

Automaten, Sprachen, Komplexität – SS 2011

Übungsblatt 2

18.04.2011

Aufgabe 4

4+2 Punkte

Wir betrachten die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt nicht mit } ab\}$;
 - $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet mit } ab\}$.
- (a) Geben Sie (durch Transitionsgraphen) zwei DEA $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ an, die L_1 bzw. L_2 erkennen. Bilden Sie dann den Produktautomaten $\mathcal{A}$ von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, wieder in graphischer Darstellung, so dass $L(\mathcal{A}) = L_1 \cap L_2$.
- (b) Vereinfachen Sie den Transitionsgraphen von $\mathcal{A}$ zu einem DEA $\mathcal{A}'$ mit nur 6 Zuständen, so dass $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$.

Aufgabe 5

1+3 Punkte

Seien $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, q_0^1, \delta_1, F_1)$, $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, q_0^2, \delta_2, F_2)$ zwei DEA über dem Alphabet Σ und sei $\# \notin \Sigma$ ein zusätzliches Symbol.

- (a) Geben Sie an, wie man aus $\mathcal{A}_1$ einen DEA $\mathcal{A}'_1$ konstruieren kann, der die selbe Sprache erkennt, aber über dem erweiterten Alphabet $\Sigma \cup \{\#\}$ arbeitet.
- (b) Geben Sie an, wie man aus $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen DEA $\mathcal{B}$ konstruieren kann, welcher deren Konkatenation mit Trennsymbol $\#$ erkennt:

$$L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A}_1) \cdot \{\#\} \cdot L(\mathcal{A}_2) = \left\{ u\#v \mid u \in L(\mathcal{A}_1) \text{ und } v \in L(\mathcal{A}_2) \right\}.$$

Aufgabe 6

2+2+2 Punkte

Seien $L, K \subseteq \Sigma^*$ Sprachen. Widerlegen Sie die allgemeine Gültigkeit der folgenden Gleichungen:

- (a) $K \cdot L = L \cdot K$
- (b) $(K \cup L)^* = K^* \cup L^*$
- (c) $K \cdot (L_1 \cap L_2) = K \cdot L_1 \cap K \cdot L_2$

Geben Sie hierzu jeweils (möglichst kleine) Beispielsprachen und ein Wort an, das zu einer Seite gehört, aber nicht zur anderen, und begründen Sie Ihre Behauptungen. Lässt sich jeweils wenigstens eine Inklusion ($\subseteq$ oder $\supseteq$) behaupten? Begründen Sie auch hier Ihre Antwort.

Aufgabe 7

4 Punkte

In der Vorlesung wurde ein DEA vorgestellt, der alle durch 3 teilbaren Zahlen (in Dezimaldarstellung) akzeptiert. Geben Sie nun einen DEA über dem Alphabet $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ an, der genau die durch 3 teilbaren Binärzahlen akzeptiert, wobei die Zahlen so kodiert sind, dass das Bit mit der kleinsten Stelligkeit links steht.

Beispiel: $1101 \hat{=} 13$ ist nicht in der Sprache, $011 \hat{=} 6$ ist in der Sprache.

Hinweis: Beachten Sie, dass eine Zahl durch 3 teilbar ist, wenn jedes Bit der Eingabe durch Addition von drei identischen Bits und einem eventuellen Übertrag entsteht.

Die Aufgaben sind in Zweier- bis Dreiergruppen zu erarbeiten und abzugeben. Die Lösungen können bis nächsten Montag, 02.05.2011, 08:15 Uhr im L²P oder in der Vorlesung abgegeben, oder in den Übungskasten am Lehrstuhl eingeworfen werden.

