20.04.10
ET IV
Übung

GGET IV Übung

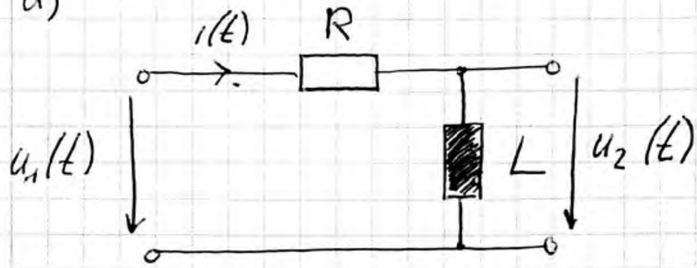
- spietz @ iehr.rwth-aachen.de

"Nach dem Leben ist es wie
vor dem Leben!" (Ketov)

ketov@gmx.de

Aufgabe 1.1

a)



$$u_1(t) = R\,i(t) + u_2(t) \qquad \text{mit} \quad u_2(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int u_2(t)\,dt$$

$$u_1(t) = \frac{R}{L}\int u_2(t)\,dt + u_2(t)$$

$$\text{mit} \quad u_1(t) = \underbrace{B}_{\text{Amplitude}}\,\underbrace{e^{j2\pi ft}}_{\text{Frequenz + Phase}}$$

$\boxed{H(f) \in \mathbb{C}}$

$$\Rightarrow u_2(t) = B \cdot H(f)\, e^{j2\pi ft}$$

siehe auch Formeln 2.1 – 2.3

„Eigenfunktion von LTI-Systemen"

Vorteil der komplexen Wechselstromrechnung

$$B\,e^{j2\pi ft} = \frac{R}{L}\int B H(f)\, e^{j2\pi ft}\,dt + B\,H(f)\,e^{j2\pi ft}$$

$$= \frac{R}{L}\,B\,\underline{\underline{H(f)}}\,\frac{1}{j2\pi f}\,e^{j2\pi ft} + B\,\underline{\underline{H(f)}}\,e^{j2\pi ft}$$

$T := \frac{L}{R}$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{R}{j2\pi f L} + 1\right) H(f)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + \frac{R}{j2\pi f L}} = \frac{j2\pi f \frac{L}{R}}{1 + j2\pi f T}$$

$[L] = \text{Henry} = \Omega s$

$[R] = \Omega$

$\left[\frac{L}{R}\right] = [T] = s$

$$H(f) = \frac{j2\pi f T}{1 + j2\pi f T}$$

Betrag: $$|H(f)| = \frac{|2\pi f T|}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}}$$ $\longleftarrow$ Betrag!

keine Wurzel!

Phase: $$H(f) = \frac{j2\pi f T \;(1 - j2\pi f T)}{(1 + j2\pi f T)(1 - j2\pi f T)}$$

$$= \underbrace{\frac{(2\pi f T)^2}{1 + (2\pi f T)^2}}_{= Re\{H(f)\}} + j \underbrace{\frac{2\pi f T}{1 + (2\pi f T)^2}}_{= Im\{H(f)\}}$$ Aufteilung für Phase $\varphi(f)$

$$\boxed{\text{Realteil} \neq \text{Betrag}}$$

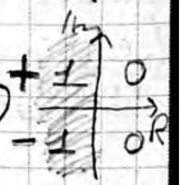
+ 2 Quadrant

$$\varphi(f) = \arctan\left(\frac{Im\{H(f)\}}{Re\{H(f)\}}\right) \pm k(f)\pi \;, \; k(f) = \begin{cases} 0 \;; Re \geq \\ 1 \;; Re < \end{cases}$$

− 3 Quadrant

$$= \arctan\left(\frac{1}{2\pi f T}\right) \;, \text{ da } Re\{H(f)\} \geq 0$$

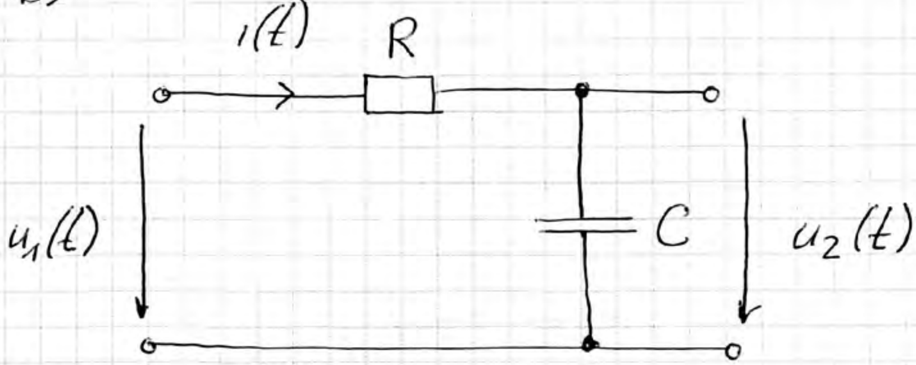
$$(\Rightarrow k(f) = 0)$$



RL − Hochpass
(Vgl. Pole/NST)

ketov@gmx.de

b)



$$u_1(t) = i(t)R + u_2(t) \quad \text{mit} \quad i(t) = C\,\frac{du_2(t)}{dt}$$

$$u_1(t) = RC\,\frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t)$$

$$\text{mit} \quad u_1(t) = B e^{j2\pi f t}$$

$$u_2(t) = B H(f)\, e^{j2\pi f t}$$

$$B e^{j2\pi f t} = RC B H(f)\, j 2\pi f\, e^{j2\pi f t} + B H(f)\, e^{j2\pi f t}$$

$$1 = j 2\pi f RC\, H(f) + H(f)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j 2\pi f RC} \quad ; \ RC = T$$

Zeitkonstante

$$H(f) = \underbrace{\frac{1}{1+(2\pi f T)^2}}_{= Re\{H(f)\}} - j\,\underbrace{\frac{2\pi f T}{1+(2\pi f T)^2}}_{= -Im\{H(f)\}}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f T)^2}} \quad ; \ \varphi(f) = \arctan(-2\pi f T)$$

$$(\varphi(f) \leq 0, \text{ da } Re\{H(f)\} \geq 0)$$

3dB-Punkte bei $\frac{1}{\sqrt{2}} = |H(f)|$

RC-Tiefpass

Stationäre Betrachtung ohne Einschaltvorgänge

Aufgabe 1.2

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cos(2\pi f t + \phi_1)$$
$$= Re\{ \hat{u}_1 e^{j(2\pi f t + \phi_1)} \}$$

$$u_2(t) = Re\{ \hat{u}_1 e^{j(2\pi f t + \phi_1)} H(f) \}$$
$$= Re\{ \hat{u}_1 e^{j(2\pi f t + \phi_1)} |H(f)| e^{j\varphi(f)} \}$$
$$= \hat{u}_1 |H(f)| \cos(2\pi f t + \phi_1 + \varphi(f))$$

Alternativ (vom Prof. Ohm)

Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)} = \frac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_1}$$ komplexer Drehzeiger aus der Wechselstromtechnik

$$= \frac{\underline{\hat{u}}_2 e^{j2\pi f t}}{\underline{\hat{u}}_1 e^{j2\pi f t}}$$ Äquivalent zu Zeitsignal

Eingangssignal: $u_1(t) = \hat{u}_1 \cos(2\pi f t + \phi_1)$

$$= Re\{ \hat{u}_1 e^{j(2\pi f t + \phi_1)} \}$$
$$= Re\{ \underbrace{\hat{u}_1 e^{j\phi_1}}_{= \underline{\hat{u}}_1 \text{ (Phasor)}} e^{j2\pi f t} \}$$

$$\Rightarrow u_1(t) = Re\{ \underbrace{\underline{\hat{u}}_1 e^{j2\pi f t}}_{= \text{(Sinor)}} \}$$

Vgl ET2

$$\underline{\hat{u}}_2 = H(f)\,\underline{\hat{u}}_1 = |H(f)|\,e^{j\phi(f)}\,\hat{u}_1\,e^{j\phi_1}$$

$$= \hat{u}_2\,e^{j\phi_2} = |H(f)|\,\hat{u}_1\,e^{j(\phi_1+\phi(f))}$$

Merke

Betrag, Multiplikation $\quad \boxed{\hat{u}_2 = \hat{u}_1\,|H(f)|}$

Phase, Addition $\quad \boxed{\phi_2 = \phi_1 + \phi(f)}$

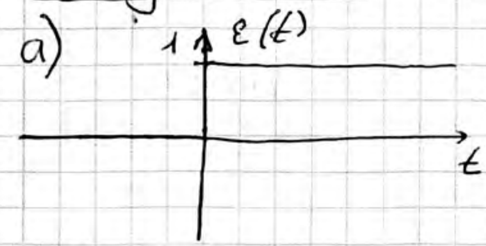
$$u_2(t) = Re\{\underline{\hat{u}}_2\,e^{j2\pi ft}\}$$

$$= Re\{\hat{u}_2\,e^{j\phi_2}\,e^{j2\pi ft}\}$$

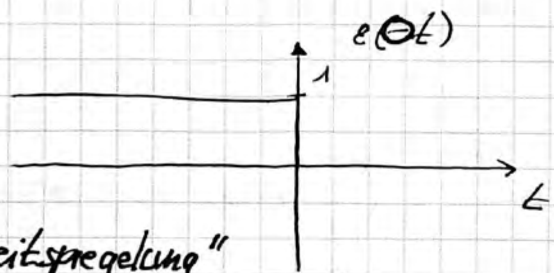
$$= \hat{u}_2\cos(2\pi ft + \phi_2) = \hat{u}_1\,|H(f)|\cos(2\pi ft + \phi_1 + \phi(f))$$

Aufgabe 1.3

a)



=>



„Zeitspiegelung"

SSV
1) Spiegeln (S)
2) Strecken/Stauchen (S)
3) Verschieben (V)

Verschiebung + Zeitspiegelung: Reihenfolge nicht egal

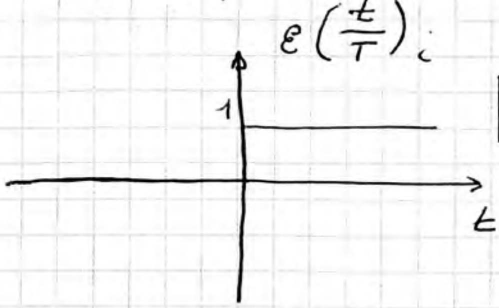
oder?

$\varepsilon(1-t)$ $\quad$ [$\varepsilon(t)$ Sprungstelle bei $t=0$]

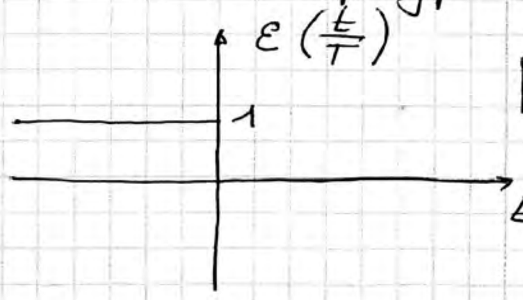
$\Rightarrow 1-t=0 \Leftrightarrow t=1$

→ Zeitspiegelung nicht vergessen!

$\varepsilon\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow$ Stauchung / Streckung : kein Einfluss auf Sprungfunktion



$\boxed{T>0}$

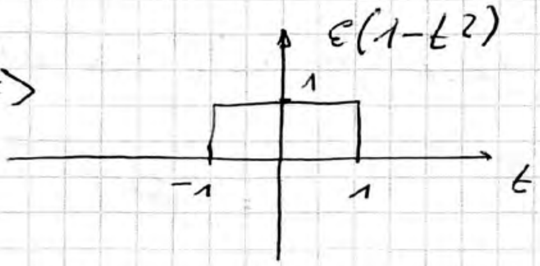


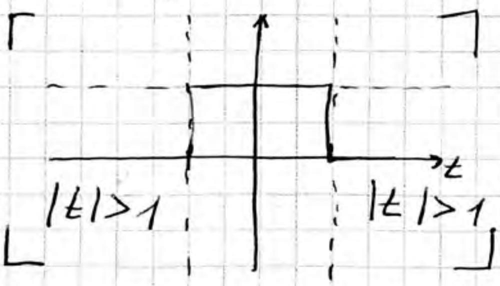
$\boxed{T<0}$

$\varepsilon(1-t^2)$: $1-t^2=0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

für $|t|>1$ wird <u>Argument</u> negativ

$\Rightarrow$

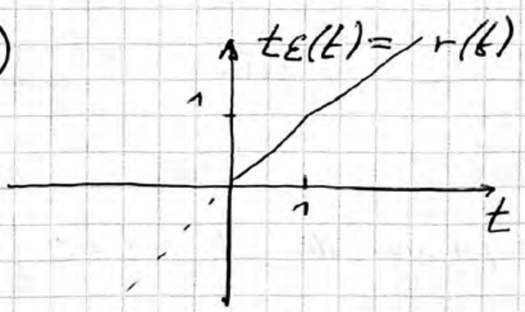


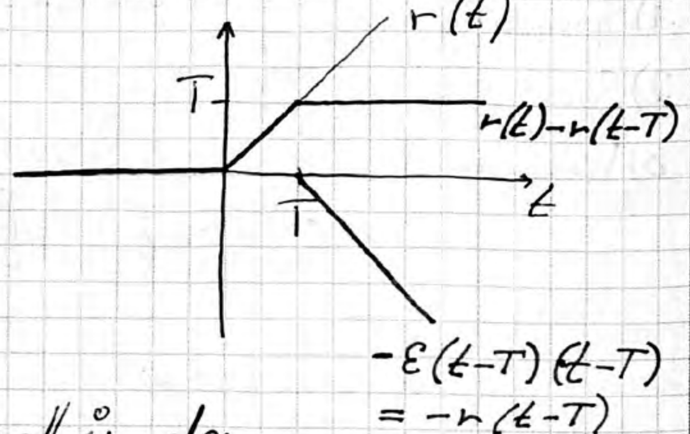


$\varepsilon(1-t^2) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ — Streckung (>1)

$\downarrow$ <u>nicht linear</u> $\downarrow$ <u>LTI</u>

c)





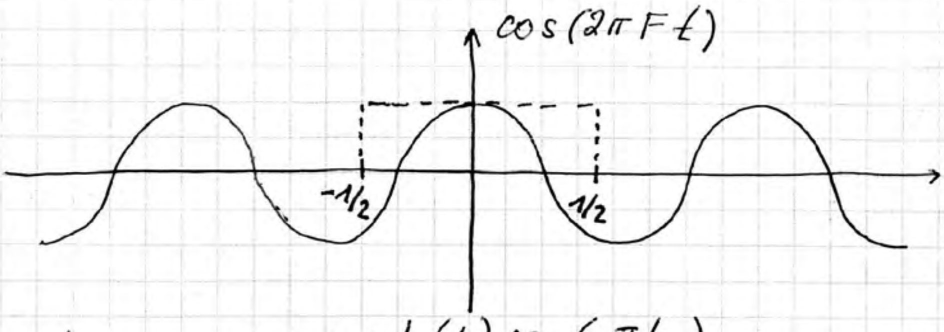
Beachte: Substituiere <u>überall</u> in der Gleichung t durch $t-T$!

(Vgl. Spiegelung bei Faltung)

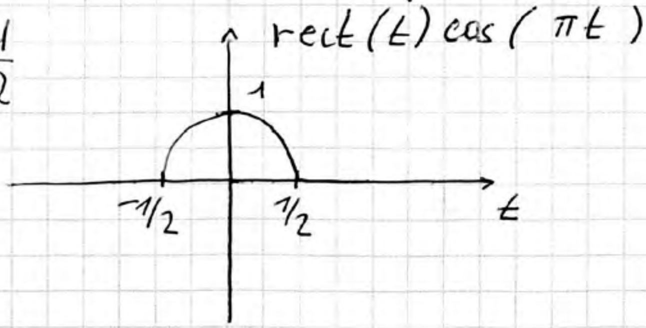
Beim Ableiten $a \cdot \delta(|t| - \frac{1}{2})$

↑ „Höhe des Sprungs"

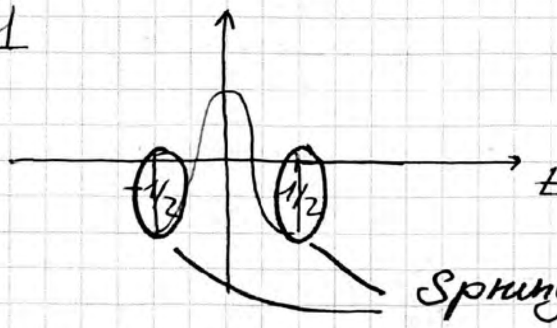
d)



$F = \frac{1}{2}$



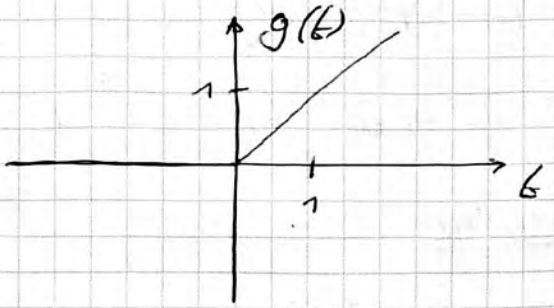
$F = 1$



Sprungstellen beachten

f) $$g(t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)\, d\tau = 0 \quad \text{für} \quad t \leq 0$$

$$= \int_{0}^{t} 1\, d\tau = t \quad \text{für} \quad \underline{\underline{t > 0}}$$



b), e), d) $F = 10$ für eigenständige Übung

Auf Summe bezogen!

Aufgabe 1.4

Linearität:
(Definition)

$$Tr\left\{ \sum_i a_i \cdot s_i(t) \right\} = \sum_i a_i \, Tr\{s_i(t)\}$$
$$= \sum_i a_i \, g_i(t)$$

(Skript S. 1.29)

Zeitinvariant:
(Definition)

$$Tr\{ s(t-t_0) \} = g(t-t_0)$$

Nur auf Funktion bezogen!

a) $g(t) = \frac{d}{dt} s(t)$

$$Tr\left\{ \sum_i a_i s_i(t) \right\} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i a_i s_i(t) \right) = \sum_i \frac{d}{dt}(a_i s_i(t))$$
$$= \sum_i a_i \frac{d}{dt}(s_i(t)) = \sum_i a_i g_i(t) \Rightarrow \underline{\underline{\text{Linear}}}$$

$$Tr\{ s(t-t_0) \} = \frac{d}{dt} s(t-t_0) = g(t-t_0)$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{zeitinvariant}}}$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}$ ist LTI-System $\quad [* \delta'(t)]$

b) $g(t) = s(-t)$ Zeitspiegelung

$$Tr\left\{ \sum_i a_i s_i(t) \right\} = \sum_i a_i s_i(-t) = \sum_i a_i g_i(t)$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{Linear}}}$$

$$Tr\{ s(t-t_0) \} = s(-(t+t_0)) = s(-t - t_0)$$

aber $g(t-t_0) = s(-t + t_0)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{nicht zeitinvariant}}}$$

$$g(t) = s(-t) \Rightarrow g(t-t_0) = s(-t-t_0)$$

c) $g(t) = 1 + s(t)$ $\quad$ $Tr\{s(t)\} = 1+s(t)$

$$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = 1 + \sum_i a_i s_i(t)$$

aber

$$\sum_i a_i g_i(t) = \sum_i a_i \, Tr\{s_i(t)\} = \sum_i a_i (1+s_i(t))$$

$$= \sum_i a_i + \sum_i a_i s_i(t)$$

gilt <u>nur</u> für $1 = \sum_i a_i$, aber nicht allgemein

$\Rightarrow$ nicht linear

$Tr\{s(t-t_0)\} = 1 + s(t-t_0)$ $\Rightarrow$ zeitinvariant

$g(t-t_0) = 1 + s(t-t_0)$

d), f), g), h) selbst üben

Auf ganze Summe Transformation anwenden als Ganzes!

e) $g(t) = s^2(t)$

$$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = \left(\sum_i a_i s_i(t)\right)^2$$

$$\sum_i a_i g_i(t) = \sum_i a_i \, Tr\{s_i(t)\} = \sum_i a_i s_i^2(t)$$

$\Rightarrow$ nicht linear

$Tr\{s(t-t_0)\} = s^2(t-t_0) = g(t-t_0)$

$\Rightarrow$ zeitinvariant

ketov@gmx.de

b) Zeitinvarianz $\qquad g(t) = s(-t);\; g(f(t)) = s(-f(t))$

$$Tr\{s(t - t_0)\} = s(-t - t_0)$$

$$\neq$$

$$g(t - t_0) = s(-t + t_0)$$

$\Rightarrow$ nicht Zeitinvariant

Nur t durch $-t$ substituieren

[Bzw. t_0 in Abhängigkeit ansetzen]

Aufgabe 1.5

a) $g(t) = \varepsilon(t) * \mathrm{rect}(t)$

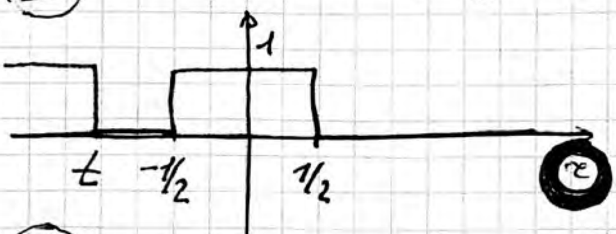
Gibt Signalantwort wieder mit Systemimpulsantwort $\mathrm{rect}(t)$ auf Eingangssignal $\varepsilon(t)$ $\hat{=}$ Sprungantwort

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\varepsilon(t-\tau)}_{=h(t)} \underbrace{\mathrm{rect}(\tau)}_{=s(t)} \, d\tau$$

$\varepsilon(t-\tau)$: Zeitgespiegelt über τ

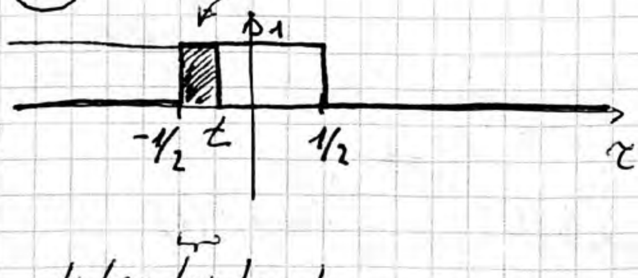
Sprungstelle bei $t - \tau = 0 \Rightarrow t = \tau$

I



$$\boxed{\Rightarrow g(t) = 0 \quad \text{für } t \leq \tfrac{1}{2}}$$

II



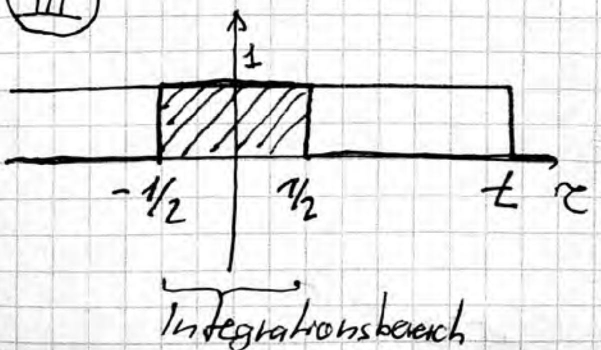
Funktionswerte die multipliziert werden

nur im schraffierten Bereich sind beide Funktionen $\neq 0$

$$g(t) = \int_{-1/2}^{t} 1 \cdot 1 \, d\tau = [\tau]_{-\frac{1}{2}}^{t}$$

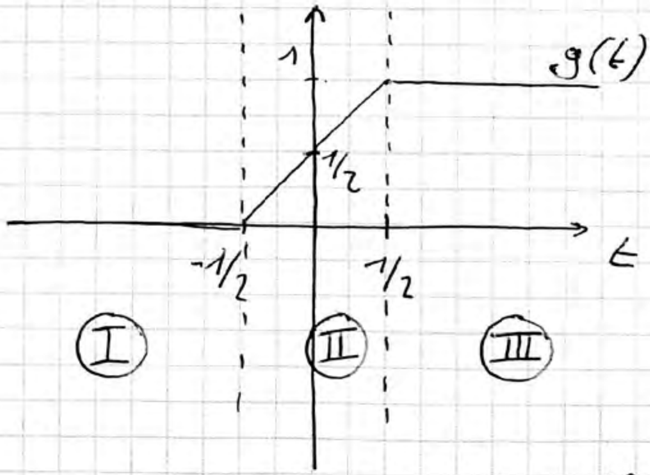
$$\boxed{g(t) = t + \frac{1}{2} \quad \text{für } -\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2}}$$

III



$$\Rightarrow g(t) = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot 1 \, d\tau = \boxed{1 = g(t)}$$

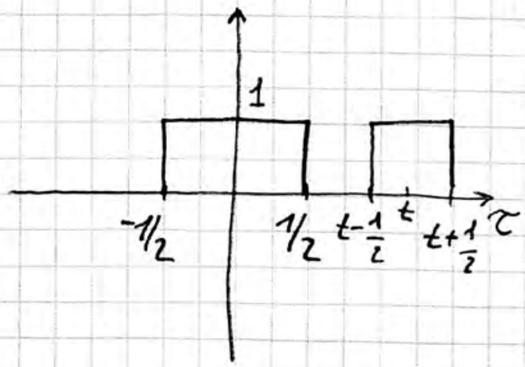
$$\boxed{\text{für } t > \frac{1}{2}}$$



Merke $\rightarrow$ b) $g(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t-\tau)\,\text{rect}(\tau)\,d\tau$

$\left(= \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(t-\tau)\,\text{rect}(\tau)\,d\tau \right)$

$= \Lambda(t)$



bei Faltung auf τ-Achse arbeiten!

In Klausur Spiegelung hinzeichnen!

$\underbrace{\begin{array}{l} t-\tau = \frac{1}{2} \Rightarrow \tau = t - \frac{1}{2} \\ t-\tau = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tau = t + \frac{1}{2} \end{array}}_{\text{Grenzen}}$

Auf τ-Achse

$g(t) = 0$ für $t < -1$ und $t > 1$

$g(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \tau \Big|_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} = t+1$

solange nicht komplett drinn!

für $t - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow t < 0$

$t + \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow t \geq -1$

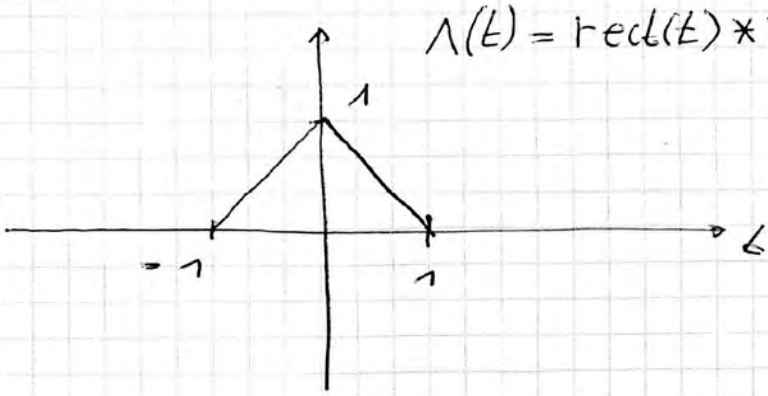
Schnittmenge vorhanden!

