Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen

Aachen, den 01.07.11

Probeklausur **Höhere Mathematik II** **SoSe 2011**

Aufgabe 1 [Punkte]

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind und $f(a) = g(a)$ erfüllen. Außerdem gelte

$$f'(x) < g'(x) \ \forall x \in (a, b)\,.$$

Zeigen Sie: $f(x) < g(x) \ \forall x \in (a, b]\,.$

Aufgabe 2 [Punkte]

(a) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit von f im Punkt x_0 an.

(b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1 + x^2}{\arctan(x)} \right).$$

Aufgabe 3 [Punkte]

(a) Geben Sie die Definition einer Stammfunktion zu $f : I \to \mathbb{R}$ in I an.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{x + 1}{(x - 1)(x^2 + 4)} \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4 [Punkte]

(a) Geben Sie die allgemeine Form einer linearen inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung an.

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für $x \geq 1$:

$$y'(x) = \frac{2y^2}{x} - \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 5 [Punkte]

Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$u'''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = f(t).$$

(a) Geben Sie die Lösungsgesamtheit für den Fall $f(t) = 0$ an.

(b) Geben Sie die Lösungsgesamtheit für den Fall $f(t) = 3t^2 + 5t - 7$ an.

Aufgabe 6 [Punkte]

(a) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende Integral konvergiert und für welche es divergiert:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-|\log(x)|}}{x^\alpha}\,dx.$$

(b) Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls den Grenzwert:

$$\int\limits_0^\infty e^{-5x}(x^2+3x+2)\,dx.$$

Aufgabe 7 [Punkte]

Berechnen Sie ∇f für folgende Funktionen ($n \in \mathbb{N}$):

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \underline{x} \mapsto \underline{x} \cdot \underline{x}$.

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x^2 + y^2)\sin(x^2 z^2)$.

(c) Berechnen Sie nun zusätzlich die Richtungsableitungen der Funktion f aus Aufgabenteil (b) im Punkt $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ für die Richtungen:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$