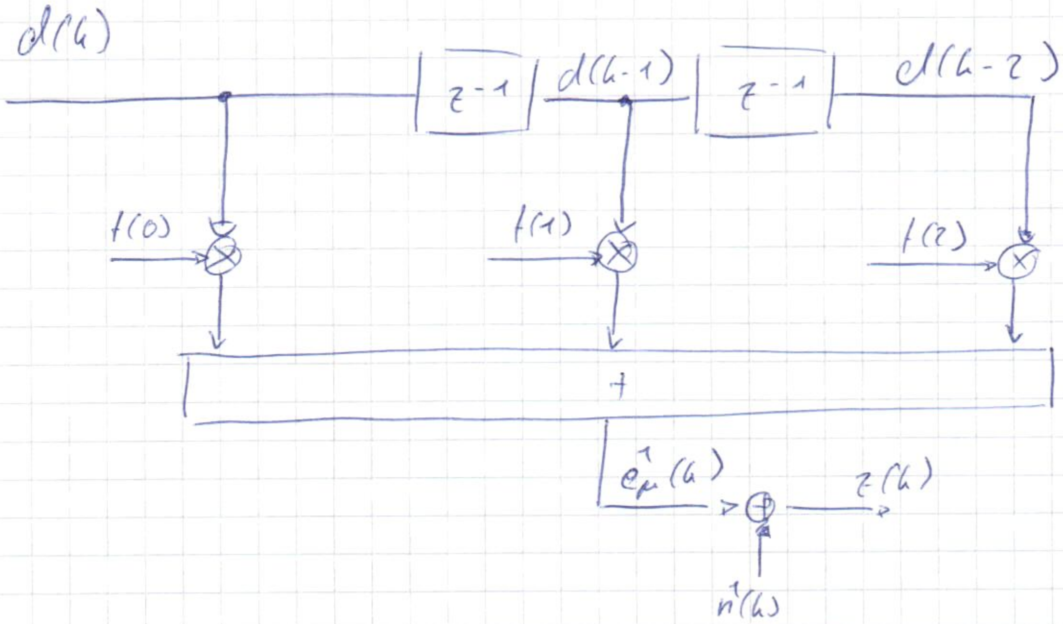
MSK: Übung 11

08.07.11

Maximum Likelihood-Schätzung von Datenfolgen mittels Viterbi Algorithmus



Ersatzbild für $L=2$ ($L \hat{=}$ Dispersionslänge des Kanals)

Optimierungskriterium: MLSE bzw. minimale euklidische Distanz

$$E_\mu(k) = \| \underline{z} - \underline{\hat{e}}_\mu \|^2 = \sum_{i=0}^{k} | z(i) - \hat{e}_\mu(i) |^2$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left| z(i) - \sum_{j=0}^{L} d_\mu(j) \cdot f(i-j) \right|^2$$

Koeffizienten der Ersatzimpulsantwort bestehend aus Sendefilter / Kanal / Matched-Filter / Weißmacher

$$= \sum_{i=0}^{k} | z(i) - d_\mu(i) * f(i) |^2$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} | z(i) - d_\mu(i) * f(i) |^2 + | z(k) - d_\mu(i) * f(i) |^2_{i=k}$$

