Lehrstuhl für Informatik 7 · RWTH Aachen
Dr. C. Löding · Dipl.-Inform. W. Fridman · Dipl.-Inform. S. Schulz

Automaten, Sprachen, Komplexität – SS 2011

Übungsblatt 9 — 20.06.2011

Aufgabe 31 — *3 Punkte*

Sei G die folgende Grammatik:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & XSX \mid R \\ R & \to & aTb \mid bTa \\ T & \to & XTX \mid X \mid \varepsilon \\ X & \to & a \mid b \end{array}$$

Geben Sie einen Ableitungsbaum (mit Wurzel S) für das Terminalwort $z = aaababa$ an. Finden Sie eine Zerlegung von z in der Form $uvwxy$ wie im Beweis des Pumping Lemmas. Beschreiben Sie hiervon ausgehend die unendliche Familie von Wörtern in $L(G)$.

Aufgabe 32 — *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^n b^{n^2} \mid n \geq 0\}$ nicht kontextfrei ist. Benutzen Sie dazu das Pumping Lemma.

Aufgabe 33 — *2+3+3 Punkte*

(a) Sei $L = \{w\# \mid w$ ist korrekt geklammertes Wort über $\{(,)\}\}$. Geben Sie einen DPDA an, der L erkennt. Erläutern Sie kurz Ihre Konstruktion.

Bsp.: $()\#, (())()\#, (()(()))\# \in L$, aber $(()\#,)()(\# \notin L$

(b) Sei $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält gleich viele a's und b's$\}$. Geben Sie einen PDA an, der L erkennt. Erläutern Sie kurz Ihre Konstruktion.

(c) Sei $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält doppelt so viele a's wie b's$\}$. Geben Sie einen PDA an, der L erkennt. Erläutern Sie kurz Ihre Konstruktion.

Aufgabe 34 — *6 Punkte*

Seien Σ ein Alphabet, $\mathcal{A} = (Q_\mathcal{A}, \Sigma, \Gamma_\mathcal{A}, q_0^\mathcal{A}, Z_0^\mathcal{A}, \Delta_\mathcal{A}, F_\mathcal{A})$ ein PDA, der die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ erkennt und $\mathcal{B} = (Q_\mathcal{B}, \Sigma, q_0^\mathcal{B}, \Delta_\mathcal{B}, F_\mathcal{B})$ ein ε-NEA, der die Sprache $K \subseteq \Sigma^*$ erkennt.

Geben Sie einen PDA $\mathcal{C} = (Q_\mathcal{C}, \Sigma, \Gamma_\mathcal{C}, q_0^\mathcal{C}, Z_0^\mathcal{C}, \Delta_\mathcal{C}, F_\mathcal{C})$ an, der die Sprache $L \cap K$ erkennt. Erläutern Sie Ihre Konstruktion.

Hinweis: Passen Sie die Idee der Produktkonstruktion auf diese Situation an.

Die Aufgaben sind in Zweier- bis Dreiergruppen zu erarbeiten und abzugeben. Die Lösungen können bis nächsten Montag, 27.06.2011, 08:15 Uhr im L^{2}P oder in der Vorlesung abgegeben, oder in den Übungskasten am Lehrstuhl eingeworfen werden.

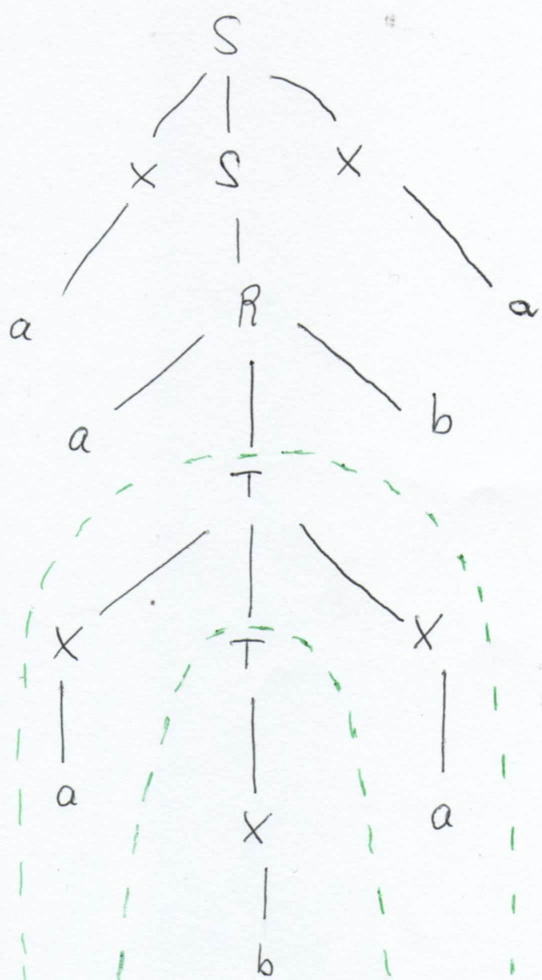
Aufgabe 31:

