



Automaten, Sprachen, Komplexität – SS 2011

Übungsblatt 10

27.06.2011

Aufgabe 35

4 Punkte

Wir betrachten die Turingmaschine $M = (\{q_0, q_1, q_s\}, \Sigma, \Gamma, q_0, q_s, \delta)$ über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und dem Arbeitsalphabet $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ mit der folgenden Transitionstafel:

q_0	0	0	R	q_0
q_0	$\sqcup$	$\sqcup$	N	q_0
q_0	1	1	R	q_1
q_1	0	0	R	q_1
q_1	1	1	R	q_1
q_1	$\sqcup$	1	N	q_s

Geben Sie die einstellige Funktion über Σ^* an, die durch M berechnet wird.

Geben Sie für die Eingabewörter 00, 010 die Konfigurationsfolgen an.

Aufgabe 36

4 Punkte

Geben Sie eine Turingmaschine über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an, die die Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ mit $f(w) = a_1 \dots a_{n-2}$ für $w = a_1 \dots a_n$ (mit $f(w) = \varepsilon$, falls $n \leq 2$) berechnet. Geben Sie hierzu eine Turingtafel mit kurzer Erläuterung an.

Geben Sie außerdem jeweils die Konfigurationsfolge für die Wörter $w_1 = 0$ und $w_2 = 0011$ an.

Aufgabe 37

4 Punkte

Zeigen Sie, dass man auf die Möglichkeit, den Lesekopf einer Turingmaschine nicht zu bewegen ("N" in der Definition von δ), verzichten kann.

Zeigen Sie dazu, wie man aus einer Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_s, \delta)$ eine Turingmaschine $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, q'_s, \delta')$ konstruieren kann, deren Transitionsfunktion die Form $\delta' : Q' \times \Gamma' \rightarrow \Gamma' \times \{L, R\} \times Q'$ hat und die die gleiche Funktion wie M berechnet.

Aufgabe 38

6 Punkte

Geben Sie *im Stil der Multiplikations-TM* aus der Vorlesung eine TM an, die für natürliche Zahlen in unärer Darstellung (Strich-Darstellung) die jeweiligen Zweierpotenzen berechnet; also die Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) = 2^n$, für alle $n \geq 0$.

Bemerkung: Sie brauchen die Turingtafel *nicht* vollständig auszuformulieren.

Die Aufgaben sind in Zweier- bis Dreiergruppen zu erarbeiten und abzugeben. Die Lösungen können bis nächsten Montag, 04.07.2011, 08:15 Uhr im L²P oder in der Vorlesung abgegeben, oder in den Übungskasten am Lehrstuhl eingeworfen werden.

Aufgabe 35:

$$f(w) = \begin{cases} "1" & ; "1" \text{ kommt im Wort } w \text{ vor,} \\ \perp & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightarrow q_0 00 \vdash 0 q_0 0 \vdash 00 q_0 \vdash^{\infty} 00 q_0 \sqcup \neq q_s \quad \text{☹}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow q_0 010 \vdash 0 q_0 10 \vdash 01 q_1 0 \vdash 010 q_1 \sqcup \\ \vdash 010 q_s 1 \sqcup \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 36:

Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}, q_0, q_s, \delta)$

; $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_s\}$

; Transitionstafel δ :

$q_0 \hat{=}$ Zwei Ende des Startwortes

q_0	0	0	R	q_0
q_0	1	1	R	q_0
q_0	$\sqcup$	$\sqcup$	L	q_1

$q_1 \hat{=}$ Erster Buchstabe weg

q_1	0	$\sqcup$	L	q_2
q_1	1	$\sqcup$	L	q_2
q_1	$\sqcup$	$\sqcup$	L	q_2

②

$q_2 \hat{=}$ zweiter Buchstabe weg

$q_2 \quad 0 \quad \cup \quad L \quad q_3$

$q_2 \quad 1 \quad \cup \quad L \quad q_3$

$q_2 \quad \cup \quad \cup \quad L \quad q_3$

$q_3 \hat{=}$ An Wortaufnahme

$q_3 \quad 0 \quad 0 \quad L \quad q_3$

$q_3 \quad 1 \quad 1 \quad L \quad q_3$

$q_3 \quad \cup \quad \cup \quad R \quad q_5$

$q_5 \hat{=}$ READY.



