NuMa
Ü5
-1-

Beratung in der vorlesungsfreien Zeit mo/mi, 10-12:00 R224.3 — 11.07.2011

(erst ab nächster Woche!)

Klausur: 60 Punkte, 24 durch „Theorie-Aufgaben"

Erscheint mir etwas viel, aber der Übungsleiter spricht immer so undeutlich...

Aufgabe 18

a) $(*) \begin{cases} 2xy^3 - 12x + 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 8y = 0 \end{cases}$ $\quad D = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$

Idee: Verwende Banach'schen Fixpunktsatz

Dazu: Forme $(*)$ in äquivalentes Fixpunktproblem um

$$(*) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} \frac{1}{6} x y^3 + \frac{1}{12} = x \\ \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{4} y^2 = y \end{cases}}_{=: \Phi(x,y)}$$

suche Fixpunkt (x^*, y^*) mit $\Phi(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$

Voraussetzungen Banach:

- D ist abgeschlossen ✓
- $\Phi : D \to D$

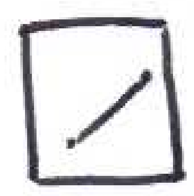
$0 \le \Phi_1(x,y) \le \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \le 1$ $\forall x,y \in D$ Selbstabbildung in 1. Komponente

$0 \le \Phi_2(x,y) \le \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \le 1$ $\forall x,y \in D$: Selbstabbildung in 2. Komponente

$\Rightarrow$ Insg. $\Phi : D \to D$ ✓

- Kontraktion: Verwende MWS bzw. die Folgerung

D ist konvex, d.h. Kontraktion kann mit Hilfe der Ableitung gezeigt werden

Gebiet:  $[0,1] \times [0,1]$

nicht konvex: 

Kontraktion:

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}y^3 & \frac{1}{2}xy^2 \\ \frac{1}{4}x & \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

$$\|\Phi'(x,y)\|_\infty = \max\left\{ |\tfrac{1}{6}y^3| + |\tfrac{1}{2}xy^2|, |\tfrac{1}{4}x| + |\tfrac{1}{2}y| \right\} \underset{\binom{x}{y}\in D}{\leq} \overset{\max}{\{} \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2} \} = \frac{3}{4} =: L$$

MWS

$\Rightarrow$ Φ ist kontrahierend

$\Rightarrow$ alle Voraussetzungen von Banach sind erfüllt, d.h. Φ besitzt einen eindeutigen Fixpunkt

$\Rightarrow$ (*) hat eine eindeutige Nullstelle in D

b) $x^0 = (0{,}5, 0{,}5)^T$ in $\|\cdot\|_\infty$ $\quad \varepsilon := 10^{-5}$

⌈ wenn Kontraktionszahl in $\|\cdot\|_\infty$ abgeschätzt, dann auch immer die Fehlerabschätzung in der gleichen Norm ⌋

$$\|x^* - x^{(k)}\|_\infty \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

$$x^{(1)} = \Phi(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3/32 \\ 3/32 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}09375 \\ 0{,}09375 \end{pmatrix}$$

mit $L = \frac{3}{4}$, $\varepsilon = 10^{-5}$

$$\|x^* - x^{(k)}\|_\infty \underset{\text{schwierig}}{\leq} \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$\leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^k}{1-\frac{3}{4}} \left\| \begin{pmatrix} 0{,}09375 \\ 0{,}09375 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right\|_\infty \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow k \geq \frac{\log\left(\frac{10^{-5} \cdot 0{,}25}{0{,}40625}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 41{,}71$$

$\Rightarrow$ D.h. max 42 Schritte nötig!