G: $S \longrightarrow XSX \mid R$ $\qquad z = aaababa$

$R \longrightarrow aTb \mid bTa$

$T \longrightarrow XTX \mid X \mid \varepsilon$

$X \longrightarrow a \mid b$



$u = aa \quad v = a \quad w = b \quad x = a \quad y = ba$

Die unendliche Familie ist $u v^i w x^i y$; $i \geq 1$.

Hier: $aa\, a^i\, b\, a^i\, ba$; $i \geq 1$.

Aufgabe 82:

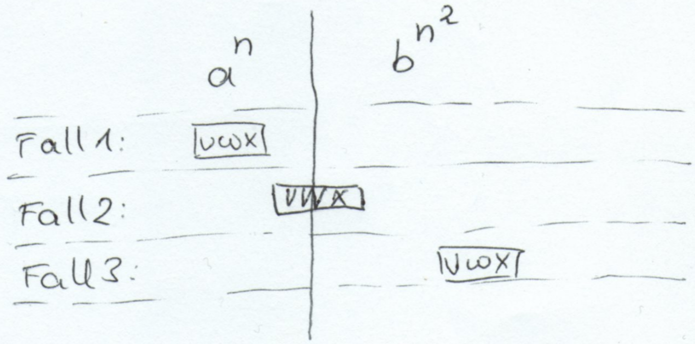
$L = \{a^n b^{n^2} \mid n \geq 0\}$

Nicht kontextfrei ⟺ in Grammatik umformbar ⟺ in CNF

Also Annahme: Es existiert eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = G$, die liegt schon in Chomsky-Normalform vor, also in CNF: $G = (N, \Sigma, P, S)$. sodass

Nach P.L. ex ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß sich jedes Wort $z \in L(G)$ mit Mindestlänge n_0 zerlegen läßt in $z = uvwxy$ mit $v \cdot x \neq 0$ und $|vwx| \leq n$ mit $n = 2^{|N|}$; $N = \#$ Nichtterminalfunktionen vor.

Betrachte $z = a^n b^{n^2}$



Fall 2: u, y als Rand uninteressant ⇒ Neues Problem $a^n b^n$!

$vwx \in a^* b^*$

$z' = uv^i w x^i y$ nach P.L auch ~~drinnen~~ in einer Grammatik, die kontextfrei wäre.

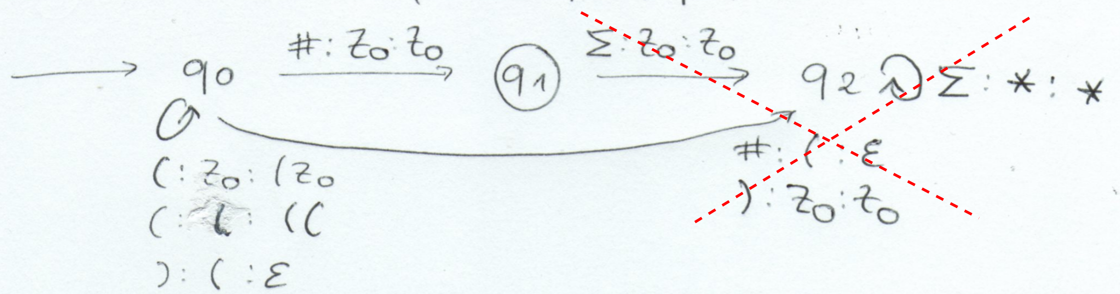
↯ $a^m b^q b^{n^2-n}$ Wort kaputt, denn $q \neq m \neq n^2-n$ mögl.