$\rightarrow q_0 0 \vdash 0 q_0 \cup \vdash q_1 0 \cup \vdash q_2$
 $\vdash q_3 \vdash q_5 \cup ; \text{Ausgabewort "E"}$

$\rightarrow q_0 0011 \vdash 0 q_0 011$
 $\vdash 00 q_0 11 \vdash 001 q_0 1$
 $\vdash 0011 q_0 \cup \vdash 001 q_1 1$
 $\vdash 00 q_2 1 \cup \vdash 0 q_3 0$
 $\vdash q_3 00 \vdash q_3 \cup 00$
 $\vdash q_5 00 \cup ; \text{Ausgabewort "00"}$



Aufgabe 37:

Der Einfachheit wegen bestimme ich $\Gamma = \Sigma \cup \{\omega\}$. ③

I. Idee: Hänger (L) umwandeln in Senkenzustand.

Also:

$$(q_a, x, x, N, q_a); x \in \Gamma \wedge q_a \in Q$$

hängt, also Senkenzustand

$$\forall x \in \Gamma: (q_{\text{SENKE}}, x, x, L, q_{\text{SENKE}})$$

definiert und

$$(q_a, x, x, R, q_{\text{SENKE}})$$

$$; Q' = Q \cup \{q_{\text{SENKE}}\}$$

II. Idee: Statt in einem Zustand Buchstaben mehrmals auszutauschen wegen der deterministischen Transitionen folgt aus

$$(q_a, x, y, N, q_a)$$

$$(q_a, y, z, N/R/L, q_b)$$

$$; x, y, z \in \Gamma \wedge q_a, q_b \in Q$$

direkt

$$(q_a, x, z, N/R/L, q_b).$$

Bemerkung: Im Falle "N" muß weiter vereinfacht werden.

III. Idee: Bleibt also nur noch das Problem ④

(q_a, x, y, N, q_b) ; $q_a \neq q_b$.

Da wir an selben Platz bleiben
können wir zustandsübergreifend
handeln.

Aus

(q_a, x, y, N, q_b)

$(q_b, y, z, N/R/L, q_c)$

machen wir

$(q_a, x, z, N/R/L, q_c)$

direkt.

Bemerkung: Im Falle „N“ muß weiter vereinfacht
werden.

Aufgabe 37

Idee: Ersetze „N“ durch einmal „R“ und einmal „L“.

TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_s, \delta)$

definiere TM $M' = (Q', \Sigma, \Gamma, q_0, q_s, \delta')$

mit $Q' = Q \cup \{\tilde{q} \mid q \in Q\}$

mit δ' : ersetze jede Zeile p, a, b, N, q in

der Turingtafel durch die Zeilen

$p, a, b, R, \tilde{q}$ und $\tilde{q}, x, x, L, q$

$\forall x \in \Gamma$.



Aufgabe 38:

⑥

Idee: Produktmaschine aus Vorlesung sogar dazu benutzen: Diese erledigt rechts neben zwei Zahlen in unärer Darstellung die Multiplikation in unärer Darstellung, $*$ $\hat{=}$ $\forall x \in \Gamma$

$q_{0x}: 2^0 = 1 \rightarrow 1 \sqcup$

$(q_0, \sqcup, 1, R, q_{01})$

$(q_{01}, *, \sqcup, L, q_5)$

$(q_0, 1, 1, N, q_1)$

$q_{1x}: 2^1 = 2 \rightarrow 11 \sqcup$

$(q_1, 1, X, R, q_{11})$

$(q_{11}, \sqcup, 1, L, q_{12})$

$(q_{12}, X, 1, N, q_5)$

$(q_{11}, 1, 1, N, q_2)$

$q_{2x}: \text{Initialisierung } n > 1 \rightarrow \underset{\uparrow}{X} 1 \dots 1 \# 11 \sqcup$

$(q_2, 1, 1, R, q_2)$

$(q_2, \sqcup, \#, R, q_{21})$

$(q_{21}, *, 1, R, q_{22})$

$(q_{22}, *, 1, L, q_{23})$

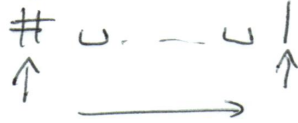
$(q_{23}, 1, 1, L, q_{23})$

$(q_{23}, \#, \#, L, q_{23})$

(q_{23}, X, X, R, q_3)

q_{4x}: Zum Ergebnis laufen und READY.

