

Probeklausur

Höhere Mathematik II

SoSe 2011

Aufgabe 1 [Punkte]

Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind und $f(a) = g(a)$ erfüllen. Außerdem gelte

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung: $f(x) < g(x) \quad \forall x \in (a, b]$.

Lösung.

Definiere für $x \in [a, b]$ die Funktion $H(x) := g(x) - f(x)$. Dann ist H in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Damit ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf H anwendbar. Zu jedem $x \in (a, b]$ existiert also ein $\xi \in (a, x)$, so dass gilt

$$H(x) - H(a) = H'(\xi)(x - a).$$

Nach Definition von H gilt dann

$$g(x) - f(x) - \underbrace{(g(a) - f(a))}_{=0} = (g'(\xi) - f'(\xi))(x - a) > 0.$$

Also ist $g(x) > f(x)$ für alle $x \in (a, b]$.

□

Aufgabe 2 [Punkte]

- (a) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit von f im Punkt x_0 an.
- (b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1+x^2}{\arctan(x)} \right).$$

Lösung.

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$, falls der Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert oder, äquivalent dazu, der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

- (b) Es gilt:

$$\frac{1}{x} - \frac{1+x^2}{\arctan(x)} = \frac{\arctan(x) - x - x^3}{x \arctan(x)}$$

Die Funktionen $f(x) := \arctan(x) - x - x^3$ und $g(x) := x \arctan(x)$ sind differenzierbar und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

da $\arctan(0) = 0$. Desweiteren ist $g'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$ ungleich 0 für x ungleich 0, also insbesondere auf einer punktierten Umgebung der 0. Betrachte daher den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 3x^2 - 1}{\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}}$$

Die Funktionen $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 3x^2 - 1$ und $g'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$ sind wiederum differenzierbar, und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2} - 3x^2 - 1 \right) = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} \right) = 0$$

Desweiteren gilt $g''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$ für alle x und damit insbesondere auf einer punktierten Umgebung von 0. Betrachte also den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2} - 6x}{\frac{2}{(1+x^2)^2}}$$

Sowohl $f''(x)$ als auch $g''(x)$ sind stetig in 0 mit $f''(0) = 0$ und $g''(0) = 2 \neq 0$, damit ist auch $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ stetig in 0, daher ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0$$

Nach der Regel von l'Hospital gilt damit auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

Nach erneuter Anwendung der Regel von l'Hospital folgt damit schließlich:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

□

Aufgabe 3 [Punkte]

- (a) Geben Sie die Definition einer Stammfunktion zu $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in I an.
- (b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)} dx.$$

Lösung.

- (a) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, I ein offenes Intervall; $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf I differenzierbar. Dann heißt F eine Stammfunktion zu f in I , wenn

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

gilt.

- (b) Zerlege den Bruch $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und wähle dazu den Ansatz

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

für $A, B, C \in \mathbb{R}$. Es gilt dann

$$x+1 = A(x^2+4) + Bx(x-1) + C(x-1) = x^2(A+B) + x(C-B) + 4A - C.$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$0 = A + B \Leftrightarrow A = -B$$

$$1 = C - B \Leftrightarrow B = C - 1$$

$$1 = 4A - C \Leftrightarrow 1 = -4C + 4 - C = -5C + 4 \Leftrightarrow -3 = -5C \Leftrightarrow C = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{2}{5} \Rightarrow A = \frac{2}{5}.$$

Also gilt

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{2}{5} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{5} \frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{5} \frac{1}{x^2+4}.$$

Nun ist es möglich das Integral zu berechnen.

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)} dx &= \int \frac{2}{5} \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{2}{5} \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{3}{5} \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \frac{2}{5} \log|x-1| + c - \frac{2}{5} \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy_{|y=x^2+4} + \frac{3}{5} \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{5} \log|x-1| - \frac{1}{5} \log|x^2+4| + c + \frac{3 \cdot 2}{20} \int \frac{1}{y^2+1} dy_{|y=\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{5} \log\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+4}\right) + \frac{3}{10} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c \end{aligned}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

□

Aufgabe 4 [Punkte]

- (a) Geben Sie die allgemeine Form einer linearen inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung an.
- (b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für $x \geq 1$:

$$y'(x) = \frac{2y^2}{x} - \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{1}{4}$$

Lösung.