Aufgabe 4:

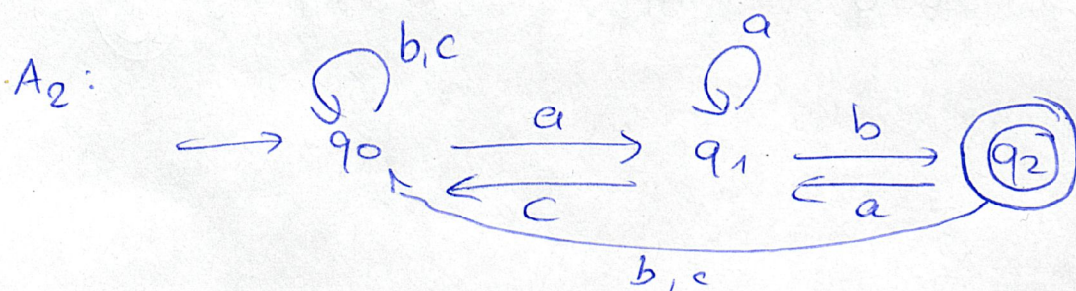
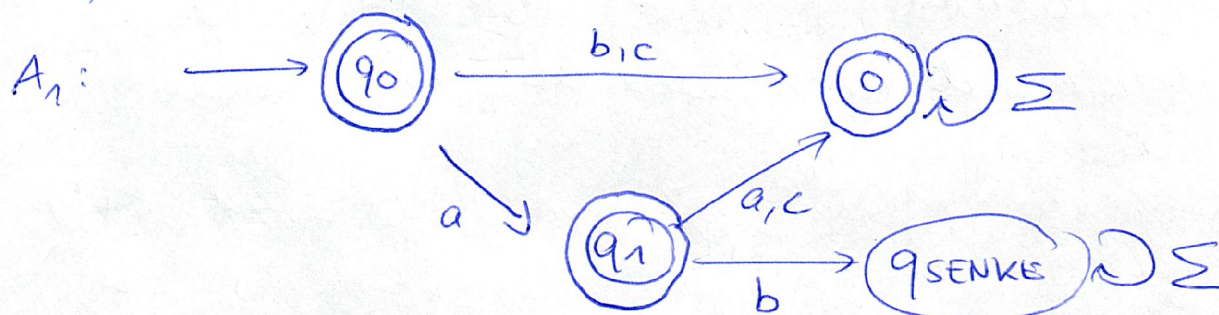
①

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

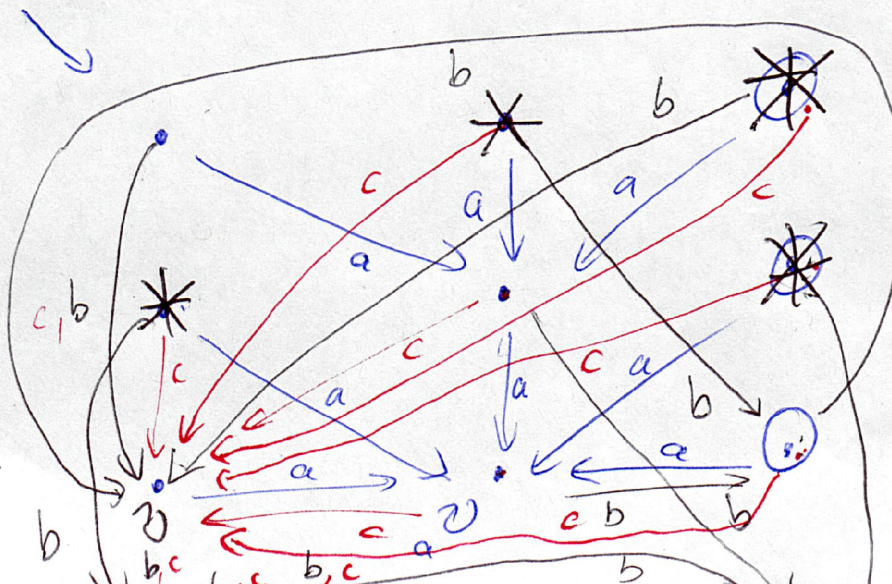
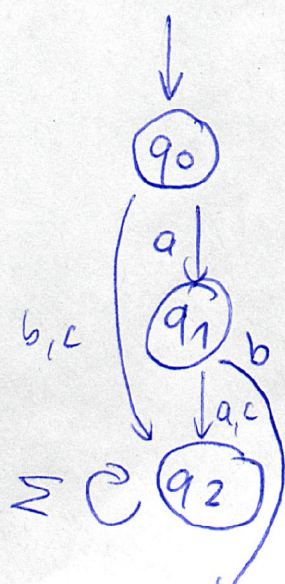
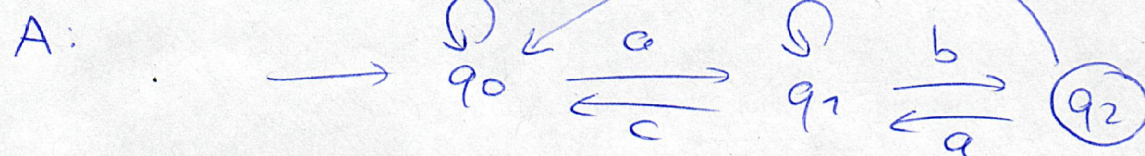
$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt nicht mit } ab\}$$

