NuMa

Ü2 -1-

20.05.2011

Klausurrelevant, was in der Übung dran kommt

A5 $f(x) = \dfrac{\sin(x) - 1}{\cos(x)} \quad x \in [0, \frac{\pi}{3}]$

a) $f'(x) = \dfrac{\cos^2(x) - (\sin(x)-1)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \dfrac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)}$

$\kappa_{rel}(x) = \left| \dfrac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right| = \left| -\dfrac{x}{\cos(x)} \right| = \dfrac{x}{\cos(x)}$, da $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$

$\kappa_{rel}'(x) = \dfrac{\cos(x) + x \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} > 0$, da $\sin(x) \geq 0, \cos(x) \geq 0 \quad (x \in [0, \frac{\pi}{3}])$

Da $\kappa'_{rel}(x) > 0$, ist $\kappa_{rel}(x)$ monoton steigend $(x \in [0, \frac{\pi}{3}])$

$0 = \kappa_{rel}(0) \leq \kappa_{rel}(x) \leq \kappa_{rel}(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3} \hat{=} 2,094395$

$\Rightarrow$ Das Problem $f(x)$ auszuwerten ist gut konditioniert

b) $x_0 = 1,5$, $f(x_0) = ?$

"Exakt": $\boxed{\text{rad!}}$ nicht deg

$f(1,5) = \dfrac{\sin(1,5) - 1}{\cos(1,5)} = \dfrac{0,99749499 - 1}{0,0707372003} \doteq -0,03541295$

3. st. GPA:

$f(1,5) \doteq \dfrac{0,997 - 1}{0,0707} \doteq -\dfrac{0,003}{0,0707} = -0,042432815 \doteq -0,0424$

Beob. Auslöschung bei der Subtraktion im Zähler

c) Transformieren $f(x)$ in eine für $x \approx \frac{\pi}{2}$ numerisch stabile Darstellung

$f(x) = \dfrac{\sin(x) - 1}{\cos(x)} = \dfrac{\sin^2(x) - 1}{\cos(x)[\sin(x) + 1]} = \dfrac{-\cos^2(x)}{\cos(x)[\sin(x) + 1]} = \dfrac{-\cos(x)}{\sin(x) + 1}$

$f(1,5) \underset{3.GPA}{\doteq} -\dfrac{0,0707}{0,997 + 1} \doteq -\dfrac{0,0707}{2,00} \doteq -0,0354$

Aufgabe 6 a) $\|\cdot\|_\infty$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_\infty := \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\|x\|_\infty = 2$

(1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positivität)

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (Homogenität)

(3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$ (Δ-Ungl.)

zu (1) $|x_i| \ge 0 \Rightarrow \max\limits_i |x_i| = \|x\|_\infty \ge 0$

$\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max\limits_i |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0 \ \forall_i \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i \Leftrightarrow x = 0$

zu (2) $\|\alpha x\|_\infty = \max\limits_i |\alpha x_i| = |\alpha| \max\limits_i |x_i| = |\alpha| \|x\|_\infty$

zu (3) $\|x+y\|_\infty = \max\limits_i |x_i + y_i| \le \max\limits_i (|x_i| + |y_i|) \le \max\limits_i |x_i| + \max\limits_j |y_j|$

$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

b) $\|x\|_\infty \overset{i)}{\le} \|x\|_2 \overset{ii)}{\le} \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$

i) $\|x\|_2^2 = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \ge x_j^2 \quad \forall_j \Rightarrow \|x\|_2^2 \ge \max\limits_{1\le j\le n} |x_j|^2 =: \|x\|_\infty^2$

Gleichheit für z.B. $(0,1,0,\dots,0)$

ii) $\|x\|_2^2 = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \le \sum\limits_{i=1}^n \max\limits_j |x_j|^2 = n \cdot \max\limits_j |x_j|^2 =: n \cdot \|x\|_\infty^2$

$\Rightarrow \|x\|_2 \le \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

Gleichheit für $(1,1,\dots,1)$

c) c1) $x \mapsto \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}$

c2) $x \mapsto (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$.