MuMa ÜS -2-

11.07.2011

Aufgabe 19 (Newton)

$$\begin{cases} 0 = 4x^3 - 27xy^2 + 25 \\ 0 = 4x^2 - 3y^2 - 1 \end{cases} \quad f(x,y)$$

$$(x^{(0)}, y^{(0)})^T = (1,1)^T$$

a) $$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 27y^2 & -54xy \\ 8x & -6y \end{pmatrix}$$

$$f'(x^{(k)}, y^{(k)})\, s^{(k)} = -f(x^{(k)}, y^{(k)})$$

$$(x^{(k+1)}, y^{(k+1)})^T = (x^{(k)}, y^{(k)})^T + s^{(k)}$$

$$f'(1,1) = \begin{pmatrix} -15 & -54 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -15 & -54 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(0)} \\ s_2^{(0)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4-27+25 \\ 4-3-1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(1,1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -15 & -54 & -2 \\ 8 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1:3 \\ 1:2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -18 & -\frac{2}{3} \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1\cdot 4 \\ 1\cdot 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -20 & -72 & -\frac{8}{3} \\ 20 & -15 & 0 \end{array}\right) \downarrow +$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -20 & -72 & -\frac{8}{3} \\ 0 & -87 & -\frac{8}{3} \end{array}\right) \Rightarrow s_2^{(0)} = \frac{8}{261} \quad s_1^{(0)} = \frac{2}{87}$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = x^{(0)} + s^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{87} \\ \frac{8}{261} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{2}{87} \\ 1\frac{8}{261} \end{pmatrix}$$

Unterschied: Newton vs. vereinfachter Newton

Newton	vereinfachter Newton
s.o.	$\boxed{f'(x^{(0)}, y^{(0)})\, s^{(k)} = -f(x^{(k)}, y^{(k)})}$
2. Ordnung (lokal)	1. Ordnung (lokal)

⌜Musterlösung wird es auf der Institutsseite geben⌟

Aufgabe 20 (Nichtlinearer Ausgleich)

$T = f(t) := 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + t^2}$

$\begin{pmatrix} t & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1{,}0 \\ T & 1{,}55 & 1{,}65 & 1{,}8 & 1{,}95 & 2{,}1 \end{pmatrix}$ [Tabelle]

$\Rightarrow$ nichtlinear, da α auch nichtlinear vorkommt (unter der Wurzel)

a)
$$F(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 0{,}2^2} - 1{,}55 \\ 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 0{,}4^2} - 1{,}65 \\ 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 0{,}6^2} - 1{,}8 \\ 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 0{,}8^2} - 1{,}95 \\ 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} - 2{,}1 \end{pmatrix} =: (f(t_i) - T_i) \text{ für } i = 1, \ldots, 5$$

$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \| F(\alpha) \|_2$ gesucht

2!

b) $\alpha^{(0)} = 0$

$$F'(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 0{,}2^2}} \\ \vdots \\ 2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \end{pmatrix}$$

1. Iteration:

$\| F'(\alpha) \Delta\alpha_1 - (-F(\alpha_0)) \|_2$

Lösung ausnahmsweise über Normalengleichungen

$F'(0)^T F'(0) \Delta\alpha_1 = -F'(0)^T F(0)$

$\Rightarrow 20 \Delta\alpha_1 = 12{,}1 \Rightarrow \Delta\alpha_1 = 0{,}605$

$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha_1 = 0{,}605$

2. Iteration

$F'(\alpha_1) = (2{,}9495,\ 2{,}8342,\ 2{,}7100,\ 2{,}6032,\ 2{,}5176)^T$

NuMa Ü5 -3-

11.07.2011

$$F(0{,}605) = (0{,}2972,\ 0{,}2853,\ 0{,}2621,\ 0{,}2630,\ 0{,}2788)^T$$

Löse $\| F'(0{,}605)\,\Delta\alpha_2 + F(0{,}605) \|_2 \to \min\limits_{\Delta\alpha_2 \in \mathbb{R}}$

$$37{,}1912\,\Delta\alpha_2 = -3{,}7818$$

$$\Rightarrow \Delta\alpha_2 = -0{,}1017$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha_2 = 0{,}5033$$