29.04.11

MSK: Übung 2

Hilberttransformation und analytisches Signal

Der Real- und Imaginärteil einer Spektralfkt. werden derart vertauscht, dass sich wiederum ein reelles Zeitsignal ergibt. D.h. die Symmetriebed. für reelle Zeitsignale müssen erhalten bleiben.

$$X(f) = X^*(-f)$$

$$Re\{X(f)\} = Re\{X(-f)\} \quad (\text{Realteil gerade})$$

$$Im\{X(f)\} = -Im\{X(-f)\} \quad (\text{Imaginärteil ungerade})$$

$$X(f) = Re\{X(f)\} + j\, Im\{X(f)\}$$

$$\xrightarrow[\text{Signal}]{\text{baue ein}} \hat{X}(f) = Im\{X(f)\} \cdot sign(f) - j Re\{X(f)\} \cdot sign(f)$$

$\hat{X}(f)$ ist Hilberttransformierte von $X(f)$

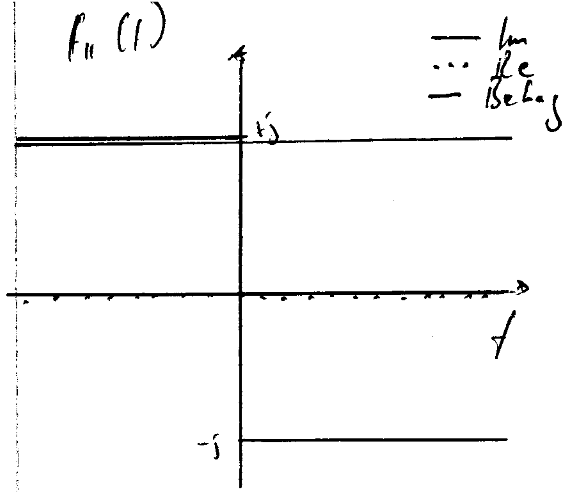
$$\hat{X}(f) = -j\, sign(f) \cdot X(f)$$

$$\Rightarrow -j\, sign(f) = H_H(f)$$

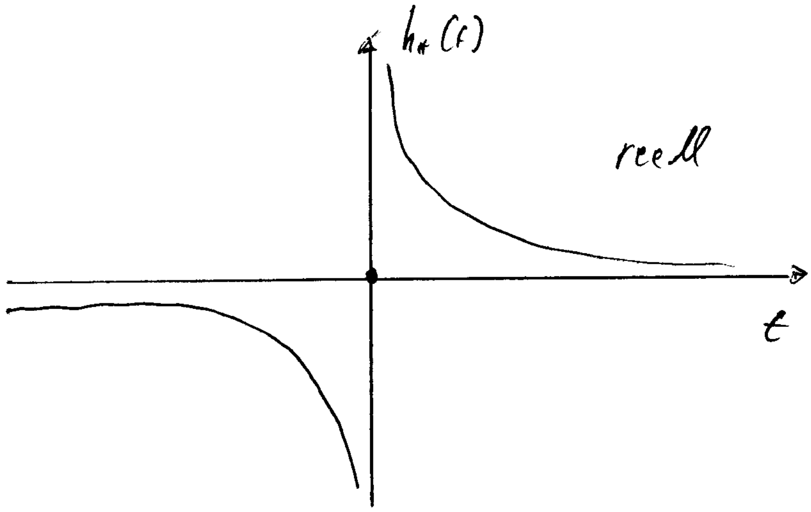
"Hilberttransformation"

Die Hilberttrafo bewirkt eine konst. Phasendrehung von $\{-90°\ (+90°)$ im gesamten positiven (negativen) Spektralber. Sie erfüllt die Symmetriebed., so dass die Impulsantwort des idealen Hilberttransformators reell ist. ($H_H(f) = H_H^*(-f)$

29.04.11



$$H_H(f) = -j\,\mathrm{sign}(f) \circ\!-\!\circ\; h_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$



