ad Aufgabe 11

$$\begin{pmatrix} 35 & -5 & -10 \\ 0 & -25 & 62 \\ 0 & 60 & -115 \end{pmatrix} \qquad r=\sqrt{(-25)^2+60^2}=65$$

$$c=\frac{-25}{r}=-\frac{5}{13}$$

$$s=\frac{60}{r}=\frac{12}{13}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 35 & -5 & -10 \\ 0 & 65 & -130 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Anwendung von den Givens-Rot. auf die rechte Seite b

$$b^{(1)}=G_1 b=\begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)}=G_2 b^{(1)}=\begin{pmatrix} 15 \\ 65 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$Ax=b$$

$$QRx=b \qquad Q \text{ orthogonal, d.h. } Q^{-1}=Q^T$$

$$Rx=Q^T b$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir

$$x=\left(\frac{12}{7},5,2\right)^T$$

Aufgabe 13 (Householder)

a)

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -4 \\ 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} -17 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\|Ax-b\|_2=\min_{y\in\mathbb{R}}\|Ay-b\|_2$$

falsch: $Ax=b$
$\Rightarrow$ Punktabzug

Ausgleich immer in der 2-Norm

$$v_1 = a_1 + \operatorname{sign}(a_{11}) \cdot \|a_1\|_2 \cdot e_1$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-) \cdot \frac{11}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\left[Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} \right]$ (wie bei Givens die G_i bitte niemals explizit ausrechnen)

$$n := v^Tv = 110$$

$$A^1 := Q_v A = \left(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\right) \cdot A$$

$$= A - 2\frac{vv^T}{110} \cdot A = A - 2\frac{vv^T}{110}\left(A \right)$$ (mal 2. Vektore)

$$= \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -4 \\ 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{55} \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{(-10, 3, 1) \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -4 \\ 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{zuerst ausrechne (einfacher)}}$$

$$= \text{—}\|\text{—} \quad - \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 3 & \frac{9}{5} \\ 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{24}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$$b^{(1)} := b - \frac{2}{n} v_1 \cdot \underbrace{v_1^T \cdot b}_{\text{zuerst berechnen}} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} - \frac{1}{55} \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-10, 3, 1) \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

2. Spiegelung $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$ A^1

$$\hat{A}^1 := \begin{pmatrix} -\frac{24}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} \qquad \hat{b}^1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Numa
Ü4
-2-

04.07.2011

Bei Dezimalzahlen mind. 4 signifikante Stellen

$$v_2 = \tilde{a}_1 + \operatorname{sign}(\tilde{a}_{11}) \cdot \underbrace{\|\tilde{a}_1\|}_{\alpha} e^1 = \begin{pmatrix} -\frac{24}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + (-1) \cdot 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{49}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$$n := v_2^T v_2 = 98$$

$$Q_{v_2} \tilde{A}^1 = \alpha e1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}^{(2)} := \tilde{b}^{(1)} - \frac{2}{n} v_2 \underbrace{v_2^T \tilde{b}^{(1)}}_{\text{zuerst berechnen}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Löse $\|Ax - b\|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^2} \|Ay - b\|_2$

Es gilt $\|Ax - b\|_2 = \|QRx - b\|_2 = \|Q(Rx - Q^T b)\|_2$
$= \|Rx - Q^T b\|_2$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q^T b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \hline -11 \end{pmatrix} \quad \text{Lösen} \left(\begin{matrix} \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 5 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right) \rightsquigarrow x = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

ist Lösung des linearen Ausgleichproblems

b) Residuum $\quad res := \|Ax - b\|_2 = 11$

Falls $R = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q^T b = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \hline 2 \\ 7 \end{pmatrix} \Big] \; \underline{res \|\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}\|_2}$

Aufgabe 14 (Householder)

(nur a-c)

$$Q_v := I - 2\frac{vv^T}{v^T v}$$

a) $Q_v = Q_v^T \;\Big|\; Q_v^T = \left(I - 2\frac{vv^T}{\underbrace{v^T v}_{\text{skalar}}}\right)^T = I - 2\frac{(vv^T)^T}{v^T v} = I - 2\frac{(v^T)^T v^T}{v^T v} = Q_v$

b) $Q_v^2 = I, \; Q_v y = y \Leftrightarrow v \perp y$

$$Q_v^2 = \left(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right)\left(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right) = I - 4\frac{vv^T}{v^T v} + 4\frac{v\cancel{v^T v}v^T}{\cancel{v^T v}\,v^T v}$$

skalar kürzen

$$= I - 4\frac{vv^T}{v^T v} + 4\frac{vv^T}{v^T v} = I$$

$Q_v y = y \Leftrightarrow y - 2\frac{vv^T}{v^Tv} y = y$

$\Leftrightarrow \quad 0 = vv^Ty \Leftrightarrow v^Ty = 0 \Leftrightarrow y \perp v$

c) $Q_v \cdot v = -v$

$Q_v \cdot v = v - 2\frac{v\cancel{v^T}}{\cancel{v^Tv}} \cancel{v} = v - 2v = -v$

e) Q ist Spiegelung an der (Hyper-)Ebene, zu der v ein Normalenvektor ist

Aufgabe 15 — Das gibt es in fast jeder Klausur

$E := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 + \alpha \cdot u + \beta v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^3\}$

Gesucht: $x \in E, y \in \mathbb{R}^3, y \notin E \quad \min \|x-y\|_2 \rightsquigarrow \min$

a) $\|x-y\|_2 = \| x_0 + \alpha u + \beta v - y\|_2$

$$= \Bigg\| \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}}_{\text{"}A\text{"}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\text{"}x\text{"}} + \underbrace{x_0 - y}_{\text{"}-b\text{"}} \Bigg\|_2 = \left\| Ax - \begin{pmatrix} y_1 - x_{0\,1} \\ y_2 - x_{0\,2} \\ y_3 - x_{0\,3} \end{pmatrix} \right\|_2 \rightarrow \min_{\bar{x} \in \mathbb{R}^2} \|A\bar{x} - b\|$$

b) $\frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)}$, 1) $\kappa_2(A) \gg 1$, 2) $\cos(\Theta) \approx 0$ $\Big\} \Rightarrow$ lineare Ausgleichsproblem schlecht konditioniert

Aufgabe 17 (Singulärwertzerlegung)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \left\| \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 16 & 52 & 80 \\ 44 & 80 & -32 \\ -9 & -36 & -72 \\ -16 & -16 & 64 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2$$

$A = U \Sigma V^T$

$\hat{x} = A^+ b$, A^+ Pseudoinverse, $\hat{x}$ Lsg. des lin. Ausgleichsproblems mit minimaler $\|\cdot\|_2$-Norm

$A^+ = V \Sigma^+ U^T$

NuMa
Ü4
-3-

mit $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \frac{1}{\sigma_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x} = V\Sigma^+ U^T b$$

bitte in der Reihenfolge rechnen

dumm!

$$= V\Sigma^+ U^T \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = V\Sigma^+ \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ 69 \\ -20 \end{pmatrix} = V \cdot \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 17 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 13 \\ 27 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ist Lösung mit min. 2-Norm

Gesamtheit aller Lösungen $L(b)$ ist gegeben durch

$L(b) = \hat{x} + \text{Kern}(A)$

$\hat{x}$ geht auch

wobei x <u>eine</u> spezielle Lösung ist

Aufgabe 16 → online

kein MC in der Klausur! Dafür aber eher eine theorielastigere Aufgabe