12.05.11

II: Übung 5

Aufg. 1

a) $y_i = x_i + z_i + N_{[\frac{i}{2}]} \qquad i \in \mathbb{Z}$

i ungerade $\quad i = 2k-1 \quad k \in \mathbb{Z}$

$$y_{2k-1} = x_{2k-1} + z_{2k-1} + N_k$$

i gerade $\quad i = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

$$y_{2k} = x_{2k} + z_{2k} + N_k$$

=> $(2k-1)$-te und $(2k)$-te Rauschterm sind stoch. abhängig

=> ~~kann~~ die Kapazität kann nicht mit Prop. 4.2.1 berechnet werden

-> blockweise Betrachtung

$$\underline{y}_i = \underline{x}_i + \underline{w}_i$$

$$\underline{x}_i = \begin{pmatrix} x_{2i-1} \\ x_{2i} \end{pmatrix} \qquad \underline{w}_i = \begin{pmatrix} z_{2i-1} \\ z_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_i \\ N_i \end{pmatrix}$$

=> Rauschterme $\underline{w}_i$ sind iid. mit $\mathcal{N}_2(\underline{0}, Q)$

Berechnung der Einträge von $Q = (q_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$

$$Q = E[\underline{w}_i \cdot \underline{w}_i^T]$$

$$q_{11} = E[(z_{2i-1} + N_i)^2]$$
$$= E[z_{2i-1}^2 + 2 z_{2i-1} N_i + N_i^2]$$
$$= E[z_{2i-1}^2] + 2E[z_{2i-1}] \cdot E[N_i] + E[N_i^2]$$
$$= 1 + 0 + 1 = 2$$

$$q_{12} = E[(z_{2i-1} + N_i)(z_{2i} + N_i)]$$
$$= E[z_{2i-1} z_{2i}] + E[z_{2i} N_i] + E[z_{2i-1} N_i] + E[N_i^2]$$
$$= 0 + 0 + 0 + 1 = 1$$

11.05.11

$q_{22} = q_{11}$

$q_{21} = q_{12}$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{Y} = \underline{X} + \underline{W}$ Parallele Gaußkanal

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{X}$ entspricht 2 Kanalnutzungen des ursprünglichen Kanals (*)

$\Rightarrow$ Leistungsbeschränkung

$$E[\underline{x}^T \underline{x}] = E\left[\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right] \leq 2\underbrace{L}_{=1} = 2$$

mit P. 4.3.1

Kapazität eines parallelen Gaußkanals

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \log\left(1 + \frac{(\nu - \lambda_i)^+}{\lambda_i}\right)$$

wobei λ_i Eigenwerte von Q

und $\sum_{i=1}^{2} (\nu - \lambda_i)^+ = 2L = 2$

- Berechnung der Eigenwerte von Q:

$$\det(\lambda \underline{I} - Q) = (\lambda - 2)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

- Berechnung von ν (Prozedere nach folgendem Schema)
  - Sortiere die $n^{(2)}$ Eigenwerte (in ihrer geom. Vielfachheit) so, dass $\lambda_n > \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_1$

    Setze $m = n$

a) löse $\sum_{i=1}^{m} (\nu - \lambda_i) = 2L$ nach ν auf

Bezeichne Lösung mit $\hat{\nu}$

b) mache Probe

$$\sum_{i=1}^{m} (\nu - \lambda_i)^+ = 2L$$

für $\nu = \hat{\nu}$ aus a)

12.05.10

Ist die Probe erfüllt, so ist $\hat{v}$ die korrekte Lösung. Wenn nicht, setze $m = n-1$ und gehe zu a)

$\Rightarrow$ hier $\sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = 3$

a) $(v - \sigma_1) + (v - \sigma_2) = 2L = 2$

$(v - 1) + (v - 3) = 2$

$\Leftrightarrow \quad v = 3$

b) $(v - \sigma_1)^+ + (v - \sigma_2)^+$

$= (3 - 1)^+ \quad + (3 - 3)^+ = 2 = 2L$

$\Rightarrow$ Lösung $v = 3$ ist richtig

- Einsetzen in die Kapazitätsformel

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \log\left(1 + \frac{(v - \sigma_i)^+}{\sigma_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{(3-1)^+}{1}\right) + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{(3-3)^+}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \log(3)$$