⑦



(q₄, #, #, R, q₄)

(q₄, ⊔, ⊔, R, q₄)

(q₄, 1, 1, N, q₅)

q₅: READY.

q_{3x}: Hinten ggf. "x2" schreiben und Produkt-
automat so vorbereiten.

(q₃, #, #, N, q₄)

(q₃, 1, x, R, q₃₁)

(q₃₁, 1, 1, R, q₃₁)

(q₃₁, #, #, R, q₃₂)

(q₃₂, ⊔, ⊔, R, q₃₂)

(q₃₂, 1, 1, R, q₃₃)

(q₃₃, 1, 1, R, q₃₃)

(q₃₃, ⊔, ⊔, R, q₃₄)

(q₃₄, *, 1, R, q₃₅)

(q₃₅, *, 1, R, q₃₆)

$$(q_{36}, \sqcup, \sqcup, L, q_{37})$$

$$(q_{37}, 1, 1, L, q_{37})$$

$$(q_{37}, \cup, \cup, L, q_{38})$$

$$(q_{38}, 1, 1, L, q_{38})$$

$$(q_{38}, \sqcup, \sqcup, R, q_{\text{AUTOMAT-M-START}})$$

95x : Nach Automat durchlaufen ganz nach links und alle Voreingaben dabei nullen.

$$(q_{\text{AUTOMAT-M-ENDE}}, 1, 1, L, q_5)$$

$$(q_5, \cup, \cup, L, q_5)$$

$$(q_5, 1, \sqcup, L, q_5)$$

$$(q_5, X, \sqcup, L, q_5)$$

$$(q_5, \#, \#, L, q_{51})$$

$$(q_{51}, 1, 1, L, q_{51})$$

$$(q_{51}, X, X, R, q_3)$$

Aufgabe 38: „Alternative: Murielle“

⑨

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(n) = 2^n \quad \forall n \geq 0$$

Strichdarstellung

Idee: rechts vom Eingabeblock (EB) schreiben wir Ausgabeblock (AB) und trennen die Blöcke durch Sonderzeichen #

• zu Anfang # hinter EB aktuellen AB verdoppeln (durch kopieren)

Details:

- 1.) gehe zu erstem $\sqcup$ nach EB rechts, drucke dort #
- 2.) eins weiter nach rechts, drucke 1
- 3.) gehe nach links (über # hinaus) bis zum ersten Auftreten von $\sqcup$ oder x , dann einen Schritt nach rechts
- 4.) falls # auf Arbeitsfeld (AF): fertig, gehe also Schritt nach rechts (erstes Feld AF) und stoppe
sonst (d.h. 1 auf AF): ersetze 1 durch x und gehe zum ersten Feld rechts neben # (erstes Feld AF)
- 5.) verdoppeln aktuellen AB (mit Unterprozedur *); weiter bei Punkt 3 ✓

Unterprozedur *:

- a.) falls 1 auf AF, drucke x
- b.) gehe nach rechts zum ersten $\sqcup$ und drucke 0
- c.) gehe nach links bis zum ersten Auftreten von x und dann ein Schritt nach rechts.

d.) falls 1 auf AF, drucke 1 und weiter beib.) (10)

e.) sonst (d.h. 0 auf AF) = Verdopplungsprozedur
fertig, gehe zunächst nach rechts bis zum
ersten $\sqcup$. Gehe dann zurück nach links bis
und verwandle währenddessen 0 und 1 zu 1.
Gehe 1 Schritt weiter nach rechts (also erstes
Feld von AB) und zurück zum Hauptprogramm