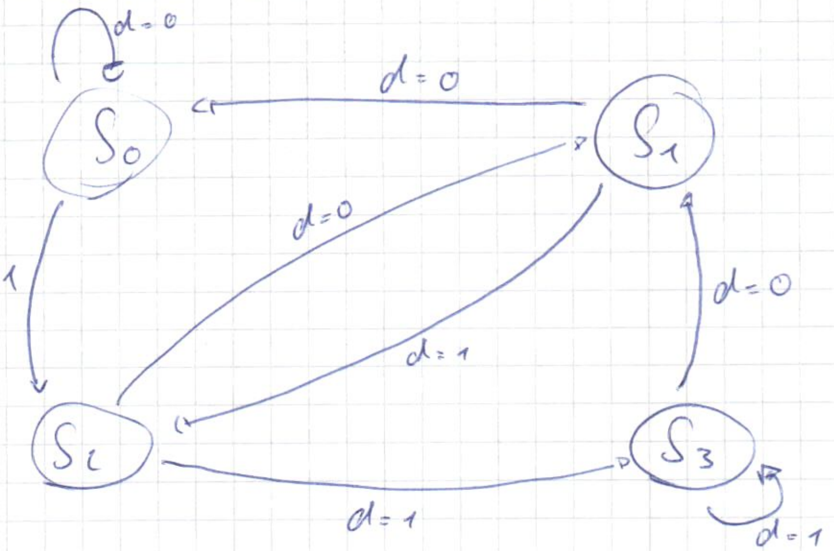
$$= E_\mu(k-1) + | z(k) - d_\mu(k) * f(k) |^2 \quad (1)$$

08.07.11

Kanalzustand zum Zeitpunkt k wird durch den Inhalt des Speichers festgelegt.

$$S(k) = \{ d(k-1), d(k-2) \}$$

↳ $S_0 = \{0,0\}$, $S_1 = \{0,1\}$, $S_2 = \{1,0\}$, $S_3 = \{1,1\}$



d.h. $\hat{e}(k)$ berechnet sich in Abhängigkeit vom Zustand des Kanals $S(k)$ und vom Empfang $d(k)$ wie folgt (für $L=2$):

S_0: $d(k) = 0 \rightarrow \hat{e}_{00} = 0$ Empfang $d(k)$

Zustand des Kan.

$d(k) = 1 \rightarrow \hat{e}_{01} = f(0)$

S_1: $d(k) = 0 \rightarrow \hat{e}_{10} = f(2)$

$d(k) = 1 \rightarrow \hat{e}_{11} = f(0) + f(2)$

S_2: $d(k) = 0 \rightarrow \hat{e}_{20} = f(1)$

$d(k) = 1 \rightarrow \hat{e}_{21} = f(0) + f(1)$

S_3: $d(k) = 0 \rightarrow \hat{e}_{30} = f(1) + f(2)$

$d(k) = 1 \rightarrow \hat{e}_{31} = f(0) + f(2) + f(1)$

Hiermit lassen sich 8 euklidische Distanzen zum Empfangswert $z(k)$ bestimmen ($\hat{=}$ Pfadkosten einer Summenpfadkostenfunktion)

$$\delta_{sd}(k) = |z(k) - \hat{e}_{sd}(k)|^2, \quad \text{mit } s \in \{0,1,2,3\}, \; d \in \{0,1\}$$

08.07.11

Die rekursive Berechnungsvorschrift für die Summenpfadkosten lautet (vgl. (1))

$$E_s(k) = \min_d \{E_s(k-1) + \delta_{sd}(k)\}$$

im eingeschwungenen Zustand überlebt nur der Pfad mit den geringsten Kosten

<u>Beispiel:</u>

Die Impulsantwort $l(k)$ lautet $l(k) = (1/2, 1, 1/2)$, der gestörte Empfangswert zum Zeitpunkt k beträgt $z(k) = 1,6$ und die "Kosten" belaufen sich auf $E_0(k-1) = 1,3$; $E_1(k-1) = 0,9$; $E_2(k-1) = 0,2$; $E_3(k-1) = 0,8$.

