30.06.11

II: Lösung 9

Aufg. 1

x_1 : Anzahl der Standardprozessoren

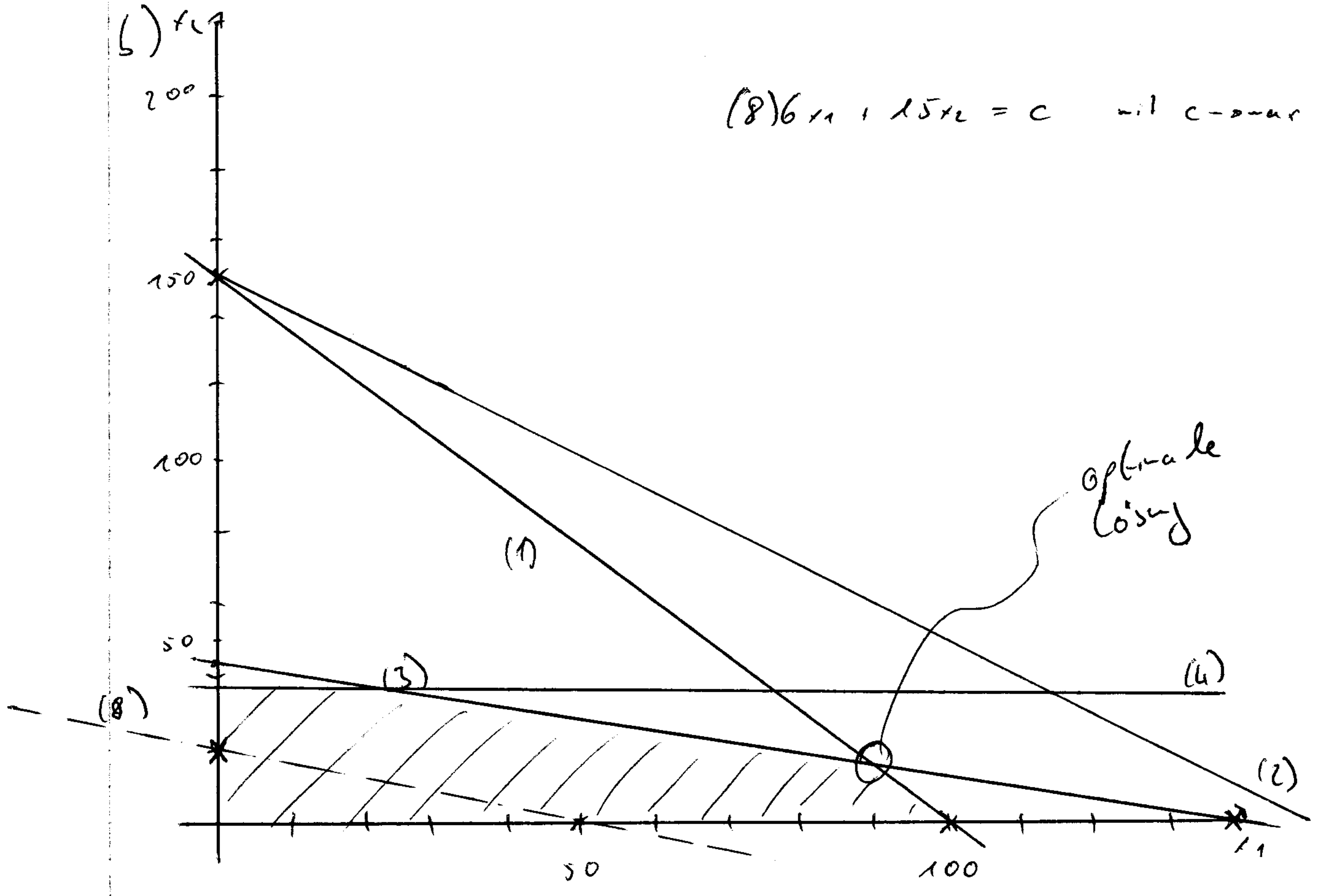
a) x_2 : — " — Spezialprozessoren

$$\max \quad 6x_1 + 15x_2 \quad \text{(Gewinn)}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{s.d.} \quad 40x_1 + 26\tfrac{2}{3}\, x_2 \le 4000 & \text{Leistungsaufnahme} & (1) \\
x_1 + x_2 \le 150 & \text{Steckplätze} & (2) \\
450x_1 + 1500x_2 \le 63000 & \text{Budget} & (3) \\
x_2 \le 35 & \text{Lieferengpass} & (4) \\
x_1 \ge 0 & & (5) \\
x_2 \ge 0 & & (6) \\
x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 & & (7)
\end{array}$$

b)