In der Praxis gibt es Systeme (z.B. Quadraturnetzwerke) bei denen die Real- und Imaginärteil zu einander Hilberttransformiert sind

- <u>Analytische Signale</u>

$$x_a(t) = x(t) + j\cdot \mathcal{H}(x(t)) \quad ; \quad \mathcal{H} \mathrel{\hat{=}} \text{Hilberttrafo}$$

$$= x(t) + j\cdot \hat{x}(t)$$

$$X_a(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} + j\,\mathcal{F}\{\hat{x}(t)\}$$

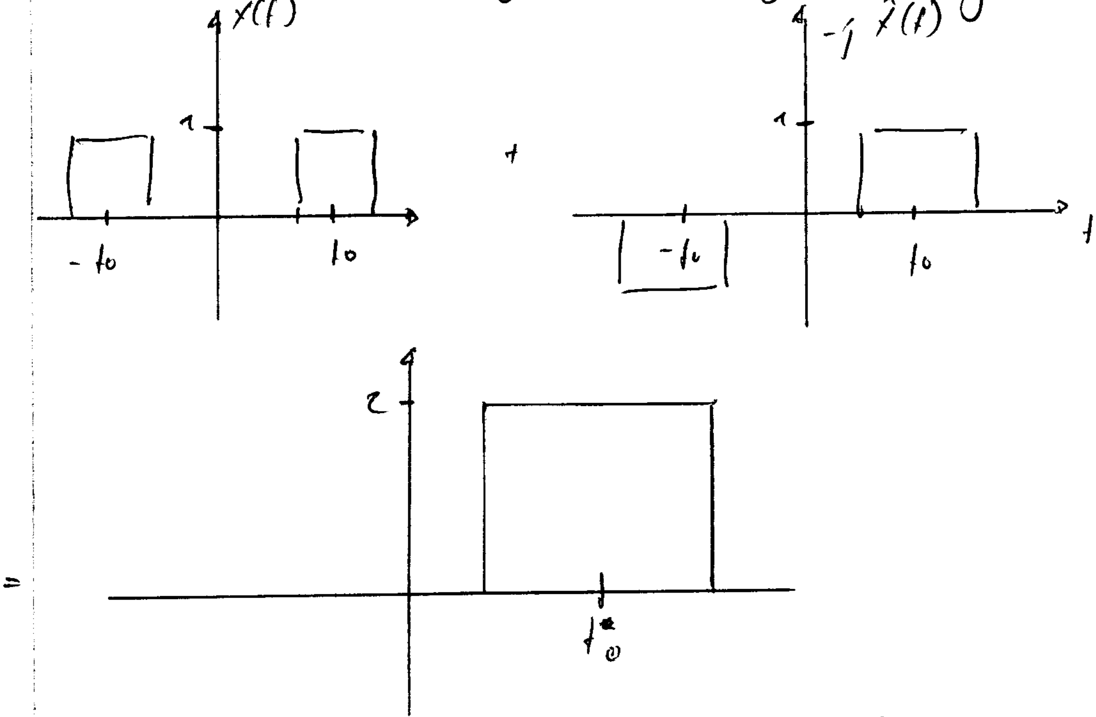
$$= X(f) + j\,\hat{X}(f) = X(f) + j\{-j\,\mathrm{sign}(f)\cdot X(f)\}$$

$$= X(f)\,[1 + \mathrm{sign}(f)]$$

$$= \begin{cases} 2\cdot X(f), & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ keine neg. Frequenzkomponenten mehr

29.06.11

Ein komplexes Zeitsignal, dessen Imaginärteil die Hilberttransformierte des Realteils ist, besitzt stets ein Spektrum, dass für neg. Frequenzen verschwindet. Man nennt solche Signale „analytische Signale“



Analytische Signal = Signal + erweitertes (künstl.) Signal damit neg. Frequenzen wegfallen.