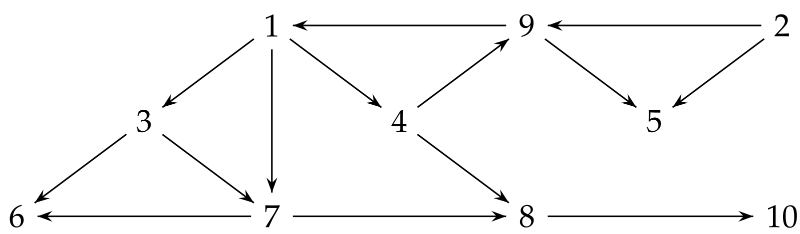
Lehrstuhl für Informatik 7 · RWTH Aachen
Dr. C. Löding · Dipl.-Inform. W. Fridman · Dipl.-Inform. S. Schulz

Automaten, Sprachen, Komplexität – SS 2011

Übungsblatt 5 — 16.05.2011

Aufgabe 16 — *3 Punkte*

Wir betrachten den folgenden Graphen:



Führen Sie die Breitensuche von Knoten 1 aus wie in der Vorlesung beschrieben durch. Geben Sie dazu die Reihenfolge an, in der die Knoten besucht worden sind, und geben Sie die Schlangeninhalte an, jeweils neu notiert, wenn ein Element eingefügt wird. Zeichnen Sie den Graphen neu nur mit den Kanten, die in dem Verfahren „benutzt" worden sind (die Kanten, die zu einem Knoten führen, der noch nicht markiert war).

Aufgabe 17 — *6 Punkte*

Überprüfen Sie anhand der in der Vorlesung vorgestellten Definition die Korrektheit der Aussage „$f(n)$ ist $\mathcal{O}(g(n))$" für die folgenden Funktionen f und g. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $f(n) = 42$ und $g(n) = 2$

(b) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ und $g(n) = n^2$

(c) $f(n) = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n^3 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ und $g(n) = n^2$

(d) $f(n) = \begin{cases} 2^n & \text{für } 0 \leq n \leq 100, \\ 2n & \text{für } n > 100 \end{cases}$ und $g(n) = n$

(e) $f(n) = \sqrt{n^3}$ und $g(n) = n \log n$

(f) $f(n) = n^2 + \sqrt{n}$ und $g(n) = n^2$

Aufgabe 18 *4 Punkte*

Es seien zwei DEA $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ (Prozesse) und zwei NEA $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ (Spezifikationen) gegeben. Es soll getestet werden, ob alle Aktionenfolgen, die $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ beide erfolgreich durchführen können, durch einen der beiden NEAs „bestätigt" werden. Formal ist also zu testen:

$$L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) \subseteq L(\mathcal{B}_1) \cup L(\mathcal{B}_2)$$

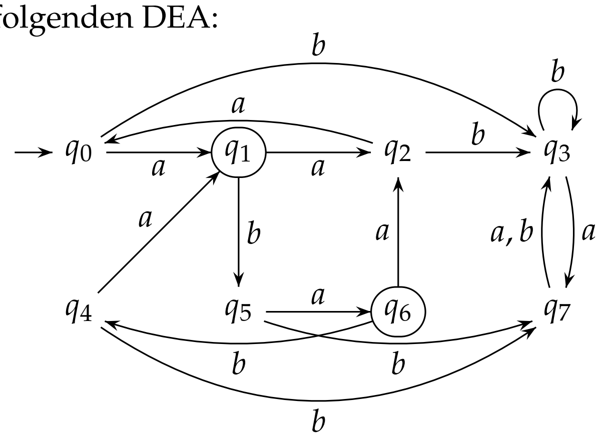
Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass alle vier Automaten n Zustände haben.

(a) Geben Sie mit Rückgriff auf die Konstruktionen der Vorlesung ein Verfahren an, das die oben angegebene Eigenschaft testet.

(b) Bestimmen Sie den Zeitaufwand für diesen Test (Wachstumsrate mit $\mathcal{O}$-Notation) in Abhängigkeit von n.

Aufgabe 19 *3 Punkte*

Wir betrachten den folgenden DEA:



Geben Sie jeweils ein trennendes Wort für die folgenden Zustandspaare an:

(a) q_3 und q_6

(b) q_2 und q_3

(c) q_7 und q_2

(d) q_0 und q_7

(e) q_5 und q_7

(f) q_3 und q_5

Die Aufgaben sind in Zweier- bis Dreiergruppen zu erarbeiten und abzugeben. Die Lösungen können bis nächsten Montag, 23.05.2011, 08:15 Uhr im L^{2}P oder in der Vorlesung abgegeben, oder in den Übungskasten am Lehrstuhl eingeworfen werden.