$\Rightarrow \underline{\underline{-1 \leq t < 0}}$

$g(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau \Big|_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1 - t$

für $\underline{\underline{0 \leq t < 1}}$

$\Lambda(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$



c) $g(t) = \left(\varepsilon(t)e^{-t}\right) * \left(\varepsilon(t)e^{-t}\right)$

Impulsantwort des RC-TP
(Siehe Skript Abs. 1.6)

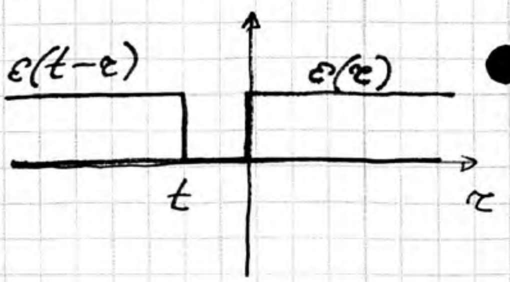
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, \varepsilon(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau)\, \varepsilon(\tau)\, e^{-t} \underbrace{e^{\tau} e^{-\tau}}_{=1}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\, \varepsilon(t-\tau)\, \varepsilon(\tau)\, d\tau$$

$\neq f(\tau)$

$$= e^{-t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau)\, \varepsilon(\tau)\, d\tau}$$



$$\left.\begin{array}{l} = 0 \text{ für } t \leq 0 \\ = \int_0^t 1\, d\tau = t \quad (\text{für } t > 0) \end{array}\right\} = t \cdot \varepsilon(t)$$

$$\Longrightarrow g(t) = \varepsilon(t) \cdot t \cdot e^{-t}$$

für Skizze

Ableitung:

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt}[\varepsilon(t)](t e^{-t}) + \varepsilon(t) \frac{d}{dt}[(t e^{-t})]$$

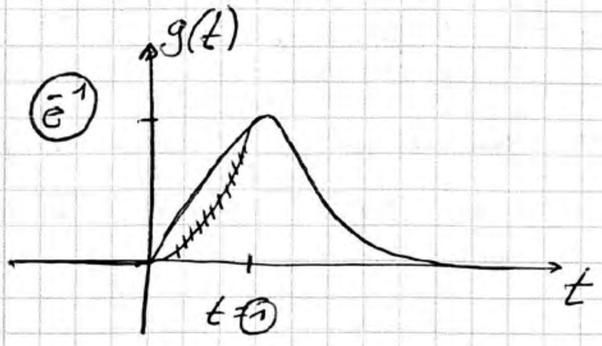
$$= \underbrace{\delta(t)(t e^{-t})} + \varepsilon(t)(1 \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot t)$$

Siebeigenschaft: $\delta(t) \cdot (t e^{-t})\Big|_{t=0} = \delta(t) \cdot 0 \cdot 1 = 0$

$$= \varepsilon(t) e^{-t}(1-t) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ g(1) = \varepsilon(1) \cdot 1 \cdot e^{-1} = e^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow HP$$

markanter Punkt (Klausur)



Beachte: in Musterlösung Antwort bestimmt

(für Klausur) in Übung Antwort berechnet

Nachtrag A 1.4 Zeitinvarianz

21.04.10

ET IV

Übung

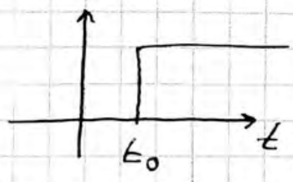
Beispiel $s(t) = \varepsilon(t)$

$$\underbrace{Tr\{s(t-t_0)\}}_{I} = \underbrace{g(t-t_0)}_{II}$$

b) $g(t) = s(-t)$

"wird zu"

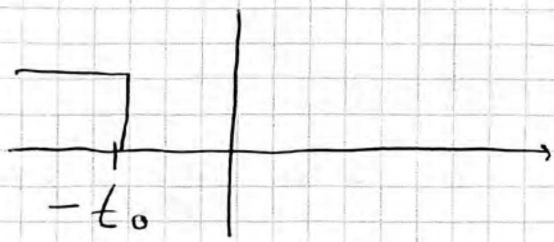
(I) 1. Schritt: Verschiebung $s(t) \longrightarrow s(t-t_0)$



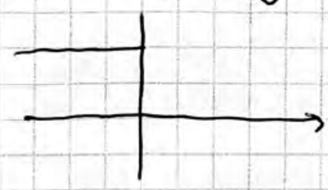
2. Schritt: Zeitspiegelung

$s(t-t_0) \rightarrow s(-t-t_0)$

Das Signal $s(t-t_0)$ wird als neues Signal $f(t)$ betrachtet. Auf $f(t)$ wird die Transformation angewendet.



(II) 1. Schritt: Zeitspiegelung $s(t) \rightarrow g(t) = s(-t)$

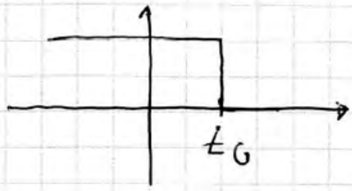


2. Schritt Zeitverschiebung

(durch Einsetzen des neuen Argumentes $t \rightarrow t - t_0$)

ketov@gmx.de

$$g(t) \rightarrow g(t-t_0) = s(-(t-t_0)) = s(-t+t_0)$$

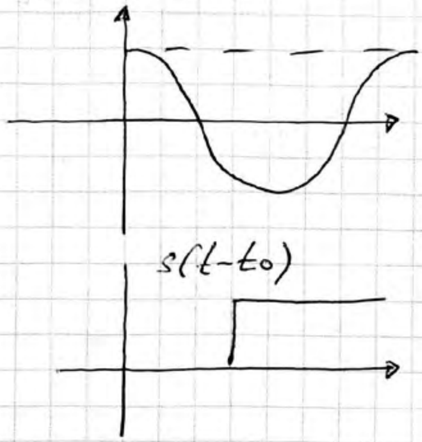


d) $g(t) = s(t)\,m(t)$

$s(t) = \varepsilon(t)$

$m(t) = \cos(t)$

I $\quad f(t) = s(t-t_0)$

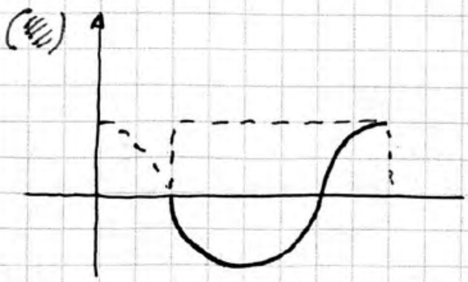


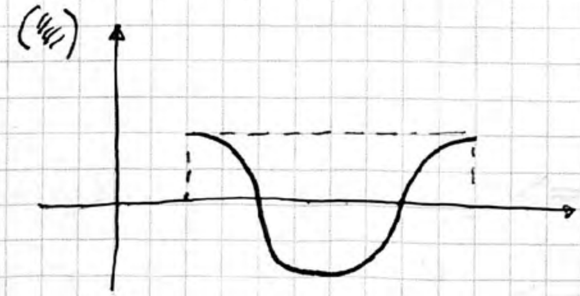
$$\mathrm{Tr}\{f(t)\} = f(t)\,m(t)$$
$$= f(t) \cdot \cos(t)$$

Bsp

II $\quad g(t) = s(t)\cos(t)$

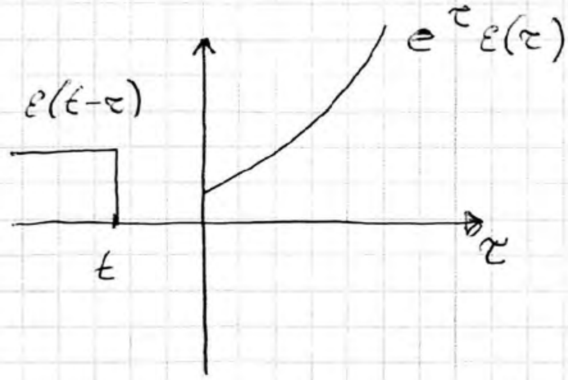
$$g(t-t_0) = s(t-t_0)\cos(t-t_0)$$





Aufgabe 1.6

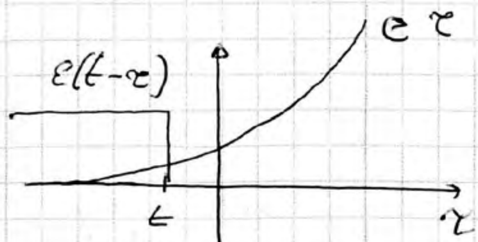
$$\varepsilon(t) * \left[e^{t} \cdot \varepsilon(t) \right]$$



$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau)\, e^{\tau}\, \varepsilon(\tau)\, d\tau}_{=0 \text{ für } t \leq 0}$$

$$= \int_{0}^{t} e^{\tau} d\tau = e^{\tau}\Big|_{0}^{t} = e^{t} - 1 \qquad \text{für } t > 0$$

$$= \varepsilon(t)\,(e^{t} - 1)$$



$$\underbrace{\left[\varepsilon(t) * e^{t}\right]}\, \varepsilon(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau) e^{\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} d\tau = e^{\tau}\Big|_{-\infty}^{t} = e^{t}$$

$$\Rightarrow \left[\varepsilon(t) * e^{t}\right] \varepsilon(t) = e^{t}\, \varepsilon(t) \neq \varepsilon(t)\,(e^{t} - 1)$$

$\Rightarrow$ Multiplikation und Faltung dürfen nicht vertauscht werden
(immer auf Klammern achten)

Aufgabe 1.7

Impulsantwort $h(t)$

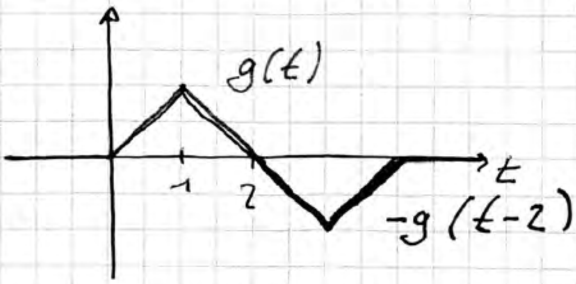
LTI-System => Linearität und Zeitinvarianz

$$s(t) * h(t) = g(t)$$

a) $[s(t) - s(t-2)] * h(t) = s(t) * h(t) - s(t-2) * h(t)$

$= g(t) - g(t-2)$

Operationen auf $s(t)$ (z.B $s(t-2)$) müssen auch linear + zeitinvariant sein



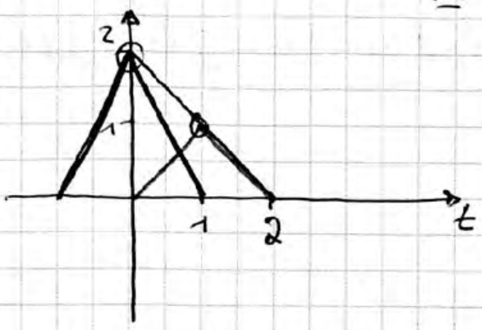
b) $[s(t) + 2\, s(t+1)] * h(t) = s(t) * h(t)$

Linearität $+ 2\, s(t+1) \times h(t)$

$= g(t) + 2\, g(t+1)$

Zeitinvarianz

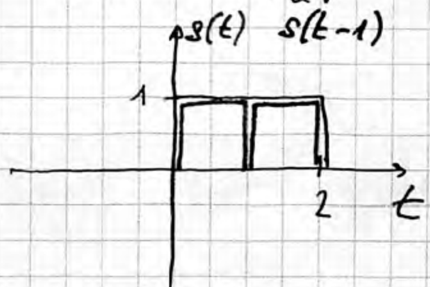
lineare (0) Interpolation (=Spitzen treffen sich)



c) $s(\frac{t}{2})$

Dehnung zwar linear aber nicht zeitinvariant => Vorsicht (siehe A 1.4f) und Musterlösung)

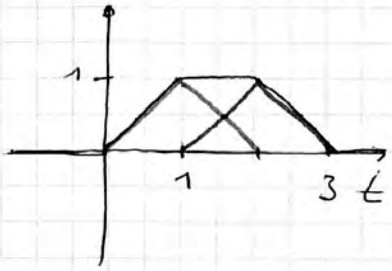
aber $s(\frac{t}{2}) = s(t) + s(t-1)$



$(s(t) + s(t-1)) * h(t) =$

$= s(t) * h(t) + s(t-1) * h(t)$

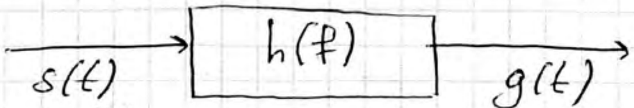
$= g(t) + g(t-1)$



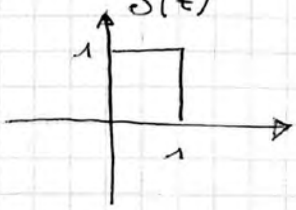
$g(t-1) \quad g(t)$

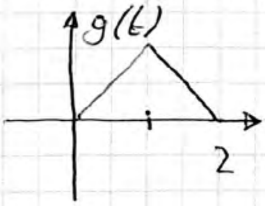
$g(t)+g(t-1)$

<u>kleiner Ausblick:</u>



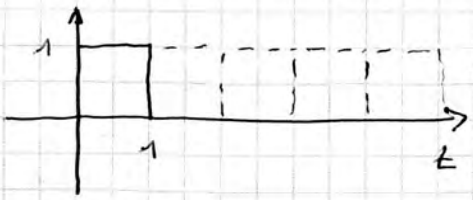
$h(t)$?



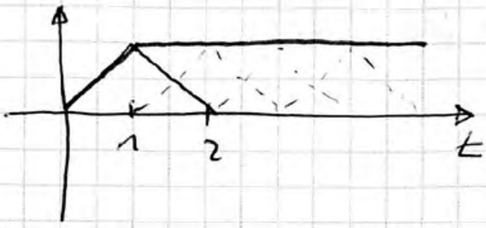


inverse Faltung schwierig
im Allgemeinen

1. Schritt Forme $s(t)$ zu Sprungfunktion um



$$\varepsilon(t) = s(t) + s(t-1) + s(t-2) + \ldots$$

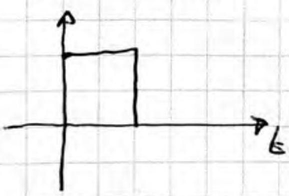


$$\varepsilon(t) * h(t) = g(t) + g(t-1) + \ldots$$

2. Schritt Ableiten

$$\varepsilon(t) * \delta'(t) = \delta(t)$$
$$(\varepsilon(t) * h(t)) * \delta'(t) = h(t)$$

$$h(t) = \delta'(t)\,[g(t) + g(t+1) + \ldots]$$



Aufgabe 1.8

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dt}s(t)\right)}_{=} * h(t) = \underbrace{\left(\delta'(t) * s(t)\right)}_{=} * h(t) \qquad \text{(Skript 1.57)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}s(t) = \delta'(t) * s(t)}$$

$$= \left(s(t) * \delta'(t)\right) * h(t) \qquad \text{(\underline{Kommutativgesetz} 1.38)}$$

$$= s(t) * \left(\delta'(t) * h(t)\right) \qquad \text{(\underline{Assoziativgesetz} 1.39)}$$

$$= s(t) * \frac{d}{dt}h(t)$$

$$= \frac{d}{dt}h(t) * s(t) \qquad \text{(Kommunikativgesetz)}$$

Aufgabe 1.9

$$s(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$\left[\text{Fläche: } A_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, dt \right.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) * g(t)\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\, dt$$

falls Grenzen → voneinander unabhängig!

Integrationsreihenfolge vertauschen

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{s(\tau)}\, g(t-\tau)\, dt\, d\tau$$

→ unabhängig von Integrationsvariable t

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, dt}_{A_g:\ \text{Zeitverschiebung irrelevant wg. Integrationsgrenzen}}\, d\tau$$

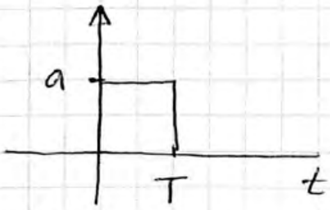
ketov@gmx.de

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, A_g \, d\tau = A_g \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, d\tau = A_g \cdot A_s$$

Merke Ergebnis!

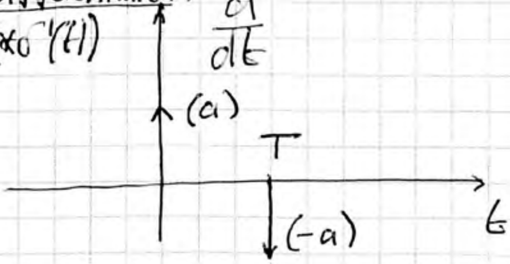
Aufgabe 1.10

a)

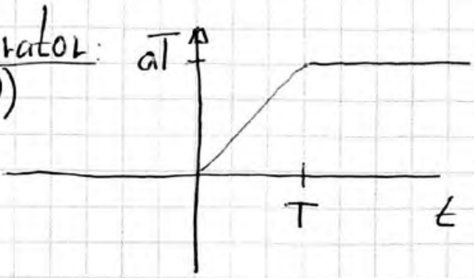


Sprungstellen werden zu Diracimpulsen mit Gewicht = Höhe Sprungstelle

Differentiator $(* \delta'(t))$ $\frac{d}{dt}$

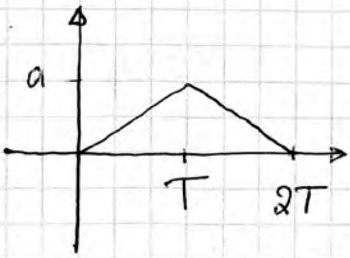


Integrator: $(* \varepsilon(t))$

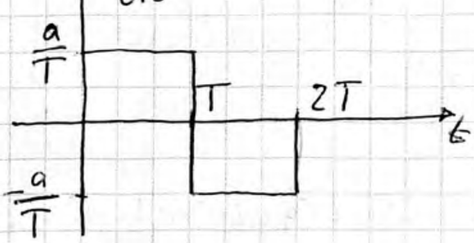


Siehe Aufgabe 1.5a)
Fehler in Musterlösung
Siehe 2.3a

b)



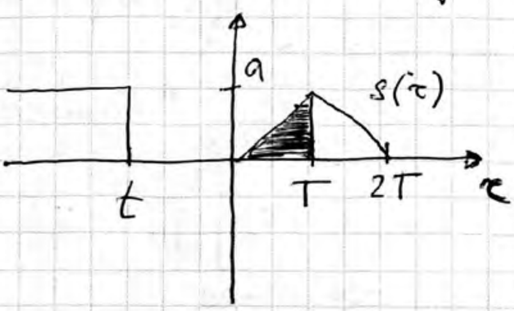
$\frac{d}{dt}$



Beachte Form!

Integrator: (aus linearen Funktionen werden quadratische)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau)\, s(\tau)\, d\tau$$

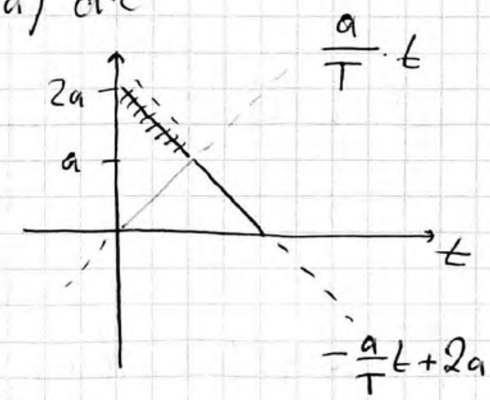


$= 0$ für $t \leq 0$

$$= \int_0^{2T} s(\tau)\,d\tau = \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} aT}_{\text{Fläche Dreieck}} = aT \quad \text{für } t \geq 2T$$

$$= \int_0^{t} \frac{a}{T}\tau\,d\tau = \frac{a}{2T}\tau^2\Big|_0^t = \frac{at^2}{2T} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

$$= \int_0^{T} \frac{a}{T}\tau\,d\tau + \int_T^{t}\left(-\frac{a}{T}\tau + 2a\right)d\tau$$



Quadratisches Flächenwachstum

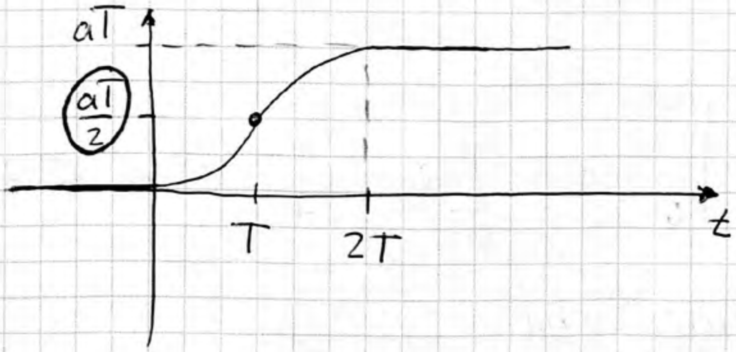
(Vgl. ET III)

$$= \frac{aT^2}{2T} + \left(-\frac{a}{2T}\tau^2 + 2a\tau\right)_T^t$$

$$= \frac{aT}{2} + \left(-\frac{at^2}{2T} + 2at + \frac{a}{2T}T^2 - 2aT\right)$$

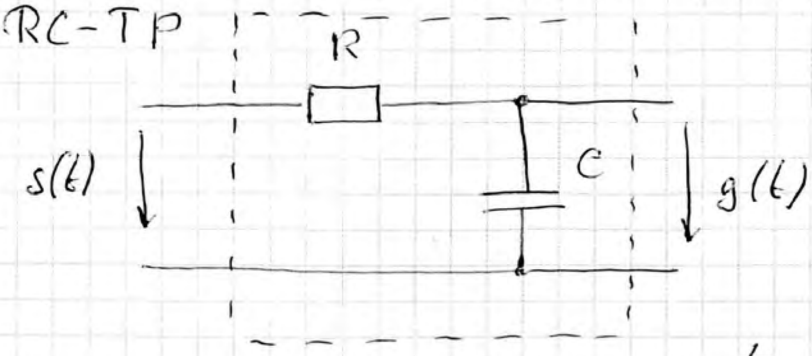
$$= aT - 2aT + 2at - \frac{a}{2T}t^2 = -aT + 2at - \frac{at^2}{2T}$$

für $T < t \leq 2T$



Aufgabe 1.11

RC-TP



$$h(t) = \frac{1}{T}\,\varepsilon(t)\,e^{-\frac{t}{T}} \quad ; \; T = RC$$

a) $h(t) = 0$ für $t < 0$ (wegen $\varepsilon(t)$)

$\Longrightarrow$ kausal (Skript 1.59)

b) Amplitudenstabil: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$ (Skript 1.62)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\varepsilon(\tau)\, e^{-\frac{\tau}{T}}}_{\geq 0} d\tau \qquad \text{für } T > 0$$

[aber $T = RC$ nur positiv physikalisch sinnvoll]

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau$$

$$= \frac{1}{T}(-T)\, e^{-\frac{\tau}{T}} \Big|_0^{\infty} = -[0-1] = 1 < \infty$$

$\Longrightarrow$ Amplitudenstabil

$\boxed{\text{Betrag}}$ in der Formel für Amplitudenstabilität nicht vergessen!

ketov@gmx.de

für $T < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{T} \varepsilon(\tau) e^{-\frac{\tau}{T}} \, d\tau$$

$\boxed{T \neq 0}$

$$= \int_{0}^{\infty} -\frac{1}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} \, d\tau = -\frac{1}{T}(-T) e^{-\frac{\tau}{T}} \Big|_0^{\infty}$$

$$= e^{-\frac{\tau}{T}} \Big|_0^{\infty} = \infty - 1 = \infty$$

$\Rightarrow$ nicht amplitudenstabil

da T negativ ist und „$e^{-\frac{\infty}{T}} \rightarrow \infty$"

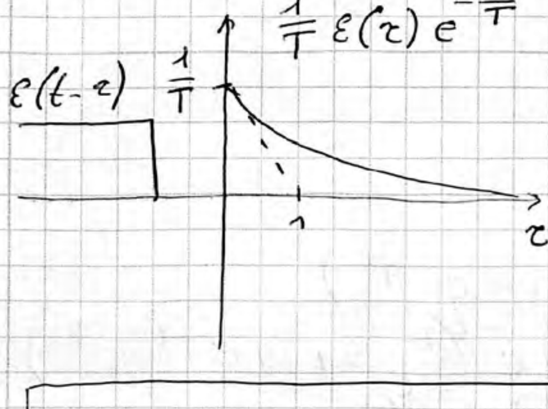
Aufgabe 1.12

a) $H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f T}$ $\quad T = RC \quad$ (A.1.1)

b) $h(t) = \frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-\frac{t}{T}}$ (siehe Skript 1.35)

$h_\varepsilon(t)$ $\cancel{h_1(t) * \varepsilon(t)}$ $= \varepsilon(t) * h(t)$

$= 0$ für $t \leq 0$



Merken! $\left\{ \boxed{\text{Sprungantwort (von } h_1(t)\text{)}: \; h_\varepsilon(t) = h(t) * \varepsilon(t)} \right.$

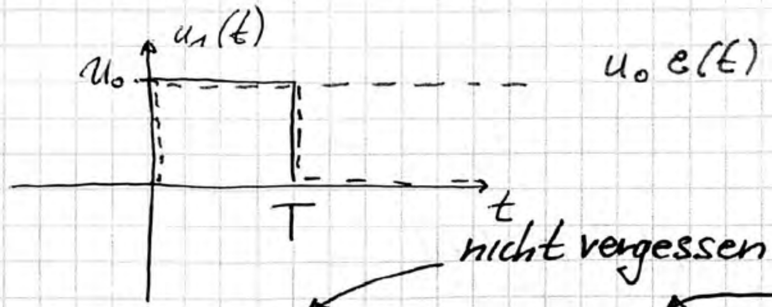
ketov@gmx.de

$$h_\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} \, d\tau = \frac{1}{T}(-T)\, e^{-\frac{\tau}{T}}\Big|_0^T$$

$$= -\left[e^{-\frac{t}{T}} - 1\right] = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{für} \quad t>0$$

$$h_\varepsilon(t) = \varepsilon(t) \cdot \left(1 - e^{-t/T}\right)$$

c)



nicht vergessen

OHNE Zeitspiegelung!

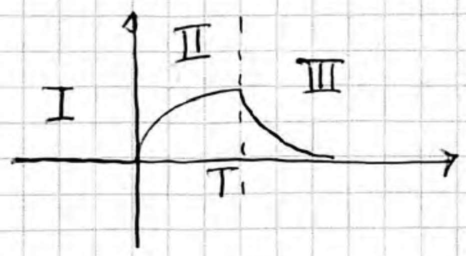
$$u_1(t) = u_0 \left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)\right]$$

$$u_2(t) = h(t) * u_1(t) = u_0 \left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)\right] * h(t)$$

$$= u_0 \left[\varepsilon(t) * h(t) - \varepsilon(t-\tau) * h(t)\right]$$

$$\overset{LTI}{=} u_0 \left(h_{\varepsilon(t)} - h_{\varepsilon(t-\tau)}\right) = u_0 \left(h_\varepsilon(t) - h_\varepsilon(t-T)\right)$$

$$\overset{LTI}{=} u_0 \left(\varepsilon(t)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - \varepsilon(t-T)\left(1 - e^{-\frac{t-T}{T}}\right)\right)$$



I : $u_2(t) = 0$

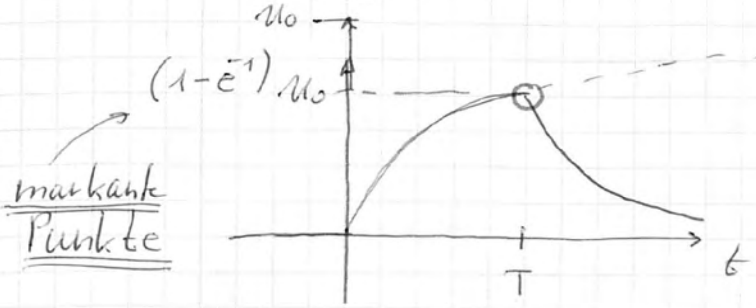
II : $u_2(t) = u_0\, \varepsilon(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$

III : $u_2(t) = u_0 \left(1 - e^{-t/T} - 1 + e^{-\frac{t}{T}} e^{1}\right)$

$$= u_0 \left(e^{1} - 1\right) e^{-t/T}$$

$$\mathrm{II}\Big|_{t=T} = u_0\,(1-e^{-1})$$

$$\mathrm{III}\Big|_{t=T} = u_0\,(e^{1}-1)\,e^{-1} = u_0\,(1-e^{-1})$$



Charakteristische Größen angeben!

ketov@gmx.de

Aufgabe 2.1

Laplace - Transformation

$$s(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} S(p) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-pt} \, dt$$

$$\text{mit} \quad p = \underbrace{\sigma}_{\substack{\text{Dämpfungssatz} \\ \text{verantwortlich} \\ \text{für Konvergenz}}} + \underbrace{j 2\pi f}_{\substack{\text{Später noch bei} \\ \text{Fouriertransformation}}}$$

$$e^{j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + j \sin(2\pi f t) \qquad \left[\begin{matrix}\text{Eulersche} \\ \text{Formel}\end{matrix}\right]$$

Signal wird mit Schwingung multipliziert untersucht $s(t)$:

Wieviel Anteil hat Schwingung mit Frequenz f an $s(t)$?

a) $s(t) = \sin(t)\,\varepsilon(t)$

$$S(p) = \int_{\cancel{-\infty}\; 0}^{\infty} \sin(t) \underbrace{\cancel{\varepsilon(t)}}_{\substack{=0 \text{ für } t<0 \\ =1 \text{ für } t\geq 0}} e^{-pt} \, dt = \int_{0}^{\infty} \sin(t) e^{-pt} \, dt$$

„einseitige Laplacetransformation" für kausale Signale

(Vgl. Systemtheorie)

ketov@gmx.de

Formelsammlung:

$$\int \sin(st)\, e^{at}\, dt = \frac{e^{at}}{a^2+s^2}\left(a\sin(bt) - b\cos(bt)\right)$$

$a = -p$; $s = 1$

$$S(p) = \left[\frac{e^{-pt}}{p^2+1}\left(-p\sin(t) - \cos(t)\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \left[\frac{e^{-\sigma t}\, e^{-j2\pi f t}}{p^2+1}\left(-p\sin(t) - \cos(t)\right)\right]_0^{\infty}$$

Konvergiert für $\sigma > 0$

$$S(p) = -\frac{1}{p^2+1}\left(-p\cdot 0 - 1\right) = \frac{1}{p^2+1}$$

Polstellen bei $\pm j$; keine Nullstellen

Merke!

