

MSK: Übung 10MIMO-Kanäle: Signalweiterleitung und Kapazitätsberechnung

Übertragung wird beschrieben durch eine Kanalmatrix

$$H(t, \tau) = \begin{pmatrix} h_{11}(t, \tau) & \dots & h_{1M_T}(t, \tau) \\ h_{21}(t, \tau) & \dots & h_{2M_T}(t, \tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M_R 1}(t, \tau) & \dots & h_{M_R M_T}(t, \tau) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{M_R \times M_T}$$

1. Index: Empfangsanne
2. Index: Sendeanne

$M_R$  = Anzahl der Empfangsanne

$M_T$  = Anzahl der Sendeanne

Einfachheit halber hier:  $M_R = M_T = M$

Ist unser Kanal zeitvariant und zusätzlich frequenzlos, so vereinfacht sich die Kanalmatrix zu:

$$H(t, \tau) = H = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MM} \end{pmatrix}$$

mit  $a_{ij} = h_{ij}$  konstant für  $1 \leq i, j \leq M$

In jeder Empfangsanne  $i \in \{1, \dots, M\}$  erhält man  
 ein Signal von Sendekanäle  $j=i$  zusätzlich Signal-  
 anteile der Sendekanäle  $j \neq i$ .

Diese überlagern sich und erschweren das Herausfiltern der  
 gewünschten Signale.

Eine Methode zur Separierung der Übertragungskanäle in  $M$   
 unabhängige Kanäle, d.h.

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & , i=j \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

ist die Singulärwertzerlegung =

$$H = U \cdot \Sigma \cdot V^H, \text{ wobei}$$

$H$  komplexe Kanalmatrix

$U, V^H$  unitäre Matrizen (komplexwertig)

$\Sigma$  Diagonalmatrix (reell)

$$U \cdot U^H = V^H V = I \text{ und}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_M \end{pmatrix}, \lambda_i > 0 \quad (1 \leq i \leq M)$$

$\lambda_i$  sind die Singulärwerte von  $H$

$\Rightarrow$  die Kapazität des MIMO-Kanals ergibt sich dann zu

$$C_{\text{MIMO}} = \sum_{i=1}^M B \cdot \log \left( 1 + \frac{\lambda_i^2 \cdot S}{M \cdot N_0} \right)$$

Spezialfall: keine Dämpfung bei der Übertragung

01.07.14

$$\xi_i = 1 \quad ; \quad i=1, \dots, M$$

$$C_{MIMO,s} = M \cdot B \cdot \ln \left( 1 + \frac{S}{M \cdot N_0} \right)$$

In der Realität gilt dies in der Regel nicht und die Kapazität wird einen geringeren Wert annehmen.

Idee: zur Singulärwertzerlegung

$$H = U \cdot \Sigma \cdot V^H, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_M \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \text{ Singulärwerte von } H$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} H^H \cdot H &= (U \cdot \Sigma \cdot V^H)^H (U \cdot \Sigma \cdot V^H) \\ &= V \cdot \Sigma^H \cdot U^H \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^H \\ &= V \cdot \Sigma^T \Sigma \cdot V^H \end{aligned}$$

$\Rightarrow H^H \cdot H$  ist ähnlich zu  $\Sigma^T \Sigma$

$\hookrightarrow$  Die Wurzeln der EW  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  von  $H^H H$  sind die Singulärwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  von  $H$   
Also:

$$\lambda_i = \sqrt{\sigma_i} \quad i=1, \dots, M \quad \Rightarrow \Sigma$$

$\Rightarrow$  Rückführung auf Eigenwertprobleme. Die Matrix  $V$  setzt sich aus den EVs  $V_i$  zu den EW  $\sigma_i$  ( $i=1, \dots, M$ ) von  $H^H H$  zusammen.

Inschließend kann die Matrix  $U$  mit Hilfe von

$$H \cdot V = U \cdot \Sigma \text{ berechnet werden}$$

Bsp:  $M = M_R = M_T = 2$

$$H = \begin{pmatrix} 0,1 - 0,3j & -0,2 - 0,4j \\ 0,1 - 0,1j & 0,5 - 0,1j \end{pmatrix}$$

1) Berechnung der EW  $H^{*T} \cdot H$

$$H^{*T} = \begin{pmatrix} 0,1 + 0,3j & 0,1 + 0,1j \\ -0,2 + 0,4j & 0,5 + 0,1j \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H^{*T} \cdot H = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,16 - 0,06j \\ 0,16 + 0,06j & 0,46 \end{pmatrix}$$

Die EW  $\sigma_1, \sigma_2$  ergibt sich als NS aus dem char. Polynom:

$$\begin{aligned} \chi(\sigma) &= (0,12 - \sigma)(0,46 - \sigma) - (0,16 + 0,06j)(0,16 - 0,06j) \\ &= \sigma^2 - 0,58\sigma + 0,026 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = 0,29 \pm \sqrt{0,0841 - 0,026}$$

$$\sigma_1 \approx 0,531 \quad \sigma_2 \approx 0,049$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \approx \sqrt{0,531} \quad \lambda_2 \approx \sqrt{0,049}$$

$$H = U \cdot \Sigma \cdot V^{*T} \quad \text{mit} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Kapazitätsberechnung -

$$\Rightarrow C_{\text{MIMO}} = \sum_{i=1}^2 B \cdot \log \left( 1 + \frac{\lambda_i^2 S}{2 \cdot N_0} \right)$$

$$= B \cdot \log \left( 1 + 0,531 \cdot \frac{S}{2N_0} \right) + B \cdot \log \left( 1 + 0,049 \cdot \frac{S}{2N_0} \right)$$

$$C_{\text{HMO},s} = 2 \cdot B \cdot \ln \left( 1 + \frac{s}{2x_0} \right)$$

Zusätzliche Maßnahme an Empfänger senken.

$$C_{\text{HMO},\text{nar}} = 2 \cdot B \cdot \ln \left( 1 + \frac{s}{2x_0} \right)$$

