MeMa Ü1 -1- **Übung 1** 6.6.2011

Aufgabe 1 p-q-Formel

$x^2+px+q=0$

$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

a) i) $p=-123$ $q=0{,}4$ ii) $p=-12345$ $q=0{,}0456$

i) 4. GPA, 10. GPA

ex. Rechnung: $\frac{p^2}{4}=\frac{15129}{4}$, $\frac{p^2}{4}-q=\frac{75637}{20}$,

$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\frac{1}{10}\sqrt{378185}$, $+\frac{p}{2}=-\frac{123}{2}$

$x_{1,2}=\frac{123}{2}\pm\frac{1}{10}\sqrt{378185}$

10st. GPA: $x_1 \doteq 122.9967479 = 0{,}1229967479\cdot 10^3$

$x_2 \doteq 0.003252120000 = 0{,}3252120000\cdot 10^{-2}$

4st. GPA: $x_1 \doteq 0{,}123\cdot 10^3$

$x_2 \doteq 0$

ii) $p=-12345$, $q=0{,}0456$

10st. GPA

$p=-12345 \doteq -0{,}12345\overset{00000}{}\cdot 10^5$

$q \doteq 0{,}4560000000\cdot 10^{-1}$

$\frac{p}{2} \doteq -0{,}6172500000\cdot 10^4$

$p^2 \doteq 0{,}1523990250\cdot 10^9$

$\frac{p^2}{4} \doteq 0{,}3809975625\cdot 10^8$

$\frac{p^2}{4}-q \doteq \cancel{0{,}6172500000\cdot 10^8}\ 0{,}3809975620\cdot 10^8$

$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \doteq 0{,}6172390250\cdot 10^4$

$x_1 \doteq 0{,}12345\cdot 10^5$, $x_2 = 0{,}4000000000\cdot 10^{-5}$

4st. GPA

$-p \doteq 0{,}1235\cdot 10^5$

$q \doteq 0{,}4560\cdot 10^{-1}$

$-\frac{p}{2} \doteq 0{,}6175\cdot 10^4$

$p^2 \doteq +0{,}1525 \cdot 10^9$

$\frac{p^2}{4} \doteq 0{,}3813 \cdot 10^8$

$\frac{p^2}{4} - q \doteq 0{,}3813 \cdot 10^8$

$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \doteq 0{,}6175 \cdot 10^4$

$x_1 \doteq +0{,}1235 \cdot 10^5$

$x_2 \doteq -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \doteq 0$

Beobachtung: Auslöschung bei der Subtraktion der Wurzel.

b) Satz des Vieta:

$x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

$x_1 = -\frac{p}{2} + \operatorname{sign}(-p)\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad x_2 = \frac{q}{x_1}$

Rechnung in 4st. GPA

i) $x_1 = 123.0 \doteq 0{,}1230 \cdot 10^3 \qquad x_2 \doteq 0{,}3257 \cdot 10^{-2}$

ii) $x_1 = 12340.0 = 0{,}1234000000 \cdot 10^5$

$x_2 = 0.000003695 = 0.3695 \cdot 10^{-5}$

<u>Aufgabe 2</u> Maschinenzahlen / Rundungsfehler

$f(x,y) = \sqrt{5(x - \sqrt{x^2 - y^2})}$

$f(\frac{1}{8}, \frac{1}{10})$

i) $\mathbb{M}(10, 3, -4, 3)$

ii) $\mathbb{M}(10, 2, -4, 3)$

$f(\frac{1}{8}, \frac{1}{10})$ ex: $\frac{1}{2}$

i) $x = 0{,}125$, $y = 0{,}1$, $x^2 \doteq 0{,}0156$, $y^2 \doteq 0{,}01$

$x^2 - y^2 \doteq 0.0056$, $\sqrt{x^2 - y^2} \doteq 0{,}0748$, $x - \sqrt{x^2 - y^2} \doteq 0{,}0502$