Fall 1/3.: Nicht kontextfrei, weil es keine Grammatik gibt, die eine bel. hohe Anzahl von Buchstaben ~~nicht~~ zählen kann.

↯ Gründe: Ohne Wiederholung eines Terminals kann man nicht beliebig viele Buchstaben darstellen. Mit Wiederholung ist das mögl; aber nach Pumping-lemma ist vwx zwangsl. $\in b^*$ bzw. a^*. Wort kaputt, denn b^p oder a^p; $p \neq n$ oder n^2.

Aufgabe 33:

(a) DPDA : $A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, z_0, \delta, F)$



$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ $F = \{q_1\}$ $\Sigma = \{), (, \# \}$ $\Gamma = \{z_0, (\}$

δ mit folgenden Transitionen:

$(q_0, (, z_0, (z_0, q_0)$

$(q_0, (, (, ((, q_0)$

$(q_0,), (, \varepsilon, q_0)$

$(q_0, \#, z_0, z_0, q_1)$

$(q_0, \#, (, \varepsilon, q_2)$

$(q_0,), z_0, z_0, q_2)$

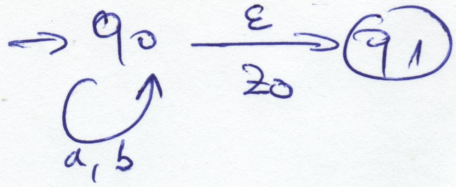
$(q_1, \Sigma, z_0, z_0, q_2)$

$(q_2, \Sigma, *, *, q_2)$

Der Automat zählt offene Klammern und verhält sich entsprechend bis zum Schlußzeichen. Der Automat akzeptiert, wenn alle Klammern geschlossen wurden.

Aufgabe 33

b)



PDA: $A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$

$Q = \{q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{Z_0, a, b\}$

$F = \{q_1\}$

Transitionen Δ

$(q_0, \varepsilon, Z_0, Z_0, q_1)$

(q_0, a, Z_0, aZ_0, q_0)

(q_0, b, Z_0, bZ_0, q_0)

$(q_0, a, b, \varepsilon, q_0)$

$(q_0, b, a, \varepsilon, q_0)$

(q_0, a, a, aa, q_0)

(q_0, b, b, bb, q_0)

✓

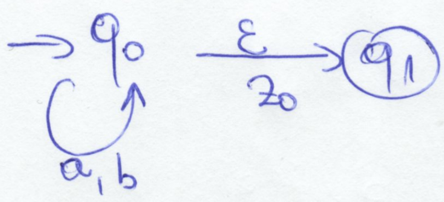
1. Stack leer: genauso viel a's wie b's
2. Stack nicht leer: Buchstaben, die mehr sind stehen auf dem Stack.

„Alternative Murielle"

c) PDA: $A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$. ⑤

$Q = \{q_0, q_1\}$ $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, Z_a, Z_{b/2}\}$

