07.07.11

II · Lösung 10

Aufg. 1

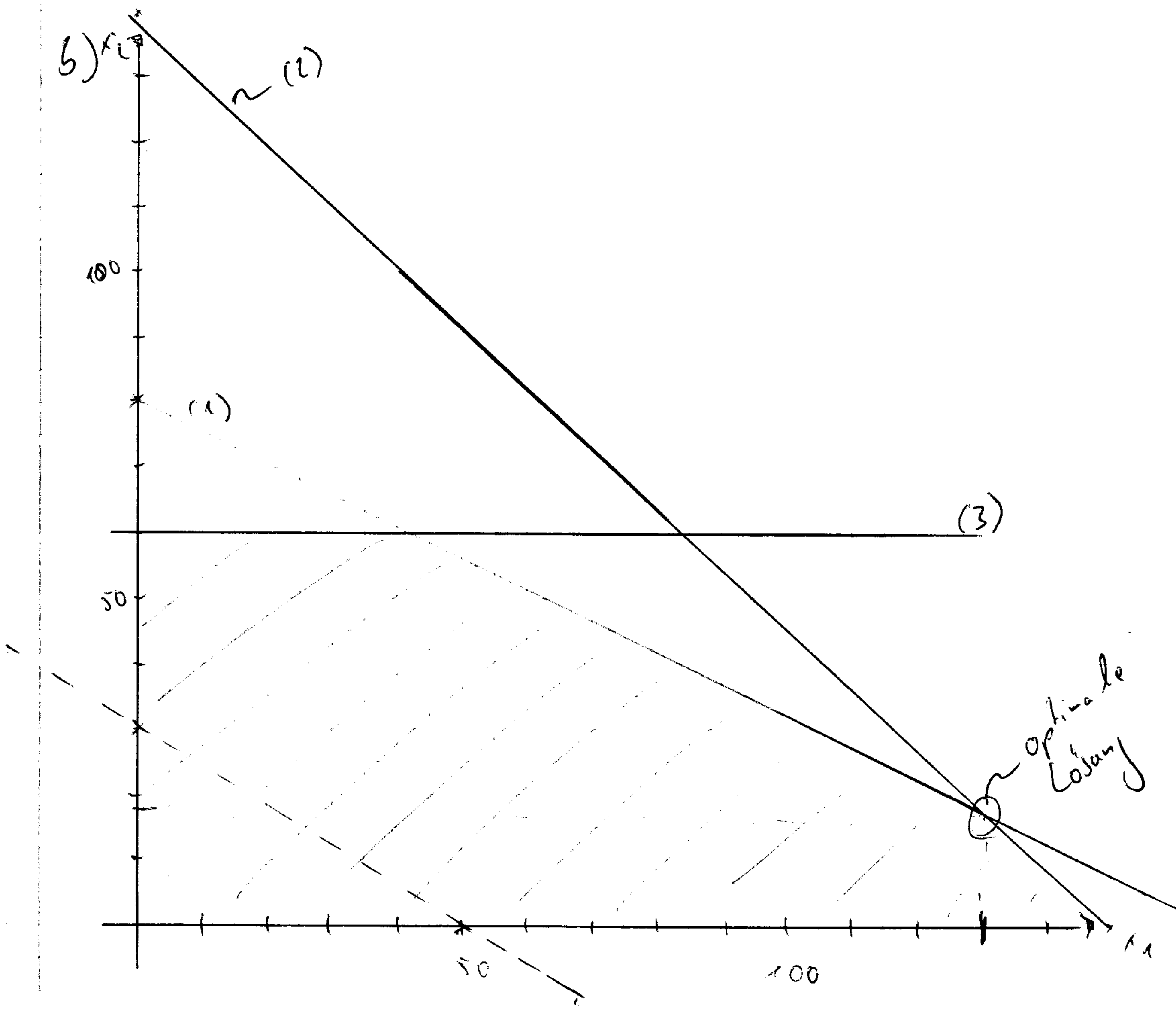
a) x_1: Anzahl Handy M1

x_2 — " — M2

$$\max \; 30x_1 + 50x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.d.} \quad x_1 + 2x_2 &\le 170 && \text{(Montage)} && (1)\\ x_1 + x_2 &\le 150 && \text{(Verpackung)} && (2)\\ 3x_2 &\le 180 && \text{(Signatur)} && (3)\\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

b)



$\rightarrow$ opt. Lsg. Schnittpunkt von $x_1 + x_2 = 150$ und
$x_1 + 2x_2 = 170$