(8) $6x_1 + 15x_2 = c$ mit $c \to \max$



$\Rightarrow$ optimale Lösung im Schnittpunkt von

$$450 x_1 + 1500 x_2 = 63000 \text{ und } 40 x_1 + 26\tfrac{2}{3} x_2 = 4000$$

$\Leftrightarrow$ $x_2 = 42 - 0{,}3 x_1$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 150 - 3/2\, x_1$

$$42 - 0{,}3 x_1 = 150 - 2/3\, x_1$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 90$

$\hookrightarrow$ $x_2 = 15$

c) $6 \cdot 90 + 15 \cdot 15 = 765$ GFLOPS

d) Kosten: $450 \cdot 90 + 1500 \cdot 15 = 63000$ €

<u>Aufg. 2</u>

$$P_n = \left\{ \underline{x} = (p_1, \dots, p_n) \mid p_i \geq 0 \; \forall i, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

z.z.: P_n ist konvex

Eine Menge M ist konvex, wenn für jedes $x, y \in M$ und jedes $\alpha \in [0,1]$ gilt:

$$\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y \in M$$

Für jedes $\underline{x}, y \in P_n$ und jedes α mit $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt:

$$\underline{z} = \alpha \underline{x} + (1-\alpha) y \in P_n$$

Es muss gelten: 1) $z_i \geq 0 \; \forall i$

2) $\sum_{i=0}^{n} z_i = 1$

1) $z_i = \alpha \cdot x_i + (1-\alpha) \cdot y_i \geq 0$

da $x_i, y_i \geq 0 \; \forall i$

2) $\sum_{i=0}^{n} z_i = \sum_{i=0}^{n} \alpha x_i + (1-\alpha) \cdot y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} y_i$

$= \alpha + 1 - \alpha = 1$ ■

30.06.11

Aufg. 3

$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_4 \leq 5,\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 3,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,\ x_1 \geq 0\}$

$\underline{z} = \alpha \underline{x} + (1-\alpha)\underline{y}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\underline{x}, \underline{y} \in M_1$

$$2z_1 + 3z_4 = 2(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1) + 3(\alpha x_4 + (1-\alpha)y_4)$$
$$= \alpha(\underbrace{2x_1 + 3x_4}_{\leq 5}) + (1-\alpha)(\underbrace{2y_1 + 3y_4}_{\leq 5})$$
$$\leq 5\alpha + 5(1-\alpha) = 5$$

$$-2z_1 + 5z_2 - z_3 + 4z_4 =$$
$$-2(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1) + 5(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2)$$
$$-(\alpha x_3 + (1-\alpha)y_3) + 4(\alpha x_4 + (1-\alpha)y_4)$$
$$= \alpha(\underbrace{-2x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4}_{\leq 3}) + (1-\alpha)(\underbrace{-2y_1 + 5y_2 - y_3 + 4y_4}_{\leq 3})$$
$$\leq \alpha \cdot 3 + (1-\alpha) \cdot 3 = 3$$

[...]

$\Rightarrow$ ist konvex

$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \leq c,\ a_i > 0,\ c > 0\}$

$\underline{z} = \alpha \underline{x} + (1-\alpha)\underline{y}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\underline{x}, \underline{y} \in M_2$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha x_i + (1-\alpha)y_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha^2 x_i^2 + (1-\alpha)^2 y_i^2 + 2\alpha x_i(1-\alpha)y_i)$$

$$= \alpha^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2}_{\leq c} + (1-\alpha)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2}_{\leq c} + 2\alpha(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$$

$$= \alpha^2 c + (1-\alpha)^2 c + (2\alpha - 2\alpha^2)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}x \cdot \sqrt{a_i}y_i}^{\,2}$$

30.06.11

Cauchy-Schwarz

$$\leq \alpha^2 c + (1-\alpha)^2 c + (2\alpha - 2\alpha^2) \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2}}_{\leq \sqrt{c}} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i y_i^2}}_{\leq \sqrt{c}}$$

$$\leq \alpha^2 c + (1-\alpha)^2 c + (2\alpha - 2\alpha^2) c$$

$$= \alpha^2 c + (1 - 2\alpha + \alpha^2) c + (2\alpha - 2\alpha^2) c$$

$$= c$$