$5(x - \sqrt{x^2 - y^2}) \doteq 0{,}251$, $f_1 \doteq \sqrt{5(x - \sqrt{x^2 - y^2})} \doteq 0{,}501$

$|f(\frac{1}{8}, \frac{1}{10}) - f_1| = 0{,}001 \Rightarrow \frac{|f(\frac{1}{8}, \frac{1}{10}) - f_1|}{|f(\frac{1}{8}, \frac{1}{10})|} = 0{,}002$

NuMa Ü1 -2- 6.6.2011

ii) $x \doteq 0{,}13$, $y \doteq 0{,}1$, $x^2 \doteq 0{,}017$, $y^2 = 0{,}01$

$x^2-y^2 \doteq 0{,}007$, $\sqrt{x^2-y^2} \doteq 0{,}084$

$x-\sqrt{x^2-y^2} \doteq 0{,}046$ $\quad 5(x-\sqrt{x^2-y^2}) = 0{,}23$

$f_2 := \sqrt{5(x-\sqrt{x^2-y^2})} = 0{,}48$

$$|f(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{10})-f_2| = 0{,}02 \Rightarrow \frac{|f(\frac{1}{8},\frac{1}{10})-f_2|}{|f(\frac{1}{8},\frac{1}{10})|} = 0{,}04$$

b) $\frac{\Delta f}{f}$ in Abh. von $\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}$

φ_{xy} (S. 21) | $\frac{\partial}{\partial x} \cancel{\$} f(x,y) = \frac{5}{2\cancel{\$}f(x,y)}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{5}{2f(x,y)} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\varphi_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \cdot \frac{x}{f(x,y)} = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\varphi_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \frac{y}{f(x,y)} = \frac{1}{2}\frac{y^2}{(x-\sqrt{x^2-y^2})\sqrt{x^2-y^2}}$$

Für $(x,y) \simeq (\tilde{x},\tilde{y})$ erhalten wir in 1. Näherung die Fehlerdarstellung:

$$\left|\frac{f(\tilde{x},\tilde{y})-f(x,y)}{f(x,y)}\right| \leq \left|-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \underbrace{\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right|}_{\text{rel. Fehler}} + \left|\frac{1}{2}\frac{y^2}{(x-\sqrt{x^2-y^2})\sqrt{x_1^2-y^2}} \cdot \underbrace{\frac{y-\tilde{y}}{y}}_{\text{rel. Fehler}}\right|\right.$$

im Falle $|x| \simeq |y|$ werden φ_x, φ_y groß

Aufgabe 4 Kondition / Stabilität

$$f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2x+1} - 1$$

a) $\kappa_{rel} = ?$

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2}, \quad \kappa_{rel}(x) = \left|f'(x)\frac{x}{f(x)}\right| = \left|\frac{-2}{(1+2x)^2}\frac{(1+2x)}{-2x}x\right| = \left|\frac{1}{1+2x}\right|$$

Für $x \geq 0$ ist κ_{rel} monoton fallend

$$\kappa_{rel}(x) \leq \kappa_{rel}(0) = 1 \quad \forall x \in (0,\infty)$$

$$\left|\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right| \dot{\leq} \kappa_{rel}(x) \cdot \frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}$$

Das „Problem", f auszuwerten ist gut konditioniert

b) $y_1 = 2x$, $y_2 = y_1 + 1$, $y_3 = \frac{1}{y_2}$, $y_4 = y_3 - 1$,

Ist dieser Algorithmus stabil? ⇒ bei $y_3 \approx 1$ instabil

Der vorgeschlagene Algorithmus ist instabil für $x \approx 0$, da bei der Berechnung von y_4 Auslöschung auftreten könnte / Auslöschungseffekte auftreten könnte

$f(x) = \frac{-2x}{1+2x}$; $y_1 = 2x$, $y_2 = 1 + y_1$, $y_3 = -\frac{y_1}{y_2}$ Dieser Algorithmus ist auch für $x \approx$ stabil