Konvergenzbereich:
Werte für σ, für die das Integral amplitudenstabil ist => das Integral konvergiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(t)\, \varepsilon(t)\, e^{-pt}|\, dt = \int_0^{\infty} |\sin(t)\, e^{-pt}|\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} |\sin t\, e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t}|\, dt = \int_0^{\infty} \underbrace{|\sin(t)\, e^{-j2\pi f t}|}_{\leq 1}\, \underbrace{|e^{-\sigma t}|}_{>0}\, dt$$

>0 => kann aus Betrag herausgezogen werden

$$\leq \int_0^{\infty} e^{-\sigma t}\, dt < \infty \quad \text{für } \sigma > 0$$

$\mathrm{Re}\{p\} = \sigma > 0$ für Konvergenz

ketov@gmx.de

b) $s(t) = \sin(t) \rightarrow$ <u>nicht kausal</u>

$$S(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)}_{= \sin t \text{ (Formelsammlung)}} e^{-pt}\,dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{(j+p)t}}_{\substack{Re\{(j+p)t\} \\ = -\sigma t}} dt - \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{(-j-p)t}}_{Re\{(j-p)t\} = -\sigma t} dt$$

für $t > 0$ $\Rightarrow \sigma > 0 \Rightarrow$ würde konvergieren

für $t < 0$ $\Rightarrow \sigma < 0 \Rightarrow$ würde konvergieren

deswegen auch immer <u>Kausalitätsbehandlung</u> $\Rightarrow$ beides nicht vereinbar

Das Integral konvergiert nicht

22.04.10
Übung

c) $s(t) = e^{2t}\,\varepsilon(t-T)$ (kausal für $T>0$)

$$S(p) = \int_{\cancel{-\infty}\;T}^{\infty} e^{2t}\,\cancel{\varepsilon(t-T)}\,e^{-pt}\,dt$$

$$= \int_T^{\infty} e^{(2-p)t}\,dt = \int_T^{\infty} \underbrace{e^{(2-\sigma)t}}\,e^{-j2\pi f t}\,dt$$

Konvergenz: $2-\sigma<0$

$\sigma = Re\{p\} > 2$

$$S(p) = \int_T^{\infty} e^{(2-p)t}\,dt = \left.\frac{e^{(2-p)t}}{2-p}\right|_T^{\infty}$$

$$= \underbrace{\text{„}\frac{e^{(2-p)\infty}}{2-p}\text{“}}_{\to 0 \text{ für } 2-\sigma<0} - \frac{e^{(2-p)T}}{2-p}$$

$$\Rightarrow S(p) = -\frac{e^{(2-p)T}}{2-p}$$

Polstelle bei $p=2$ (Vgl. Konvergenzbereich)
Keine Nullstellen.

ketov@gmx.de

d)

$$s(t) = t e^{2t} \varepsilon(t) \longrightarrow \text{kausal}$$

$$S(p) = \int_{-\infty}^{\infty} t e^{2t} \varepsilon(t) e^{-pt} dt = \int_{0}^{\infty} t e^{(2-p)t} dt$$

Konvergenz: $2 - \sigma < 0$

$\Rightarrow Re\{p\} > 2$

mit Formelsammlung:

$$\int t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at - 1)$$

$$S(p) = \frac{e^{(2-p)t}}{(2-p)^2}\left((2-p)t - 1\right)\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{(2-p)^2}(-1)$$

$$= \frac{1}{(2-p)^2}$$

e)

$$s(t) = \sinh(2t)\, \varepsilon(-t)$$

nicht kausal (linksseitiges Signal, antikausal)

mit $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

(Formelsammlung)

$$S(p) = \int_{-\infty}^{\cancel{\infty}\,0} \frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) \cancel{\varepsilon(-t)} e^{-pt} dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(2-p)t} dt}_{2-\sigma > 0} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(-2-p)t} dt}_{-2-\sigma > 0}$$

Konvergenz: $Re\{p\} < 2$ $\quad$ $Re\{p\} < -2$

Schnittmenge:

$Re\{p\} < -2$ für beide Integrale

Vgl. KB zeichnen

kausale Signale: $Re\{p\} > \ldots$

antikausale Signale: $Re\{p\} < \ldots$

$$S(p) = \frac{1}{2}\frac{e^{(2-p)t}}{2-p}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}\frac{e^{(-2-p)t}}{2-p}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2-p} - \frac{1}{2}\frac{1}{-2-p}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-p} + \frac{1}{2+p}\right) = \frac{1}{2}\frac{2+p+2-p}{(2-p)(2+p)}$$

$$= \frac{2}{4-p^2}$$

Alternativ, wenn $\boxed{\text{nicht berechnen}}$ gefordert ist:
(kurz hinklatschen)

Lösung mit Tabelle:

sinh/cosh aufbröseln

$$s(t) = \left[\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]\varepsilon(-t) \quad ; Re\{p\} < -2$$

Tabelle $\updownarrow \mathcal{L}$

$$S(p) = -\frac{1}{2}\frac{1}{p-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+2} = \frac{2}{4-p^2}$$

Aufgabe 2.2

$$S(p) = \int_{-\infty}^{\infty} (a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)) e^{-pt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 s_1(t) e^{-pt} dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 s_2(t) e^{-pt} dt$$

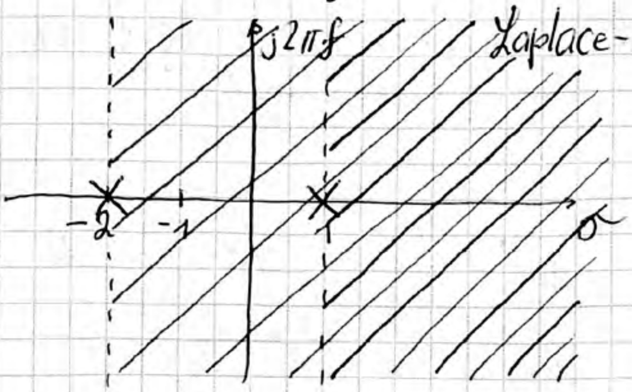
$$= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-pt} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) e^{-pt} dt$$

$$= a_1 S_1(p) + a_2 S_2(p)$$

$\Longrightarrow$ Linear

Konvergenzbereich im Allgemeinen

Schnittmenge von R_1 und R_2



Bsp.:

R_1 $\sigma > -2$

R_2 $\sigma > 1$

Annahme kausale Systeme

Schnittmenge von R_1 und R_2 : $\sigma > 1$

$$\boxed{R = R_1 \cap R_2}$$

Merke!

ketov@gmx.de

Aber

Der Konvergenzbereich einer Laplace-Trafo hängt direkt mit den Polstellen von $S(p)$ zusammen: Skript 2.3

$\Rightarrow$ Durch Addition von $S_1(\cancel{p} t)$ und $s_2(t)$ können sich Polstellen aufheben. (Siehe A 2.3)

Aufgabe 2.3

Aus dem Skript Abschnitt 2.3

rechtsseitig	=	kausal
linksseitig	=	antikausal
zweiseitig	=	„$\neq 0$ für $t>0$ und $t<0$"

a) $$S_1(p) = \frac{2p+3}{p^2+3p+2}$$

$$p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-2}$$
$$= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$= -2 \vee -1$$

Polstellen bei $p_1 = -1$ und $p_2 = -2$

Nullstellen bei $p = -\frac{3}{2}$

rechtsseitiges (kausales) Signal

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich rechts von der am weitesten rechts gelegenen Polstelle $(\sigma > -1)$

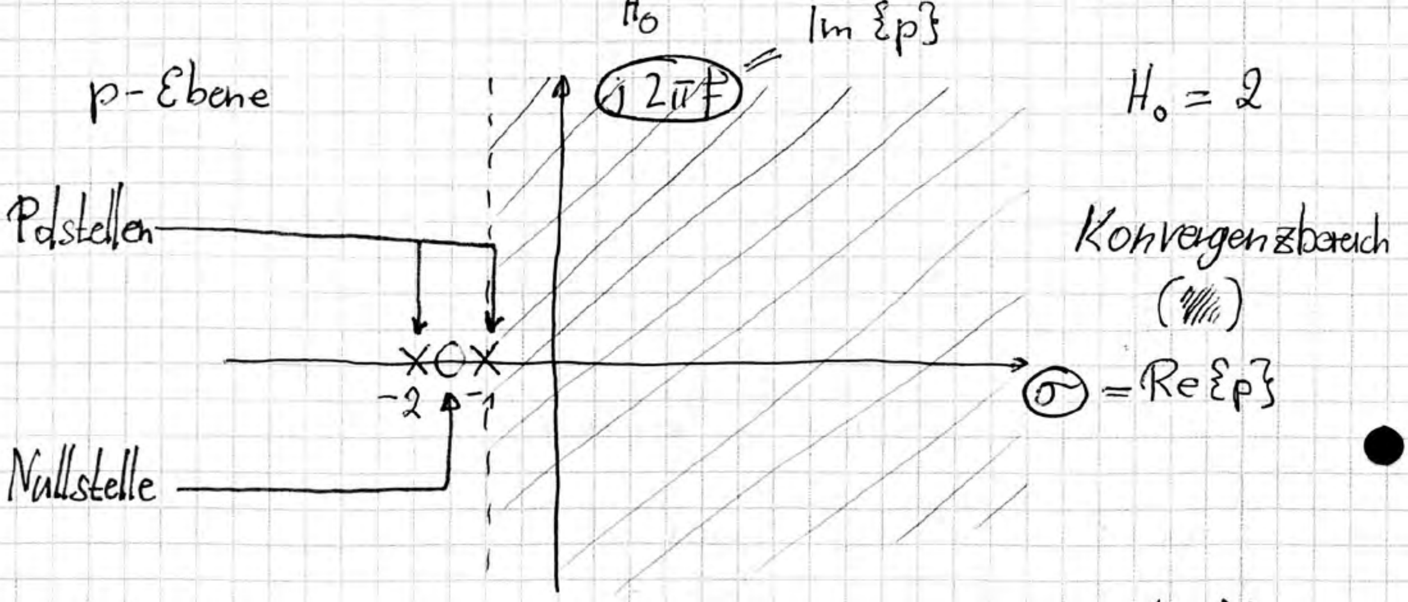
$$\begin{bmatrix} Re\{p\} = \sigma \\ Im\{p\} = 2\pi f \end{bmatrix}$$

ketov@gmx.de

Pol-Nullstellendiagramm:

$$S_1(p) = \frac{2p+3}{p^2+3p+2} = \underset{\substack{\| \\ H_0}}{2}\,\frac{(p+\frac{3}{2})}{(p+2)(p+1)}$$

$H_0 = 2$



Partialbruchzerlegung (für c)

wird oft vergessen!

$$S_1(p) = \frac{2p+3}{(p+1)(p+2)} = A + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}$$

Formelsammlung: $A = \lim\limits_{p\to\infty} S_1(p) = 0$

Koeffizientenvergleich: $\dfrac{B}{p+1} + \dfrac{C}{p+2} = \dfrac{Bp + 2B + Cp + C}{(p+1)(p+2)}$

$$\overset{!}{=} \frac{2p+3}{(p+1)(p+2)}$$

$$B + C = 2$$
$$2B + C = 3$$

$\Rightarrow B = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow S_1(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}$

b) $S_2(p) = \dfrac{3p+1}{p^2+4p+3}$

$p_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1$

$\Rightarrow$ Polstellen bei: $p_1 = -1$ und $p_2 = -3$

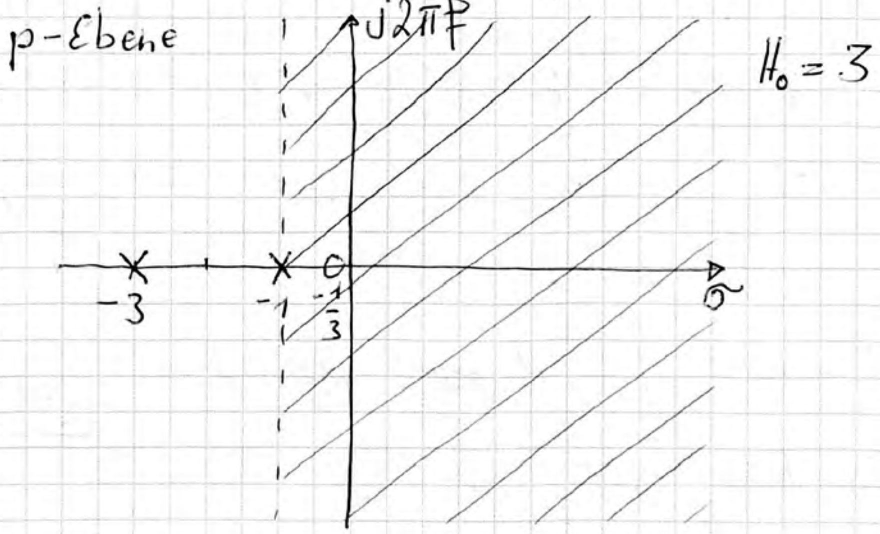
Nullstelle bei: $p = -\dfrac{1}{3}$

rechtsseitiges (kausales) ~~System~~ Signal:

Konvergenzbereich $\sigma > -1$ (siehe a)

Pol-Nullstellendiagramm:

$$S_2(p) = \frac{3p+1}{p^2+4p+3} = 3\,\frac{(p+\frac{1}{3})}{(p+1)(p+3)}$$



Partialbruchzerlegung (für c)

$$S_2(p) = \frac{3p+1}{(p+1)(p+3)} = A + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+3}$$

$$A = \lim_{p\to\infty} S_2(p) = 0$$

ketov@gmx.de

$$\frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+3} = \frac{Bp + 3B + Cp + C}{(p+1)(p+3)}$$

$$\overset{!}{=} \frac{3p+1}{(p+1)(p+3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} B + C = 3 \\ 3B + C = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2B = -2 \Rightarrow B = -1 \Rightarrow C = 4$$

$$S_2(p) = \frac{4}{p+3} - \frac{1}{p+1}$$

c) $S_1(p) + S_2(p) =$

$$= \underbrace{\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}}_{= S_1(p)} + \underbrace{\frac{4}{p+3} - \frac{1}{p+1}}_{= S_2(p)} = \frac{1}{p+2} + \frac{4}{p+3}$$

$$= \frac{5p+11}{(p+2)(p+3)}$$

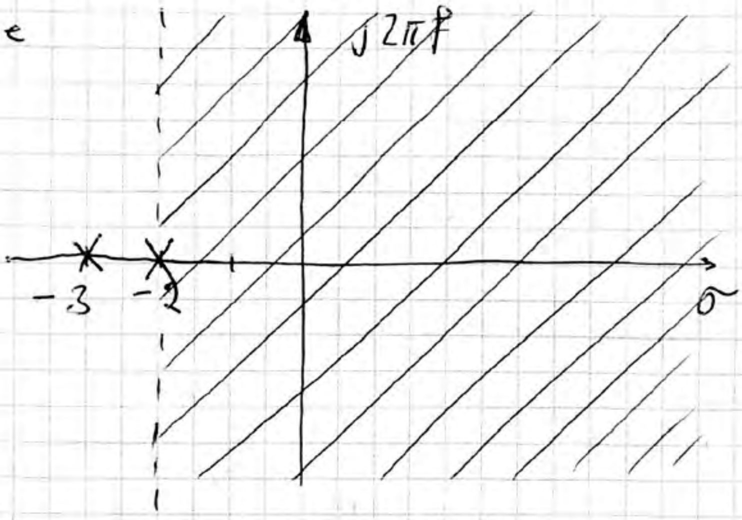
Polstellen bei $p = -2$ und $p = -3$

Gg f. Kürzen!

Nullstelle bei $p = -\frac{11}{5}$

Da die Polstelle bei $p = -1$ ~~und~~ durch die Superposition weggefallen ist, ergibt sich ein erweiterten Konvergenzbereich.

$$S_1(p) + S_2(p) = 5 \frac{p + \frac{11}{5}}{(p+2)(p+3)}$$



$H_0 = 5$

(Vgl. b.)

Kausalität ändert sich nicht durch Addition.

$s_1(t)\,\varepsilon(t) + s_2(t)\,\varepsilon(t) = (s_1(t) + s_2(t))\,\varepsilon(t)$

$\Rightarrow$ Auch Summe kausal!

Aufgabe 2.4

Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\{s(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0)\, e^{-pt}\, dt$$

Substitution

$t - t_0 = \tau$

$\frac{d\tau}{dt} = 1$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, e^{-p(\tau+t_0)}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, e^{-p\tau}\, \underbrace{e^{-pt_0}}_{\substack{\text{const} \\ \text{bzgl } \tau}}\, d\tau = e^{-pt_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-pt_0}\, S(p)$$

Merke! || Verschiebung um t_0 hat keinen Einfluss auf den Konvergenzbereich!

(Abbildungeigenschaften – Formelsammlung)

ketov@gmx.de

Modulationssatz

(„Verschiebung in p" ⇝ FS)

$$\mathcal{L}\{s(t)\,e^{p_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{p_0 t}\,e^{-pt}\,dt$$

p_0: (komplex) Konstante

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-\underbrace{(p-p_0)}_{=:p'}t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-p't}\,dt$$

$$= S(p') = S(p-p_0)$$

Verschiebung im Frequenzbereich sowohl in σ als auch in $j2\pi f$ Richtung. (Abbildungseigenschaften Formelsammlung) || Merke!

Konvergenzbereich wird berechnet für p'

$$\Rightarrow (p - \mathrm{Re}\{p_0\}) \in KB\{s(t)\}$$

d.h. der Konvergenzbereich verschiebt sich um $\mathrm{Re}\{p_0\}$ nach rechts

$$\| \; p \in (KB\{s(t)\} + \mathrm{Re}\{p_0\}) \; \|$$

ketov@gmx.de

Aufgabe 2.5 „Zeitdehnung"

Wichtig für Trafo von Gauß-Impuls

$$\int_{-\infty}^{\infty} s\left(\frac{t}{T}\right) e^{-pt}\, dt \qquad \text{mit } \frac{t}{T} = \tau \Rightarrow t = T\tau$$

$$\frac{dt}{d\tau} = T$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, e^{-(pT)\tau}\, T\, d\tau = T\, S(pT)$$

für positive T $(T > 0)$

für negative T : $T = -|T|$

$$\tau = \frac{t}{-|T|} \Rightarrow t = -|T|\,\tau \qquad \frac{dt}{d\tau} = -|T|$$

$$\Rightarrow \int_{+\infty}^{-\infty} s(\tau)\, e^{-(-p|T|\tau)} \underbrace{(-|T|)\, d\tau}_{=dt}$$

Vertauschen der Integrationsgrenzen durch Substitution $\qquad \tau = \frac{t}{-|T|}$

$$= -|T|\,(-1) \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, e^{-pT\tau}\, d\tau = |T|\, S(pT)$$

Zusammenfassend für $T \neq 0$ $\quad s\left(\frac{t}{T}\right) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} |T|\, S(pT)$

Konvergenzbereich: Amplitudenskallierung irrelevant

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| s(\tau)\, e^{-(\sigma + j2\pi f)T\tau} \right| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left| s(\tau)\, e^{-j2\pi f T\tau} \right| e^{-\sigma T\tau}\, d\tau$$

$\sigma T =: \sigma'$

„soll $< \infty$ sein"

$\| p \in KB\{s(\frac{t}{T})\}$ falls $pT \in KB\{s(t)\} \|$

ketov@gmx.de

Der Konvergenzbereich wird in gleichen Weise skaliert, gedehnt oder gestaucht!

Merke

Signal $s(t)$ gedehnt $\longleftrightarrow$ $S(p)$ gestaucht

$s(t)$ gestaucht $\longleftrightarrow$ $S(p)$ gedehnt

einfaches Beispiel für den Konvergenzbereich

$$s(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p+1} \qquad Re\{p\} > -1$$

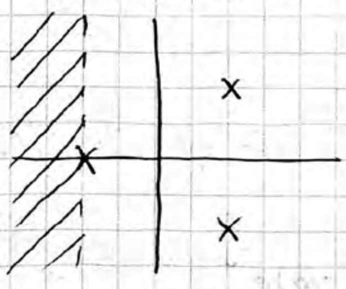
$$s(3t) = e^{-3t}\,\varepsilon(3t)$$

$$= e^{-3t}\,\varepsilon(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p+3} \qquad Re\{p\} > -3$$

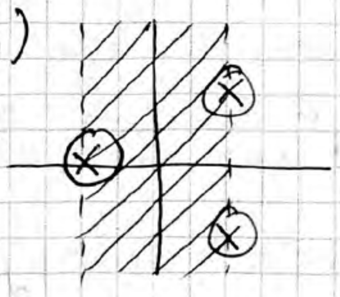
Aufgabe 2.6

$\boxed{\text{Konvergenzbereich}}$ (Eigenschaften)

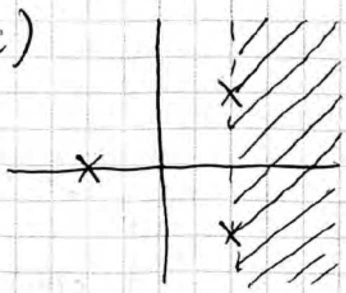
1) Das Konvergenzgebiet ist immer ein einfach zusammenhängendes Gebiet!
(3 Fälle)

a) 

alle Pole linksseitig

b) 

rechtsseitige Polstelle
linksseitige Polstelle

c) 

alle Pole rechtsseitig

Beachte:

Merke! { Jede Polstelle ist einzeln in den Zeitbereich transformierbar

(Beispielsweise $\frac{1}{p+a} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at}\,\varepsilon(t)$ $\boxed{\text{kausal}}$

oder

$\xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -e^{-at}\,\varepsilon(-t)$ $\boxed{\text{antikausal}}$)

=> Kausalität, Antikausalität sind Eigenschaften einzelner (oder aller) Polstellen.
Siehe Pol-Nullstellendiagramm 16)

2) Pole dürfen nie im Konvergenzgebiet liegen

3) Das Konvergenzgebiet wird immer durch die Pole begrenzt. Die Nullstellen hingegen ~~können~~ können beliebig in der komplexen p-Ebene angeordnet sein und haben keinen Einfluss auf das Konvergenzgebiet

4) Die Pol- und Nullstellen sind entweder reell oder treten paarweise konjugiert komplex auf, da die betrachteten Zeitfunktionen reellwertig sind.

5) Eine Polstelle und Nullstelle am selben Ort heben sich gerade auf.

Aufgabe 26

a) KB $Re\{p\} > 0$

$\Rightarrow$ alle Pole rechtsseitig (kausal)

$$H(p) = 1 \cdot \frac{p-2}{p(p+3)(p+2)} \quad ; Re\{p\} > 0$$

Partialbruchzerlegung:

$$H(p) = -\frac{1}{3}\frac{1}{p} + 2\frac{1}{p+2} - \frac{5}{3}\frac{1}{p+3}$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$h(t) = \varepsilon(t)\left[-\frac{1}{3} + 2e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}\right]$$

b) KB: $Re\{p\} < -3$

$\Rightarrow$ alle Pole linksseitig (antikausal)

$$\Rightarrow h(t) = \varepsilon(-t)\left[+\frac{1}{3} - 2e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-3t}\right]$$

Siehe auch Formelsammlung

Gegenüberstellung von kausalen & antikausalen Signalen

$$\frac{1}{p+\alpha} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{-\alpha t}\,\varepsilon(t)$$ kausales Signal ($Re\{p\} > -\alpha$)

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} -e^{-\alpha t}\,\varepsilon(-t)$$ antikausales Signal ($Re\{p\} < -\alpha$)

ketov@gmx.de

27.04.10
Übung
mit
Prof. Ohm

Aufgabe 26

a)

$$H(p) = \frac{p-2}{p(p+2)(p+3)} = A_0 + \sum_{i=1} \frac{A_i}{p-p_i}$$

$p_N = 2$

$p_{P_1} = 0 \qquad p_{P_2} = -2 \qquad p_{P_3} = -3$

$$A_0 = \lim_{p \to \infty} H(p) = 0$$

Zuhaltemethode

$$A_1 = \lim_{p \to p_{P_1}} \left[H(p)(p - p_{P_1}) \right] = \lim_{p \to 0} \frac{p-2}{(p+2)(p+3)} = -\frac{1}{3}$$

$$A_2 = \lim_{p \to p_{P_2}} \left[H(p)(p - p_{P_2}) \right] = \lim_{p \to -2} \frac{p-2}{p(p+3)} = 2$$

$$A_3 = \lim_{p \to p_{P_3}} \left[H(p)(p - p_{P_3}) \right] = \lim_{p \to -3} \frac{p-2}{p(p+2)} = -\frac{5}{3}$$

$$H(p) = -\frac{1}{3}\frac{1}{p} + 2 \cdot \frac{1}{p+2} - \frac{5}{3}\frac{1}{p+3}$$

Beachte Lage des KB

$\mathcal{L}$ ist nicht eindeutig!

Rechtsseitige + kausal Funktion $\quad e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{p+\alpha}$

[In Formelsammlung beachten!]

$\mathrm{Re}\{p\} > -\alpha$

$$\Rightarrow h(t) = \varepsilon(t)\left[-\frac{1}{3} + 2e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}\right]$$

ketov@gmx.de

b)

$H(p)$ identisch

<u>linksseitige Funktion</u>

$$-\varepsilon(-t)\, e^{-\alpha t} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{p+\alpha} \qquad Re\{p\} < -\alpha$$

$$h(t) = \varepsilon(-t)\left[\frac{1}{3} - 2e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-3t}\right]$$

c)

$H(p)$ identisch

p_{P_3}: <u>rechtsseitig</u> ; p_{P_2}, p_{P_1}: <u>linksseitig</u>

$$h(t) = \varepsilon(-t)\left[\frac{1}{3} - 2e^{-2t}\right] + \varepsilon(t)\left(-\frac{5}{3}\right)e^{-3t}$$

d)

$H(p)$ identisch

p_{P_2}, p_{P_3} rechtsseitig ; p_{P_1} linksseitig

$$h(t) = \varepsilon(-t)\,\frac{1}{3} + \varepsilon(t)\left[2e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}\right]$$

e)

kein gültiger Konvergenzbereich

<u>Polstellen müssen immer den Konvergenzbereich begrenzen!</u> Merke!

ketov@gmx.de

f)

Kein gültiger Konvergenzbereich.

Merke! { Polstellen liegen nie im KB!

g) Ungültig!