c3) $x \mapsto |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2|$

Abb. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $x = (x_1, x_2)$

Mema Ü2 -2-

20.06.2011

c_1) erfüllt (2) nicht

$$\|\alpha x\|_{c_1} = \sqrt{|\alpha x_1|} + \sqrt{|\alpha x_2|} = \sqrt{|\alpha|}\,(|x_1| + |x_2|) = \sqrt{|\alpha|}\,\|x\|_{c_1}$$
$$\neq |\alpha|\,\|x\|_{c_1}$$

c_2) erfüllt (3) nicht

Setze $x = (x_1, 0)$, $y = (0, y_2)$

$$\|x+y\|_{c_2} = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|y_2|}\right)^2 \overset{!}{\leq} \|x\|_{c_2} + \|y\|_{c_2}$$

$$= \sqrt{|x_1|}^2 + \sqrt{|y_2|}^2 + 2\sqrt{|x_1||y_2|} \quad ↯ \text{ (Bin. Formel)}$$

c_3) ist Norm, da

$$(*)\ |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2| = 2\max(|x_1|, |x_2|) = 2\|x\|_\infty$$

1. Fall ~~$|x_1| \geq |x_2|$~~ $x_1 \geq x_2$

$$(*) = x_1 - x_2 + x_1 + x_2 = 2x_1 = 2\max(x_1, x_2) \text{ usw.}$$

A7 -> sehr Klausuraufgabe

Aufgabe 8

A8 -> wollte Dahmen um bed. haben

$$(K(A))^{-1} \cdot \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq K(A)\,\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \qquad Ax = b \rightsquigarrow A\tilde{x} = b$$

$$r = b - Ax$$
$$\tilde{r} = b - A\tilde{x}$$

$$\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} = \frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|b\|} = \frac{\|Ax - A\tilde{x}\|}{\|Ax\|} = \frac{\|A(x - \tilde{x})\|}{\|Ax\|}$$

$$\leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{K(A)} \cdot \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \Rightarrow [K(A)]^{-1}\,\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$$

2. Ungl. $$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}Ax - A^{-1}A\tilde{x}\|}{\|A^{-1}b\|} \leq \|A\|\,\|A^{-1}\| \cdot \frac{\|Ax - A\tilde{x}\|}{\|b\|}$$

$$= K(A)\,\frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|b\|} = \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}\,K(A)$$

Aufgabe 17

alte Klausuraufgabe

$$A=\begin{pmatrix}4 & 16 & -12\\ -3 & 0 & -14\\ 12 & 24 & 12\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3},\quad b=\begin{pmatrix}-4\\ -8\\ +12\end{pmatrix};\quad \tilde{b}=\begin{pmatrix}-4\\ -8{,}5\\ 12\end{pmatrix}$$

a) $P\cdot A = L\cdot R$

$$A=\begin{pmatrix}4 & 16 & -12\\ -3 & 0 & -14\\ 12 & 24 & 12\end{pmatrix}\overset{\sigma_1=(1,3)}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}12 & 24 & 12\\ -3 & 0 & -14\\ 4 & 16 & -12\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}12 & 24 & 12\\ -\frac{1}{4} & 6 & -11\\ +\frac{1}{3} & 8 & -16\end{pmatrix}$$

$$\overset{\sigma_2=(2,3)}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}12 & 24 & 12\\ \frac{1}{3} & 8 & -16\\ -\frac{1}{4} & 6 & -11\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}12 & 24 & 12\\ \frac{1}{3} & 8 & -16\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{\sigma_1(1,3)}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{\sigma_2=(2,3)}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=P$$

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1\end{pmatrix}\qquad R=\begin{pmatrix}12 & 24 & 12\\ 0 & 8 & -16\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) $Ax=b \Leftrightarrow P\cdot Ax = P\cdot b \Leftrightarrow L\underbrace{Rx}_{=y}=P\cdot b$

1. Schritt Löse $Ly=Pb$

$$P\cdot b=\begin{pmatrix}12\\ -4\\ -8\end{pmatrix},\ \text{Vorwärtseinsetzen}: Ly=P\cdot b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 12\\ y_2 = -4-\frac{1}{3}\cdot 12 = -8\\ y_3 = -8+\frac{1}{4}\cdot 12-\frac{3}{4}\cdot(-8)=1\end{cases}$$

Rückwärtseinsetzen $Rx=y$

$x_3 = 1$, $x_2=\frac{1}{8}(-8+16\cdot 1)=1$, $x_1=\frac{1}{12}\cdot(12-12\cdot 1-24\cdot 1)=-2$

$$x=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$