$F = \{q_1\}$



Transitionen Δ

$(q_0, \varepsilon, Z_0, Z_0, q_1)$

$(q_0, b, Z_0, Z_aZ_aZ_0, q_0)$

$(q_0, a, Z_a, \varepsilon, q_0)$

$(q_0, b, Z_a, Z_aZ_aZ_a, q_0)$

$(q_0, a, Z_0, Z_{b/2}Z_0, q_0)$

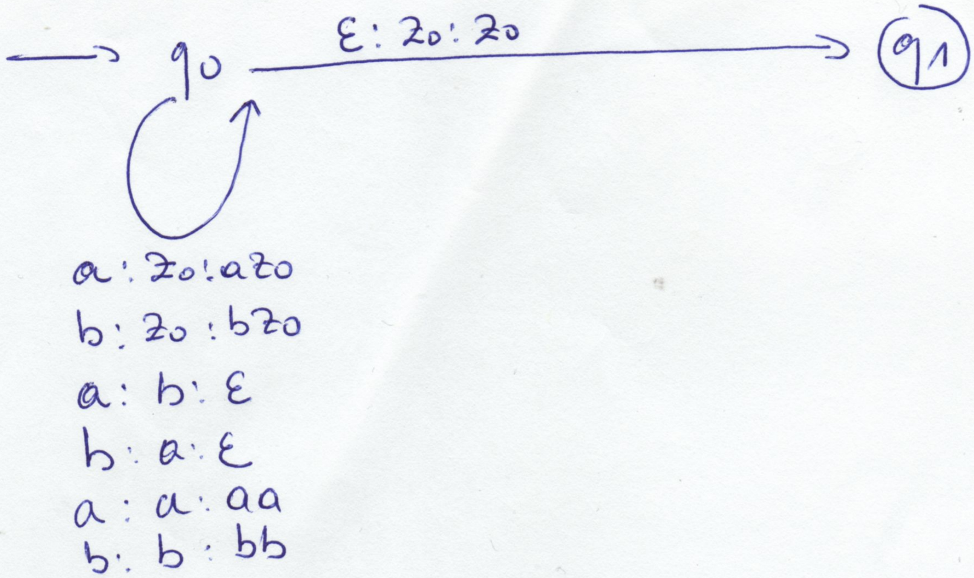
$(q_0, b, Z_{b/2}Z_0, Z_aZ_0, q_0)$

$(q_0, a, Z_{b/2}\cancel{Z_0}, Z_{b/2}Z_{b/2}, q_0)$

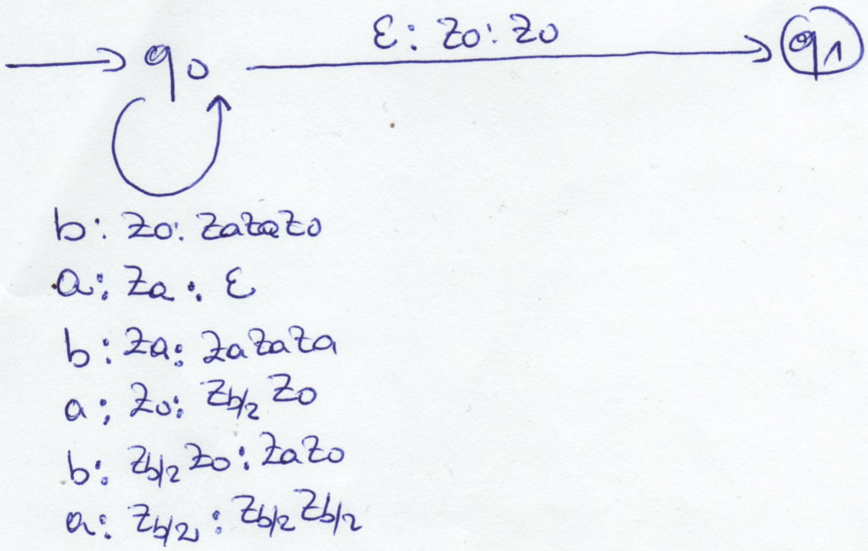
Immer was im Stack ist ausgleichen.

„Alternative Murielle"

b)

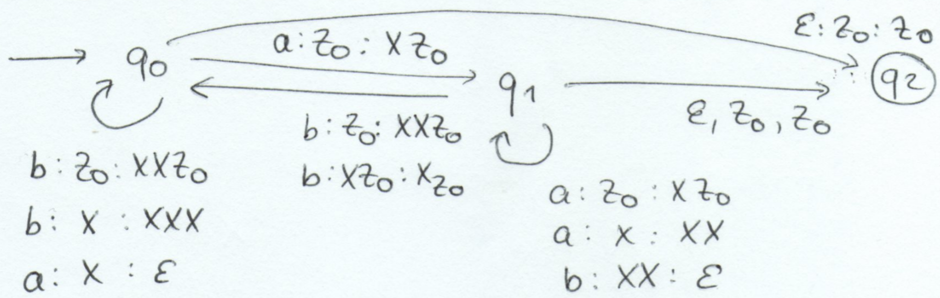


c)



„Alternative Murielle"

(c) PDA: $A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$



$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ $\Sigma = \{a, b\}$ $\Gamma = \{Z_0, X\}$ $F = \{q_2\}$