Merke! { K.B. ist immer zusammenhängend!

h) Vgl. f.)

i) Nullstelle $p_n = 2$

Polstellen p_p bei -1; $\pm j2$

solches Verfahren nützlich bei komplexen Nullstellen! (reellen Ausdruck belassen)

$$H(p) = \frac{p-2}{(p-j2)(p+j2)(p+1)} = \frac{p-2}{(p^2+4)(p+1)}$$

$$= \frac{a_1 p + a_2}{(p^2+4)} + \frac{a_3}{p+1}$$

komplexer Ansatz! (wg. Polstelle)

$$= \frac{(a_1+a_3)p^2 + (a_1+a_2)p + (a_2+4a_3)}{(p^2+4)(p+1)}$$

Koeffizientenvergleich $\Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 + 4a_3 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{5}; \; a_2 = \frac{2}{5}; \; a_3 = -\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow H(p) = \underbrace{\frac{1}{5}\,\frac{3p + \overset{\hat{=}\,\omega_0}{2}}{p^2 + \underset{=\omega_0^2}{4}}}_{\text{linksseitig}} - \underbrace{\frac{1}{5}\,\frac{3}{p+1}}_{\text{rechtsseitig}}$$

ketov@gmx.de

$$\frac{p}{p^2+\omega_0^2} \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\cos(\omega_0 t)\,\varepsilon(-t)$$

$$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2} \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\sin(\omega_0 t)\,\varepsilon(-t)$$

Formelsammlung

$$\Rightarrow \quad h(t) = \frac{1}{5}\left[-\varepsilon(-t)\left[3\cos(2t)+\sin(2t)\right] - 3\varepsilon(t)e^{-t}\right]$$

$\omega_0 = 2$

j)

$p_N = 0$

$p_{p_1} = 1 \; ; \; p_{p_{2,3}} = -2 \pm j$

$$H(p) = \frac{p}{(p-1)\cancel{(p+2j)}(p+2+j)(p+2-j)}$$

$$= \frac{p}{(p-1)(\underbrace{(p+2)^2}_{\text{„}\alpha\text{"}}+\underbrace{1}_{=\omega_0^2})}$$

Ziel: $$H(p) = \frac{a_1 p + a_2}{p^2+4p+5} + \frac{a_3}{p-1}$$

$$= \frac{p^2(a_1+a_3) + p(a_2-a_1+4a_3) + (5a_3-a_2)}{(p-1)\left[(p+2)^2+1\right]}$$

ketov@gmx.de

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 0 \\ a_2 + (-a_1) + 4a_3 &= 1 \\ 5a_3 - a_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{10} \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{10}$$

$$H(p) = \frac{1}{10}\left(\frac{5-p}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{p-1} \right)$$

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)\,\varepsilon(t) \, ; \; Re\{p\} > -\alpha$$

$$\frac{\omega_0}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$$

$$H(p) = \frac{1}{10}\left[\frac{-(p+\overset{\alpha}{2}) + 7 \cdot \overset{\omega_0}{1}}{(p+2)^2 + 1} + \frac{1}{p-1} \right]$$

$$\updownarrow$$

$$h(t) = \frac{1}{10}\left[e^{-2t}\left(7\sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)\right) + e^{t} \right] \varepsilon(t)$$

$$\omega_0 = 1$$

k) Wird hier nicht behandelt da wir uns nur mit reellwertigen Funktionen befassen. Da einzelne Polstelle bei $2+j$.
($\Rightarrow$ wäre komplexe Funktion)

l)

Ungültiger Konvergenzbereich, da nicht von Polstelle begrenzt.

m) $p_{N_1} = 2 \; ; \quad p_{N_{2,3}} = -2(1 \pm j)$

Polstelle (3fach) $p_p = 0$

$$H(p) = \frac{\left[(p+2)^2 + 4\right](p-2)}{p^3} = \frac{p^3 + 2p^2 - 16}{p^3}$$

$$= 1 + \frac{2}{p} - \frac{16}{p^3}$$

$$\mathcal{L} \updownarrow$$

$$h(t) = \delta(t) + 2\varepsilon(t) - 8t^2\varepsilon(t)$$

$$\left.\frac{1}{p^n} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(t)\right\} \text{Formelsammlung}$$

n)

Kein gültiger Konvergenzbereich, da kein einfach zusammenhängendes Gebiet.

o) $p_N = 0$ (doppelt)

$p_{p_{1,2}} = 2 \pm j2$; $p_{p_{3,4}} = -2 \pm j$

(linksseitig) (rechtsseitig)

$$H(p) = \frac{p^2}{((p-2)^2+4)((p+2)^2+1)}$$

$$= \frac{a_1 p + a_2}{(p-2)^2+4} + \frac{a_3 p + a_4}{(p+2)^2+1}$$

Nach Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

"Wird in Klausur nicht passieren!"

$$a_1 = \frac{52}{425} \; ; \; a_2 = \frac{24}{425} \; ; \; a_3 = -\frac{52}{425} \; ; \; a_4 = -\frac{15}{425}$$

$$H(p) = \frac{1}{425}\left[\frac{52p+24}{(p-\underbrace{2}_{\alpha})^2+\underbrace{4}_{\omega_0^2}} + \frac{-52p-15}{(p+2)^2+1}\right]$$

Ziel (Nenner) : $52(p-2) + 64 \cdot \underbrace{2}_{\omega_0} - 52(p+2) + 89 \cdot \underbrace{1}_{\omega_0}$

$$h(t) = \frac{1}{425}\Big[-\varepsilon(t)\, e^{2t}\left(52\cos(2t) + 64\sin(2t)\right)$$
$$+ \varepsilon(t)\, e^{-2t}\left(-52\cos(t) + 89\sin(t)\right)\Big]$$

p) Ungültig, da Polstelle im Konvergenzbereich

Aufgabe 2.7

(Zum selber rechnen)

Aufgabe 2.8

$$S(p) = \frac{2p-1}{(p+1)^3(p+4)}$$

Rechtsseitiges Signal

③ ② ① ← Reihenfolge

$$S(p) = \frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{(p+1)^2} + \frac{a_3}{(p+1)^3} + \frac{a_4}{p+4}$$

3-fache Polstelle bei $p=-1$

1-fache Polstelle bei $p=-4$

$$a_4 = \lim_{p\to -4}\left(S(p)(p+4)\right) = \left.\frac{2p-1}{(p+1)^3}\right|_{p=-4} = \frac{1}{3}$$

k-fache Polstelle (hier $k=3$) $\quad j = 1,\dots,3$

$$a_j = \frac{1}{(k-j)!}\lim_{p\to p_p}\left[\frac{d^{(k-j)}}{dp^{(k-j)}} S(p)\,(p-p_p)^k\right]$$ } Formelsammlung

$$j=3;\quad a_3 = \frac{1}{0!}\lim_{p\to -1}\left[S(p)(p+1)^3\right] = \left.\frac{2p-1}{p+4}\right|_{p=-1} = -1$$

Beachte Reihenfolge

$$j=2;\quad a_2 = \frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\left[\frac{d}{dp}\underbrace{\left(S(p)(p+1)^3\right)}_{=\frac{2p+1}{p+4}}\right] =$$

$$= \left.\frac{2(p+4)-(2p-1)}{(p+4)^2}\right|_{p=-1} = 1$$

$$j=1;\quad a_1 = \frac{1}{2!}\lim_{p\to -1}\left[\frac{d^2}{dp^2}\left(S(p)(p+1)^3\right)\right] = \left.\frac{1}{2}\,\frac{-9\cdot 2}{(p+4)^3}\right|_{p=-1} = -\frac{1}{3}$$

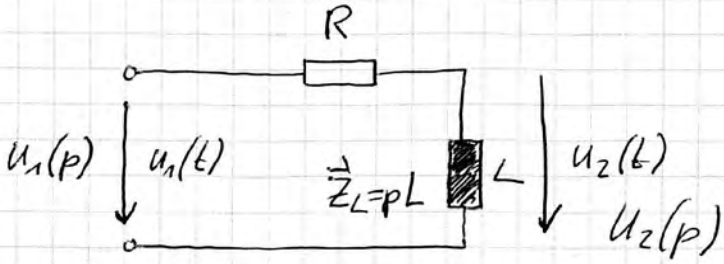
$$\Rightarrow S(p) = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{p+4}$$

ketov@gmx.de

$$s(t) = \varepsilon(t)\left[-\frac{1}{3}e^{-t} + t e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}\right]$$

Aufgabe 2.9

RL-Hochpass



$\vec{Z} \in \mathbb{C}$

mit Spannungsteiler

$$H(p) = \frac{\vec{U}_2(p)}{\vec{U}_1(p)} = \frac{pL}{R + pL} \qquad \text{mit } T = \frac{L}{R}$$

Vgl. Systheo

a) $H(p) = \dfrac{pT}{1+pT}$; $H(f) = \dfrac{j2\pi f T}{1 + j2\pi f T}$

b) $u_1(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t)\,\varepsilon(t)$; $\omega_0 = 2\pi f$

Tabellenlösung:

$$U_1(p) = \frac{A \cdot \omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

(entspricht (2.45) mit $\alpha = 0$)

c) $U_2(p) = U_1(p)\,H(p)$

$$= \frac{A \cdot \omega_0 T p}{(p^2 + \omega_0^2)(pT + 1)} = \frac{A \omega_0 p}{(p^2 + \omega_0^2)(p + \frac{1}{T})}$$

ketov@gmx.de

05.05.10

Übung

d)
$$U_2(p) = \frac{a_1 p + a_2}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{a_3}{p + \frac{1}{T}}$$

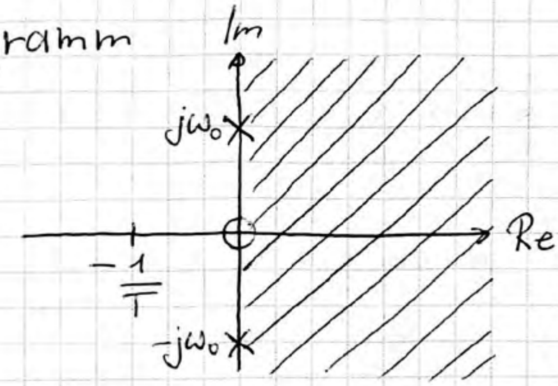
$$= \frac{p^2(a_1 + a_3) + p\left(\frac{a_1}{T} + a_2\right) + \frac{a_2}{T} + a_3\omega_0^2}{(p^2 + \omega_0^2)\left(p + \frac{1}{T}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 + a_3 = 0 \; ; \; a_2 + \frac{a_1}{T} = A\omega_0 \; ; \; \frac{a_2}{T} + a_3\omega_0^2 = 0$$

$$a_1 = \frac{A\omega_0 T}{1 + \omega_0^2 T^2} = -a_3$$

$$a_2 = a_1 \cdot \omega_0^2 T = \frac{A\omega_0^3 T^2}{1 + \omega_0^2 T^2}$$

PN-Diagramm



KB: $Re\{p\} > 0$

Kausal!

$$U_2(p) = a_1 \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{a_2}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{a_3}{p + \frac{1}{T}}$$

$$\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$u_2(t) = \left[a_1 \cos(\omega_0 t) + \frac{a_2}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + a_3 e^{-\frac{t}{T}}\right] \varepsilon(t)$$

$$u_2(t) = \left[\frac{A 2\pi f_0 T}{1 + (2\pi f_0 T)^2} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{A (2\pi f_0 T)^2}{1 + (2\pi f_0 T)^2} \sin(2\pi f_0 t) - \frac{A 2\pi f_0 T}{1 + (2\pi f_0 T)^2} e^{-\frac{t}{T}}\right] \varepsilon(t)$$

ketov@gmx.de

Aufgabe ~~3~~ 2.10

Stabile Systeme : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \, d\tau < \infty$

Diese Begründung reicht in Klausur aus! Folien

=> - Bei kausalen Systemen alle Polstellen bei $\sigma < 0$

- Bei antikausalen Systemen $(h(t)=0, \, t>0)$ alle Polstellen bei $\sigma > 0$

a) – d) existierende Systeme, nicht stabil

e) – h) nicht existient (ungültige PN-Diagramme)

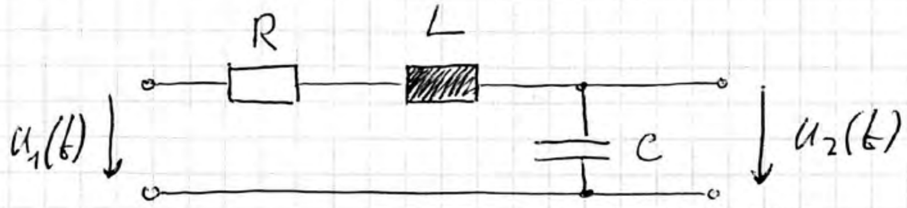
i) – m) nicht stabil

o) stabil

p) nicht ~~stabil~~ existent

Systeme stabil, wenn der Konvergenzbereich die imaginäre Achse einschließt.

Aufgabe 2.11



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

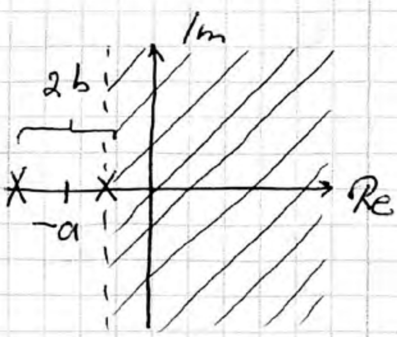
$$\tau = \frac{L}{R}$$

a) $$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}$$

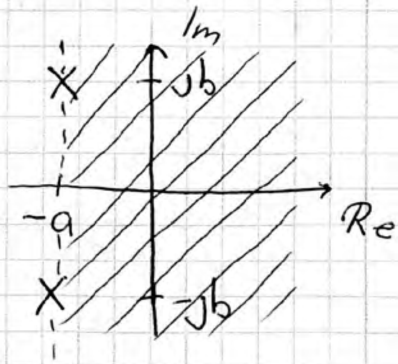
$$= \frac{\omega_0^2}{p^2 + \frac{1}{T}p + \omega_0^2}$$

$$p_{p_{1,2}} = \underbrace{-\frac{1}{2T}}_{=:a} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{2T}\right)^2 - \omega_0^2}}_{=:b}$$

(I) $\frac{1}{4T^2} > \omega_0^2 \Rightarrow b$ reell



(II) $\frac{1}{4T^2} < \omega_0^2 \Rightarrow b$ imaginär



Stabilität: Forderung

für (I) $-a + b < 0 \Rightarrow \omega_0^2 > 0$
Gegeben für $L, C < \infty$

} => solchem System in Realität immer stabil für (II) $a > 0$ immer erfüllt, falls

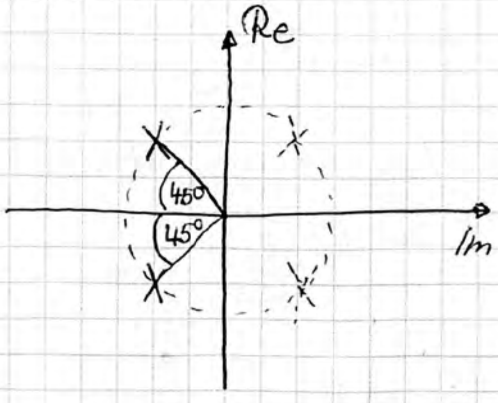
$R, L > 0$

Für $R = 0$, Polstellen bei $\sigma = 0$
Instabil (Oszillator)

b)

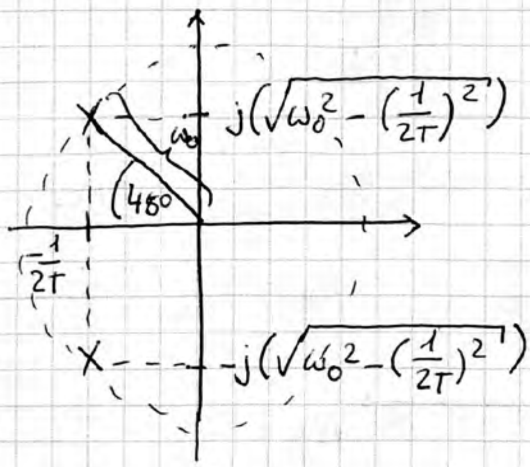
$\boxed{\text{Butterworth-Tiefpassfilter}}$

Polstellen äquidistant auf Halbkreis in linker Halbebene



nicht existente, gespiegelte Polstellen, die zusammen mit den existierenden Polstellen eine äquidistante Winkelverteilung ergeben

z.B.: 2 existente Polstellen: Winkel zwischen Polstellen $\frac{360^\circ}{4}$ oder $\frac{180^\circ}{2}$



$a = b$

$$\Rightarrow \frac{1}{2T} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2T}\right)^2}$$

$$\frac{1}{2T} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{T} = \sqrt{2}\,\omega_0$$

mit Pythagoras (s.o.) $\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2T}\right)^2 + \left(\frac{1}{2T}\right)^2 = \left(\text{Kreis-radius}\right)^2$

Kreisradius = „Grenzfrequenz"

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \frac{1}{T}p + \omega_0^2} = \frac{\omega_g^2}{p^2 + \sqrt{2}\,\omega_g p + \omega_g^2}$$

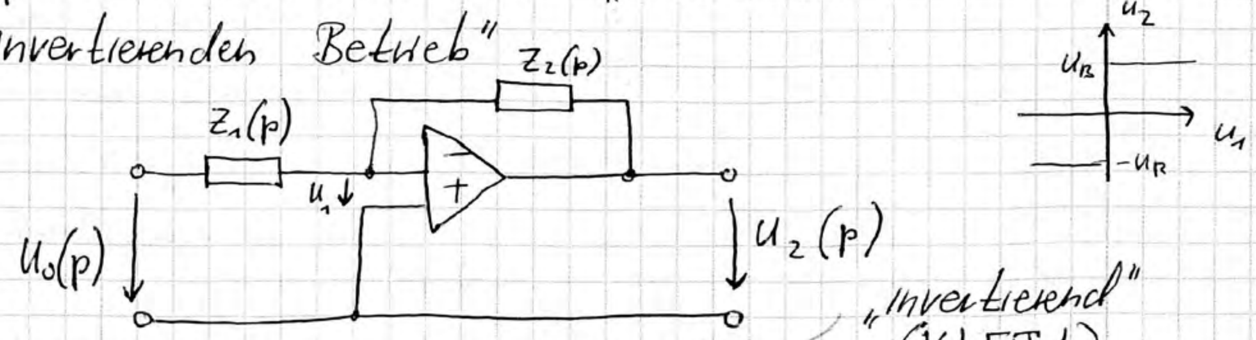
$$\frac{R}{L} = \sqrt{2}\,\omega_g$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_g$$

Aufgabe 2.12

Aus Folien S. Vorlesung

Operationsverstärker im „~~stationären~~ „invertierenden Betrieb"



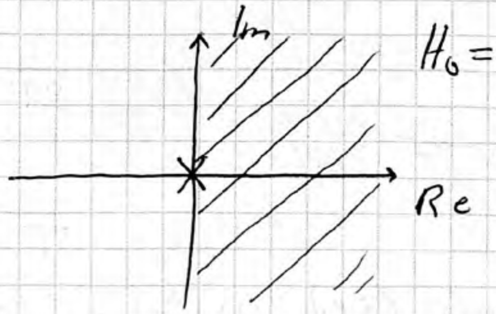
„invertierend" (Vgl. ET 1)

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_0(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}$$

Ideal $V \to \infty$

a) $Z_1 = R$; $Z_2 = \frac{1}{pC}$ => $H(p) = -\frac{1}{pRC}$

$H_0 = -\frac{1}{RC}$ ← gehört dazu!



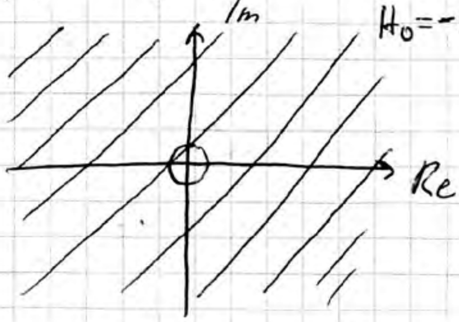
ketov@gmx.de

b) $Z_1 = \frac{1}{pC}$; $Z_2 = R$

$\Rightarrow H(p) = -pRC$

H(p) umformen auf „Standart Form", um H_0 abzulesen!

$H(p) = \frac{a+bp}{p+c} = b\frac{p+\frac{a}{b}}{p+c}$



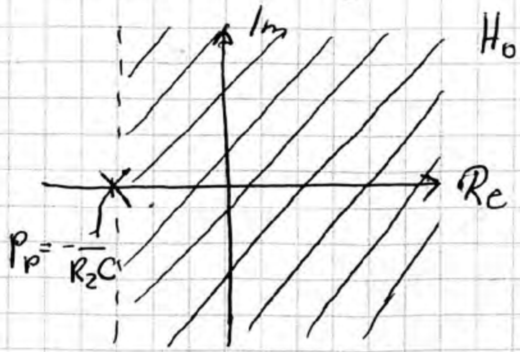
$H_0 = -RC$

Konvergenzbereich $\hat{=}$ gesamte Ebene

$Re\{|p|\} < \infty$

c) $Z_1 = R_1$; $Z_2 = R_2 \parallel C = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + pC}$

$$\Rightarrow H(p) = -\frac{\frac{1}{R_1 C}}{p + \frac{1}{R_2 C}}$$



$H_0 = -\frac{1}{R_1 C}$

Konvergenzbereich: $Re\{p\} > -\frac{1}{R_2 C}$

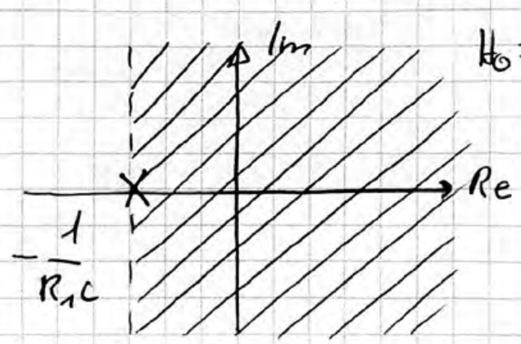
d) $Z_1 = R_1 + \frac{1}{pC}$; $Z_2 = R_2$

$$\Rightarrow H(p) = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{pC}} = -\frac{pR_2C}{1 + pR_1C}$$

$p_N = 0$

$p_P = -\frac{1}{R_1 C}$

el. Schaltungen immer kausal!



$H_0 = \cancel{-R_2 C} = -\frac{R_2}{R_1}$

Konvergenzbereich: $Re\{p\} > -\frac{1}{R_1 C}$

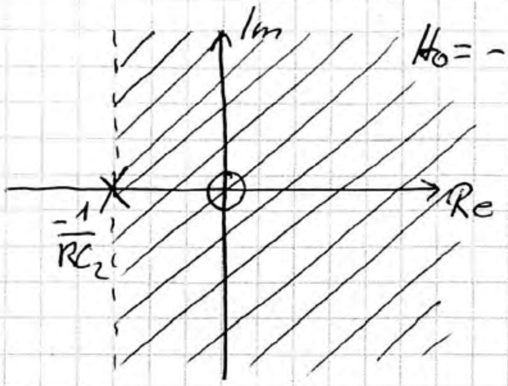
ketov@gmx.de

e) $Z_1 = \frac{1}{pC_1}$; $Z_2 = C_2 \| R = \frac{1}{\frac{1}{R} + pC_2}$

$$\Rightarrow H(p) = -\frac{p\frac{C_1}{C_2}}{p + \frac{1}{RC_2}}$$

$p_N = 0$

$p_P = -\frac{1}{RC_2}$

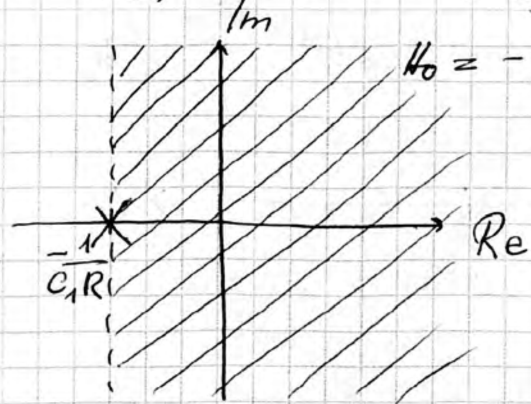


$H_0 = -\frac{C_1}{C_2}$

Konvergenzbereich

$Re\{p\} > -\frac{1}{RC_2}$

f) $Z_1 = R + \frac{1}{pC_1}$; $Z_2 = \frac{1}{pC_2}$ $\Rightarrow H(p) = \frac{-\frac{1}{C_2R}}{p + \frac{1}{C_1R}}$



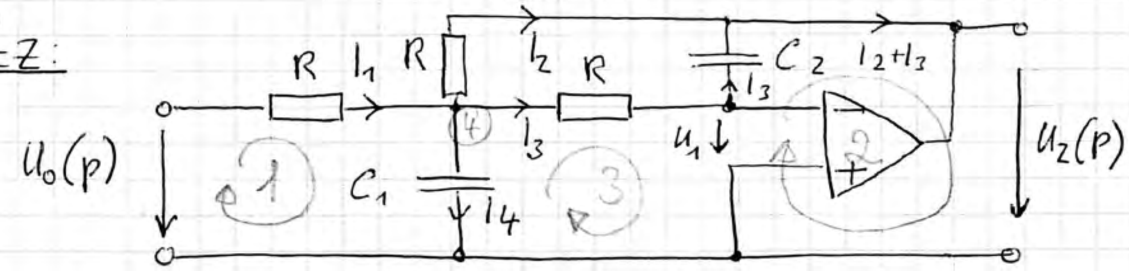
$H_0 = -\frac{1}{C_2R}$

Konvergenzbereich

$Re\{p\} > p_P$

$p_P = -\frac{1}{C_1R}$

Zusatz:



$$U_0(p) = R I_1(p) + \frac{1}{pC_1} I_4(p) \qquad ①$$

$$U_1(p) = \frac{1}{pC_2} I_3(p) + U_2(p) \qquad ②$$

$$\frac{1}{pC_1} I_4(p) = R I_3(p) + U_1(p) \qquad ③$$

$$I_1(p) = I_2(p) + I_3(p) + I_4(p) \qquad ④$$

$$U_0(p) = R\left[I_1(p) + I_2(p)\right] + U_2(p)$$ (Außenmasche)

$$U_0(p) = R\left[I_1(p) + I_3(p)\right] + U_1(p)$$ (Masche mit OpV-Klemmen)

$$R I_2(p) + U_2(p) = R I_3(p) + U_1(p) \qquad ⑤$$

$$\overset{②}{\Longrightarrow} \quad I_3(p) = pC_2\left[U_1(p) - U_2(p)\right] \qquad ⑥$$

$$\overset{③,⑥}{\Longrightarrow} \quad I_4(p) = p^2 C_1 C_2 R \left(U_1(p) - U_2(p)\right) + pC_1 U_1(p) \qquad ⑦$$

$$\overset{⑤,⑥}{\Longrightarrow} \quad I_2(p) = \left(pC_2 + \frac{1}{R}\right)\left[U_1(p) - U_2(p)\right] \qquad ⑧$$

⑥, ⑦, ⑧ in ④

$$\Rightarrow I_1(p) = \left[2pC_2 + \frac{1}{R} + p^2 C_1 C_2 R\right]\left(U_1(p) - U_2(p)\right) + pC_1 U_1(p) \qquad ⑨$$

ketov@gmx.de

⑦, ⑨ in ②.

$$U_0(p) = \left[2pRC_2 + 1 + p^2 C_1 C_2 R^2\right]\left(U_1(p) - U_2(p)\right)$$ Folie

$$v \to \infty \Rightarrow \frac{U_1(p)}{U_2(p)} \simeq 0 \quad \text{oder} \quad U_1(p) << U_2(p)$$

$$\Rightarrow \frac{U_0(p)}{U_2(p)} = \frac{1}{H(p)} = -\left[3pC_2R + 1 + p^2 C_1 C_2 R^2\right]$$

$$H(p) = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R^2}}{p^2 + \frac{3}{RC}p + \frac{1}{C_1 C_2 R^2}}$$

Aktiver Filter
2. Ordnung
(ähnlich RLC)

Aufgabe 3.1

a)

Aus Aufgabe 1.1: $H(f) = \dfrac{j2\pi f \frac{L}{R}}{1 + j2\pi f \frac{L}{R}}$

mit $\tau = \dfrac{L}{R}$

$$= \dfrac{\overbrace{(2\pi f \tau)^2}^{Re\{H(f)\}} + j\overbrace{2\pi f \tau}^{Im\{H(f)\}}}{1 + (2\pi f \tau)^2}$$

$$|H(f)| = \sqrt{H(f) H^*(f)} = \dfrac{|2\pi f \tau|}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau)^2}}$$

Betrag nicht vergessen!