Die aus der Kanalimpulsantwort resultierende Datenniveaus sind:

S_0: $\hat{e}_{00}(k) = 0$ $\quad$ S_1: $\hat{e}_{10}(k) = 0,5$

$\hat{e}_{01}(k) = 0,5$ $\quad$ $\hat{e}_{11}(k) = 1$

S_2: $\hat{e}_{20}(k) = 1$ $\quad$ S_3: $\hat{e}_{30}(k) = 1,5$

$\hat{e}_{21}(k) = 1,5$ $\quad$ $\hat{e}_{31}(k) = 2$

$\Rightarrow$ Pfadkosten $\delta_{sd}(k)$ sind dann

$\delta_{00}(k) = |z(k) - \hat{e}_{00}(k)|^2 = |1,6 - 0|^2 = 2,56$

$\delta_{01}(k) = 1,21$; $\delta_{10}(k) = 1,21$; $\delta_{11}(k) = 0,36$

$\delta_{20}(k) = 0,36$; $\delta_{21}(k) = 0,01$; $\delta_{30}(k) = 0,01$

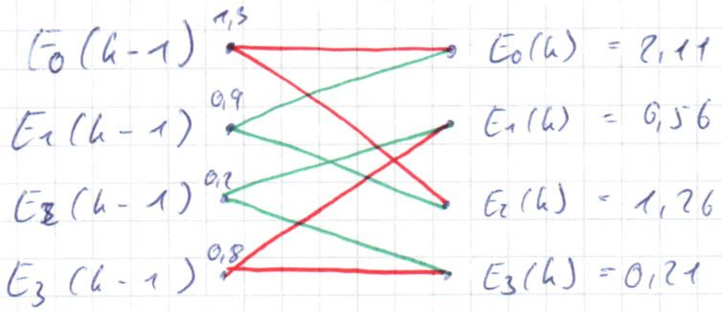
$\delta_{31}(k) = 0,16$

=> die aktuelle Summenpfadkosten

$$E_0(k-1)+\delta_{00}(k)=3{,}86 \xrightarrow{\text{neuer Zustand}} S_0$$
$$E_0(k-1)+\delta_{01}(k)=2{,}51 \longrightarrow S_2$$
$$E_1(k-1)+\delta_{10}(k)=2{,}11 \longrightarrow S_0$$
$$E_1(k-1)+\delta_{11}(k)=1{,}26 \longrightarrow S_2$$
$$E_2(k-1)+\delta_{20}(k)=0{,}56 \longrightarrow S_1$$
$$E_2(k-1)+\delta_{21}(k)=0{,}21 \longrightarrow S_3$$
$$E_3(k-1)+\delta_{30}(k)=0{,}81 \longrightarrow S_1$$
$$E_3(k-1)+\delta_{31}(k)=0{,}96 \longrightarrow S_3$$

$$E_0(k)=\min\{3{,}86;\,2{,}11\}=2{,}11$$
$$E_1(k)=\min\{0{,}56;\,0{,}81\}=0{,}56$$
$$E_2(k)=\min\{2{,}51;\,1{,}26\}=1{,}26$$
$$E_3(k)=\min\{0{,}21;\,0{,}96\}=0{,}21$$

zur Veranschaulichung



grün ≙ weiterverwendete Pfad
rot ≙ verworfen

Im eingeschwungenen Zustand wird nur der Pfad mit den geringsten Kosten (grüne Linien) weiterverwendet. In der Einschwing- bzw. Ausschwingphase werden alle Pfade berücksichtigt, die die definierten Start- bzw. Endzustände erreichen.

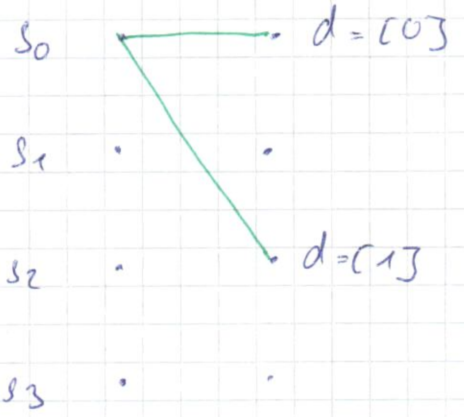
Die Beispielsituation beschreibt den Zeitpunkt $k=2$, die Einschwingphase benötigt die Zeittakte $k=0$ bzw. $k=1$, die Ausschwingphase die Takte $k=3$ bzw. $k=4$, Start- bzw. End-Zustand sei $S_0(0)$ bzw. $S_0(4)$