- (a) Seien $a, f : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $f \not\equiv 0$, I ein offenes Intervall. Dann heißt

$$u'(x) + a(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

eine lineare inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

- (b) Betrachte die Differentialgleichung:

$$y'(x) = \frac{2y^2}{x} - \frac{y}{x} \tag{1}$$

Die Differentialgleichung ist eine Bernoullische DGL mit $\alpha = 2$, $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = \frac{2}{x}$. Die Funktion $y(x) \equiv 0$ löst zwar (1), erfüllt aber nicht die Anfangsbedingung $y(1) = \frac{1}{4}$. Sei im Folgenden also y eine Lösung mit $y(x) \neq 0$. Setze $\beta = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-2} = -1$ und

$$y(x) = v(x)^\beta = \frac{1}{v(x)} \quad \Leftrightarrow \quad v(x) = \frac{1}{y(x)}$$

Dann ist $v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$ und es folgt:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x \cdot y(x)} \\ &\Leftrightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x} \cdot v(x) - \frac{2}{x} \end{aligned} \tag{2}$$

(2) ist nun eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung, mit Anfangswert

$v(1) = \frac{1}{y(1)} = 4$. Die Lösung von (2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \exp \left(\int_1^x \frac{1}{t} dt \right) \cdot \left[\int_1^x -\frac{2}{t} \cdot \exp \left(\int_1^t -\frac{1}{s} ds \right) dt + 4 \right] \\
 &= \exp \left(\log(t) \Big|_1^x \right) \cdot \left[\int_1^x -\frac{2}{t} \exp \left(-\log(s) \Big|_1^t \right) dt + 4 \right] \\
 &= \exp(\log(x)) \cdot \left[\int_1^x -\frac{2}{t} \exp(-\log(t)) dt + 4 \right] \\
 &= x \cdot \left(\int_1^x -\frac{2}{t^2} dt + 4 \right) \\
 &= x \cdot \left(\frac{2}{t} \Big|_1^x + 4 \right) = x \cdot \left(\frac{2}{x} - 2 + 4 \right) = 2 + 2x
 \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems: $y(x) = \frac{1}{2(x+1)}$.

□

Aufgabe 5 [Punkte]

Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$u'''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = f(t) \quad (3)$$

- (a) Geben Sie die Lösungsgesamtheit für den Fall $f(t) = 0$ an.
- (b) Geben Sie die Lösungsgesamtheit für den Fall $f(t) = 3t^2 + 5t - 7$ an.

Lösung.

- (a) Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -2$$

Also ist die Lösungsgesamtheit von (3) für den Fall $f(t) = 0$ gegeben durch:

$$u(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t + c_3 \cdot e^{-2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

- (b) Um (3) für den Fall $f(t) = 3t^2 + 5t - 7$ zu lösen, bestimme eine partikuläre Lösung über den Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\begin{aligned} u_p(t) = at^2 + bt + c \quad \Rightarrow \quad & u'_p(t) = 2at + b \\ & u''_p(t) = 2a \\ & u'''_p(t) = 0 \end{aligned}$$

Dies in (3) eingesetzt liefert:

$$-6at - 3b + 2at^2 + 2bt + 2c = 3t^2 + 5t - 7 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = c = 7$$

Also lautet die partikuläre Lösung: $u_p(t) = \frac{3}{2}t^2 + 7t + 7$ und die Lösungsgesamtheit von (3):

$$u(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t + c_3 \cdot e^{-2t} + \frac{3}{2}t^2 + 7t + 7, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

□

Aufgabe 6 [Punkte]

- (a) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende Integral konvergiert und für welche es divergiert:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-|\log(x)|}}{x^\alpha} dx.$$

- (b) Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\int_0^{\infty} e^{-5x}(x^2 + 3x + 2) dx.$$

Lösung.

- (a) $f_\alpha(x) := \frac{e^{-|\log(x)|}}{x^\alpha}$ ist stetig für $x > 0$, also integrierbar auf jedem Intervall $[a, b] \subset (0, \infty)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Das Integral ist uneigentlich bzgl. beider Grenzen, deshalb betrachte

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{-|\log(x)|}}{x^\alpha} dx &= \int_0^1 \frac{e^{\log(x)}}{x^\alpha} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx \\ &\begin{cases} < \infty & \text{für } \alpha - 1 < 1 \\ = \lim_{b \rightarrow 0} \left[\frac{1}{-\alpha+2} \frac{1}{x^{\alpha-2}} \right]_b^1 = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{-\alpha+2} \left(1 - \frac{1}{b^{\alpha-2}} \right) = \infty & \text{für } \alpha > 2 \\ = \lim_{b \rightarrow 0} \log|x| \Big|_b^1 = 0 - \lim_{b \rightarrow 0} \log|b| = \infty & \text{für } \alpha = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} < \infty & \text{für } \alpha < 2 \\ = \infty & \text{für } \alpha \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{e^{-|\log(x)|}}{x^\alpha} dx &= \int_1^{\infty} \frac{e^{-\log(x)}}{x^\alpha} dx \\ &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx \\ &\begin{cases} < \infty & \text{für } \alpha > 0 \\ = \infty & \text{für } \alpha \leq 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Also ist das Integral $\int_0^{\infty} f_\alpha(x) dx$ divergent für $\alpha \leq 0$ und $\alpha \geq 2$. Für $0 < \alpha < 2$ gilt

$$\int_0^{\infty} f_\alpha(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{-|\log(x)|}}{x^\alpha} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-|\log(x)|}}{x^\alpha} dx < \infty$$

also ist das Integral konvergent.