Unabhängig von t!

$$\varphi(f) = \arctan\left(\dfrac{Im\{H(f)\}}{Re\{H(f)\}}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{2\pi f \tau}\right)$$

(Sprung um π bei $t=0$)

$F \gg \frac{1}{T}$
$$\begin{cases} \varphi(f) \to 0 & \text{für } |f| \to \infty \\ |H(f)| \to 1 & \text{für } |f| \to \infty \end{cases}$$

hier: $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{10^{-3} H}{10^{3} \Omega} = 10^{-6} s = 1 \mu s$

Mit $F_0 = 100 kHz$

$$\Rightarrow 2\pi F_0 \tau = 2\pi \underbrace{100 \cdot 10^3}_{F_0} Hz \cdot 10^{-6} s = 2\pi \cdot \frac{1}{10}$$

$k=0$ $\quad |H(0)| = 0$; $\varphi(0)$ undefiniert zwischen $\pm\frac{\pi}{2}$

$k=1$ $\quad |H(F)| = 0{,}532$; $\varphi(F) = 57{,}86^\circ$

$k=3$ $\quad |H(3F)| = 0{,}883$; $\varphi(3F) = 28{,}0^\circ$

ketov@gmx.de

b) $u_1(t) = 1V + 1V\cos(2\pi F t) - 0{,}3V\cos(6\pi F t)$ 12.05.10 Übung

$$u_2(t) = \underbrace{0V}_{H(0)\cdot 1V} + 1V|H(F)|\cos(2\pi F t + \phi(F))$$

$$- 0{,}3\,|H(3F)|\cos(6\pi F t + \phi(3F))$$

$$= |H(F)|\,1V\cdot\cos(2\pi F(t-t_0))$$

$$- 0{,}3\,|H(3F)|\cos(6\pi F(t-t_1))$$

$$t_0 = -\frac{\varphi(F)}{2\pi F} = +1{,}61\cdot 10^{-6}\,s$$

$$t_1 = -\frac{\varphi(3F)}{2\pi F} = +0{,}259\cdot 10^{-6}\,s$$

Beachte: rad $\leftrightarrow$ deg

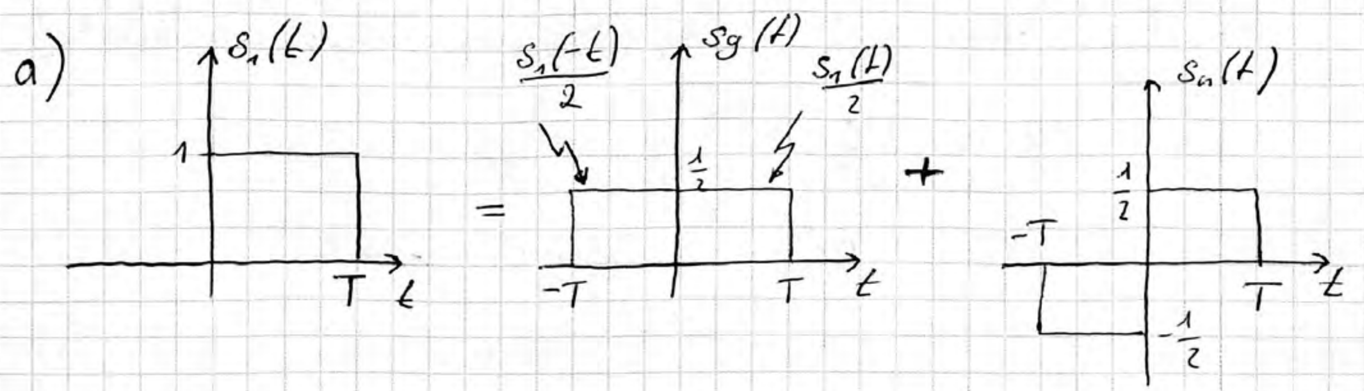
Skizze siehe Musterlösung

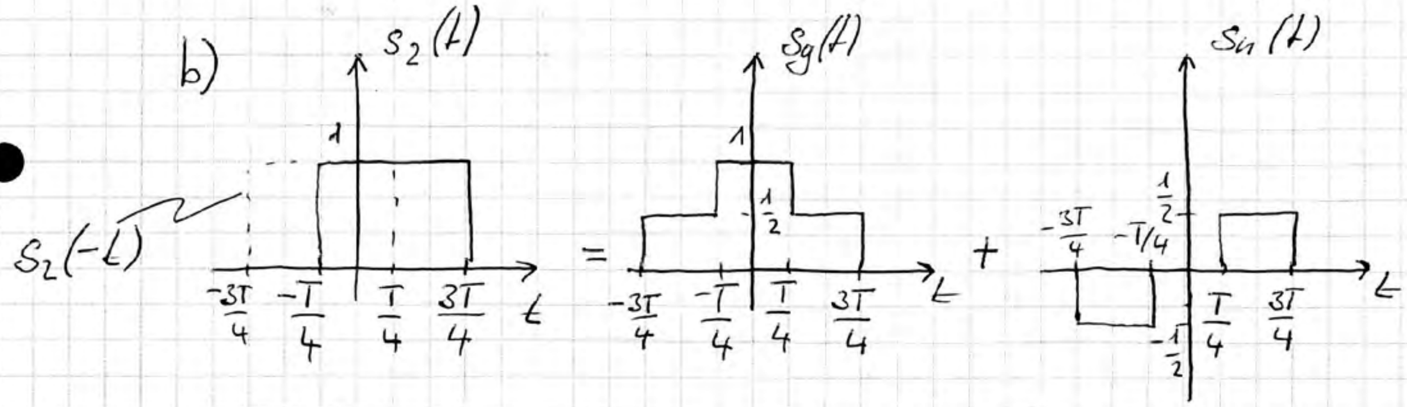
Aufgabe 3.2

Gerade Komponente bei realen Signalen: $s_g(t) = \frac{1}{2}[s(t) + s(-t)]$

Ungerade Komponente bei realen Signalen: $s_u(t) = \frac{1}{2}[s(t) - s(-t)]$

a)





Aufgabe 3.3

gute Übung

a) $$S_p(k) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_p(t)\, e^{-j2\pi kFt}\, dt = \begin{cases} \frac{T_b}{T} & \text{für } k=0 \\ \frac{T_b}{T}\,\frac{\sin(2\pi kF\frac{T_b}{2})}{2\pi kF\frac{T_b}{2}} & \text{für } k\neq 0 \end{cases}$$

(s. Vorlesung und Skript)

b)

$s(t) = s(-t)$ und reelles Signal

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k)\, e^{j2\pi kFt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k)\, e^{-j2\pi kFt} \quad \Big|\ \text{da } s(t)=s(-t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(-k)\, e^{-j2\pi kFt}$$

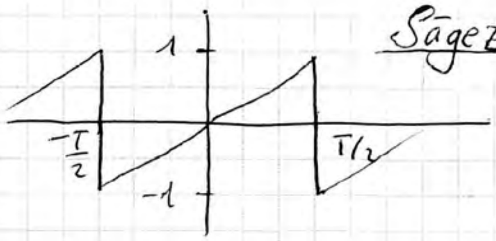
$S_p(k) = S_p(-k)$, weiter bei reellen Signalen

Merke! $$\boxed{S_p(k) = S_p^*(-k) \Rightarrow \operatorname{Im}\{S_p(k)\} = 0}$$

(gerade)

Aufgabe 3.4

Sägezahnkurve



über Periode

a) $S_p(k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{t}{T/2} e^{-j2\pi kFt} dt$ mit $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$

$$= \frac{2}{T^2}\left[\frac{e^{-j2\pi Ft}}{(-j2\pi kF)^2}(-j2\pi kFt-1)\right]_{-T/2}^{\frac{T}{2}} \qquad F = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{2}{(2\pi k \underbrace{FT}_{=1})}\Big[e^{-j2\pi k \underbrace{F\frac{T}{2}}_{=1/2}}(j2\pi k \underbrace{F\frac{T}{2}}_{=1/2}+1) + $$

$$-e^{j2\pi kF\frac{T}{2}}(-j2\pi k \underbrace{F\frac{T}{2}}_{=1/2}+1)\Big]$$

$$= \frac{2}{4\pi^2 k^2}\Big[-2j\underbrace{\sin(\pi k)}_{=0} + jk\pi \cdot 2\underbrace{\cos(\pi k)}_{=(-1)^k}\Big]$$

$$= j\frac{1}{\pi k}(-1)^k = S_p(k) = Im\{S_p(k)\}$$

für $k \neq 0$ $\qquad Re\{S_p(k)\} = 0$

für $k=0$: $\int_{-T/2}^{T/2} s_p(t)\,dt = 0 \Rightarrow S_p(0) = 0$

ketov@gmx.de

b) $s(t) = -s(-t)$ (reelle, ungerade Funktion)

$$\sum_k S_p(k)\, e^{j2\pi kFt} = -\sum_k S_p(k)\, e^{j2\pi kF(-t)}$$

$$= -\sum_k S_p(-k)\, e^{j2\pi kFt}$$

$\Rightarrow \quad S_p(k) = -S_p(-k)$

Merke! und $\boxed{S_p(k) = -S_p^*(-k)}$ bei reellen Funktionen

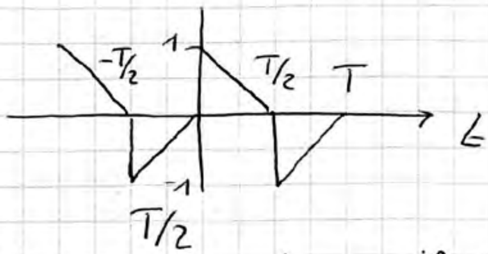
$\boxed{\Rightarrow \; Re\{S_p(t)\} = 0}$

(ungerade)

Fourier-Reihen Koeffizienten auch bei Fourier-Transformation

Merke!

Aufgabe 3.5



$$S_p(k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} \frac{t}{T/2}\, e^{-j2\pi kFt}\,dt + \int_{0}^{T/2}\left(1-\frac{t}{T/2}\right) e^{-j2\pi kFt}\,dt$$

(dasselbe Integral wie in 3.4)

$$= \frac{2}{T^2}\left[\frac{1}{(-j2\pi kF)^2}\, e^{-j2\pi kFt}\,(-j2\pi kFt-1)\right]_{-T/2}^{0}$$

$$-\frac{2}{T^2}\Big(\circledast\Big)_0^{T/2} + \frac{1}{T}\left(\frac{1}{-j2\pi kF}\, e^{-j2\pi kFt}\right)_0^{T/2}$$

$$= \frac{2}{(2\pi k)^2}\left[1 - e^{j\pi k}(1-j\pi k) - e^{-j\pi k}(1+j\pi k) + 1\right]$$

$$+ \frac{j}{2\pi k}\left(e^{-j\pi k} - 1\right)$$

$$\boxed{e^{j\pi k} = e^{-j\pi k} = (-1)^k}$$ } **Merke** (Euler)

$$Sp(k) = \underbrace{\frac{1}{2\pi^2 k^2}\, 2\left(1-(-1)^k\right)}_{Re\{Sp(k)\}} + \underbrace{\frac{j}{2\pi k}\left((-1)^k - 1\right)}_{j\,Im\{Sp(k)\}}$$

Re und Im = 0 für ganzzahlige k !

$Sp(0) = 0$ (da Fläche über Periode = 0)

b)

$$s(t) = -s(t+\tfrac{T}{2})$$

$$\sum_k Sp(k)\, e^{j2\pi kFt} = -\sum_k Sp(k)\, e^{j2\pi kF(t+\frac{T}{2})}$$

$$= -\sum_k Sp(k)\, e^{j2\pi kFt} \cdot \underbrace{e^{j2\pi kF\frac{T}{2}}}_{= e^{jk\pi} = (-1)^k}$$

$$\Rightarrow \quad Sp(k) = -Sp(k)\,(-1)^k$$

nur erfüllbar für ungerade k

$$\boxed{e^{j2\pi k} = e^{-j2\pi k} = 1}$$ } **Merke** (Euler)

ketov@gmx.de

bei Periodischer Fkt.

$\boxed{\text{Gleichanteil}}$

Aufgabe 3.6

Fläche unter Dreieck

a) $S_p(0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,dt = \frac{1}{T}\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$

$\neq$ 1.A. b) $S_p(t) = S_p(-t) \xRightarrow{A.3.3} Im\{S_p(k)\} = 0$

Mittelwert

$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt}$

$$f_p(t) = S_p(t) - \frac{1}{2} = \left[-S_p\left(t+\frac{T}{2}\right) - S_p(0)\right]$$

$$= -f_p\left(t+\frac{T}{2}\right)$$

$\Rightarrow Re\{S_p(k)\} = 0$ für ganzzahlige k

$\left[S_p(k) = F_p(k) \quad \text{für } k \neq 0 \;!\right]$

c) $$S_p(k) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} \frac{t+\frac{T}{2}}{T/2} e^{-j2\pi kFt}\,dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} \frac{-t+T/2}{T/2} e^{-j2\pi kFt}\,dt$$

$$= \frac{2}{T^2}\left[\frac{T}{2}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi kFt}\,dt + \int_{-T/2}^{0} t e^{-j2\pi kFt}\,dt - \int_{0}^{T/2} t e^{-j2\pi kFt}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-j2\pi kFt}}{-j2\pi kF}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{T^2}\left[\frac{e^{-j2\pi kFt}}{(-jk2\pi F)^2}(-jk2\pi Ft - 1)\right]_{-T/2}^{0}$$

$$- \frac{2}{T^2}\left[\circledast\right]_0^{T/2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{k^2\pi^2}\left[1-(-1)^k\right]}}$$

ketov@gmx.de

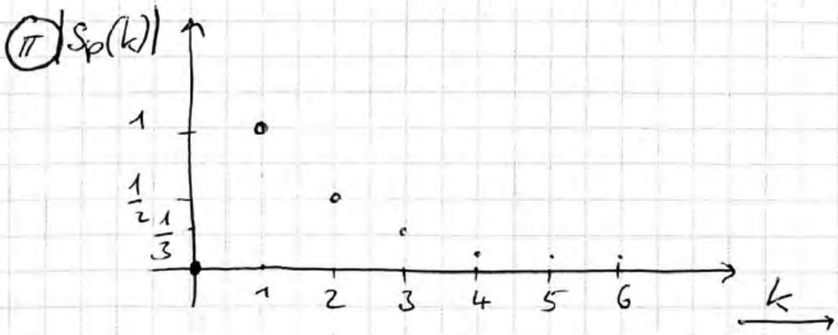
Aufgabe 3.7

Aus Aufgabe 3.7:

$$S_p(k) = \frac{j}{\pi k}(-1)^k \qquad (Re\{S_p(k)\} = 0)$$

$$= Im\{S_p(k)\}$$

a)



Betragsgang

$$\varphi(k) = \arctan\left(\frac{Im\{S_p(k)\}}{Re\{S_p(k)\}}\right) \pm \pi \cdot i(k)$$

mit $i(k) = 1$ falls $Re\{S_p(k)\} < 0$

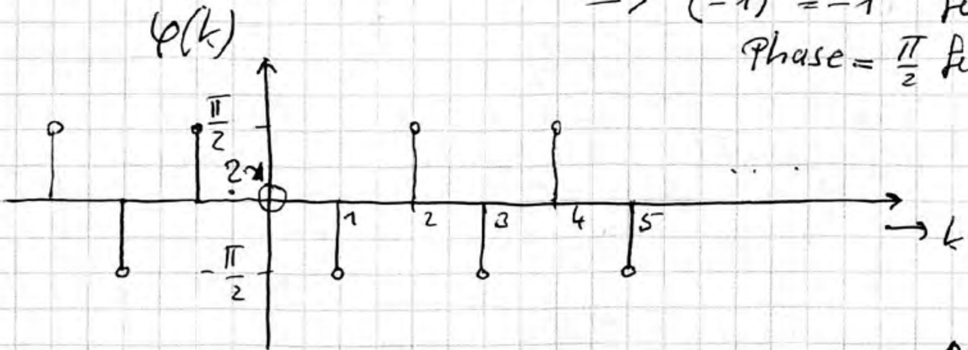
$i(k) = 0$ ~~falls~~ sonst

$$\varphi(k) = \begin{cases} \text{undefiniert für } k = 0 \\ sgn\left[Im\{S_p(k)\}\right]\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

falls $|S_p| = 0$
arg(S_p) undefiniert!

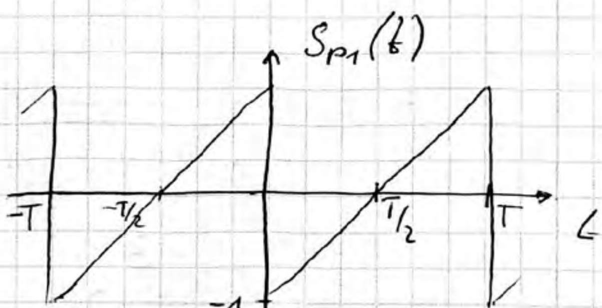
$\Rightarrow (-1)^k = -1$ für ungerade k

Phase $= \frac{\pi}{2}$ für ungerade k



$\Rightarrow$ Phase bei reellwertigen Signalen ungerade

b) $S_{p1}(t) = S_p\left(t - \frac{T}{2}\right)$



$$S_{p1}(t) = \sum_k S_p(k)\, e^{j2\pi kF\left(t - \frac{T}{2}\right)}$$

$$= \underbrace{\sum_k S_p(k)\, e^{j2\pi kFt}}_{S_p(t)} \underbrace{e^{-j2\pi kF\frac{T}{2}}}_{(-1)^k}$$

$$\Rightarrow S_{p1}(k) = S_p(k)\,(-1)^k$$

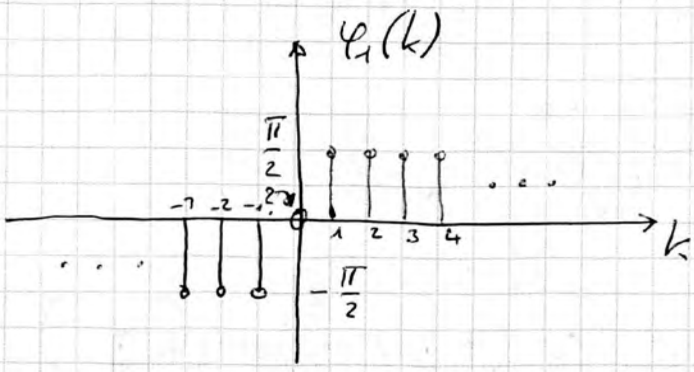
$$= (-1)^k \frac{j}{k\pi}(-1)^k = \underline{\underline{\frac{j}{k\pi}}}$$

$$|S_{p1}(k)| = \frac{1}{k\pi}$$

(wie oben)

$$Re\{S_{p1}(k)\} = 0$$

$$Im\{S_{p1}(k)\} > 0 \quad \text{für } k > 0$$



$$s_{p1}(t) = s_p(t) * \delta(t - \underbrace{\tfrac{T}{2}}_{=: t_0})$$

$\Downarrow$

Formelsammlung $\longleftrightarrow$ (S. 7)

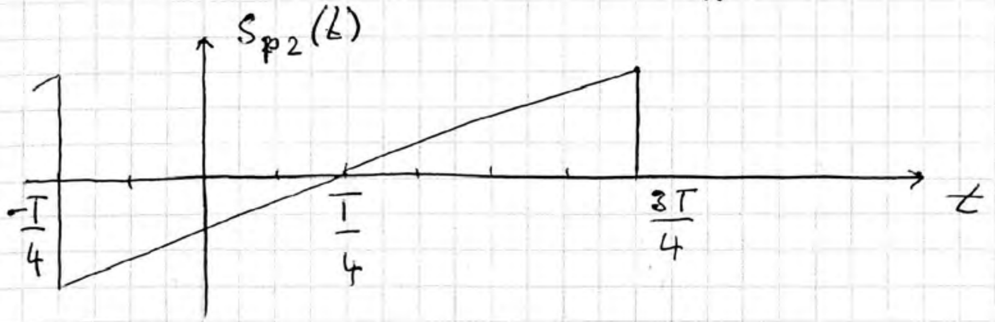
$$S_{p1}(k) = S_p(k) \cdot e^{-j2\pi kFt_0}$$

$$= S_p(k) \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k\frac{1}{T}\frac{T}{2}}}_{= e^{-j\pi k} = (-1)^k} = \frac{j}{k\pi}$$

ketov@gmx.de

19.05.10
Übung

c) $S_{p2}(t) = S_p\left(t - \frac{T}{4}\right) = \sum_k S_p(k)\, e^{jk2\pi F\left(t - \frac{T}{4}\right)}$



$$= \sum_k \underbrace{S_p(k)\, e^{-jk2\pi F\frac{T}{4}}}_{= S_{p2}(k) = S_p(k)\, e^{-jk\frac{\pi}{2}}} e^{j2\pi kFt} \quad ; \quad F = \frac{1}{T}$$

$$S_p(k) = j\,\frac{(-1)^k}{k\pi} = j b_k$$

$$S_p(k) = j b_k\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \underbrace{b_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}_{Re} + j\underbrace{b_k \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}_{Im}$$

$$\varphi_2(k) = \arctan\left(\frac{b_k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{b_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}\right) \pm 1(k)\cdot\pi \qquad 1(k) = \begin{cases} 1 & ; Re < 0 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

k	1	2	3	4	5	6
$\frac{\cos}{\sin}$	0	$-\infty$	0	∞	0	$-\infty$
arctan	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$
$i(k)$	1	0	0	0	1	0

periodisch mit $k=4$

$\Rightarrow \varphi_2(k)$	$\pm\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$-\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 3.8

a)

$$S_p(t) = \left(\frac{t}{T/2}\right)^2 \qquad \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$= \left[\left(\frac{t}{T/2}\right)^2 \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

b)

$$S_p(0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_p(t)\,dt = \frac{2}{T}\,\frac{4}{T^2}\int_0^{T/2} t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

c)

$$s(t) = \frac{1}{\pi^2}\, f\left(\frac{t}{T/2}\cdot\pi\right) \qquad \text{mit } F = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\, f(t\cdot 2\pi F)$$

$$S_p(t) = \underbrace{\frac{1}{3}}_{} - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos(2\pi F t)}{1^2} - \frac{\cos(4\pi F t)}{2^2} + \frac{\cos(6\pi F t)}{3^2} + \right]$$

Gleichanteil bezogen auf $S_g(t)$!

Vgl. mit Reihe!

Fourier-Reihe bei reellwertigen Signalen

$$S_p(t) = \boxed{S_p(0)} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{S_p(k)\}\cos(\quad) \underbrace{- \mathrm{Im}\{S_p(k)\}\sin(\quad)}_{\text{fällt hier weg, da } S_p(t) = S_p(-t)\ (\text{ungerade})}$$

$\boxed{\text{Mittelwert}}$

$S_p(k)$ reellwertig ($\in \mathbb{R}$)

auch $\boxed{\text{Gleichanteil}}$

~~d)~~ $S_p(0) = \frac{1}{3}$; $2S_p(k) = \frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{k^2}$ für $|k|>0$

$$S_p(k) = \frac{2(-1)^k}{(\pi k)^2}$$

(„aus der Reihe herauslesen") [durch Koeffizienten Vergleich]

d) $$\mathcal{L}_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_p(k)|^2 = S_p^2(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} |S_p(k)|^2$$

gerade

Formelsammlung

$$= \frac{1}{9} + 2\cdot\frac{4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4}\cdot\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{5}$$

$$S_{eff} = \sqrt{\mathcal{L}_s} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Merke!

ketov@gmx.de

Aufgabe 3.9

RL-HP mit $\tau = \frac{L}{R} = T = \frac{1}{F}$

Zeitkonstante des HP

Periode des Eingangssignals

$$H(f) = \frac{j2\pi f\tau}{1+j2\pi f\tau}$$

Aus Aufgabe 3.3: $S_p(k) = \frac{T_b}{T} \cdot \frac{\sin\left(k2\pi F\frac{T_b}{2}\right)}{k2\pi F\frac{T_b}{2}}$

Fourier-Reihen-Entwicklung

$$\underbrace{S_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k)\, e^{j2\pi Fkt}}$$

Weil Faltung von Eingangsfkt

$$g_p(t) = S_p(t) * h(t) \stackrel{LTI}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{S_p(k)\cdot H(kF)}_{G_p(k)}\, e^{j2\pi kFt}$$

S. 34

$$\Rightarrow G_p(k) = \underbrace{\frac{T_b}{T}\frac{\sin\left(k2\pi F\frac{T_b}{2}\right)}{k2\pi F\frac{T_b}{2}}}_{=S(k)} \cdot \frac{jk2\pi \overbrace{FT}^{=1}}{1+jk2\pi FT} \cdot \frac{1-jk2\pi}{1-jk2\pi}$$

Re

Im

$$= S_p(k)\, \frac{k^2 4\pi^2 + jk2\pi}{1+k^2 4\pi^2}$$

$$\mathrm{Re}\{G_p(k)\} = S_p(k)\cdot\frac{4k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2}$$

$$\mathrm{Im}\{G_p(k)\} = S_p(k)\cdot\frac{k2\pi}{1+4k^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow g_p(t) = \underbrace{G_p(0)}_{=0} + 2\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{G_p(k)\}\cos(2\pi kFt) - \mathrm{Im}\{G_p(k)\}\sin(2\pi kFt)\right]$$

$$g_p(t) = G_p(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} |G_p(k)| \cos(2\pi k F t + \varphi_g(k))$$

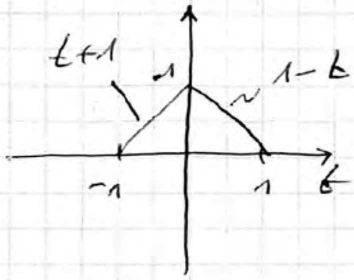
$$|G_p(k)| = |S_p(k)| \cdot |H(kF)|$$

$$\varphi_g(k) = \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{k \cdot 2\pi}\right)}_{\text{aus } \varphi(f) = \arctan\left(\frac{1}{2\pi f \tau}\right)} + \varphi_s(k)$$

$$\varphi_s(k) = \begin{cases} \pm\pi, & Re<0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3.10

a) $$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$



$\boxed{\text{Berechnen} \Downarrow \text{Fourierintegral lösen}}$

$$s(t) = (1-|t|) \cdot rect\left(\frac{t}{2}\right) = \Lambda(t)$$

$$S(f) = \int_{-1}^{0} (t+1) e^{-j2\pi f t} dt + \int_{0}^{1} (1-t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\left[\text{mit } \int t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at-1) \right] \text{Formelsammlung}$$

$$= \left[\frac{1}{(-j2\pi f)^2} e^{-j2\pi f t}(\cancel{+j}2\pi f t + 1)\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{\cancel{j}\,1}{(-j2\pi f)^2} e^{-j2\pi f t}(+j2\pi f t + 1)\right]_{0}^{1}$$

$$+ \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi f)^2}\left[1 - e^{j2\pi f}(1 - j2\pi f)\right] - \frac{1}{(2\pi f)^2}\left[e^{-j2\pi f}(j2\pi f + 1) - 1\right]$$

$$+ \frac{j}{2\pi f}\left(e^{-j2\pi f} - e^{j2\pi f}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi f)^2}\left[2 - 2\cos(2\pi f) + j2\pi f \cdot 2j\sin(2\pi f)\right]$$

$$+ \frac{2\sin(2\pi f)}{2\pi f}$$

wie zu erwarten $\longrightarrow$

[mit Tabelle schneller]

$$= \underset{\underline{\underline{(1)}}}{\frac{2(1-\cos(2\pi f))}{(2\pi f)^2}} = 4 \cdot \frac{\sin^2(\pi f)}{(2\pi f)^2} = \underline{\underline{\left[si(\pi f)\right]^2}}$$

mit $\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha+\beta)) = \sin\alpha \sin\beta$

hier $\alpha = \beta$

b)

Periode $T = 2 = \frac{1}{F}$

$$S_p(t) = s(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n)$$

$$S_p(k) = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} s_p(t)\, e^{-j2\pi kFt}\, dt = \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j2\pi kFt}\, dt}_{= S(kF) \text{ aus a)}}$$

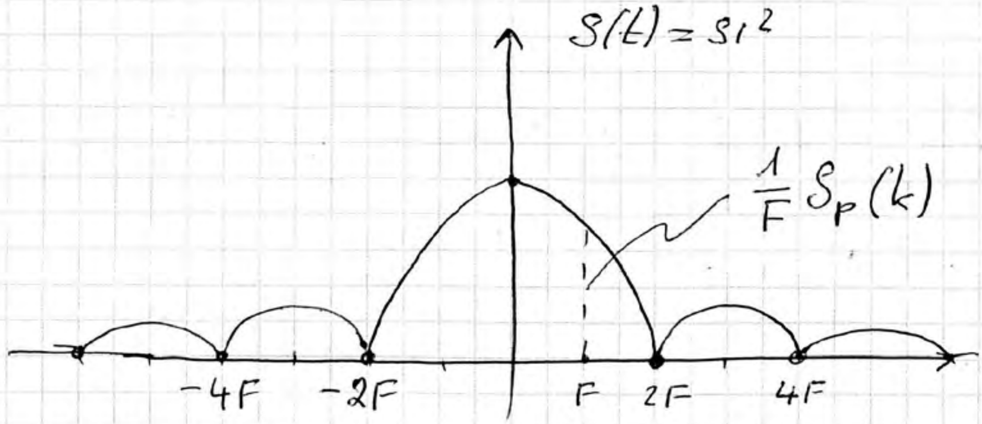
$$= F \cdot S(kF)$$

$F = \frac{1}{2} = \frac{1}{T}$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2\pi kF)^2}\left(1 - \cos(2\pi kF)\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{k^2\pi^2}\left[1 - (-1)^k\right]}}$$

Vgl. Aufgabe 3.6



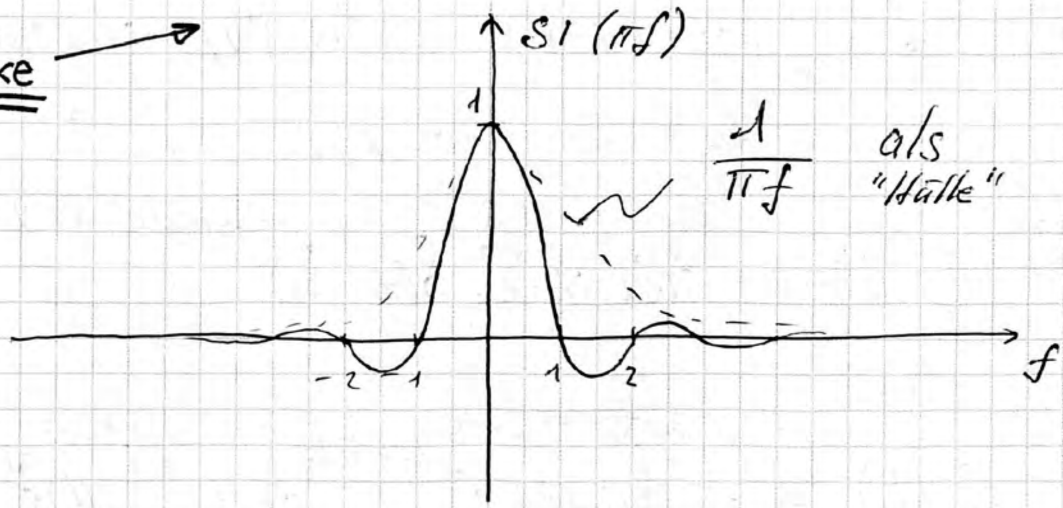
Aufgabe 3.11

$$S(f) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{-j2\pi f}\underbrace{\left[e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}\right]}_{= -2j\sin(\pi f)}$$

$$= \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \underline{\underline{si(\pi f)}}$$

mit Tabelle schneller!

