NuMa
Ü3
-1-

ad Aufgabe 7 c)

27.06.2011

$$P = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 12 \\ 0 & 8 & -16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung von $Ax=b$ $\longrightarrow x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 16 & -12 \\ -3 & 0 & -14 \\ 12 & 24 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathcal{K}^\infty(A) \cdot \frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \cdot \frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

$$\leq 48 \cdot 11 \cdot \frac{0,5}{12} = 22$$

$$\left[b = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8,5 \\ 12 \end{pmatrix} \right.$$

Tatsächlicher Fehler: Setze $R\tilde{x} = \tilde{y}$ und löse $L\tilde{y} = \underset{!}{\underline{P}} \cdot \tilde{b}$

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{Löse } R\tilde{x} = \tilde{y} \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$\tilde{x}$ ist Lösung von $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{2,5}{2} = 1,25$$

Aufgabe 8 (korrekter)

$$[\mathcal{K}(A)]^{-1} \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \mathcal{K}(A) \cdot \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} = \frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|b\|} = \frac{\|Ax - A\tilde{x}\|}{\|Ax\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|x-\tilde{x}\|}{\inf\limits_{\tilde{x}\neq 0} \frac{\|A\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \cdot \|x\|}$$

~~Quo~~ ?!

$\left[\inf\limits_{\tilde{x}\neq 0} \frac{\|A\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \cdot \|x\| \leq \|Ax\| \right]$

$$\underset{y=A\tilde{x}}{=} \frac{\|A\| \cdot \|x-\tilde{x}\|}{\inf\limits_{y\neq 0} \frac{\|y\|}{\|A^{-1}y\|} \cdot \|x\|} = \underbrace{\sup_{y\neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|}}_{=\|A^{-1}\|} \cdot \|A\| \cdot \frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$$

$$= \mathcal{K}(A) \cdot \frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$$

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}Ax - A^{-1}A\tilde{x}\|}{\|A^{-1}b\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b - A\tilde{x}\|}{\|A^{-1} \cdot b\|}$$

$$\underset{b\neq 0}{\leq} \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{r}\|}{\frac{\|A^{-1}b\|}{\|b\|} \cdot \|b\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{r}\|}{\inf\limits_{\tilde{b}\neq 0} \frac{\|A^{-1}\tilde{b}\|}{\|\tilde{b}\|} \cdot \|b\|} \underset{c=A^{-1}\tilde{b}}{=} \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{r}\|}{\inf\limits_{c\neq 0} \frac{\|c\|}{\|Ac\|} \cdot \|b\|}$$

$$= \underbrace{\sup_{c \neq 0} \frac{\|A \cdot c\|}{\|c\|}}_{=:\|A\|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} = \kappa(A) \cdot \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$$

Aufgabe 9 (Nachiteration)

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}17 \\ 0{,}2 & 0{,}17 & 0{,}12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}75 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}02 \\ 0 & 0 & -0{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}2475 & 0{,}1975 & 0{,}17 \\ 0{,}198 & 0{,}17 & 0{,}12 \end{pmatrix}$$

$LR\tilde{x} = b$

a) $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ | Vorwärtseinsetzen: löse $Ly = b$

(setze) $R\tilde{x} = y \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}05 \\ -0{,}100 \end{pmatrix}$

Rückwärtseinsetzen

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1{,}\overline{51} \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

b) relativer Fehler in $\|\cdot\|_1$?

$$\underbrace{\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}}_{=:r_x} \leq \frac{\kappa(A)}{\underbrace{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \kappa(A)}_{\overset{!}{>}0}} \cdot \underbrace{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}_{=:r_A}$$

$\hat{\kappa}(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = (0{,}33+0{,}25+0{,}2) \cdot 103{,}42 = 80{,}667$

$\|\Delta A\|_1 = 0{,}0025 + 0{,}002 = 0{,}0045$

$r_A = \frac{0{,}0045}{0{,}78} = 0{,}0057692$

$r_A \cdot \hat{\kappa}(A) = \underbrace{0{,}0057692 \cdot 80{,}667}_{=0{,}465739} < 1 \Rightarrow$ Voraussetzung für Fehlerformel sind erfüllt

$r_x \leq 0{,}87052$. Der Fehler beträgt höchstens 87%

c) $r_0 = b - Ax_0 = -\begin{pmatrix} 0{,}06 \\ 0{,}04 \\ 0{,}04 \end{pmatrix}$

Vorwärtseinsetzen $r_0 \rightsquigarrow y_0$:

$y = \begin{pmatrix} -0{,}06 \\ +0{,}005 \\ -0{,}014 \end{pmatrix}$ Rückwärtseinsetzen: $y \to \Delta x = -\begin{pmatrix} 0{,}24242 \\ 0{,}2 \\ -0{,}35 \end{pmatrix}$

$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = \begin{pmatrix} 1{,}7576 \\ -0{,}2 \\ 2{,}35 \end{pmatrix}$ 27.06.2011

„exakte" Lösung (auf 5 Stellen) $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1{,}7094 \\ -0{,}17094 \\ 2{,}3932 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10 (Cholesky-Zerlegung)

→ vor der Klausur mal selbst rechnen

$S = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ -6 & 21 & -3 \\ 18 & -3 & 37 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix}$

$S = LDL^T$

Symmetrie liegt vor,
Pos. Definitheit durch pos. Einträge auf der Diagonalen in D

S symmetrisch

$d_{11} = a_{11} = 12, \quad l_{11} = 1$

$l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 21 - \frac{1}{4} \cdot 12 = 18$

$l_{22} = 1$

$l_{32} = \frac{1}{d_{22}}(a_{32} - l_{31} d_{11} l_{21}) = \frac{1}{18}\left(-3 - \frac{3}{2} \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{3}$

$d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{31}^2 d_{22} = 8$

$A = L \cdot D \cdot L^T$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \forall d_{ii} > 0 \Rightarrow S$ ist s.p.d.

b) $\det(A) = \det(L \cdot D \cdot L^T) = \underbrace{\det(L)}_{1} \det(D) \underbrace{\det(L^T)}_{1} = 1 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 8 \cdot 1 = 1728$

c) $S \cdot x = b$

$\Leftrightarrow L\underbrace{DL^T x}_{=:y} = b$

Vorwärtseinsetzen: $Ly = b \Rightarrow$ $y_1 = 6$
$y_2 = 3 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 6$
$y_3 = 19 - \frac{3}{2} \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 6 = 8$

„Skalieren" liefert: $D\underbrace{L^T x}_{=:z} = y$

„löse" $D \cdot z = y \Rightarrow z = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \cdot 6 \\ \frac{1}{18} \cdot 6 \\ \frac{1}{8} \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\ulcorner D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \lrcorner$

Rückwärtseinsetzen: $L^T x = z \Rightarrow$ $x_3 = 1$
$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$
$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 1 = -1$

Lösung ist $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Aufgabe 11</u>

A, b siehe Aufgabenblatt

$\begin{pmatrix} 21 & -51 & 86 \\ 0 & -25 & 62 \\ \boxed{28} & 28 & -177 \end{pmatrix}$ | $r = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$
$c = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$
$s = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$

mul $G_{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ bitte <u>nie</u> direkt benutzen

$G_{1,3} A = \begin{pmatrix} r & * & * \\ 0 & -25 & 62 \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 35 & -5 & -10 \\ 0 & -25 & 62 \\ 0 & 60 & -115 \end{pmatrix}$ | NR $\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$