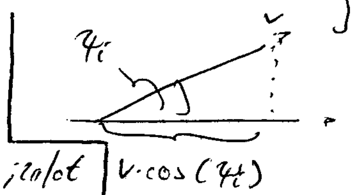
13.05.11

MSK: Übung 4

Rayleigh Fading bei Mehrwegeausbreitung und Mobilität

Das Empfangssignal $g(t)$ lässt sich bei Mehrwegeausbreitung und Bewegung beschreiben durch folgende Formel (ohne Sichtverbindung):

$$g(t) = Re\left\{ \sum_{i=0}^{N} A_i \, e^{j2\pi\left(f_0 + f_0 \frac{v}{c}\cdot\cos(\psi_i)\right)t} \right\}$$



Analytisches Signal:

$$g_a(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i \cdot e^{j\underbrace{2\pi f_0 \frac{v}{c}\cdot\cos(\psi_i)t}_{\theta_i}} \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

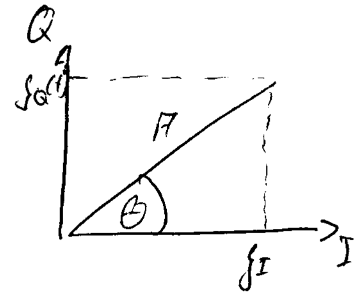
jeden Pfad mit best. Phase
hier durch Dopplereffekt

$$= \left[\sum_{i=0}^{N} A_i \cdot \cos\theta_i + j\sum_{i=0}^{N} A_i \sin\theta_i\right]\cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

$$= A\cdot e^{j\theta}\,e^{j2\pi f_0 t} = \left[g_I(t) + j\cdot g_Q(t)\right]$$

$$\text{mit } A = \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{N} A_i\cdot\cos\theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{N} A_i \sin\theta_i\right)^2}$$

$$= \sqrt{g_I^2(t) + g_Q^2(t)}$$



$$\text{mit } \theta = \arctan\left\{\frac{g_Q(t)}{g_I(t)}\right\}$$

In der Praxis ist es unmöglich alle Amplituden A_i und Phasen θ_i der Einzelwelle zu bestimmen. Daher werden A_i und θ_i als Zufallsgrößen behandelt.

Eine Größe, die aus zwei Summen an Zufallsgrößen besteht, ist selbst auch eine Zufallsgröße.

D.h. $g_I = \sum_i g_{Ii}$; $g_a = \sum_i g_{ai}$

Aus zentralem Grenzwertsatz folgt:

$$p_{g_I}(g_I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{g_I^2}{2\sigma^2}}$$

$$p_{g_a}(g_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{g_a^2}{2\sigma^2}}$$

Außerdem gilt wegen stat. Unabhängigkeit

$$p_{g_I, g_a}(g_I, g_a) = p_{g_I}(g_I) \cdot p_{g_a}(g_a)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(g_I^2 + g_a^2)}{2\sigma^2}}$$

→ Variablentrafo von $p_{g_I g_a}$ nach $p_{A\theta}$ mit

$$p_{A,\theta}(A, \theta) = p_{g_I, g_a} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{dg_I}{dA} & \frac{dg_a}{dA} \\ \frac{dg_I}{d\theta} & \frac{dg_a}{d\theta} \end{vmatrix}}_{\text{Jacobische Det. } J}$$

und $g_I + j g_a = A \cdot e^{j\theta}$

$\Rightarrow g_I = A \cdot \cos(\theta)$; $g_a = A \cdot \sin(\theta)$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -A \cdot \sin(\theta) & A \cdot \cos\theta \end{vmatrix} = A$$

$$\Rightarrow p_{A,\theta}(A, \theta) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{A}{2\sigma^2}}$$

13.05.11

Über die Randverteilung von $p_{A,\Theta}(A,\Theta)$ lassen sich die Verteilungsdichtefunktion der Phase Θ und der Amplitude A berechnen:

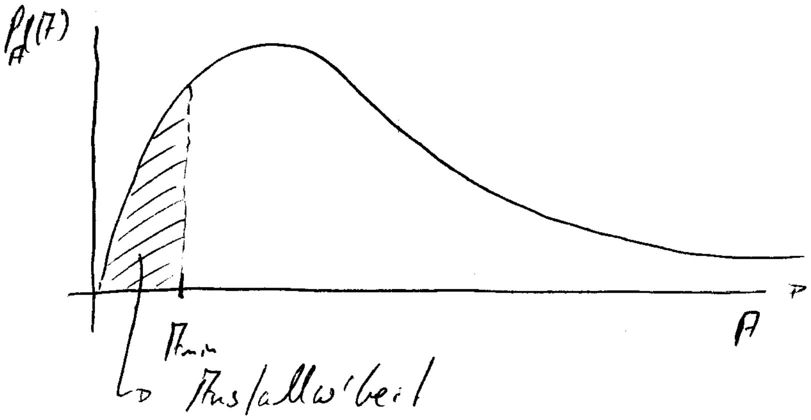
$$p_\Theta(\Theta) = \int_0^\infty p_{A,\Theta}(A,\Theta)\, dA = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) dA$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}$$

=> Signale kommen aus allen Richtungen mit selber W'keit

$$p_A(A) = \int_0^{2\pi} p_{A,\Theta}(A,\Theta)\, d\Theta = \frac{A}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)$$

Rayleigh-Verteilung auf $[0,\infty)$



Die Ausfallw'keit (DP, dropout propability) bei der der zum Empfang mind. erforderliche Pegel A_{min} ($P_{min} = \frac{A_{min}^2}{2}$) unterschritten wird ist:

$$DP = \int_0^{A_{min}} \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) dA = -\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_0^{A_{min}}$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{A_{min}^2}{2\sigma^2}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{P_{min}}{\sigma^2}\right)$$