Merke



$$\mathcal{F}\{rect(t)\} = si(\pi f) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{Tabelle}}}!$$

Aufgabe 3.12

Merke

$\boxed{\text{Mittelwert} \hat{=} S_p(0)}$

$$S(f) = \int_{-1}^{1} t\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \left[\frac{1}{(-j2\pi f t)^2} e^{-j2\pi f t}(-j2\pi f t - 1)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi f)^2}\Big(\underbrace{e^{-j2\pi f}}_{\neq 1,\ \text{da } f \in \mathbb{R}}(-j2\pi f - 1) - e^{j2\pi f}(j2\pi f - 1)\Big)$$

← Merke !

Bei Reihenentwicklung (NUR)

$$= \frac{1}{(2\pi f)^2}\Big(j2\pi f \cdot 2\cos(2\pi f) - 2j\sin(2\pi f)\Big)$$

$$= j\left(\frac{2\cos(2\pi f)}{2\pi f} - 2\,\frac{\sin(2\pi f)}{(2\pi f)^2}\right)$$

Vgl. mit $S_0(t)$ $(S_0(f))$

Frage $S(f=0)$?

Signal reellwertig, daher $S^*(f) = S(-f)$

$f=0$: $S(0) = S^*(0) \Rightarrow \operatorname{Im}\{S(0)\} = 0$

oder Flächenintegral über die Periode

Spektrum ist imaginärwertig, daher $S(0) = 0$

oder $\boxed{\text{„Flächentheorem"}}$ der F.T.

$\boxed{\neq \text{Mittelwert}}$

Fläche unter $S(f)$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, e^{j2\pi f t}\, df\Big|_{t=0}$

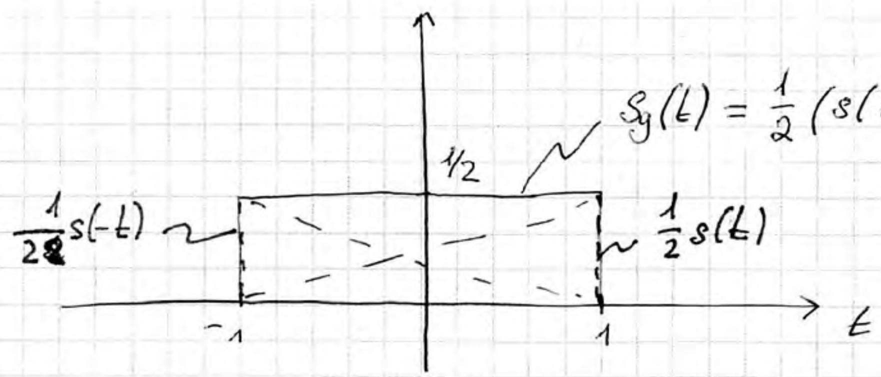
$= s(0)$

Fläche unter $s(t)$: $\displaystyle\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\Big|_{f=0}}_{} = S(0)$

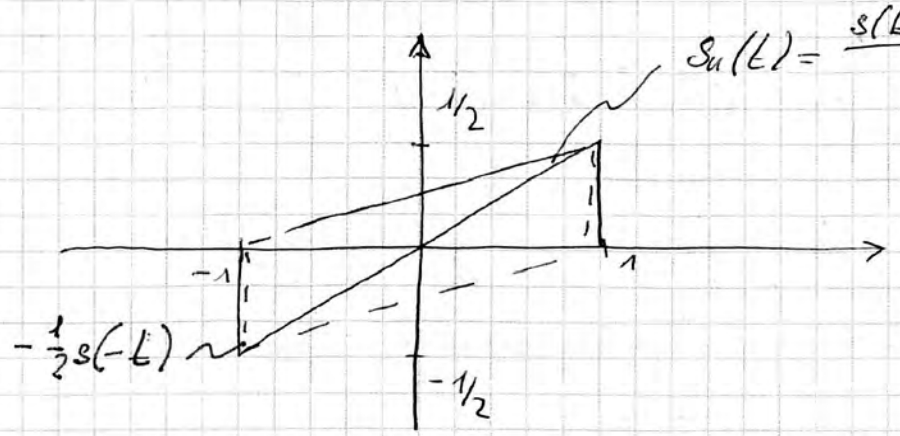
Hier: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, dt = 0 = S(0)$

b)

$$S_g(t) = \frac{1}{2}\left(s(t)+s(-t)\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$



$$S_u(t) = \frac{s(t - s(-t)}{2}$$



$$S_g(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{si}(2\pi f)$$

$$S_u(t) = \frac{1}{2} s_o(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; j\left(\frac{\cos(2\pi f)}{2\pi f} - \frac{\sin(2\pi f)}{(2\pi f)^2}\right)$$

$$S(f) = \mathcal{F}\{s_g(t)\} + \mathcal{F}\{s_u(t)\} = \underbrace{\mathrm{si}(2\pi f)}_{Re} + j\underbrace{\left(\frac{\cos(2\pi f)}{2\pi f} - \frac{\sin(2\pi f)}{(2\pi f)^2}\right)}_{Im}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_g(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; Re\,\{S(f)\} \\ S_u(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; j\,Im\,\{S(f)\} \end{array}}$$

Merke

nicht vergessen

Aufgabe 3.13

a) $S(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\circ\!\!-\!\!-\!\!\circ} s(t) = \mathrm{si}(2\pi t)$

Merke

$$\boxed{\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{j2\pi f t}\, dt \Big|_{f=0} \equiv \text{Fläche unter } s(t) \equiv S(0)}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

c) hier reell, daher $s^*(t) = s(t)$

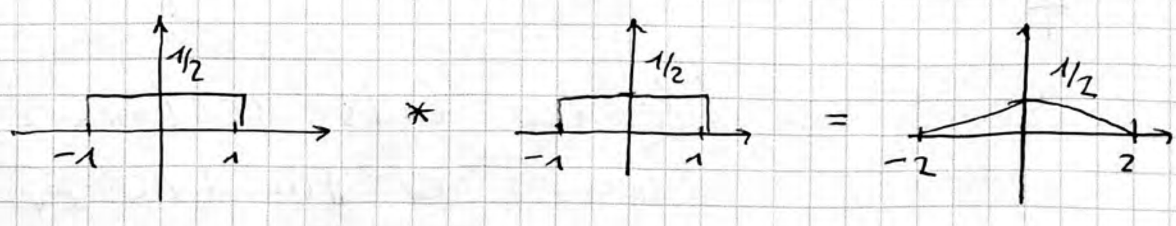
u. $1^* = S$

Vgl. ET II

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{s(t)\cdot s^*(t)}_{|s(t)|^2}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{s(t)\cdot s(t)}_{\circ\!-\!\bullet\ S(f) * S(f)} e^{-j2\pi f t}\, dt \Big|_{f=0} = S(f) * S(f) \Big|_{f=0}$$

$$S(f) * S(f) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Lambda\left(\frac{f}{2}\right)$$



$$E_s = \mathcal{s}(f) * \mathcal{s}(f)\Big|_{f=0} = \frac{1}{2}\Lambda(0) = \frac{1}{2}$$

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(-t)\, dt \quad , \text{da } \underbrace{s(t) = s(-t)}_{\text{bei } si(t)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(\underset{\tau - t}{\cancel{\ldots}})\, dt \Big|_{\tau=0} = si(2\pi\tau) * si(2\pi\tau)\Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2}$$

$$= si\left(\frac{\pi\tau}{1/2}\right)$$

$$si\left(\frac{\pi\tau}{1/2}\right) * si\left(\frac{\pi\tau}{1/2}\right) = \frac{1}{2} si(2\pi\tau)$$

Viele Möglichkeiten zum ausrechnen!

Aufgabe 3.14

a) i) $\displaystyle\int_{T=\frac{1}{F}} \sin(2\pi m F t)\sin(2\pi n F t)\, dt$

mit $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

$$= \int_T \frac{1}{2}\left[\cos(2\pi(m-n)Ft) - \cos(2\pi(m+n)Ft)\right] dt$$

$T = \frac{1}{F} \Rightarrow$ Integration links $\cos(2\pi k F t)$ über ~~T~~ für $k \neq 0$

$= 0$ für

I $m = n$:

$$\frac{1}{2}\int_T \underbrace{\cos(0)}_{=1} - \underbrace{\cos((m+n)\cdot 2\pi Ft)}_{=0}\,dt = \frac{T}{2}$$

außer $m = n = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_T \cos(0) - \cos(0)\,dt = 0$

II $m = -n$

$$\int_T \sin(2\pi mFt)\sin(2\pi nFt)\,dt = \begin{cases} T/2 \,, & m = n \neq 0 \\ -T/2 \,, & m = -n \neq 0 \\ 0 \,, & \text{sonst} \end{cases}$$

ii)

$$\int_T e^{j2\pi mFt}\, e^{-j2\pi nFt}\,dt = \int_T e^{j(m-n)2\pi Ft}\,dt$$

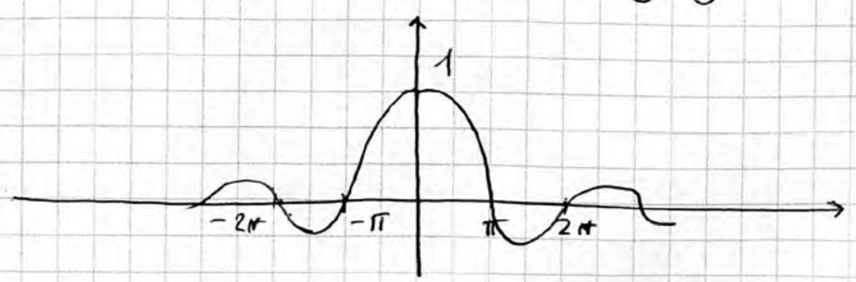
$$= \frac{1}{j(m-n)2\pi F}\left[e^{j(m-n)2\pi Ft}\right]_{-\frac{T}{2}}^{T/2}$$

FT = 1

$$= \frac{1}{j(m-n)2\pi F}\left(e^{j(m-n)\cancel{2}\pi \cancel{F}\frac{\cancel{T}}{\cancel{2}}} - e^{-j(m-n)\cancel{2}\pi \cancel{F}\frac{\cancel{T}}{\cancel{2}}}\right)$$

$$= \frac{\cancel{2}\cancel{j}\sin((m-n)\pi)}{\cancel{j}(m-n)\cancel{2}\pi F} = T\,\mathrm{si}((m-n)\pi)$$

si - Funktion hat Nulldurchgänge bei $k\pi$)



$\Rightarrow$

$$\Longrightarrow \int_T e^{jm} \cdot e^{-jn}\, dt = \begin{cases} T & \text{bei } m=n \\ 0 & \text{sonst } (m \neq n) \end{cases}$$

b)

i) $\phi_k(t) = e^{j2\pi kFt}$ (Funktionensystem der Fourier-Reihen-Analyse)

$$\left[\ \phi_k(t) = si\left(\frac{\pi t}{T} - k\right)\ \right]$$

in a) gezeigt: <u>orthogonales</u> System

$$\int_T \phi_m(t) \cdot \phi_n^*(t)\, dt = 0 \quad , m \neq n$$

aber nicht ~~orthogonal~~ <u>orthonormal</u> : $\int_T \phi_k(t)\ \phi_k^*(t)\, dt = T$

orthogonal, wenn

$$\cancel{\frac{1}{T}} \int_T \frac{1}{\sqrt{T}}\, e^{j2\pi mFt}\ \frac{1}{\sqrt{T}}\, e^{-j2\pi nFt}\, dt = 1 \quad \text{für } m=n$$

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\, e^{j2\pi kFt}$$

wäre <u>orthogonal</u> und ortho<u>normal</u> !

ii)
$$\int_T |s(t)|^2 \, dt = \int_T \Big| \overbrace{\sum_i c_i \phi_i(t)}^{=s(t)} \Big|^2 dt$$

$$= \int_T \Big[\sum_i c_i \phi_i(t)\Big] \cdot \Big[\sum_k c_k^* \phi_k^*(t)\Big] dt$$

$$= \sum_i \sum_k c_i c_k^* \underbrace{\int_T \phi_i(t) \, \phi_k^*(t) \, dt}_{\substack{=1 \;,\; i=k \\ =0 \;,\; i \neq k}}$$

$\left.\begin{array}{ll} = 1 & , i = k \\ = 0 & , i \neq k \end{array}\right\} \Rightarrow$ Alle Terme $i \neq k$ fallen aus Summe

$$= \sum_k c_k c_k^* = \sum_k |c_k|^2$$

(Energie) „Verallgemeinertes Parseval-Theorem"

(Leistung)

Aufgabe 4.1

$$g(t) = s(t) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)}_{= m(t)} = s(t)\, m(t)$$

$= m(t) \leftarrow$ Modulationsfunktion

$$\left[a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) + \ldots\right] m(t)$$

$$= a_1 \underbrace{s_1(t)\, m(t)}_{= g_1(t)} + a_2 \underbrace{s_2(t)\, m(t)}_{= g_2(t)} + \ldots = a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)$$

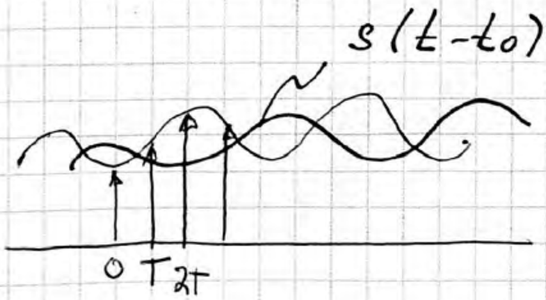
$\hat{=}$ lineares System

$$s(t - t_0)\, m(t) \neq s(t - t_0) \cdot m(t - t_0) = g(t - t_0)$$

außer für $t_0 = nT$, ~~außer~~ aber absoluter Spezialfall

Zeitinvarianz muss für beliebige t_0 gelten, daher Abtastung zeitvariant.

$\Rightarrow$ kein LTI-System



$\Rightarrow$ Produziert andere Abtastwerte

Aufgabe 4.2

Siebeigenschaft

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \overset{\text{Siebeigenschaft}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\,\delta(t-nT)$$

$$s_a(t) = \cos(2\pi F t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$S_a(f) = S(f) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-nr) \qquad \frac{1}{T} = r$$

Abtastrate

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f-nr)$$

$$= \frac{1}{2T}\left[\delta(f-F) + \delta(f-F)\right] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-kr)$$

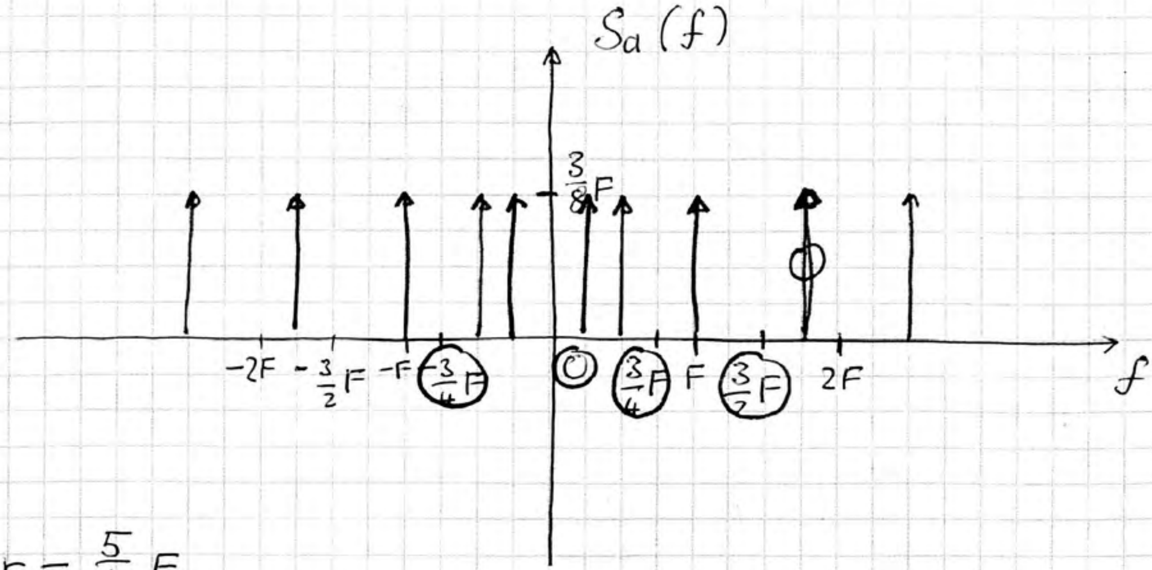
$$= \underbrace{\frac{1}{2T}}_{=\frac{r}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(f-kr-F) + \delta(f-kr+F)\right]$$

i) $r_1 = \frac{3}{4}F \implies S_a(f) = \frac{3}{8}F \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big[\delta\big(f - \underbrace{F(\tfrac{3k}{4}+1)}_{=:f_1}\big) + \delta\big(f - \underbrace{F(\tfrac{3k}{4}-1)}_{=:f_2}\big)\Big]$

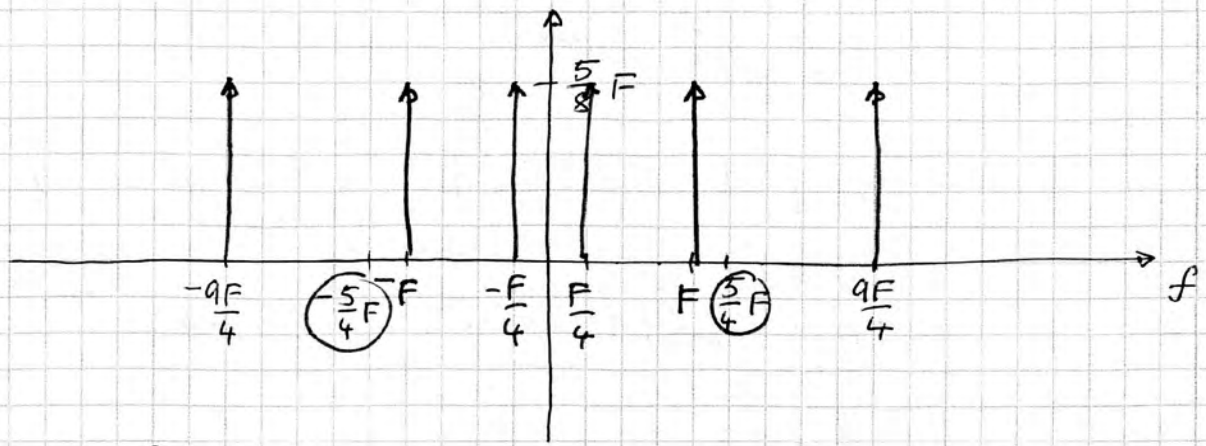
Höhe $\delta(t)$

$k =$	f_1	f_2
0	F	$-F$
1	$\frac{7}{4}F$	$-\frac{1}{4}F$
-1	$\frac{1}{4}F$	$-\frac{7}{4}F$
2	$\frac{5}{2}F$	$\frac{1}{2}F$
-2	$-\frac{1}{2}F$	$-\frac{5}{2}F$

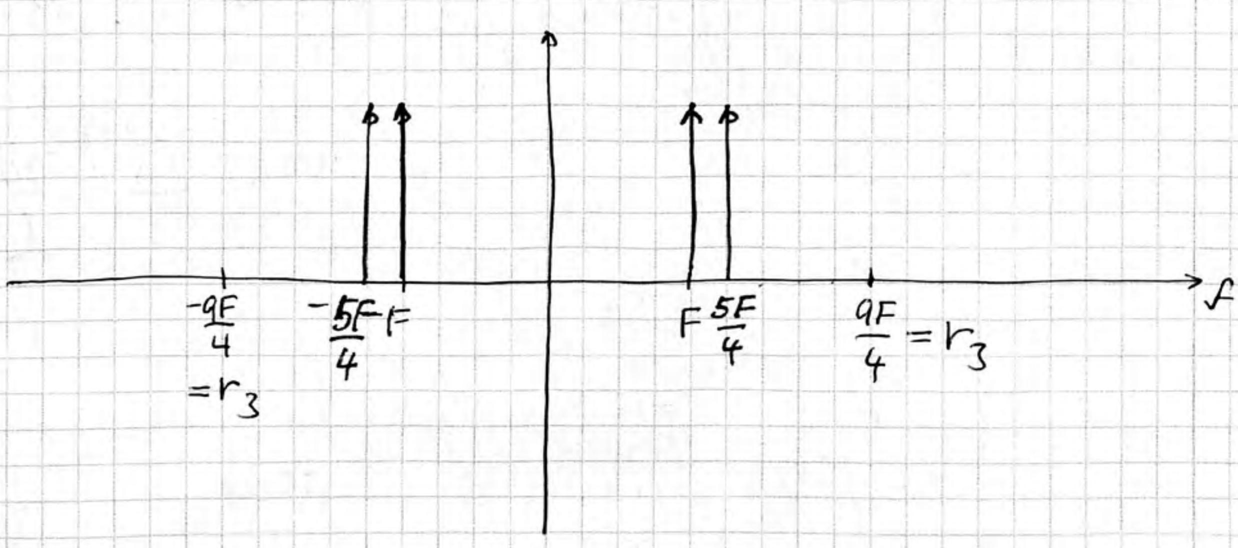
dazu Skizze



$r_2 = \frac{5}{4}F$



$r_3 = \frac{9}{4}F$



ketov@gmx.de

b) r_1: $s_a(t) * h_{TP}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(f) = S_a(f) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2{,}4}\right)$

$$G(f) = \frac{3}{8}F\Big[\delta\left(f-\tfrac{1}{4}F\right) + \delta\left(f+\tfrac{1}{4}F\right) + \delta\left(f-\tfrac{1}{2}F\right)$$

$$+\delta\left(f+\tfrac{1}{2}F\right) + \delta(f-F) + \delta(f+F)\Big]$$

$$g(t) = \frac{3}{4}F\left[\cos\left(2\pi\cdot\tfrac{1}{4}Ft\right) + \cos\left(2\pi\,\tfrac{1}{2}Ft\right) + \cos(2\pi Ft)\right]$$

r_2:

$$g(t) = \frac{5}{4}F\Big[\underbrace{\cos\left(2\pi\tfrac{1}{4}Ft\right)}_{\text{Alias}} \quad \underbrace{+\cos(2\pi Ft)}_{\text{richtig}}\Big]$$

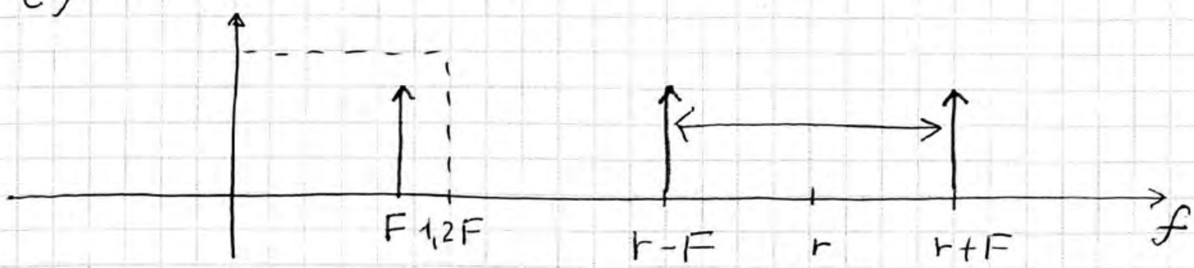
r_3:

$$g(t) = \frac{9}{8}F\underbrace{\left(\cos(2\pi Ft)\right)}_{\text{richtig}}$$

ketov@gmx.de

c)

16.06.10
Übung



fehlerfreie Rekonstruktion: kein Alias!

$\Longrightarrow \quad r - F > 1{,}2F$

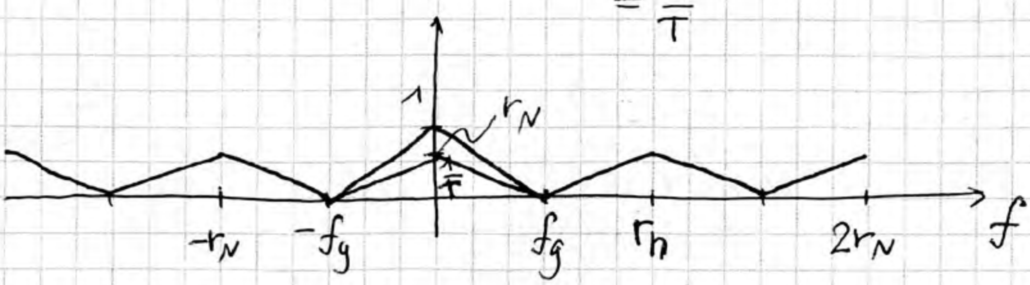
$r > 2{,}2F$

(Nicht $\geq$, damit Dirac-Impulse bei $r-F$ sauber ausgeleuchtet werden)

Aufgabe 4.3

a) $\boxed{\text{Nyquist-Rate}}$ $\boxed{r_N = 2f_g} = 2 \cdot 4\,kHz = 8\,kHz$

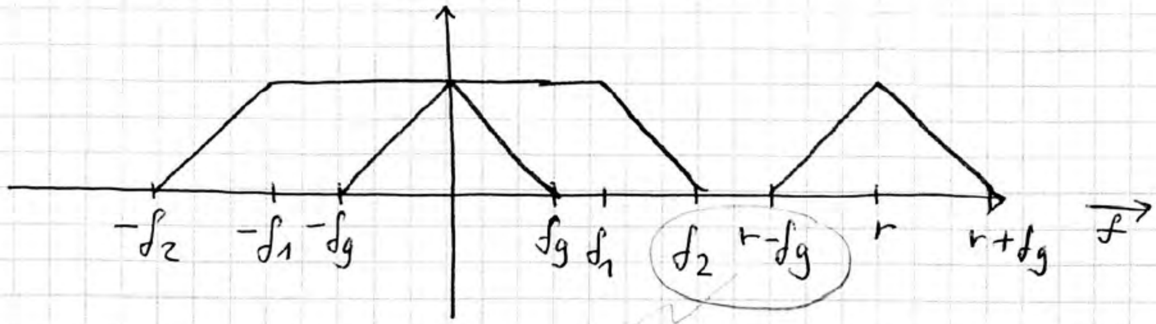
$= \frac{1}{T}$



b) fehlerfreie Interpolation: (Rekonstruktion)

- Tiefpass muss "imaginäres" Spektrum ausschneiden
- $\boxed{H_{Rek}(f) = 1 \text{ im Bereich, in dem } S(f) \neq 0!}$

Merke!

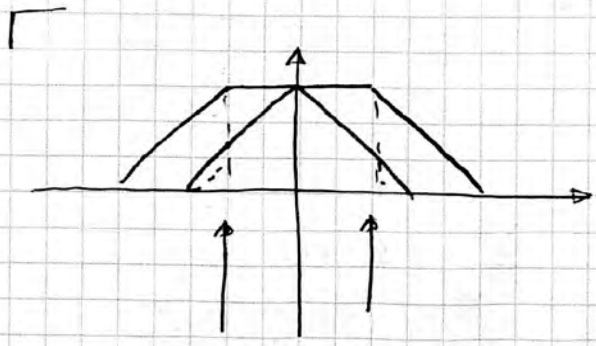


1. Bedingung $\quad r - f_g \geq f_2 \quad \Rightarrow r \geq f_2 + f_g$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{kein Alias}}$

2. Bedingung $\quad f_1 \geq f_g \quad \Rightarrow$ $\boxed{\text{keine linearen Verzerrungen}}$

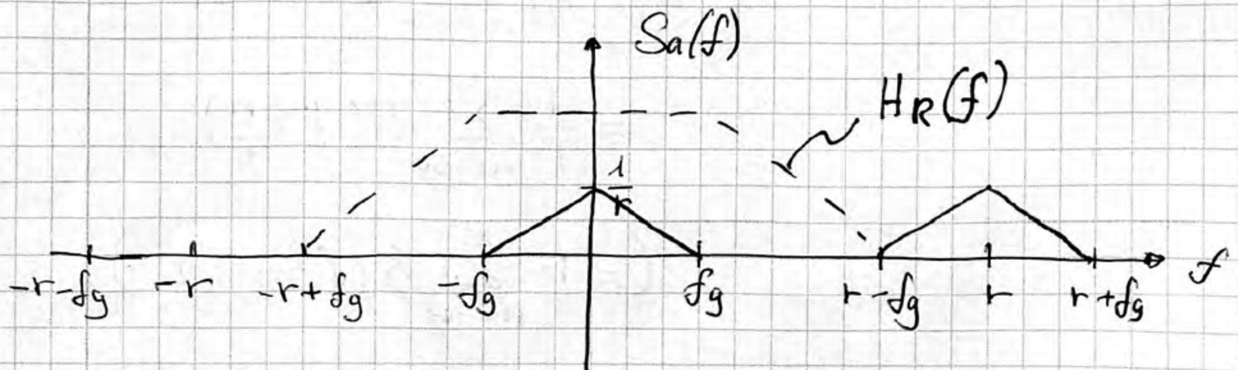
Minimal: $\quad f_1 = f_g \quad ; \quad r = f_2 + f_g$



„Lineare Verzerrung"

Dämpfung des Spektrums

c) $\quad f_1 = f_g \quad ; \quad r = f_2 + f_g$



Aufgabe 4.4

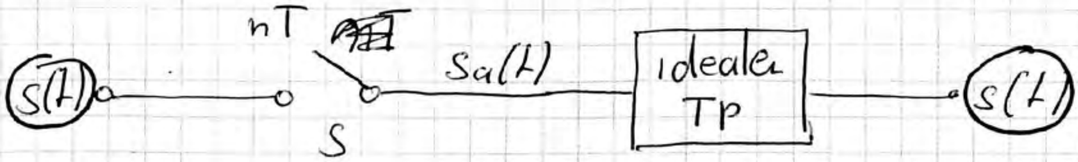
(Abb. 4.6 im Skript)

$r = f_A = \frac{1}{T_A}$

Interpolation mit si-Funktion

=> Interpolationsfilter ist idealer TP

Wird gern vergessen!



$$H(f) = T \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_a}\right)$$

wegen Dämpfung durch Abtastung

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Idealer TP} \\ H_{TP}(f) = T \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_a}\right)\end{array}}$$

(Lerne auswendig!)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

Vom Abtasten! (T)

Abtastung:

$$s_a(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

"Siebeigenschaft": $s_a(t) = 2f_g \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(2\pi f_g nT)\,\delta(t-nT)$

$$S_a(f) = S(f) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right);$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n} S\left(f-\frac{n}{T}\right) \qquad \frac{1}{T} = r$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$\left(= r \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - r \cdot n)\right)$$

ketov@gmx.de

Abtastrate(F) in $H(f)$ und $S_a(f)$!

