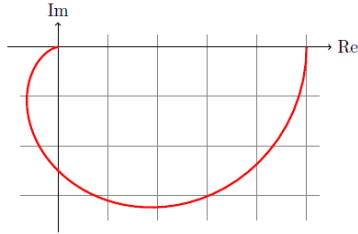
PT_1 -Glieder:



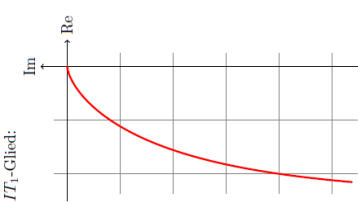
PT_3 -Glieder:



PT_2 -Glieder:



PT_1 -Glieder:



Konstruktion von Ortskurven:

Ortskurve	Inverse Ortskurve
Gerade, die durch den Ursprung verläuft	Gerade, die durch den Ursprung verläuft
Gerade, die <i>nicht</i> durch den Ursprung verläuft	Kreis, der durch den Ursprung verläuft
Kreis, der durch den Ursprung verläuft	Gerade, die <i>nicht</i> durch den Ursprung verläuft
Kreis, der <i>nicht</i> durch den Ursprung verläuft	Kreis, der <i>nicht</i> durch den Ursprung verläuft

allgemeines Nyquist-Kriterium

Der *geschlossene* Regelkreis ist asymptotisch stabil, wenn die vollständige Ortskurve des offenen Kreises den kritischen Punkt $(-1, 0)$ $r_o + \frac{a_o}{2}$ mal im Gegenuhrzeigersinn (mathematisch positiv) umkreist.

r_o ist hierbei die Anzahl der instabilen, a_o die Anzahl der grenzstabilen Pole des *offenen* Regelkreises.

Jeder Pol wird so oft gezählt wie seine Ordnung beträgt. Konjugiert komplexe Pole zählen als *zwei* Pole.

einfaches Nyquist-Kriterium

Vereinfachung für asymptotisch stabilen oder einfach grenzstabilen (Pole nur in $s = 0$) offenen Regelkreise, $r_o = 0$ und $a_o \leq 2$.

Ist der offene Regelkreis asymptotisch stabil, so ist der geschlossene Regelkreis genau dann asymptotisch stabil, wenn die Ortskurve des *offenen* Regelkreises den kritischen Punkt $(-1, 0)$ weder umkreist noch durchdringt.

Amplitudenrand (gain margin)

$A_{Rd} = |G_o(j\omega'_D)|$ mit $\varphi(\omega'_D) = -180^\circ = -\pi$

(erster Durchtritt der Ortskurve von $G_o(j\omega)$ durch die negative reelle Achse)

Der *geschlossene* Regelkreis ist für $A_{Rd} < 1 = 0\text{dB}$ stabil.

Entspricht dem Betrag des Amplitudengangs beim Phasenwinkel $\varphi(\omega'_D) = -180^\circ$

Phasenrand, Phasenreserve (phase margin)

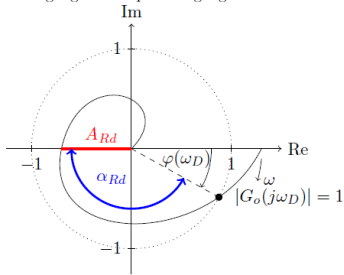
Ein Maß für den Abstand der Ortskurve vom kritischen Punkt $(-1, 0)$.

$\alpha_{Rd} = 180^\circ + \varphi(\omega_D)$ mit $|G_o(j\omega_D)| = 1 = 0\text{dB}$

(erstmaliger Schnitt der Ortskurve von $G_o(j\omega)$ mit dem Einheitskreis)

Der *geschlossene* Regelkreis ist für $\alpha_{Rd} > 0$ stabil.

Entspricht dem Abstand des Phasengangs von -180° bei der **Durchtrittsfrequenz** ω_D , d.h. beim Durchgang des Amplitudengangs durch 0dB.



Bode-Diagramm

Darstellung auf einfach-logarithmischem Papier.

Normalisierung, so dass die Systemantwort für $\omega \rightarrow 0$ die Gesamtverstärkung 1 hat.

Amplitudengang: $A(\omega) = 20 \cdot \log(|G(j\omega)|)$ dB

Übertragungsfunktionen 1. Ordnung:

PT_1 -Glieder $\frac{1}{s+a}$:

- ab der Eckfrequenz $\omega = a$: -20dB/Dekade zum gesamten Amplitudengang
- ± 1 Dekade um die Knickfrequenz $\omega_{knick} = |a|$:
 - bei $a < 0$: von -180° bis -90° mit $+45^\circ/\text{Dekade}$ zum gesamten Phasengang
 - bei $a > 0$: von 0° bis -90° mit $-45^\circ/\text{Dekade}$ zum gesamten Phasengang
- Startpunkt des Amplitudengangs auf der Ordinate durch $\lim_{\omega \rightarrow 0}$ bestimmen

PD -Glieder $s + a$:

- ab der Eckfrequenz $\omega = a$: $+20\text{dB/Dekade}$ zum gesamten Amplitudengang
- ± 1 Dekade um die Knickfrequenz $\omega_{knick} = |a|$:
 - bei $a < 0$: von 180° bis 90° mit $-45^\circ/\text{Dekade}$ zum gesamten Phasengang
 - bei $a > 0$: von 0° bis 90° mit $+45^\circ/\text{Dekade}$ zum gesamten Phasengang
- Startpunkt des Amplitudengangs auf der Ordinate durch $\lim_{\omega \rightarrow 0}$ bestimmen

I -Glieder $\frac{K}{s}$:

- -20dB/Dekade zum gesamten Amplitudengang
- -90° zum gesamten Phasengang
- Startpunkt z.B. bei $\omega = 1$ bestimmen (oder bei der «linksten» Frequenz, s vernachlässigen)
- oder $\frac{K}{\omega} = 1$, dort geht die Asymptote durch 0dB

D -Glieder $K \cdot s$:

- $+20\text{dB/Dekade}$ zum gesamten Amplitudengang
- $+90^\circ$ zum gesamten Phasengang
- Startpunkt z.B. bei $\omega = 1$ bestimmen (oder bei der «linksten» Frequenz, s vernachlässigen)
- oder $K \cdot \omega = 1$, dort geht die Asymptote durch 0dB

Kehrwert einer Funktion: Vorzeichen von Amplituden- und Phasengang wechseln. **minimalphasiges System:** Pol- und Nullstellen *nicht* rechts der $j\omega$ -Achse gelegen ($a > 0$).

Eine Änderung des Betrages $|G(j\omega)|$ ist bei phasenminimalen Übertragungsgliedern stets mit einer *minimalen* Änderung der Phase $\varphi(\omega)$ verbunden.

Systeme höhere Ordnung:

Werden aus Systemen 1. Ordnung zusammengesetzt, die Werte für Amplituden- und Phasengang addieren sich.

PT_2 -Glieder $\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$:

- Asymptote für kleine Frequenzen: $\approx 0\text{dB}$
- Asymptote für große Frequenzen: -40dB/Dekade ab der Eigenfrequenz ω_0 als Knickfrequenz
- ± 1 Dekade um die Knickfrequenz $\omega_{knick} = \omega_0$:
 - von 0° bis -180° mit $-90^\circ/\text{Dekade}$ zum gesamten Phasengang; bei kleiner Dämpfung D : steiler
- $D = \frac{1}{2 \cdot |G(j\omega=j\omega_{knick})|} = \frac{1}{2 \cdot 10^{\frac{\alpha_{Rd}}{20}}}$