Aufgabe 16

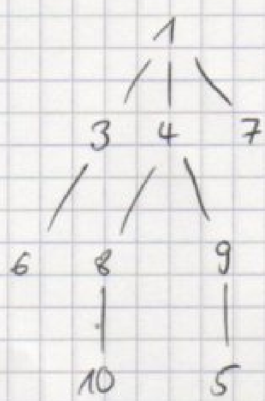
markierte Knoten : 1
Schlange S : 1

markierte Knoten : 1, 3, 4, 7
Schlange S : 3, 4, 7

markierte Knoten : 1, 3, 4, 7, 6, 8, 9
Schlange S : 6, 8, 9

markierte Knoten : 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 5
Schlange S : 10, 5

markierte Knoten : 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Schlange S :



Aufgabe 17

„$f(n)$ ist $O(g(n))$"

$$\Leftrightarrow \bigvee_{c\in\mathbb{R}} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{\mathbb{N}\ni n>n_0} : f(n) \leq g(n)$$

(a)

mit $c=50 \wedge n_0 = 0$: $\left\{ f(n) \leq c\cdot g(n) \Leftrightarrow 42 \leq 100 \quad ; \bigwedge_n \right\}$ (W)

(b) $\quad f(n) \leq c\cdot g(n)$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i \leq c\cdot n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} \leq c\cdot n^2 \qquad ; n_0 \text{ gesetzt } > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2} \leq n\cdot c$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \leq n\cdot c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq n\left(c - \frac{1}{2}\right) \qquad ; \text{wähle } c = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq n \qquad \text{für alle } n \geq n_0 = 1 \qquad \text{(W)}$$

(c) $\quad f(n) = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^3 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad ; n_0 \text{ gesetzt} > 0$

; betrachtet im folgendem nur ungerade n

$$n^3 \overset{!}{\leq} c\cdot n^2 \Leftrightarrow n \leq c$$

Ein n_0 muß es geben, ab dem alle n auch stimmen.
Dann darf n_0 auch gegen $\to \infty$ laufen.

$$n_0 \to \infty \leq n \to \infty \leq c \neq \infty \qquad \text{(W)}$$

(d) $f(n) = \begin{cases} 2^n & \text{für } 0 \leq n \leq 100 \\ 2 \cdot n & \text{für } n > 100 \end{cases}$ ③

; n_0 gesetzt > 100

$f(n) = 2 \cdot n$

$2n \leq c \cdot n$ für alle $n \geq n_0 > 100$ mit $c \geq 2$ ✓

(e) $f(n) = \sqrt{n^3} = \sqrt{n}\sqrt{n}\sqrt{n}$

$g(n) = n \cdot \log n = \sqrt{n}\sqrt{n} \cdot \log n$

$f(n) \leq c \cdot g(n)$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} \leq c \cdot \log n$

$\Leftrightarrow e^{\sqrt{n}} \leq c' \cdot n$ ~~; $z = n^2$~~

~~$\Leftrightarrow e^{n} \leq c' \cdot n^2$~~

e^n und n^2 sind streng monoton wachsend

und die exp-Funktion wächst schneller als ~~alles~~ andere

$\Rightarrow$ Für jedes c' gibt es genau ein n_0, ab dem jedes

weitere n obige Gleichung erfüllt. ✗

(f) ; gesetzt $n_0 > 0$

$\sqrt{n} < n^2$ für alle $n \geq n_0 > 0$

$\Rightarrow n^2 + \sqrt{n} \leq 2n^2$ für alle $n \geq n_0 > 0$

$f(n) \leq c \cdot g(n)$ mit c gewählt 2

$\Leftrightarrow f(n) \leq 2n^2 \leq c \cdot n^2 = 2 \cdot n^2$ (W) für $c = 2$ und ein $n_0 > 0$.

✓

Aufgabe 18

(4)

(a)

I. NEA en → DEA en umwandeln D.h. $B_1 \to B_1'$, ~~x~~ $B_2 \to B_2'$

II. $L(A') = L(A_1) \cap L(A_2)$ Produktautomat Endzustände = AND

III. $L(B') = L(B_1') \cup L(B_2')$ Produktautomat Endzustände = OR

IV. $L(A') \subseteq L(B')$

gdw.

$L(A') \setminus L(B') = \emptyset$

gdw.

$L(A') \cap (\overbrace{\Sigma^* \setminus L(B')}^{:= B''})$ B'' mit Endzuständen INVERS

V. $L(A') \cap L(B'')$ Produktautomat Endzustände = AND

(b) Anfangsautomaten haben alle n-Zustände

I. max. $2^n + 2^n = 2^{n+1}$

II. max n^2

III. max $2^n \times 2^n = 2^{2n}$

IV. max $1 \cdot (2^n \times 2^n) = 2^{2n}$

V. max $n^2 \times (2^n \times 2^n) = n^2 \cdot 2^{(2n)}$

zusammen: $2^{n+1} + n^2 + 2^{2n} \cdot 2 + n^2 \cdot 4^n$

$= 2^{n+1} + n^2 + 2^{(2n+1)} + n^2 \cdot 4^n$

$= 2^{n+1} + n^2 + 4^n \cdot 2 + n^2 \cdot 4^n$

$= O(2^n)$ ✓

Aufgabe 19

(a) aaa

(b) aa

(c) aa

(d) a und auch aaa

(e) a

(f) a