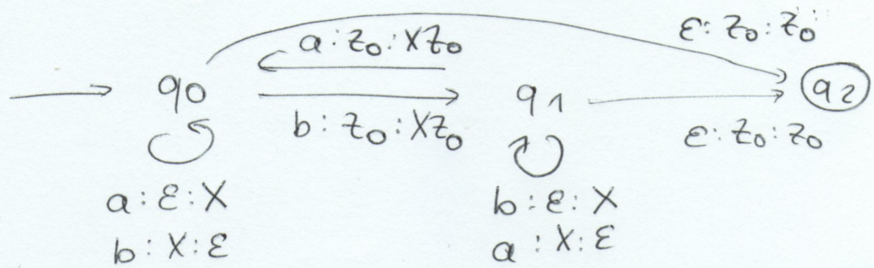
Δ mit folgenden Transitionen

$$(q_0, b, Z_0, XXZ_0, q_0)$$
$$(q_0, b, X, XXX, q_0)$$
$$(q_0, a, X, \varepsilon, q_0)$$
$$(q_0, \varepsilon, Z_0, Z_0, q_2)$$
$$(q_0, a, Z_0, XZ_0, q_1)$$
$$(q_1, b, Z_0, XXZ_0, q_0)$$
$$(q_1, b, XZ_0, XZ_0, q_0)$$
$$(q_1, a, Z_0, XZ_0, q_1)$$
$$(q_1, a, X, XX, q_1)$$
$$(q_1, b, XX, \varepsilon, q_1)$$
$$(q_1, \varepsilon, Z_0, Z_0, q_2)$$

Das Gleichgewicht zwischen #a's = 2#b's entspricht einem leeren Z_0-Stack. Entsprechend werden a's und b's behandelt und zum Schluß werden nur Wörter akzeptiert, bei denen Gleichgewicht herrscht.

c)

PDA : $A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$



$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ $\Sigma = \{a, b\}$ $\Gamma = \{Z_0, X\}$ $F = \{q_2\}$

Δ mit folgenden Transitionen:

$(q_0, a, \varepsilon, X, q_0)$
$(q_0, b, X, \varepsilon, q_0)$
$(q_0, \varepsilon, Z_0, Z_0, q_2)$
(q_0, b, Z_0, XZ_0, q_1)
(q_1, a, Z_0, XZ_0, q_0)
$(q_1, b, \varepsilon, X, q_1)$
$(q_1, a, X, \varepsilon, q_1)$
$(q_1, \varepsilon, Z_0, Z_0, q_2)$

Das Gleichgewicht zw. $\#a = \#b$ entspricht einem leeren Z_0-Stack. Entspr. werden a's und b's behandelt und zum Schluß werden nur Wörter akzeptiert, bei denen Gleichgewicht herrscht.

Aufgabe 34:

PDA: $C = (Q_C, \Sigma, \Gamma_C, q_0^c, z_0^c, \Delta_C, F_C)$
soll nach Aufgaben akzeptieren, wenn A und B es beide tun.

$Q_C = Q_A \times Q_B$

$= \{ q_{00} \quad \ldots \quad q_{ij} \}$;

; i, j jeweils die Zustände von Q_A und Q_B durchlaufen. $i \hat{=} A$, $j \hat{=} B$

$\Sigma = \Sigma \quad \Gamma = \Gamma_A \quad q_0^C = q_{00} \quad z_0^C = z_0^A$

$F_C = \{$ ~~alle~~ $q_{ij} \mid$, ~~für die~~ $q_i \in Z_A$ und $q_j \in Z_B \}$

Transitionen ΔC:

- Alle Zustände q_{ij} müssen betrachtet werden.
- Alle Buchstaben müssen auf Folgemöglichkeit geprüft werden $\forall q_{ij}$. D.h. es muß in beiden A und B eine weiterführende Transition zu q_{xy} geben. ε sehe ich hier wie einen Buchstabe verarbeitet.
- Suchen wir uns also ein q_{ij} an, für das es q_{xy} gibt mit $q_i \xrightarrow{\omega} q_x$ und $q_j \xrightarrow{\omega} q_y$ für die Buchstaben $\in \Sigma$, dann muß es zur jeder Stack-Herunterhol-Bedingung dafür entspr. viele Transitionen der Art:

(q_{ij}, aktuelle Buchstabe, $\forall$ Stack-Herunterhol-Bedingung, Stack-Folge-wert, q_{xy})

geben.