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet mit } ab\}$$

(a)



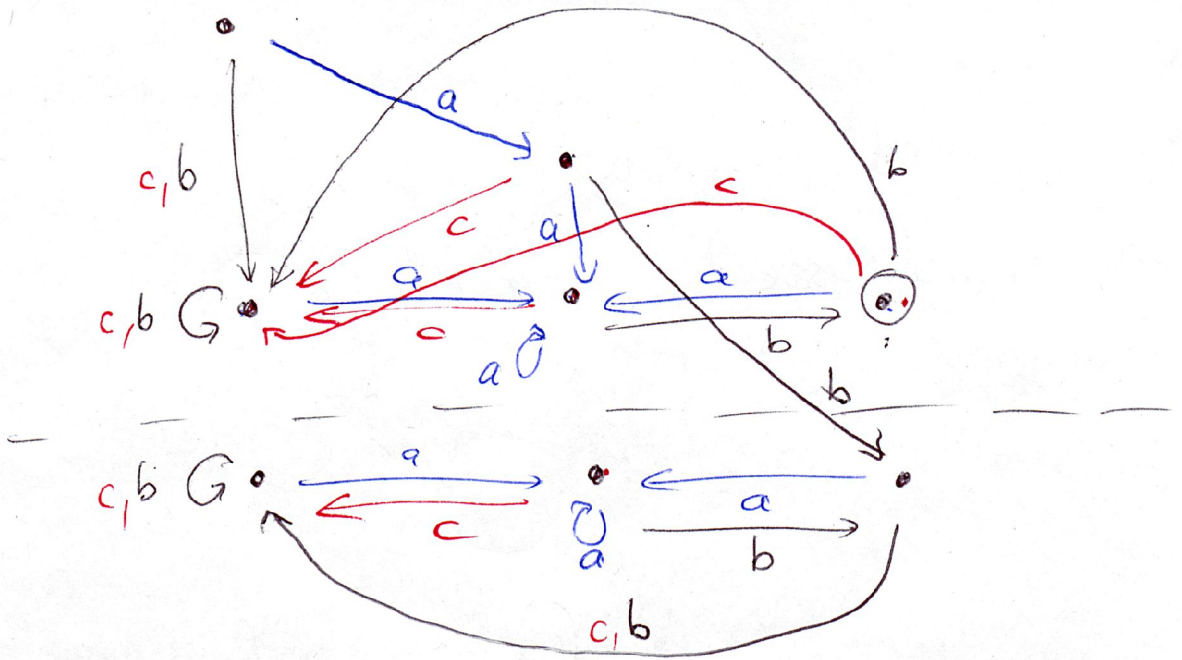
$L_1 \cap L_2$



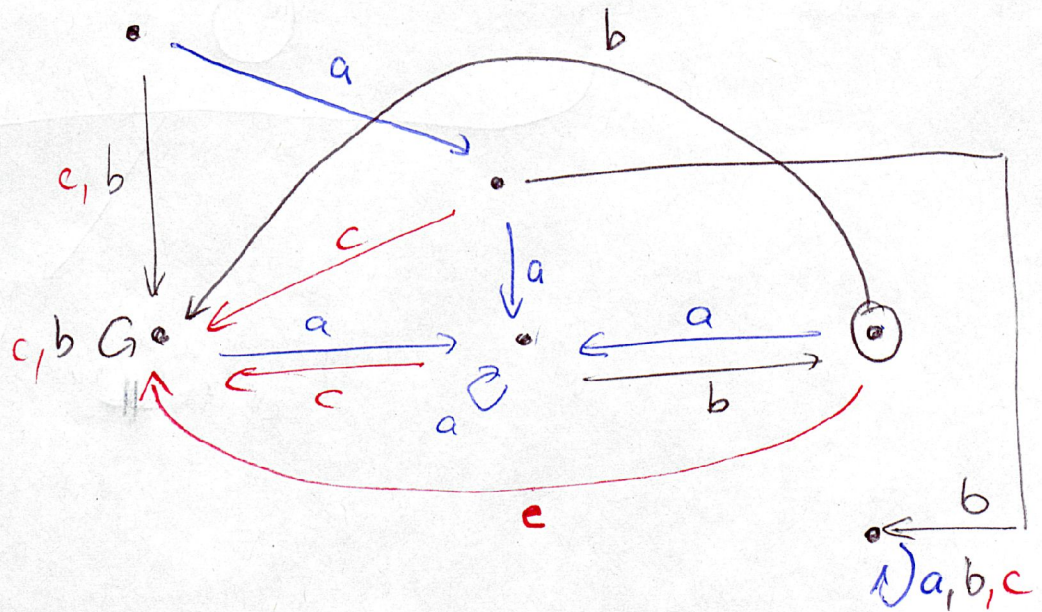
(b)

2

1. ELEMENTIEREN NICHT ERREICBARER ZUSTÄNDE



2. ZUSAMMENFASSUNG ZU EINER SENKE



Aufgabe 5:

$$\text{DEA } A_1 = (Q_1, \Sigma, q_0^1, \delta_1, F_1)$$

$$\text{DEA } A_2 = (Q_2, \Sigma, q_0^2, \delta_2, F_2)$$

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$$

(a) $A_1' = (Q_1, \Sigma', q_0^1, \delta_1, F_1)$ 

(b)

$$\text{DEA } B = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_{\text{SENKE}}\}, \Sigma', q_0^1, \delta', F_2)$$

δ' beibehalten alle bisherigen Transitionen und:

Ab jedem Zustand aus $Q_1 \cup Q_2$, der weder in F_1 noch in F_2 ist, kommt eine Transition in q_{SENKE} für das Zeichen $\#$ dazu. Bei jeder Eingabe wird in q_{SENKE} verblieben.

Alle Zustände F_1 wird mit $\#$ in q_0^2 übergegangen.

Für alle verbliebenen Zuständen F_2 gilt auch, kommt ein weiteres $\#$ wird in q_{SENKE} übergegangen.



Aufgabe 6:

- (a) Gegenbeispiel mit $\Sigma = \{0, 1\}^*$ gewählt und $L = \{01\}$ und $K = \{10\}$ gewählt:

$$K \cdot L = 1001$$

$$L \cdot K = 0110 \quad \checkmark$$

- (b) Gegenbeispiel mit $\Sigma = \{0, 1\}^*$ gewählt und $L = \{01\}$ und $K = \{10\}$ gewählt:

