19.05.11

IT: Übung 6

Aufgabe 1

a) Kapazität von parallelen Gaußkanälen

Prop 4.3.1

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \ln\left(1 + \frac{(\nu - \lambda_i)^+}{\lambda_i}\right)$$

$$\text{mit} \quad \sum_{i=1}^{3} (\nu - \lambda_i)^+ = P$$

Eigenwerte von Σ_Z

$$\det(\lambda \cdot I - \Sigma_Z) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-2) - 2(\lambda-1)$$

$$= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda-2) - 2(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\right]$$

$$= (\lambda-1)\left[\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2\right]$$

$$= (\lambda-1)\,\lambda\,(\lambda-3)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 0$

↳ Kovarianzmatrix Σ_Z nicht pos. definit sondern nur pos. semi-definit

Die Kapaz. des Kanals ist unendlich. Jede Kov-Mat. ist pos. semi definit

Damit ist jeder EW ≥ 0. Je kleiner ein EW ist, desto besser ist der entsprechende Teilkanal. Ein EW=0 bedeutet, dass es auf diesen Teilkanal kein Rauschen gibt

↳ dort keine Kapaz-beschränkung

19.05.11

δ) Varianz von ω

$$Var(\omega) = E(\underline{\delta}^T \underline{z}\, \underline{z}^T \underline{\delta}) - (E(\underline{\delta}^T \underline{z}))^2$$

$$= \underline{\delta}^T E(\underline{z}\, \underline{z}^T)\underline{\delta} - \underbrace{(\underline{\delta}^T \underbrace{E(\underline{z})}_{=0})^2}_{=0}$$

$$= \underline{\delta}^T \Sigma_z \underline{\delta}$$

Varianz von $\omega = \underline{\delta}^T \cdot \underline{z}$ soll laut Hinweis gleich 0 sein.

$$\underline{\delta}^T \Sigma_z \underline{\delta} = (\delta_1 \ \ \delta_2 \ \ \delta_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$= \delta_1(\delta_1 + \delta_3) + \delta_2(\delta_2 + \delta_3) + \delta_3(\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underline{\delta}^T = (1 \ \ 1 \ \ -1)$$

modifiziertes Empfangssignal

$$\underline{\delta}^T \cdot \underline{y} = \underline{\delta}^T \cdot \underline{x} + \underline{\delta}^T \cdot \underline{z}$$

$$= x_1 + x_2 - 2x_3 + \omega$$

lediglich x_1 soll fehlerfrei übertragen werden. Daher setzen wir x_2 und x_3 zu 0

$$\Rightarrow \underline{\delta}^T \cdot \underline{y} = x_1 + \omega$$

Der Störterm ω nimmt mit W'keit 1 (da Var = 0) den Wert Null an ($\omega \stackrel{hat}{\sim} EW\ 0$)

$\Rightarrow$ somit kann x_1 fehlerfrei übertragen werden

19.05.11

Aufg. 2

A, B hermitesch, pos. definit

$C = A - B$ auch pos. def.
-"- hermitesch

Für jede $n \times n$-Matrix Q, die hermitesch und pos. def. ist, gibt es eine n-dimensionale verteilte ZV z, für welche Q die Kov-Mat. ist.
Da Q nach Annahme pos. def. ist, lässt sich die Dichte und somit die Entropie von z angeben

Wir interpretieren B und C als Kovarianzmatrizen von s.u. ZVs (normalverteilt) $\underline{X_1}$ und $\underline{X_2}$

$$\underline{X_1} \sim \mathcal{N}_n(\underline{0}, B)$$
$$\underline{X_2} \sim \mathcal{N}_n(\underline{0}, C)$$

sei $\underline{Y} = \underline{X_1} + \underline{X_2}$

$$\Rightarrow \underline{Y} \sim \mathcal{N}_n(\underline{0}, B + C) = \mathcal{N}_n(\underline{0}, A)$$

$$H(\underline{Y}) \geq H(\underline{Y} \mid \underline{X_2}) = H(\underline{X_1} + \underline{X_2} \mid \underline{X_2}) = H(X_1 \mid X_2) \overset{s.u.}{=} H(X_1)$$

$$H(\underline{Y}) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left((2\pi e)^n \, |A|\right)$$

und

$$H(\underline{X_1}) = \frac{1}{2} \ln\left((2\pi e)^n |B|\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln\left((2\pi e)^n |A|\right) \geq \frac{1}{2} \ln\left((2\pi e)^n |B|\right)$$

$$\Rightarrow |A| \geq |B|$$

19.05.11

Aufg. 3

- für jede optimale Lösung $(x_1, \dots, x_n)$ gilt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = L$$

denn das zu maximierende $\prod_{i=1}^{n} (x_i + z_i)$ ist monoton wachsend in jedem x_i

- angenommen das (ii) nicht gilt, dann gäbe es eine opt Lösung $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i + z_i < x_j + z_j$

sei $\varepsilon = \min\{ x_j, \frac{1}{2} (x_j + z_j - (x_i + z_i)) \}$

$$\Rightarrow \varepsilon > 0$$

Wir konstruieren eine neue Lösung $(x_1', \dots, x_n')$

$$\text{mit} \quad x_k' = \begin{cases} x_i + \varepsilon & k = i \\ x_j - \varepsilon & k = j \\ x_k & k \neq i, j \end{cases}$$

$$\prod_{k=1}^{n} (x_k' + z_k) = (x_i' + z_i)(x_j' + z_j) \prod_{k \neq i,j} (x_k' + z_k)$$

$$= (x_i' x_j' + z_i x_j' + x_i' z_j + z_i z_j) \prod_{k \neq i,j} (x_k' + z_k)$$

$$= \left[(x_i + \varepsilon)(x_j - \varepsilon) + z_i (x_j - \varepsilon) + (x_i + \varepsilon) z_j + z_i z_j \right] \cdot \prod_{k \neq i,j} (x_k + z_k)$$

$$= \left[(x_i + z_i)(x_j + z_j) + \varepsilon \underbrace{(x_j + z_j - (x_i + z_i))}_{\geq 2\varepsilon} - \varepsilon \right] \cdot \prod_{k \neq i,j} (x_k + z_k)$$

$$\geq \left[(x_i + z_i)(x_j + z_j) + \varepsilon^2 \right] \cdot \prod_{k \neq i,j} (x_k + z_k)$$

$$\geq (x_i + z_i)(x_j + z_j) \prod_{k \neq i,j} (x_k + z_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (x_k + z_k)$$

19.05.11

$\Rightarrow$ die Lösung $(x_1, \dots, x_n)$ kann also nicht optimal sein, denn $(x_1', \dots, x_n')$ ist eine Bessere

$\hookrightarrow x_i + \xi_i = x_j + \xi_j$ für $x_i, x_j > 0$

- z.z. $x_i = (\nu - \xi_i)^+ \quad \forall i$ und das

$$\sum_{i=1}^{n} (\nu - \xi_i)^+ = L$$

Wir wissen, dass für alle $x_i > 0$ $x_i + \xi_i$ den selben Wert haben ($x_i + \xi_i = \nu$)

$\Rightarrow x_i = \nu - \xi_i \quad \forall x_i > 0$

$\Rightarrow x_i = (\nu - \xi_i)^+ \qquad i = 1, \dots, n$

mit der schon gezeigten Beziehung, dass

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = L$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\nu - \xi_i)^+ = \sum_{i=1}^{n} (x_i) = L$$

ν ist hier eindeutig bestimmt, da $\sum_{i=1}^{n} (\nu - \xi_i)^+$ stetig monoton wachsend in ν