$\hookrightarrow x_1 = 130 \; ; \; x_2 = 20$

möglicher Gewinn: $30 \cdot 150 + 50 \cdot 20 = 4900$ €

Aufg. 3

a) ILP:
$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$$
$$\text{s.d.} \sum_{i=1} v_i \cdot x_i \leq B$$
$$x_i \in \{0,1\}$$

x_i bestimmt, ob Dienst i angeboten wird

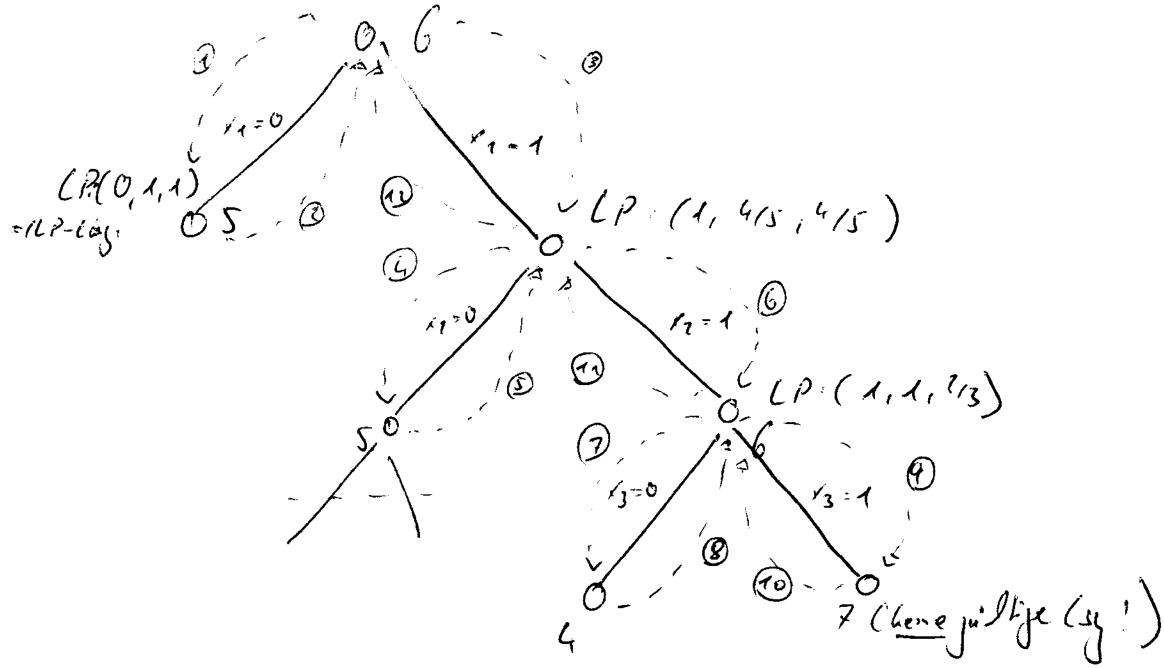
b)
$$\max \; 2x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$\text{s.d.} \; 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$$
$$x_i \in \{0,1\}$$

Lösung des ILP mit Branch-and-Bound

zunächst: löse relaxiertes Problem mit $x_i \in [0,1]$

(eine) Lsg: $(x_1, x_2, x_3) = (4/5, 19/20, 5/6)$ (ergibt genau 6)

$$2 \cdot 4/5 + 2 \cdot 19/20 + 3 \cdot 5/6 = 6$$



Aufg. 2

Eine Funktion von einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heißt konvex, falls für jedes $x, y \in I$ und jedes $\alpha \in [0,1]$ gilt:

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \geq f(\alpha x + (1-\alpha) y)$$

z.z. X sei diskrete ZV und f konvexe Fkt, dann gilt

$$E(f(X)) \geq f(E(X))$$

$\mathcal{X}$: Träger X

Induktionsanfang: $|\mathcal{X}| = 1$

$$E(f(X)) = 1 \cdot f(x_1) = f(1 \cdot x_1) = f(E(X))$$

Induktionsschritt

z.z.: ist die Beh. wahr für $|\mathcal{X}| = n$, so gilt sie auch für $|\mathcal{X}| = n+1$

Annahme: Beh wahr für $|\mathcal{X}| = n$

Sei X ZV mit $|\mathcal{X}| = n+1$

$$E(f(x)) = \sum_{i=1}^{n+1} p_x(x_i) \cdot f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_x(x_i) \cdot f(x_i) + p_x(x_{n+1}) f(x_{n+1})$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} p_x(x_k)\right)}_{=:\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{p_x(x_i)}{\sum_{l=1}^{n} p_x(x_l)}}_{p_y(x_i)} f(x_i) + \underbrace{p_x(x_{n+1})}_{(1-\alpha)} f(x_{n+1})$$

$$= \alpha \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_y(x_i) f(x_i)}_{E(f(y))} + (1-\alpha) f(x_{n+1})$$

$$= \alpha E(f(y)) + (1-\alpha) f(x_{n+1})$$

$$\overset{(IV)}{\geq} \alpha f(E(y)) + (1-\alpha) f(x_{n+1})$$

Da f konvex, gilt

$$\alpha f(E(y)) + (1-\alpha) f(x_{n+1}) \geq f(\alpha E(y) + (1-\alpha) x_{n+1})$$

$$f(\alpha E(y) + (1-\alpha) x_{n+1}) = f\left(\left(\sum_{k=1}^{n} p_x(x_k)\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{p_x(x_i)}{\sum_{l=1}^{n} p_x(x_l)} x_i + p_x(x_{n+1}) \cdot x_{n+1}\right)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_x(x_i) \cdot x_i\right) = f(E(x))$$

$$\Rightarrow E(f(x)) \geq f(E(x))$$ //