Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Stens

Klausur zur Höheren Mathematik II

30. Juli 2011

Aufgabe 1 [5 Punkte]

(a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal stetig differenzierbar in (a, b) und es gebe Stellen

$$a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$$

mit $f(x_i) = 0$ für $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass es ein $y \in (a, b)$ gibt mit $f''(y) = 0$.

Aufgabe 2 [6 Punkte]

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert für $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(1 - \cos(ax))}{\arctan(1 - \cos(bx))}. \qquad \frac{a^2}{b^2}$$

Aufgabe 3 [7 Punkte]

(a) Geben Sie den ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an.

(b) Berechnen Sie

$$\int \frac{-x^3 + 3x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} \, dx.$$

Aufgabe 4 [7 Punkte]

(a) Geben Sie die Definition einer Riccati'schen Differentialgleichung an. Über welchen Lösungsansatz wird die DGL in eine lineare DGL transformiert?

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für $x \in \mathbb{R}$ und $y_0 > 0$:

$$y' = -\frac{2xe^{-y}}{(1+x^2)^2}, \quad y(0) = y_0$$

und zeigen Sie, dass das maximale Existenzintervall ganz $\mathbb{R}$ ist.

bitte wenden!

Aufgabe 5 [9 Punkte]

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $y' = A \cdot y$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung für die folgende lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung an:

$$u''(x) - u(x) = e^{2x}(1 + x).$$

Aufgabe 6 [9 Punkte]

(a) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende Integral konvergiert und für welche es divergiert

$$\int_0^1 x^\alpha (e^x - \cos(x))\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für $x \in (0,1)$:

$$e^x \leq 1 + e \cdot x \quad \text{und} \quad \cos(x) \geq 1 - \frac{2}{\pi}x.$$

(b) Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls seinen Wert

$$\int_0^\infty 2e^{-\frac{x}{2}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 7 [7 Punkte]

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 e^{\frac{y}{3}}(y-3) - \frac{1}{2}y^2.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und charakterisieren Sie diese nach lokalen Maxima, lokalen Minima und Sattelpunkten.

Viel Erfolg!