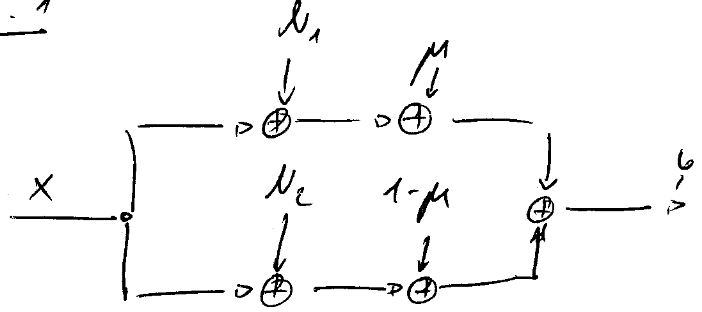
05.05.11

# II: Übung 4

## Aufg. 1

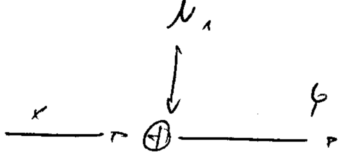



$N_1 \sim N(0,1)$

$N_2 \sim N(0,2)$

$E(X) = 0$ , $E(X^2) \le 4$ $\qquad X, N_1, N_2$ s.u.

a) $\mu = 1$




→ reeller Gaußkanal

$$C = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{4}{\sigma_1^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{4}{1}\right) = \frac{1}{2}\ln(5) \approx \underline{\underline{0{,}8}}$$

b) $\mu \in [0,1]$

$$Y = \mu(X + N_1) + (1-\mu)(X + N_2)$$
$$= \cancel{\mu X} + \mu N_1 + X + N_2 - \cancel{\mu X} - \mu N_1$$
$$= X + \underbrace{\mu(N_1) + (1-\mu)\cdot N_2}_{Z \text{ (s.u. von } X)}$$
$$= X + Z$$
$$\Rightarrow E(Z) = 0$$

$$Var(Z) = Var(\mu N_1 + (1-\mu)N_2)$$
$$= Var(\mu N_1) + Var((1-\mu)N_2)$$
$$= \mu^2 \cdot \underbrace{\sigma_1^2}_{=1} + (1-\mu)^2 \cdot \underbrace{\sigma_2^2}_{=2}$$
$$= 3\mu^2 - 4\mu + 2$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{4}{3\mu^2 - 4\mu + 2}\right)$$

c) gesucht $\arg\max C(\mu)$

$$\frac{\partial C(\mu)}{\partial \mu} \stackrel{!}{=} 0$$

C wird maximal, wenn Rauschleistung minimal ist

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \mu}(3\mu^2 - 4\mu + 2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 6\mu - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mu}(6\mu - 4) = 6 > 0 \rightarrow \mu = \frac{2}{3} \text{ ist min!}$$

$$C_{max} = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{4}{3(\frac{2}{3})^2 - 4(\frac{2}{3}) + 2}\right) = \frac{1}{2}\ln(7) \approx 0{,}97$$

Aufg. 2

Kap. 4.4 (Bandbegrenzte Gaußkanäle)

$$C = W \cdot \log\left(1 + \frac{L}{N_0 \cdot W}\right)$$

$$SNR = \frac{L}{N_0 \cdot W}$$

$$C = W \cdot \log(1 + SNR)$$

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log(SNR)$$

$\Rightarrow$ hier: $SNR = 10^{\frac{50}{10}} = 100000$

05.05.11

$\Rightarrow C = W \cdot \log_2(1 + SNR)$ bits

$= 22{,}83\,MHz \cdot \log_2(1 + 100000)$ bits

$\approx 462{,}25$ Mbit/s $\gg 54$ Mbits/s

Gründe: - kein Gaußkanal

- Mehrwegeausbreitung / Fading

- Beschränkte HW

Aufg. 3

z.z. $\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (Hadamard Ungleichung)

$A$ pos. definite hermitische Matrix

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$

$X \sim N(0, A) \rightarrow X$ hat $A$ als Kovarianzmatrix

Diagonalelemente

(1) $X_i \sim N(0, a_{ii})$

(2) $H(Y|Z) \leq H(Y)$

(3) $H(X) = \frac{1}{2} \log((2\pi e)^n \cdot \det(A))$

$\frac{1}{2} \log((2\pi e)^n \det(A)) \overset{(3)}{=} H(X)$

Kettenregel

$\overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})$

$\overset{(2)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$

$\overset{(1),(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \log(2\pi e\, a_{ii})$

log streng monoton

$= \frac{1}{2} \log((2\pi e)^n \prod_{i=1}^{n} a_{ii})$

$\Rightarrow \det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$