Lehrstuhl für Informatik 7 · RWTH Aachen
Dr. C. Löding · Dipl.-Inform. W. Fridman · Dipl.-Inform. S. Schulz

Automaten, Sprachen, Komplexität – SS 2011

Übungsblatt 11 — 04.07.2011

Aufgabe 39 — *4 Punkte*

Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem:

Gegeben:	Turingmaschine M nur mit Linksbewegung (d. h. in allen Transitionen ist die Bewegungskomponente gleich L) und Eingabewort w.
Frage:	Terminiert M angesetzt auf das Wort w?

Formulieren Sie (mit Begründung für die Korrektheit) einen Algorithmus, der dieses Problem löst.

Aufgabe 40 — *4+4 Punkte*

Zeigen Sie durch geeignete Reduktionen, dass folgende Probleme unentscheidbar sind:

IOP: **Gegeben:** Turingmaschine M über $\{0,1\}$, Wörter $u, v \in \{0,1\}^*$.
Frage: Terminiert M angesetzt auf u, mit dem Ergebnis v?

TOT: **Gegeben:** Turingmaschine M über $\{0,1\}$.
Frage: Ist die durch M berechnete Funktion total?
(D.h.: stoppt M auf *jedem* Eingabewort?)

Hinweis: Es genügt, die Reduktionsrelation $AHP \leq IOP$ bzw. $AHP \leq TOT$ zu zeigen und die Unentscheidbarkeit von *AHP* auszunutzen. Beschreiben Sie also, wie man zu einer Instanz (M, w) von *AHP* eine Instanz (M', u, v) von *IOP* bzw. eine Instanz M'' von *TOT* konstruieren kann, so dass M auf w stoppt, gdw. $M'\colon u \to v$, bzw. M'' auf jeder Eingabe $v \in \{0,1\}^*$ stoppt.

Die Aufgaben sind in Zweier- bis Dreiergruppen zu erarbeiten und abzugeben. Die Lösungen können bis nächsten Montag, 11.07.2011, 08:15 Uhr im L^{2}P oder in der Vorlesung abgegeben, oder in den Übungskasten am Lehrstuhl eingeworfen werden.

Aufgabe 39:

geg. TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_s, \delta)$ mit nur linksbezogenen.

Konvention: Fehlt für ein Paar (q, a) die Zeile $qa\ldots$, so denken wir uns $qaaNq_s$ ergänzt.

Bemerkung: Anders als mit der Konvention vereinbart gehen wir immer links.

Beobachtung: M liest am Anfang das erste Zeichen des Eingabeworts, danach wird in jedem Schritt das leere Wort gelesen.

Entscheidungsalgorithmus

- Starte M angesetzt auf w und lasse M max $|Q|+1$ Schritte laufen (zähle Schritte mit, die M ausführt und stoppe M, wenn $|Q|+1$ Schritte erreicht sind, falls M bis dann nicht gestoppt hat.)

Wenn M nach $|Q|+1$ Schritten nicht in q_s gehe „NEIN" aus, sonst „JA".

Korrektheit: Da M nur links Bewegungen ausführen kann und das Arbeitsfeld bis auf den ersten Schritt leer ist, kann M kein Feld des Rechenbandes mehr als 1 Mal besuchen.

(c)

Nach spätestens $|Q|+1$ Schritten nach Lesen des 1. Zeichens hat M einen Zustand $q \in Q$ mind. 2 Mals angenommen.

Da M in den $|Q|+1$ Schritten nach Lesen des 1. Zeichens auch das gleiche Bandsymbol $\sqcup$ liest, arbeitet M vom 2. Auftreten von q_v an genauso wie vom ersten Auftreten von q an.

$\Rightarrow$ M terminiert nicht.

Wenn M terminiert, dann muss dies bereits in den ersten $|Q|+1$ Schritten geschehen. ✓

Aufgabe 40:

zzg: AHP ≤ IOP

also: Konstruiere aus Instanz (M, ω) zu AHP eine Instanz (M', u, v) zu IOP, so daß gilt: sodass!

$M: \omega \to$ stopp $\Leftrightarrow$ $M': u \to v$ stopp

Konstruiere (M', u, v) wie folgt:

$u := \omega$; $v := \varepsilon$

M' arbeite wie M auf ω, wenn M in q_s, dann schreibe $\sqcup$ und stoppe dann in q_s' von M'.

z.z.g.: $M: \omega \to$ stopp $\Leftrightarrow$ $M': u \to v$

$\boxed{\Rightarrow}$ $M: \omega \longrightarrow$ stopp.

$\Rightarrow$ M' stoppt ebenfalls in Zustand q_s' von M', und in Zustand q_s von M schreibt M' ein $\sqcup$ und stoppt danach. Ausgabe ist damit ε, also gilt: $M': u \to v$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $M': u \to v$

$\Rightarrow$ M angesetzt auf $\omega = u$ stoppt, da M' genauso arbeitet und den Zustand q_s von M annimmt, bevor die Ausgabe $v = \varepsilon$ produziert wird.

$\Rightarrow M: \omega \to$ stopp ✓

$\Rightarrow$ Lsg.: AHP ≤ IOP ✓

$TOT = \{\omega \in \{0,1\} \mid \omega = code(M) \text{ und ex. Wort } \omega \text{ auf dem } M \text{ nicht hält.}\}$

zzg. AHP ist höchstens so schwierig wie TOT von der Entscheidbarkeit

$\Leftrightarrow \quad AHP \leq TOT$

$\Leftrightarrow \quad [x \in AHP \Leftrightarrow f(x) \in TOT]$

Konstr.: Gebe $code(M')$ aus mit folgenden Eigenschaften:

1) Lösche Eingabewort
2) M' verhält sich wie M aus $\omega = code(M)$