08.07.11

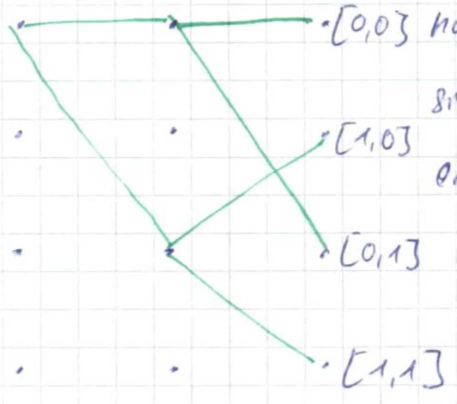
Damit ergibt sich eine Datenfolge d(k):

Einschwingphase

$k=0$



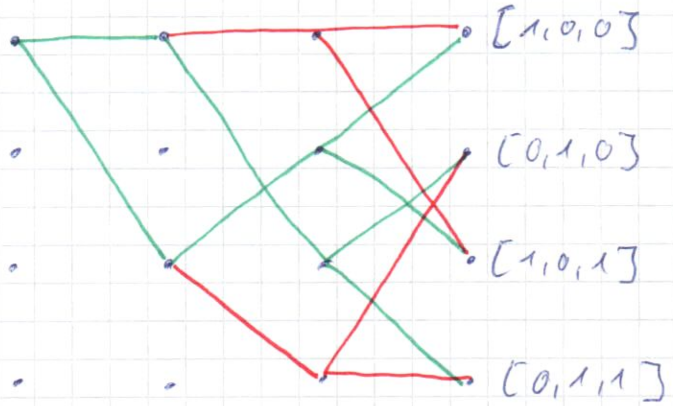
$k=1$



nach 2 Zeittakten sind alle Zustände erreichbar

Beispielsituation

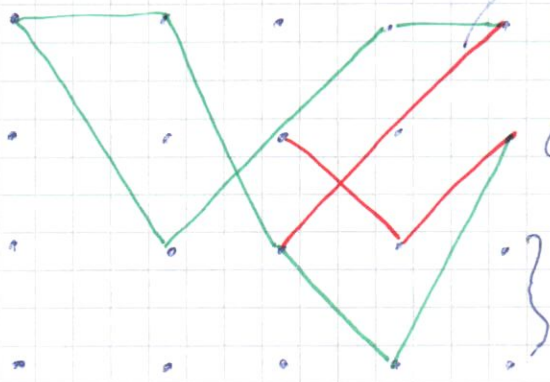
$k=2$



verworfen werden: [0,0,0] [1,1,0] [0,0,1] [1,1,1]

Ausschwingphase

$k=3$



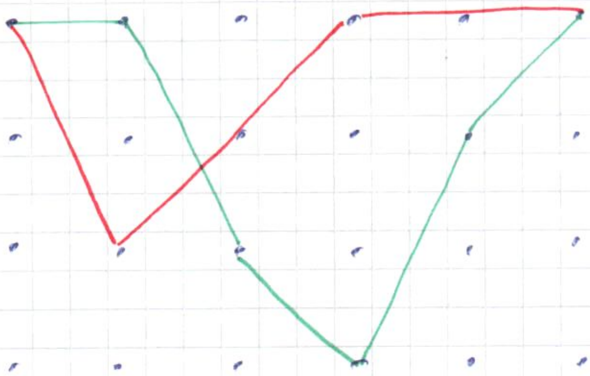
hätten auch korrekt sein können, habe hier aber höhere Kosten verursacht
[1,0,0,0]

[0,1,1,0]

führen nicht mehr zu S_0 (Endzustand)

08.07.11

<u>k = 4</u>



[0, 1, 1, 0, 0]

=> die Zahlenfolge mit den geringsten Kosten lautet
(0, 1, 1, 0, 0)!