$$\{0110\} \in (K \cup L)^*$$

$$\{0110\} \notin K^*$$

$$\{0110\} \notin L^*$$

$$\{0110\} \notin K^* \cup L^* \quad \checkmark$$

- (c) Für mein Dafürhalten stimmt hier die Aussage.

Wenn ich an alle Wörter der Sprachen L_1 und L_2 K davorsetze ist die Schnittmenge gleich nur mit einem K vor jedem Wort. 

- (a) Gegenbeispiel oben $\Rightarrow \neq$ und $\supset$. 



- (b) $(K \cup L)^* \supset K^* \cup L^*$, weil Wörter zusammengesetzt nur aus Wörtern aus K bzw. L alle in der Menge sind der Wörter, die aus beiden K und L zusammengesetzt sind 

Aufgabe 7:

Eine Binärzahl ist teilbar durch drei, wenn die alternierende Quersumme durch drei teilbar ist. Die Binärzahl wird dazu von links nach rechts gelesen und die erste Ziffer addiert und danach abwechselnd abgezogen und addiert. $\Sigma \stackrel{!}{=} 0$ und ist teilbar durch drei.

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \\ \hline = -2 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \\ \hline = -1 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \\ \hline = 0 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \\ \hline = +1 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \\ \hline = +2 \end{matrix}}$$