Wenn log zur Basis 2 gewählt wird

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2} \log_2(3) \frac{\text{Bit}}{\text{Benutzung des parall. Kanals}}$$

$\Rightarrow$ ursprünglicher Kanal:

$$C = \frac{1}{4} \log_2(3) \quad \frac{\text{Bit}}{\text{Kanalnutzung}} \quad , \text{da } (*)$$

12.05.11

δ) Prop. 4.3.1

$\underline{X}$ ist Kapazitätsereichend

falls $\underline{X} \sim N_2(\underline{0}, T \operatorname{diag}((\nu-\lambda_i)^+) T')$

mit $Q = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) T'$ (Spektralzerlegung)

- Berechnung der Spektralzerlegung von Q

$T \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) T'$ ist die Spektralzerlegung von Q falls die i-te Spalte von T ein Eigenvektor zum i-ten Eigenwert der Matrix Q ist und die Spalten von T eine orthonormale Basis bilden, d.h. $T' \cdot T = I$

hier λ_1, λ_2 sind Eigenwerte mit geom. Vielfachheit 1

$\Rightarrow$ zugehörige Eigenvektoren sind automat. orthogonal, wir müssen sie nur normalisieren

E_1 EV zu $\lambda_1 = 1$

$Q \cdot \underline{E}_1 = \lambda_1 \cdot E_1$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot 1 \quad \Rightarrow x_2 = -x_1$

$\underline{E}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

E_2 EV zu $\lambda_2 = 3$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\underline{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Spektralzerlegung

$Q = T \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) T'$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) T'$

$\Rightarrow$ Kovarianzmatrix von $\underline{X}$

$\Sigma_X = T \operatorname{diag}((\nu - \lambda_i)^+) T'$

$= T \begin{pmatrix} (3-1)^+ & 0 \\ 0 & (3-3)^+ \end{pmatrix} T'$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufg. 2

a) nach P. 6.3.1

$$C = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \log\left(1 + \frac{(\nu - \lambda_n)^+}{\lambda_n}\right) \quad (*)$$

$$\text{mit} \quad \sum_{n=1}^{N} (\nu - \lambda_n)^+ = N \sigma_x^2$$

λ_n sind die EW von Σ_N

$$\Sigma_N = T \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\, T'$$

Kovarianzmatrix Σ_x, die I maximal ist gegeben durch:

$$\Sigma_x = T \cdot \operatorname{diag}((\nu - \lambda_1)^+, \dots, (\nu - \lambda_N)^+) \cdot T'$$

T orthogonale Matrix

b) Hinweis bedeutet

$$\Rightarrow (\nu - \lambda_n)^+ = \nu - \lambda_n \quad n = 1, \dots, N$$

$\Rightarrow$ somit ergibt $(*)$

$$C = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \log\left(1 + \frac{\nu - \lambda_n}{\lambda_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \log\left(\frac{\nu}{\lambda_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot N \cdot \log(\nu) - \frac{1}{2} \log\left(\prod_{n=1}^{N} \lambda_n\right)$$

$\Rightarrow$ ges ist das Σ_N, das C minimiert

- Kapazität hängt nur von EW von Σ_N ab
- da log streng mon. steigend ist, suchen wir

$$\max_{\operatorname{Sp}\{\Sigma_N\} \le N \cdot \sigma_N^2} \prod_{n=1}^{N} \lambda_n = \max_{\sum_{n=1}^{N} \lambda_i \le N \sigma_n^2} \prod_{n=1}^{N} \lambda_n$$

12.05.11

Waterfilling Problem (S. 99)

$$\max \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} + S_i)$$

$$\text{s.d} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} < L$$

Lösung:

$$a_{ii} = (v - S_i)^+$$

mit v so dass $\sum_{i=1}^{n} (v - S_i)^+ = L$

entspricht hier S_i der 0

a_{ii} den λ_n

$L = N\sigma_\nu^2$

$\Rightarrow \lambda_n = v$

mit v so dass $\sum_{n=1}^{n} v = N\sigma_\nu^2$

$\Rightarrow v = \sigma_\nu^2 \quad \Rightarrow \lambda_n = \sigma_\nu^2$

$$\Rightarrow \Sigma_\nu = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) T'$$

$$= T T' \sigma_n^2 = \sigma_\nu^2 \cdot \underline{I}$$