09.06.11

IT: Übung 8

Aufg. 1

Transinformation

$$I(\underline{x};\underline{y}) = H(\underline{y}) - H(\underline{y}|\underline{x})$$
$$= H(\underline{y}) - H(\underline{z})$$

$H(\underline{z}) = \log \det(\pi \cdot e \cdot \Sigma_z)$

$\Rightarrow$ maximiere $H(\underline{y})$ über alle Eingangsverteilungen mit $E[\underline{x}^* x] \leq L$

$$E[(\underline{x}-E(\underline{x}))^*(\underline{x}-E(\underline{x}))] = E[\underline{x}^*\underline{x}] - (E[\underline{x}])^*(E[\underline{x}])$$
$$\leq E[\underline{x}^* x]$$

$\Rightarrow$ man kann ZVs mit $E[\underline{x}] = \underline{0}$ nehmen

$\Rightarrow E[\underline{y}] = E[H\underline{x} + \underline{z}] = \underline{0}$

$$\Sigma_y = E[\underline{y}\underline{y}^*] = E[(H\underline{x}+\underline{z})(H\underline{x}+\underline{z})^*]$$
$$= H E[\underline{x}\underline{x}^*] H^* + \Sigma_z$$
$$= H \Sigma_x H^* + \Sigma_z$$

mit Prop. 4.6.2

$$H(\underline{y}) \leq \log \det(\pi e\, \Sigma_y) = \log \det(\pi e (H \Sigma_x H^* + \Sigma_z))$$

$$\Rightarrow I(\underline{y};\underline{x}) \leq \log \det(\pi e (H\Sigma_x H^* + \Sigma_z)) - \log \det(\pi e \Sigma_z)$$
$$= \log \det(I_n + H \Sigma_x H^* \Sigma_z^{-1})$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\underline{y} \sim SCN(\underline{0}, \Sigma_y)$

Dies gilt genau dann, wenn $\underline{x} \sim SCN(\underline{0}, \Sigma_x)$

09.06.11

$$\max_{E(\underline{x}^*\underline{x}) \le L} I(\underline{y};\underline{x}) = \max_{tr(\Sigma_x)\le L} \log\det(I_n + H\Sigma_x H^* \Sigma_z^{-1})$$

$\det(I+AB)$
$= \det(I+BA)$

$$= \max_{tr(\Sigma_x)\le L} \log\det(I_n + \Sigma_x H^* \Sigma_z^{-1} H)$$

$$= \max_{(tr\Sigma_x)\le L} \log\det(I_n + \Sigma_x U \operatorname{diag}(\gamma_1,\dots,\gamma_n) U^*)$$

$$H^*\Sigma_z^{-1}H = U \overbrace{\operatorname{diag}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)}^{\Gamma} U^*$$

U: unitär

γ_k: EW von $H^*\Sigma_z^{-1}H$

$$= \max_{tr(\Sigma_x)\le L} \log\det(I_n + \Sigma_x U\Gamma U^*)$$

$$= \max_{tr(\Sigma_x)\le L} \log\det(I_n + \Gamma^{1/2}\underbrace{U^*\Sigma_x U}_{A}\Gamma^{1/2})$$

$$= \max_{tr(A)\le L} \log\det(I_n + \Gamma^{1/2} A \Gamma^{1/2})$$

$$\le \max_{\sum_{k=1}^{n} a_{kk}\le L} \sum_{k=1}^{n} \log(1 + a_{kk}\gamma_k) \qquad (2)$$

Hardamann-Ungl.

mit Gleichheit erfüllt, wenn
$$A = U^*\Sigma_x U$$
diagonal ist

Max. kann mit Hilfe des Waterfillings bestimmt werden und ist dann geg. durch

$$a_{kk} = \begin{cases} (\nu - \frac{1}{\gamma_k})^+ & \text{für } \gamma_k > 0 \\ 0 & \text{für } \gamma_k = 0 \end{cases}$$

mit v so, dass

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gamma_k > 0}}^{u} \left(v - \frac{1}{\gamma_k}\right)^+ = L \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ Kapazität geg. durch Einsetzen von (1) in (2)
Kapazitätserreichende Eingangsverteilung

$$\underline{X} \sim SCN(\underline{0}, U \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{mm}) U^*)$$

<u>Aufg. 2</u>

a) $I(\underline{Y}; \cancel{X} | H) = I(\underline{Y}, H; \underline{X}) - \underbrace{I(H; \underline{X})}_{=0,\ \text{da } H, \underline{X}\ \text{s.u.}}$

$$= I(\underline{Y}, H; \underline{X})$$

da Transinformation nicht neg. $\quad = I(H; \underline{X} | \underline{Y}) + I(\underline{Y}; \underline{X})$

$$\geq I(\underline{Y}; \underline{X})$$

b) wir nehmen an, $B = A + Z$, wobei Z eine von A und C stoch. unabh. normalvert. ZV ist.
außerdem sei $A = f(C)$, so dass A nicht s.u. von C

$$\begin{aligned}
I(A; B | C) &= H(B|C) - H(B|A, C) \\
&= H(A + Z | C) - H(A + Z | A, C) \\
&= H(A + Z | C) - H(A + Z | A) \\
&\leq H(A + Z) - H(A + Z | A) \\
&= H(B) - H(B|A) = I(A; B)
\end{aligned}$$

09.06.11

Aufg. 3

Theorem 4.6.3

$$C = \max_{E(x^* x) \leq L} I(y; x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\log \left(\frac{\nu \delta_i}{\sigma^2} \right) \right)^+$$

mit $H^* H = U \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) U^*$

U: unitär

ν, so dass $\sum_{\substack{i=1 \\ \delta_i > 0}}^{n} \left(\nu - \frac{\sigma^2}{\delta_i} \right)^+ = L$

$$\underline{Y} = H \cdot \underline{X} + \underline{Z}$$

$$Y = (h_{11}\, h_{12}\, h_{13}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + Z$$

$$= (5 \;\; 1 \;\; 4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + Z$$

$$H^* H = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} (5 \;\; 1 \;\; 4) = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 20 \\ 5 & 1 & 4 \\ 20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nur eine Empfangsantenne

$\hookrightarrow H^* H$ hat Rang 1

somit ist nur ein EW von 0 verschieden

$\hookrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad , \lambda_3$

EV zu λ_3 ist gegeben durch

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}$$

$$\begin{pmatrix} 25 & 5 & 20 \\ 5 & 1 & 4 \\ 20 & 4 & 16 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_3 = 42$

$\Rightarrow$ Da nur ein Unterkanal zur Übertragung zur Verfügung steht (nur ein EW ist von 0 verschieden), wird die ges. Sendeleistung in diesen Unterkanal ges.

$\Rightarrow$ Kov. Matrix der Kapazitätserreichenden Eingangsvert. ges. durch

$$Q = E(\underline{x}\,\underline{x}^H) = (\underline{0}\ \underline{0}\ \underline{u}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{0}' \\ \underline{0}' \\ \underline{u}' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{20}{42} \begin{pmatrix} 25 & 5 & 20 \\ 5 & 1 & 4 \\ 20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} \sim SCN(\underline{0}, Q)$$

Kapazität

$$C = \log \det \left(\mathbf{I} + \frac{1}{\sigma^2} H Q H^H \right)$$

$$= \log \left(1 + \frac{1}{42} (5\ 1\ 4)\, Q \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \underline{\underline{\log(21)}}$$