- (b) Da f auf $(0, R)$ integrierbar ist für alle $R > 0$, ist das Integral uneigentlich bezüglich der oberen Grenze. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^R e^{-5x}(x^2 + 3x + 2) dx &\stackrel{P.I.}{=} -\frac{1}{5}e^{-5R}(R^2 + 3R + 2) + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \int_0^R e^{-5x}(2x + 3) dx \\
 &\stackrel{P.I.}{=} -\frac{1}{5}e^{-5R}(R^2 + 3R + 2) + \frac{2}{5} - \frac{1}{25}e^{-5R}(2R + 3) + \frac{3}{25} \\
 &\quad + \frac{2}{25} \int_0^\infty e^{-5x} dx \\
 &= -\frac{1}{5}e^{-5R}(R^2 + 3R + 2) + \frac{2}{5} - \frac{1}{25}e^{-5R}(2R + 3) + \frac{3}{25} \\
 &\quad - \frac{2}{125}[e^{-5x}]_0^\infty \\
 &= -\frac{1}{5}e^{-5R}(R^2 + 3R + 2) + \frac{2}{5} - \frac{1}{25}e^{-5R}(2R + 3) + \frac{3}{25} \\
 &\quad - \frac{2}{125}e^{-5R} + \frac{2}{125} \\
 &\stackrel{R \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{13}{25} + \frac{2}{125} \\
 &= \frac{67}{125}.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_0^\infty e^{-5x}(x^2 + 3x + 2) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-5x}(x^2 + 3x + 2) = \frac{67}{125}.$$

Alternative: Die Funktionen e^{-5x} und $x^2 + 3x + 2$ sind stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$. Zeige noch, dass die Produkte $e^{-5x}(x^2 + 3x + 2)$ und $-\frac{1}{5}e^{-5x}(2x + 3)$ integrierbar auf $(0, \infty)$ sind: Für $x \geq 1$ gilt

$$0 \leq e^{-5x}(2x + 3) \leq e^{-5x}(x^2 + 3x + 2) \leq e^{-5x}4x^2 \leq 4e^{-3x}.$$

Damit ist e^{-3x} eine konvergente Majorante mit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R e^{-3x} dx < \infty$$

und

$$\int_0^\infty e^{-5x}(x^2 + 3x + 2) dx = \int_0^1 e^{-5x}(x^2 + 3x + 2) dx + \int_1^\infty e^{-5x}(x^2 + 3x + 2) dx < \infty.$$

Ebenso erhält man auch $\int_0^\infty -\frac{1}{5}e^{-5x}(2x + 3) < \infty$. Also darf man die partielle Integrati-

onsregel anwenden und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-5x}(x^2 + 3x + 2) dx &\stackrel{P.I.}{=} \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \int_0^{\infty} e^{-5x}(2x + 3) dx \\&\stackrel{P.I.}{=} \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \int_0^{\infty} e^{-5x}(2) dx \\&= \frac{2}{5} + \frac{3}{25} - \frac{2}{125} [e^{-5x}]_0^{\infty} \\&= \frac{13}{25} + \frac{2}{125} \\&= \frac{67}{125}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 7 [Punkte]

Berechnen Sie ∇f für folgende Funktionen ($n \in \mathbb{N}$):

(a) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \underline{x} \mapsto \underline{x} \cdot \underline{x}$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x^2 + y^2) \sin(x^2 z^2)$.

(c) Berechnen Sie nun zusätzlich die Richtungsableitungen der Funktion f aus Aufgabenteil (b) im Punkt $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$ für die Richtungen:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

(a) Es gilt: $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2$ und damit gilt für die i -te partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2x_i$$

Damit ist der Gradient gegeben durch:

$$\nabla f(\underline{x}) = 2\underline{x}$$

(b) Berechne die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(x^2 z^2) + (x^2 + y^2) 2x z^2 \cos(x^2 z^2) = 2x(\sin(x^2 z^2) + (x^2 + y^2) z^2 \cos(x^2 z^2))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin(x^2 z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x^2 + y^2) 2z x^2 \cos(x^2 z^2)$$

Damit ist der Gradient gegeben durch:

$$\nabla f(x) = 2 \sin(x^2 z^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + 2x z \cos(x^2 z^2) (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

(c) Da alle partiellen Ableitungen stetig sind, können die Richtungsableitungen über das Skalarprodukt mit dem Gradienten gebildet werden:

$$\partial_{v_1} f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}$$

Der zweite Vektor muss zunächst normiert werden, es gilt: $\|v_2\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, daher gilt:

$$\partial_{\frac{v_2}{\|v_2\|}} f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

□