$\delta(n) \hat{=}$ Einheitsimpuls $\neq \delta(t)$

Rekonstruktion: (Interpolation)

$$G(f) = S_a(f) \cdot T \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right)$$; Bed.: $r = \frac{1}{T} \geq 2f_g$ (sonst Alias)

$$g(t) = s_a(t) * \left(T\, 2 f_g\, \mathrm{si}(2\pi f_g t)\right)$$

Allg. idealer Interpolator $\neq$ Eingangssignal

Hier aufgrund d. Aufgabenstellung identisch

Tabelle S.6

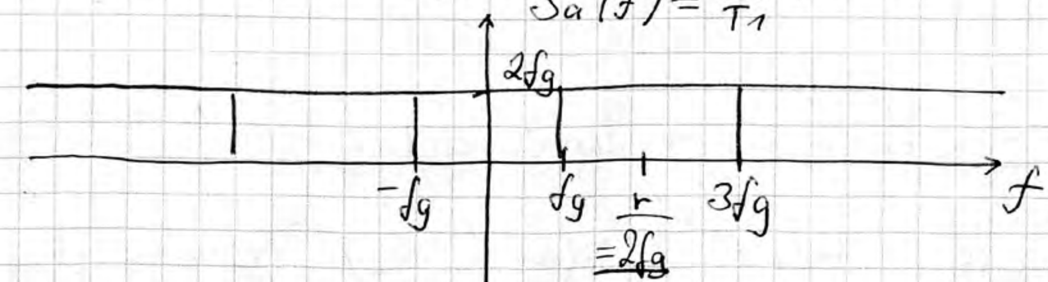
a) $r = 2f_g$; $S(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right)$

$$\Rightarrow S_a(f) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{f - 2n f_g}{2 f_g}\right)$$

Beachte: $\boxed{= 2f_g = \text{const.}}$ gilt bei $\underline{\underline{r = 2f_g}}$

$$T_1 = \frac{1}{r} = \frac{1}{2f_g}$$

$S_a(f) = \frac{1}{T_1}$



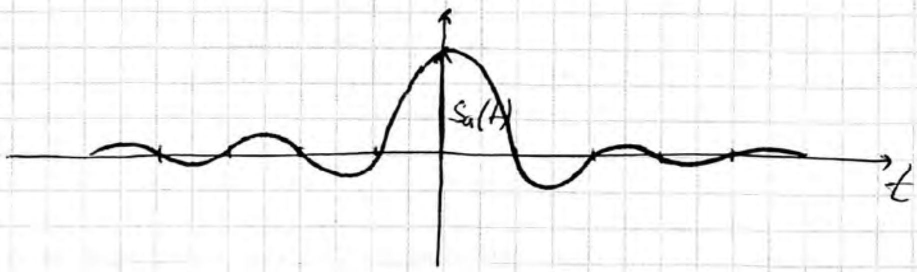
Zeitbereich: [$s_a(t)$]

$$s_a(t) = 2 \cdot f_g \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(\underbrace{2\pi f_g n T}_{= 2\pi f_g n \frac{1}{2f_g} = n\pi})\, \delta(t - nT)$$

$$= 2f_g \cdot \delta(t)$$

$$g(t) = 2f_g\,\delta(t) * \left(2T f_g \cdot si(2\pi f_g t)\right)$$

$$= 2 f_g\, si(2\pi f_g t)$$

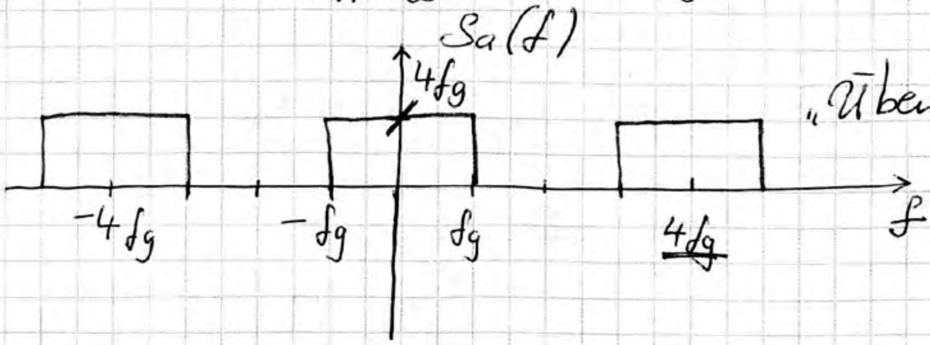


b)

$$r = 2 \cdot 2 f_g = 4 f_g \Rightarrow T_2 = \frac{1}{r} = \frac{1}{4f_g}$$

$$S_a(f) = \frac{1}{T_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{f - n\,4f_g}{2 f_g}\right)$$

Position Kopien !



„Überabtastung"

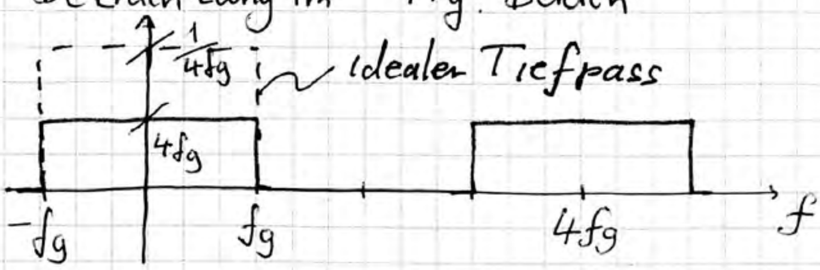
Zeitbereich + Interpolation

$$S_a(t) = 2f_g \sum_{n=-\infty}^{\infty} si(\underbrace{2\pi f_g n T_2}_{= n\frac{\pi}{2}})\, \delta(t - nT_2) \quad ; \; T_2 = \frac{1}{4f_g}$$

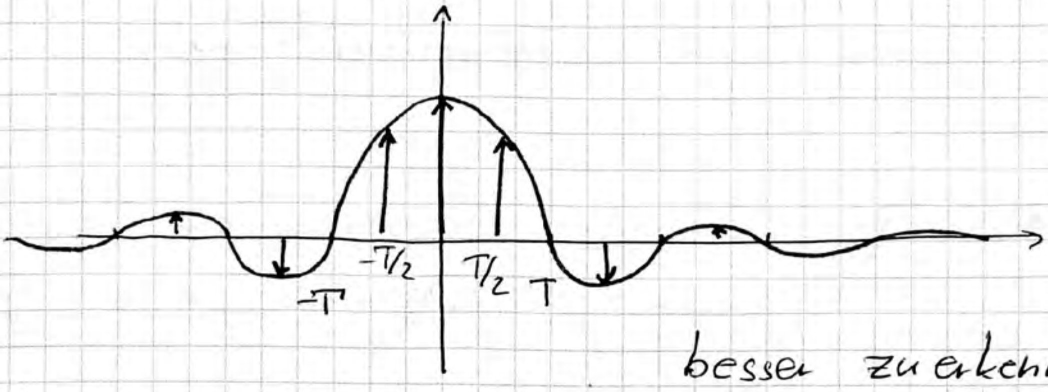
$$g(t) = S_a(t) * \left[\underbrace{T_2\, 2 f_g \cdot si(2\pi f_g t)}_{id.\ TP.}\right]$$ Merke !

Interpolation mit Abtastperiode bzw. Abtastrate (Frequenz)

Merke! Faltungsoperation aufwändig
$\Rightarrow$ Betrachtung im Frq. Bereich

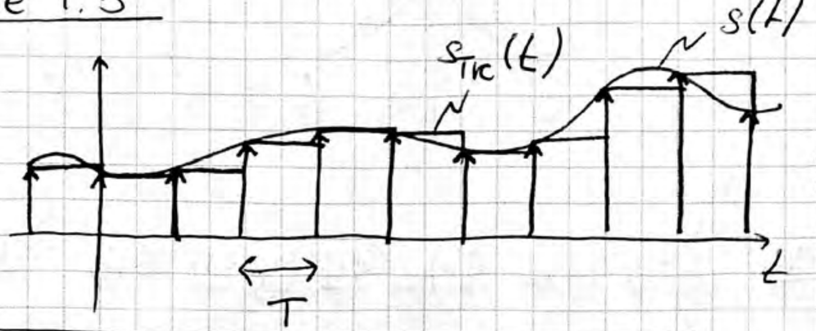


$\Rightarrow g(t) = 2 \cdot f_g \cdot si(2\pi f_g t)$
wegen idealer ~~Abtastung~~ Interpolation durch idealen TP und Abtastung mit Rate größer als doppelte Grenzfrequenz



besser zu erkennen im Skript Abb. 4.6 (S.61)

Aufgabe 4.5



Zeitbereich

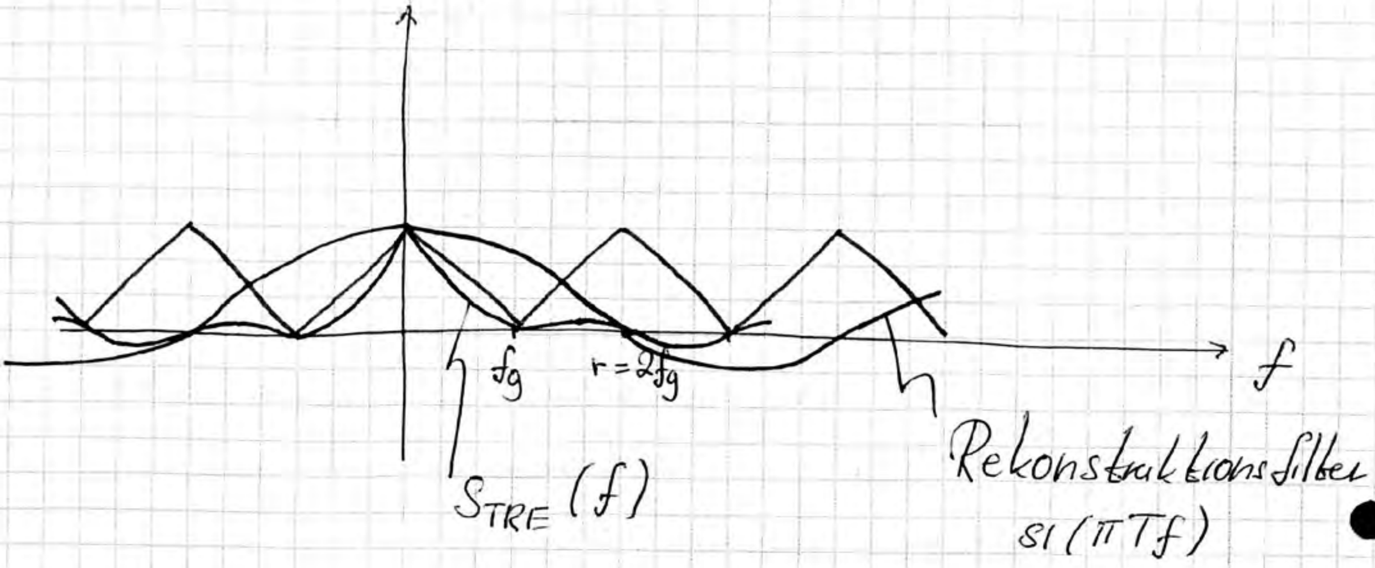
„Halteglied 0. ter Ordnung"

$$\boxed{s_{TRE}(t) = s_a(t) * rect\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \underbrace{\left[s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right]}_{= s_a(t)} * rect\left(\frac{t}{T}\right) * \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$\updownarrow$ $\mathcal{F}$

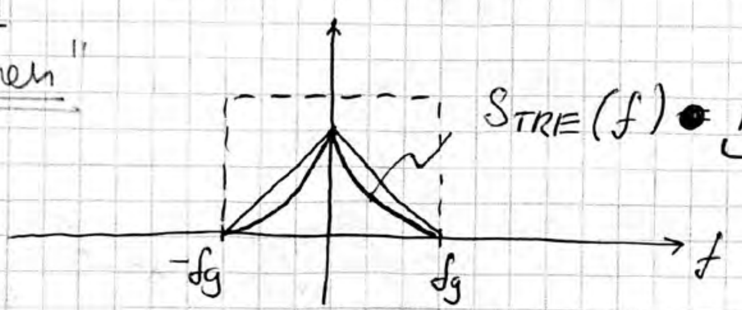
$$S_{TRE}(f) = \left[S(f) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \right] T\, si(\pi T f) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$



(Skizze ohne Phasenverschiebung)

b) 1. Schritt: ideales Tiefpassfilter (ohne T) mit Grenzfrequenz f_g (wie Eingangssignal)

„Aus Summe Basisband herausfischen"



Problem: Lineare Verzerrungen des Basisbandes ($e^{j\pi T f}$)

Merke

Idee

Ziel: $\underbrace{S(f)\cdot si(\pi T f)\, e^{-j\pi T f}}_{\text{verzerrtes Spektrum im Basisband}} \cdot \underbrace{rect\left(\frac{f}{2f_g}\right)}_{\text{schneidet periodische Wdhl. im Spektrum ab}} \cdot H(f) \overset{!}{=} S(f)$

im Nutzbereich $= 1$

$\Rightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right)$

$\Rightarrow$ kann im folgenden ignoriert werden

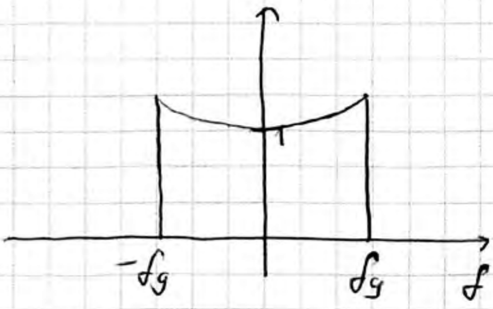
für $-f_g \leq f \leq f_g$

Merke

Idee!

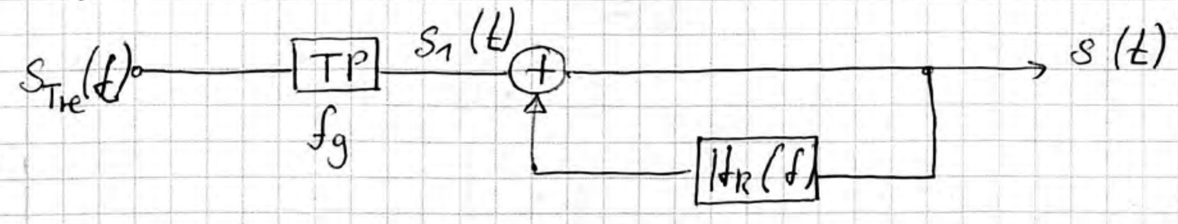
$$H(f) \overset{!}{=} \frac{1}{\mathrm{si}(\pi T f)\, e^{-j\pi T f}}$$

(Übertragungsfunktion Filter)



$|H(f)| \cdot |\mathrm{rect}(\frac{f}{2f_g})|$

c)



$$S(f) = S_1(f) + S(f) \cdot H_R(f)$$

$$\Rightarrow S(f) \cdot (1 - H_R(f)) = S_1(f)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1}{1 - H_R(f)} \overset{!}{=} \frac{1}{\mathrm{si}(\pi T f)\, e^{-j\pi f T}}$$

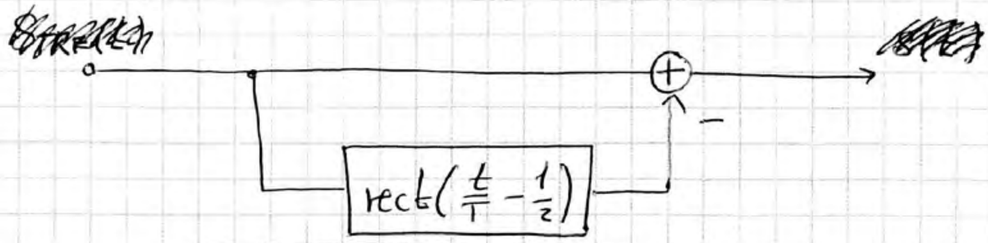
$$H_R(f) = 1 - \mathrm{si}(\pi T f)\, e^{-j\pi T f}$$

$$h_R(t) = \delta(t) - \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$= \delta(t) - \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$$

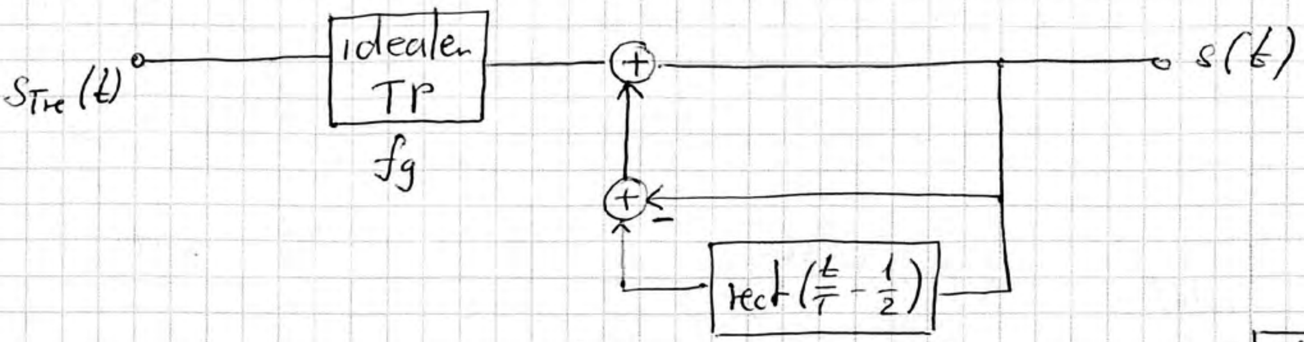
ketov@gmx.de

Blockschaltbild: $h_R(t)$



„Kurzzeitintegrator"

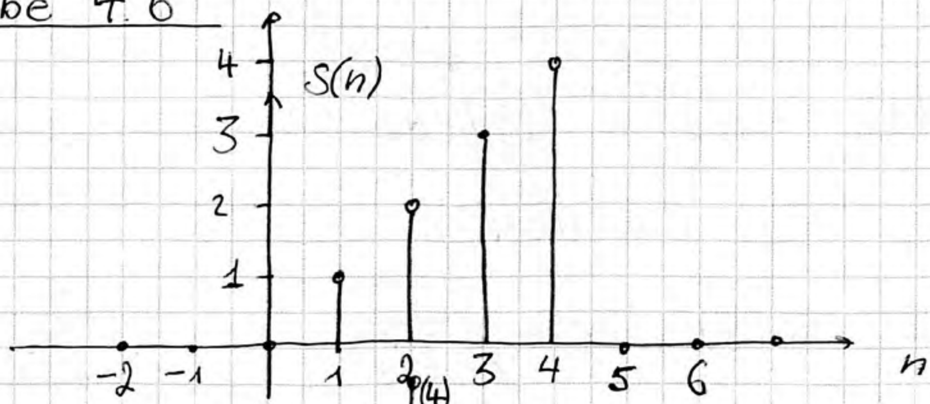
$\Rightarrow$



$\boxed{\varepsilon(n \geq 0) = 1 \quad n \in \mathbb{Z}}$

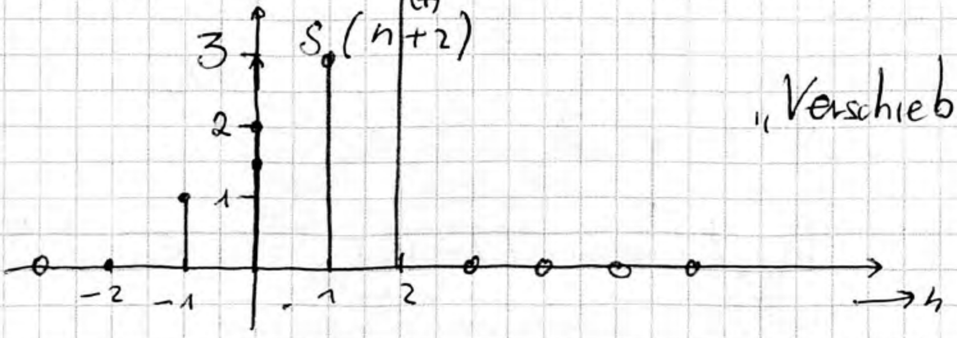
Aufgabe 4.6

a)



$\delta(n) \hat{=}$ Einheitsimpuls

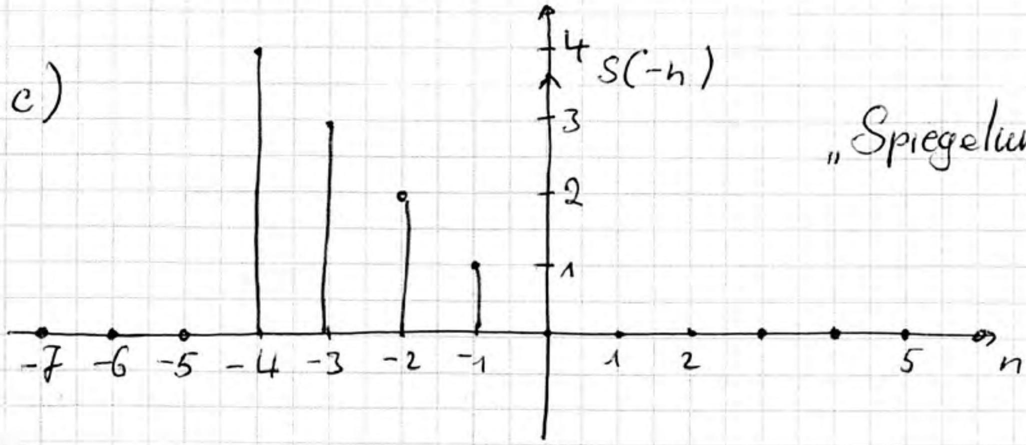
b)



„Verschiebung"

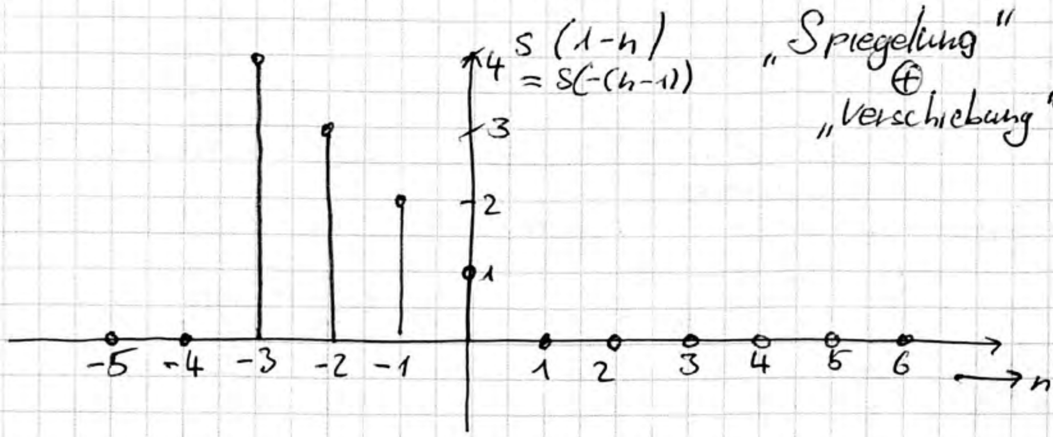
ketov@gmx.de

c)



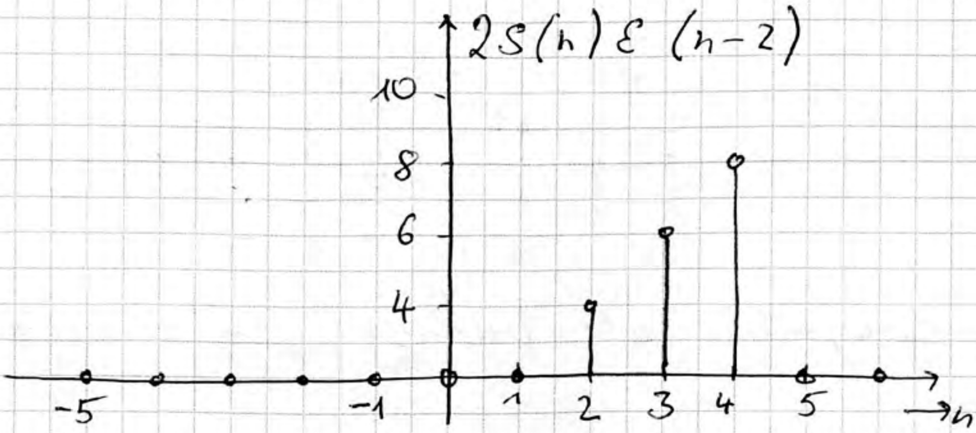
„Spiegelung"

d)

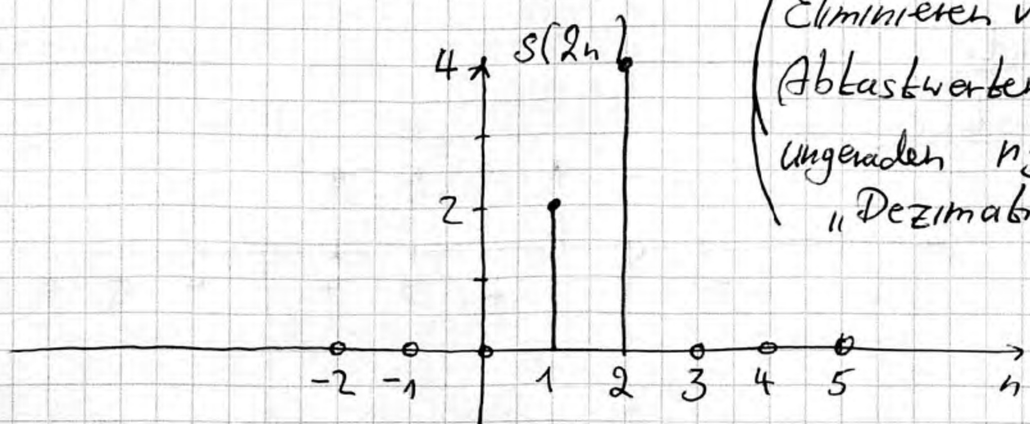


„Spiegelung" ⊕ „Verschiebung"

e)



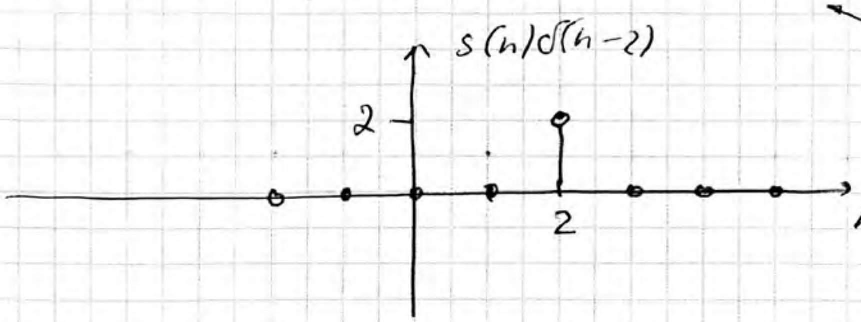
f)



(Eliminieren von Abtastwerten mit ungeraden n; „Dezimation")

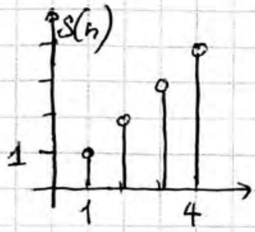
Nur jeder 2-te Wert wird erfasst!
(≙ Dezimation)

