14.04.11

TI : Lösung 1

Aufg. 1

a) $H(X) = -\int_{\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) \, dx$

$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \qquad \lambda > 0$

$H(X) = -\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \ln(\lambda e^{-\lambda x}) \, dx$

$= -\ln\lambda \int_0^\infty \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f_X(x)} dx + \lambda \cdot \underbrace{\int_0^\infty x \cdot e^{-\lambda x} dx}_{E(X)}$

$= -\ln\lambda + \lambda \cdot E(X)$

$= -\ln\lambda + 1$

b) $X = Y + Z \qquad Y \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Z \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Entropie der Normalverteilung

$H(Y) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma_1^2)$

$H(Z) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma_2^2)$

f_X ist die Faltung von f_Y und f_Z

Normalvert. ist Faltungsstabil

$\rightarrow X \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$\hookrightarrow H(X) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e (\sigma_1^2 + \sigma_2^2))$

16.04.11

Aufg. 2

a) $H(T(X)) \leq H(X)$

Hinweis: $T(X) = 2X \Rightarrow T^{-1}(y) = \frac{1}{2} y$

Transformationssatz

$$f_{T(x)}(y) = \left| \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|^{-1} f_x(T^{-1}(y))$$

$$= \frac{1}{2} f_x\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$H(T(X)) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_{T(x)}(y) \cdot \log(f_{T(x)}(y))\, dy$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f_x\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \log\left(\frac{1}{2} f_x\left(\frac{y}{2}\right)\right) dy$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f_x(x) \cdot \log\left(\frac{1}{2} f_x(x)\right) 2\, dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot \left(\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log f_x(x)\right) dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \log f_x(x)\, dx + \log 2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, dx}_{=1}$$

$$= H(X) + \underbrace{\log 2}_{>0} > H(X) \;\text{↯}$$

b) $H(X+Y) \leq H(X)$

$X \sim R(0,1)$, $Y \sim R(0,1)$ X, Y s.u.

$H(X, Y) \overset{s.u.}{=} H(X) + H(Y)$

$H(X) = 0 = H(Y)$ Bsp. 3.4.2 a)

16.04.11

f_{X+Y} ist Faltung von f_X und f_Y

$\rightarrow$ Dreiecksverteilung

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot f_Y(z-t)\, dt$$

$$= \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z & 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z & 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H(X+Y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_{X+Y}(z) \log f_{X+Y}(z)\, dz$$

$$= -\int_0^1 z \cdot \log z \, dz - \int_1^2 (2-z) \cdot \log (2-z)\, dz$$

$$= \dots = \frac{1}{2} \log e > 0 = H(X,Y)$$

c) $H(X+Y) \leq \underbrace{H(X)}_{=0} + \underbrace{H(Y)}_{=0}$

$H(X+Y) = \frac{1}{2} \log e > 0 = H(X) + H(Y)$

d) $H(X) \geq 0$

Gegenbeispiel z.B.: $X \sim R(0, 1/2)$

$H(X) = \log(1/2) = -1 < 0$

14.04.11

Aufg. 3

$$(X, Y) \sim N_2\Big(\underline{0}, \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}}_{=C}\Big) \quad , \quad -1 < \rho < 1$$

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$$
$$= H(Y) - H(Y|X)$$
$$= H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

$$H(X) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\,\sigma_1^2)$$
$$H(Y) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\,\sigma_2^2)$$

$$\Rightarrow I(X, Y) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\,\sigma_1^2) + \frac{1}{2}\log(2\pi e\,\sigma_2^2)$$
$$- \frac{1}{2}\log\big((2\pi e)^2[\sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2]\big)$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{\cancel{(2\pi e)^2}\,\cancel{\sigma_1^2}\sigma_2^2}{\cancel{(2\pi e)^2}[\cancel{\sigma_1^2}\sigma_2^2(1-\rho^2)]} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-\rho^2}\right)$$

$$H(X|Y) = H(X) - I(X, Y)$$
$$= \frac{1}{2}\log(2\pi e\,\sigma_1^2) + \frac{1}{2}\log(1-\rho^2)$$
$$= \frac{1}{2}\log(2\pi e\,\sigma_1^2(1-\rho^2))$$

$$H(Y|X) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\,\sigma_2^2(1-\rho^2))$$