26.05.11

TI : Übung 7

Aufg. 1

$Y = HX + Z$

H 4×3-Matrix ⇒ 3 Sende- und 4-Empfangsantennen

T. 4.6.3

$$C = \sum_{i=1}^{t} \left[\log \left(\frac{v \cdot \lambda_i}{\sigma^2} \right) \right]^+$$

a)

$$H^*H = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & \cancel{2}i & -1-i \\ 0 & 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 2-i & -1-i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$H^*H \cdot X_i = \lambda_i X_i$$

Eigenwerte: NS des char. Polynoms

$$\det(H^*H - \lambda \cdot I) = (10-\lambda)(5-\lambda)(11-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 10, \quad \lambda_3 = 11$$

Waterfilling: (zur Bestimmung von v)

$$\sum_{\lambda_i > 0} \left(v - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \right)^+ = L$$

26.05.11

$$\left(\nu - \frac{110}{5}\right)^+ + \left(\nu - \frac{110}{10}\right)^+ + \left(\nu - \frac{110}{11}\right)^+ \overset{!}{=} L$$

$$\Leftrightarrow \left(\nu - 22\right)^+ + \left(\nu - 11\right)^+ + \left(\nu - 10\right)^+ \overset{!}{=} 32$$

$\rightarrow$ Lösung durch „scharfes Hinsehen", dann Probe

$\hookrightarrow \nu = 25$

Kapazität: $C = \sum_{i=1}^{3} \left(\ln \frac{\nu \cdot \lambda_i}{\sigma^2}\right)^+$

$$= \left(l\left(\frac{25 \cdot 5}{110}\right)\right)^+ + \left(l\left(\frac{25 \cdot 10}{110}\right)\right)^+ + \left(l\left(\frac{25 \cdot 11}{110}\right)\right)^+$$

$$= l\left(\frac{3125}{484}\right) \approx 1{,}865$$

b) Kapazität wird angenommen, falls $X \sim SCN(0, Q)$

mit $Q = U \cdot \operatorname{diag}\left(\underbrace{\left(\nu - \frac{\sigma^2}{\lambda_i}\right)^+}_{\text{bekannt aus a)}}\right) U^*$

Spalten von U sind Lösungen von GS:

$H^* H \cdot \underline{u}^{(i)} = \lambda_i \underline{u}^{(i)}$

$\underline{\lambda_1 = 5}$

$$\left.\begin{array}{rcl} 8u_1 + 3 \cdot u_3 &=& 5 \cdot u_1 \\ 10u_2 &=& 5u_2 \\ 3u_1 + 8u_3 &=& 5u_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = -u_3 \,;\, u_2 = 0 \\ \text{sei: } u_1 = 1 \,;\, u_3 = -1 \end{array}$$

normiert: $\underline{u}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 10}$

$$\left.\begin{array}{rcl} 8u_1 + 3u_3 &=& 10u_1 \\ 10u_2 &=& 10u_2 \\ 3u_2 + 8u_3 &=& 10u_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_3 = \frac{2}{3}u_1 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = \frac{3}{2}u_1 \end{array} \Rightarrow u_3 = u_1 = 0$$

26.05.11

normiert: $\underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 11$

normiert: $\underline{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = U \cdot \operatorname{diag}\left(\left(v - \frac{\sigma^2}{\lambda_i}\right)^+\right) \cdot U^*$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 14 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufg. 2

$$\det(I_m + A \cdot B) = \det(I_n + B \cdot A)$$

Hinweis: $H = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$

$$\det(H) = \det(C) \cdot \det(F - E C^{-1} D)$$

$$\det(I_m + A \cdot B) = \det(I_m + AB) \cdot \underbrace{\det(I_n)}_{=1}$$

$$= \det(\underbrace{I_m + A \cdot B}_{C}) \cdot \det(\underbrace{I_n}_{F} - \underbrace{(-B)}_{E} \underbrace{(I_m + AB)^{-1}}_{C^{-1}} \underbrace{0}_{D})$$

$$= \det \begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$

26.05.11

$$= \det\left(\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{\det\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}}_{=1} \cdot \det\begin{pmatrix} I_n & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} I_n & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$

$$\det(I_n + B\cdot A) = \underbrace{\det(I_n)}_{=1} \cdot \det(I_n + B \cdot A)$$

$$= \det(\underbrace{I_n}_{C}) \cdot \det(\underbrace{I_n + B\cdot A}_{F} - \underbrace{0}_{C} \cdot \underbrace{I_n^{-1}}_{C^{-1}} \cdot \underbrace{A}_{D})$$

$$= \det\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n + B\cdot A \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{\det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}}_{=1} \cdot \det\begin{pmatrix} I_n & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} I_n & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n + AB) \quad \square$$