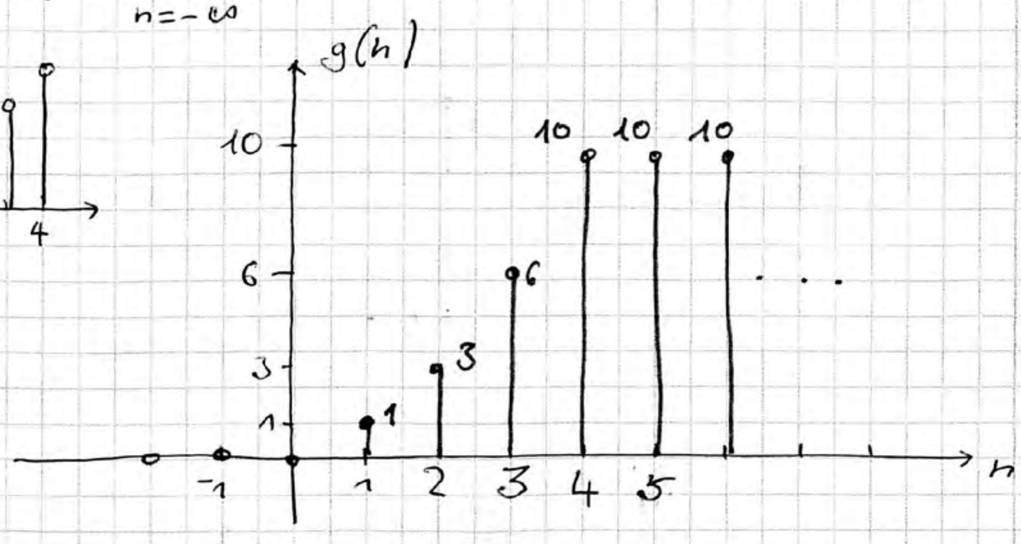
g) $s(n)\cdot\delta(n-2)$; $\delta(n-2) = \begin{cases} 0 & , n \neq 2 \\ 1 & , n = 2 \end{cases}$



$\boxed{\text{Einheitsimpuls}}$ $\neq$ Diracimpuls

h) $g(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(m)$ "Akkumulation"





Vgl.
Integral

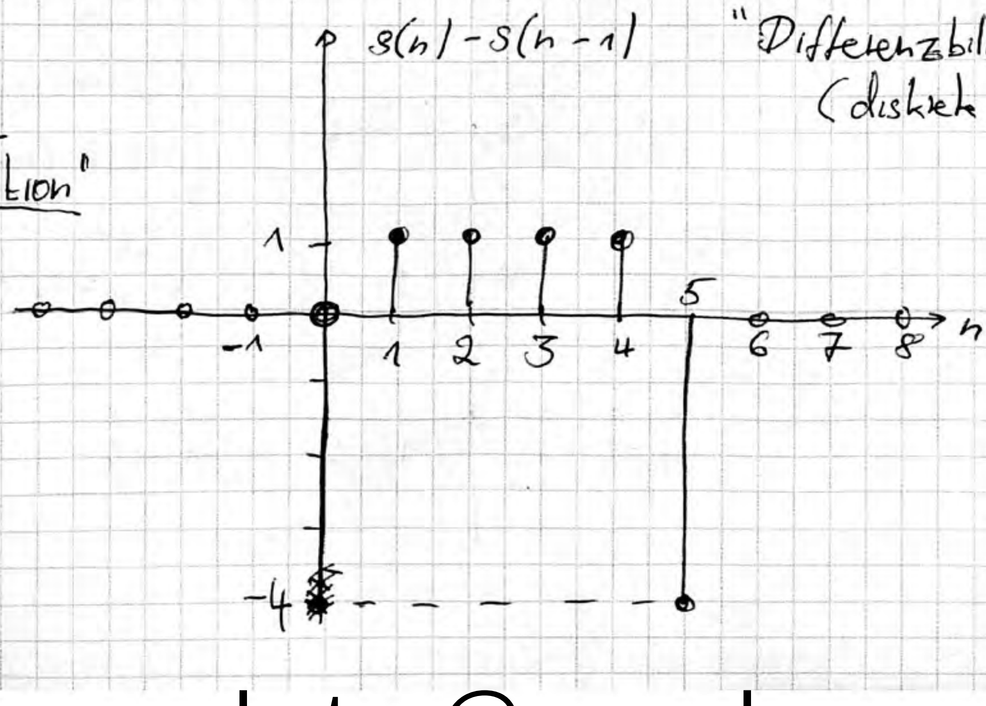
entspricht der Faltung $g(n) = s(n) * \varepsilon(n)$

(4.28)

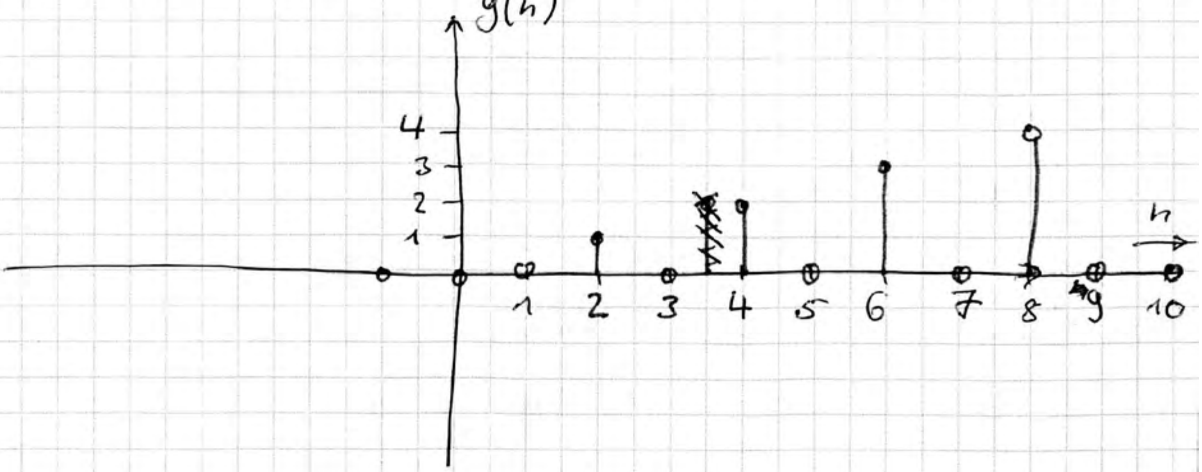
i) $s(n) - s(n-1)$ "Differenzbildung" (diskrete 1. Abl.)

diskrete "Differentation"

Vgl $\delta'(t)$

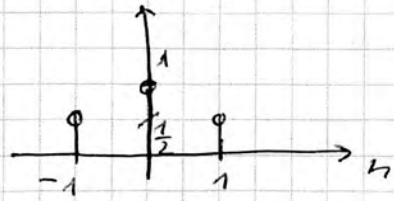


j) $$g(n) = \begin{cases} s(n/2) & ; n \text{ gerade} \\ 0 & ; n \text{ ungerade} \end{cases}$$



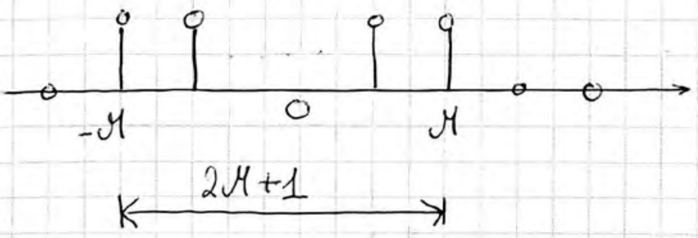
Vollständige Hochtastung ; nach TP-Filterung

z.B. mit



Aufgabe 4.7

23.06.10
ET IV

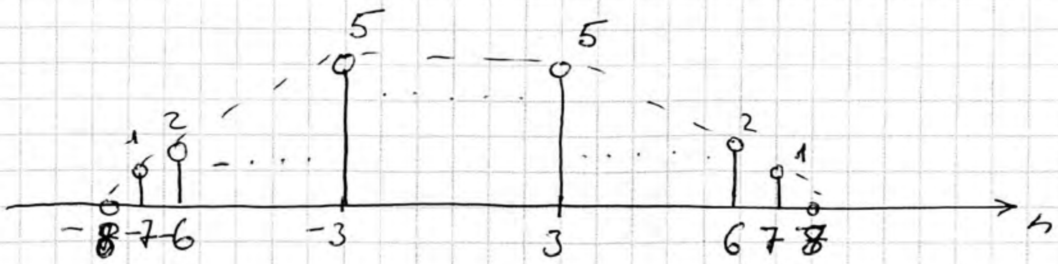


$s_1(n)$: $M = 2$ => Länge 5

$s_2(n)$: $M = 5$ => Länge 11

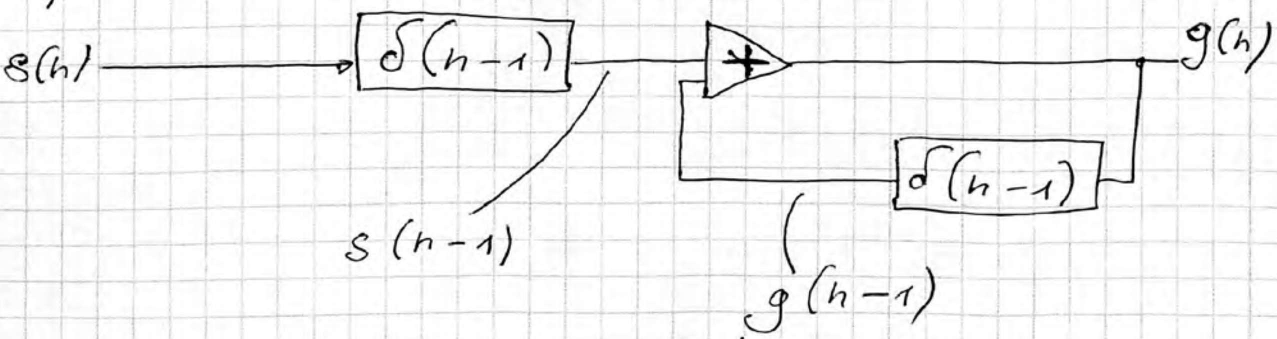
Faltungsergebnis $g(n) = s_1(n) * s_2(n)$

Länge $5 + 11 - 1 = 15$ } Vgl. Kontinuierlichen Fall



Aufgabe 4.8

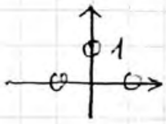
a)



Zeitverzögerung um 1 Abtastwert

$$g(n) = s(n-1) + g(n-1)$$

Eingang $\delta(n)$ $\Rightarrow$ Ausgang $h(n)$



kausal daher

$h(n)=0 \; , \; n<0$

rekursiv!

$n=0$: $h(0) = \delta(n-1) + h(-1) = 0$

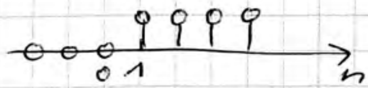
$n=1$: $h(1) = \delta(0) + h(0) = 1$

$n=2$: $h(2) = \delta(1) + h(1) = 1$

$n=3$: $h(3) = \delta(2) + h(2) = 1$

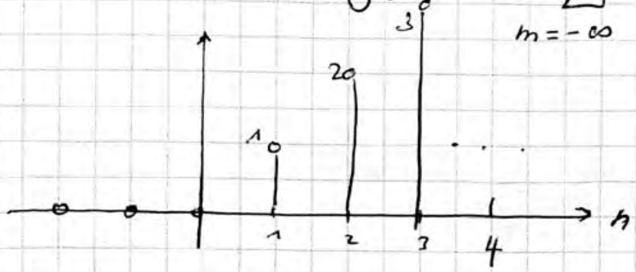
$n>3$: $h(n) = \underbrace{\delta(n-1)}_{=0,\, n>3} + h(n-1) = 1$

$$\Longrightarrow h(n) = \varepsilon(n-1)$$



b)

$$s(n) = \varepsilon(n) \Rightarrow g(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} h(m) = \sum_{m=-\infty}^{n} \varepsilon(n-1)$$



$g(n)$ wächst für $n \to \infty$ über alle Grenzen

$\Rightarrow$ System instabil

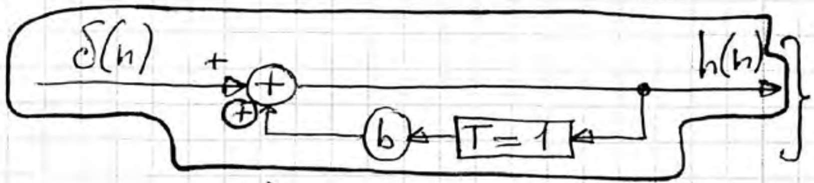
$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \longrightarrow \infty \right]$$

Aufgabe 4.9 $\to$ zum selber rechnen

Merke! $\left\{ \boxed{s(n) * h(n+2) = h(n) * s(n) * \delta(n+2) = s(n+2) * h(n)} \right.$

ketov@gmx.de

Aufgabe 4.10



Merke!

$$h(n) = \left(\tfrac{1}{5}\right)^n \varepsilon(n) \qquad = b^n \varepsilon(n) \qquad \text{mit } b = \tfrac{1}{5}$$

a) $h(n) + a\,h(n-1) = b^n \varepsilon(n) + a\,b^{n-1} \varepsilon(n-1)$

$$= \underbrace{\delta(n) + b^n \varepsilon(n-1)}_{b^n \varepsilon(n) \quad (\text{„Trick"})} + a\,b^{n-1} \varepsilon(n-1) \overset{!}{=} \delta(n)$$

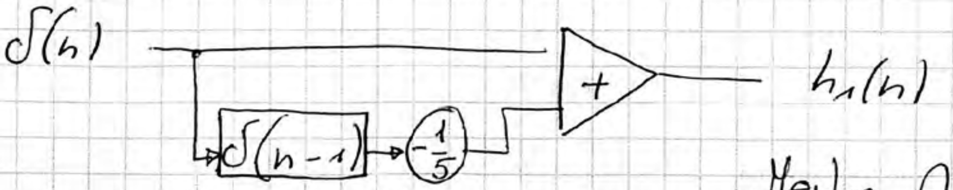
$\boxed{\varepsilon(n) = \delta(n) + \varepsilon(n-1)}$

Merke!

$$\Rightarrow \quad b^n + a\,b^{n-1} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = -b = -\tfrac{1}{5}$$

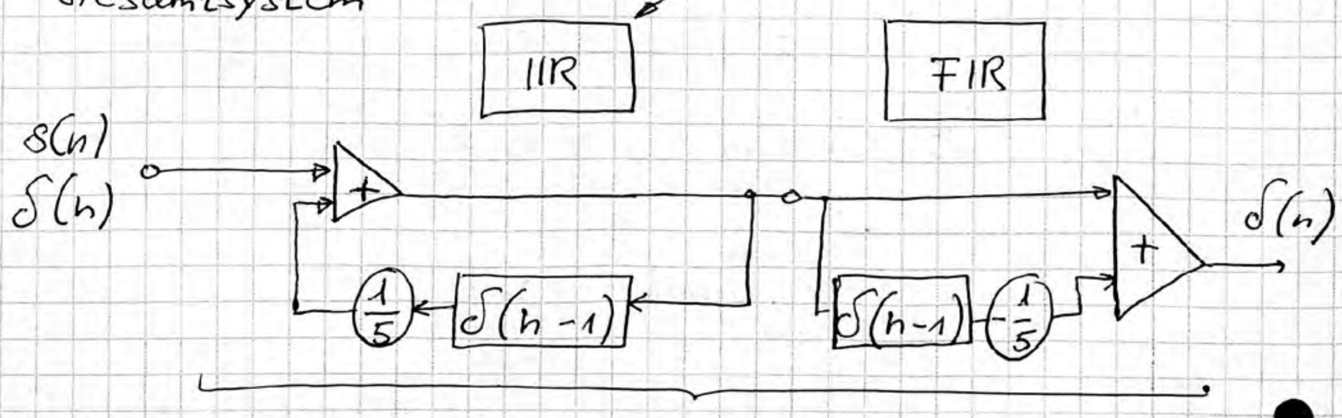
b) $h(n) * h_1(n) = f(n)$

aus a: $h(n) * \underbrace{\left[\delta(n) \underbrace{-\tfrac{1}{5}}_{=a} \delta(n-1)\right]}_{= h_1(n)} = \delta(n)$



Merke Aufbau!

c) Gesamtsystem



Gesamtantwort $\delta(n) \rightarrow s(n) * \underbrace{h(n) * h_1(n)}_{\delta(n)} = s(n)$

ketov@gmx.de

FIR-System hebt die Wirkung des IIR-Systems auf! (hier!)

Aufgabe 4.11

$$g(n) = \frac{1}{4} g(n-1) + s(n)$$

$$\boxed{s(n) = \delta(n) \Rightarrow g(n) = h(n)}$$ } Merke!

$$h(n) = \delta(n) + \frac{1}{4} h(n-1)$$

$$= \delta(n) + \frac{1}{4}\left[\delta(n-1) + \frac{1}{4} h(n-2)\right]$$

$$= \delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{4^2} h(n-2)$$

$$= \delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{4^2}\delta(n-2) + \frac{1}{4^3}\delta(n-3) + \ldots + \ldots$$

(rekursiv)

Alternativ Z-Trafo

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \delta(n-k) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n)$$

nur im zeitdiskreten Fall möglich!

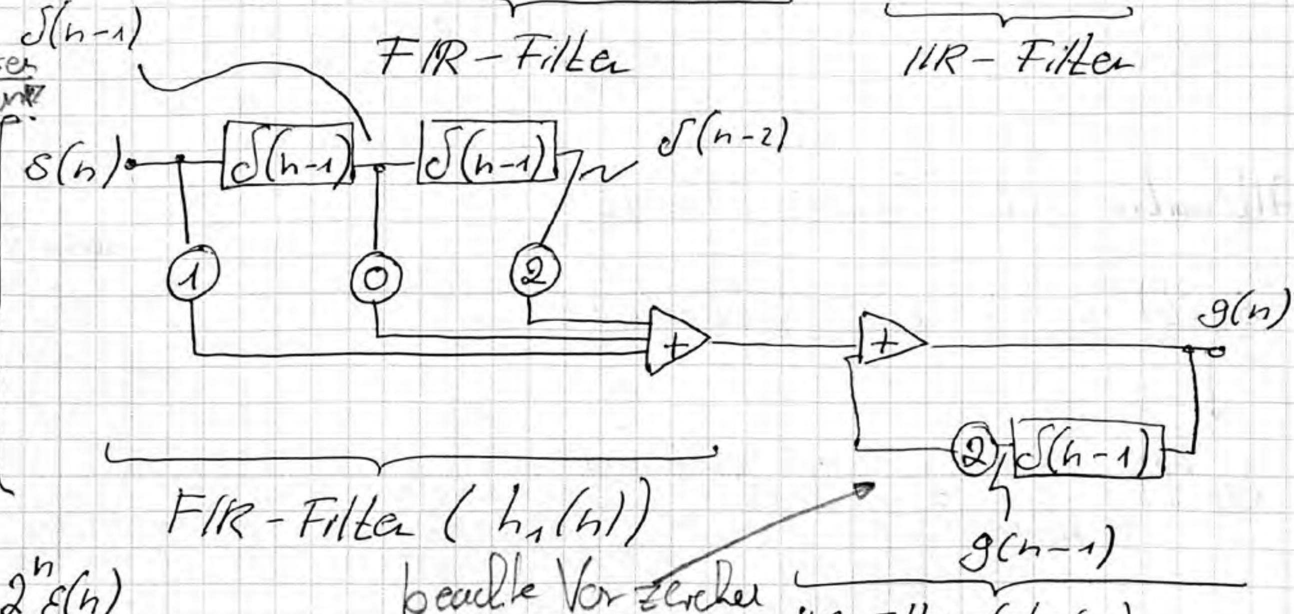
Nach Ausgangsgröße umstellen!

Aufgabe 4.12

$$g(n) = \underbrace{s(n) + 2\cdot s(n-2)}_{\text{FIR-Filter}} + \underbrace{2g(n-1)}_{\text{IIR-Filter}}$$

Dann passen Vorzeichen!

Allg. Aufstellen Merken!



FIR-Filter $(h_1(n))$

beachte Vorzeichen

IIR-Filter $(h_2(n))$

$$h_2(n) = 2^n \varepsilon(n)$$

b)

FIR: $h_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2)$

IIR: $h_2(n) = 2^n \varepsilon(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \delta(n-k)$ } Muss man in beide Richtungen können

Gesamt: $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$

$$= h_2(n) * [\delta(n) + 2\delta(n-2)]$$

$$= h_2(n) + 2h_2(n-2)$$

$$= 2^n \varepsilon(n) + 2\,(2^{n-2}\,\varepsilon(n-2))$$

$$= 2^n [\varepsilon(n) + 2 \cdot 2^{-2}\,\varepsilon(n-2)]$$

$$= 2^n (\varepsilon(n) + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon(n-2))$$

Anmerkung: $h(n) \to \infty$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow$ Instabiles System!

Aufgabe 4.13

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$S_a(f) = S(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$r = \frac{1}{T}$ Abtastrate

Alternativ mit Siebeigenschaft:

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\,\delta(t-nT)$$

$$S_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\, e^{-j2\pi f n T}$$

Mit normierten $T=1$ <=> $r=1$

$$S_{a}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, e^{-j2\pi fn}$$

Formelsammlung (s9anten)

$$s(n) = \int_{-1/2}^{1/2} S_a(f)\, e^{j2\pi fn}\, df$$

$\delta(n-n_0)=0$ $\quad n \neq n_0$

$\delta(n-n_0)=1$ $\quad n = n_0$

„Siebeigenschaft"

a) $$\delta(n-n_0) ○\!\!-\!\!\!● \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0)\, e^{-j2\pi fn}$$

$$= e^{-j2\pi fn_0}$$

b) $$s(n-n_0) ○\!\!-\!\!\!● \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n-n_0)\, e^{-j2\pi fn}$$

Merke!

$$\boxed{n-n_0=m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\, e^{-j2\pi f(m+n_0)}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(m)\, e^{-j2\pi fm}}_{=S_a(f)} \cdot e^{-j2\pi fn_0}$$

Alternativ: (schneller)

$t \hat{=} n$

$$s(n-n_0) = s(n) * \delta(n-n_0)$$

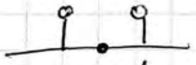
○—● mit FS (S.10)

$$S_a(f)\ \mathcal{F}\{\delta(n-n_0)\} = S_a(f)\, e^{-j2\pi fn_0}$$

ketov@gmx.de

c)

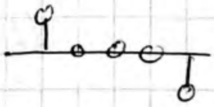
$$\delta(n-1) + \delta(n+1) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f} = 2\cos(2\pi f)$$


gerade

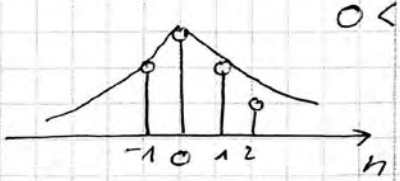
mit a) $n_0 = \pm 1$

d) $\delta(n+2) - \delta(n-2) \underset{h}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; e^{j4\pi f} - e^{-j4\pi f} = 2j\sin(4\pi f)$

mit a)


ungerade

$0 < \alpha < 1$



e) $s(n) = a^{|n|}$

$$S_{a}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j2\pi f n}$$

$n<0: |n| = -n$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j2\pi f}\right)^{n}}_{\text{„kausal"}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(a e^{j2\pi f}\right)^{-n}}_{\text{„antikausal"}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a e^{j2\pi f}\right)^{n}$$

mit $\sum_{k=0}^{\infty} g^{k} = \frac{1}{1-g}$ für $|g| < 1$

$\Rightarrow$ für $|a| < 1$

weil die ~~teilte~~ rechte Summe $1-\infty$

$$S_{a}(f) = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}} + \frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}} - 1$$

ketov@gmx.de

$$= \frac{1-ae^{j2\pi f} + 1-ae^{-j2\pi f}}{1-ae^{j2\pi f} - ae^{-j2\pi f} + a^2} - 1$$

$$= \frac{2-2a\cos(2\pi f)}{1+a^2-2a\cos(2\pi f)} - 1$$

Alternativ Formelsammlung!

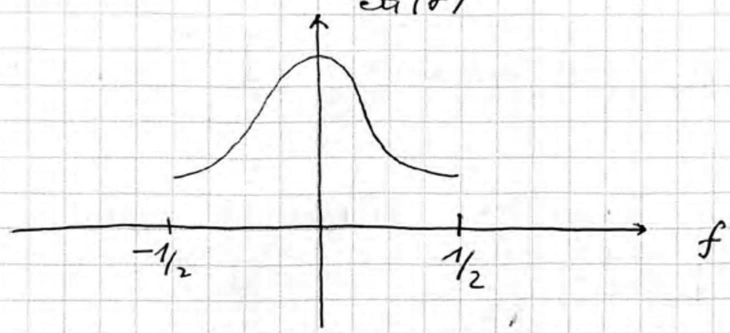
$$= \frac{2-\cancel{2a\cos(2\pi f)} - 1 - a^2 + \cancel{2a\cos(2\pi f)}}{1+a^2-2a\cos(2\pi f)}$$

$$= \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(2\pi f)}$$

Nenner minimal bei $f = 0$

Nenner maximal bei $f = \pm\frac{1}{2}$

für $0<a<1$



f) $s(n)-s(n-1) \circ\!-\!\bullet\; S_a(f)\left[1-e^{-j2\pi f}\right]$

$$= S_a(f)\,2j\sin(\pi f)\,e^{-j\cancel{2}\pi f}$$

Merke Trick!

g) $s(n)+s(n-1) \circ\!-\!\bullet\; S_a(f)\left[1+e^{-j2\pi f}\right]$

$$= S_a(f)\cos(\pi f)\,e^{-j\pi f}\cdot 2$$

h) $n \cdot s(n) \circ\!\!-\!\!\bullet$

Merke Kunstgriff!

$$s(n) \circ\!\!-\!\!\bullet S_a(f) \Rightarrow \frac{d S_a(f)}{df} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{-j 2\pi [n\,s(n)]}\, e^{-j2\pi f n}$$

$$\left[\frac{d}{df} e^{-j2\pi f n} = -j 2\pi n\, e^{-j2\pi f n} \right.$$

hinzumultipliziert!

$$\underbrace{-j2\pi \cdot n \cdot s(n)} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{d}{df} S_a(f) \qquad \Big|\, \cdot j\frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad n \cdot s(n) \circ\!\!-\!\!\bullet j \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} S_a(f)$$

alternativ in t übergehen und dort lösen!

i) $$s(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \varepsilon(n-1) = \left[\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \varepsilon(n)} \right] * \delta(n-1)$$

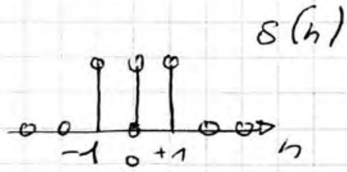
$$S_a(f) = \boxed{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j2\pi n f} \right]} \cdot e^{-j2\pi f} \qquad \text{mit } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$|q| < 1$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j2\pi f}}\, e^{-j2\pi f} = \frac{1}{e^{j2\pi f} - \frac{1}{2}}$$

Alternativ: Formelsammlung!

Aufgabe 4.14



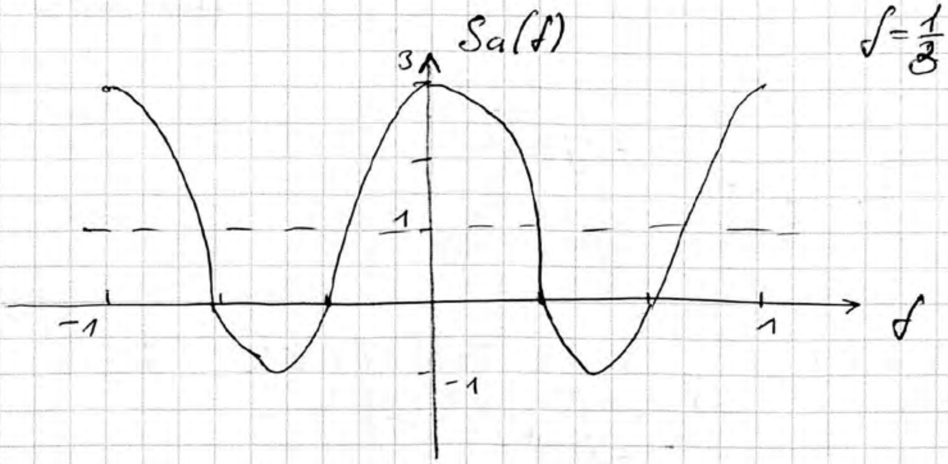
a) $$Sa(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, e^{-j2\pi f n}$$

$$= \left[\delta(n-1) + \delta(n) + \delta(n+1)\right] e^{-j2\pi f n}$$

$$= e^{-j2\pi f} + 1 + e^{j2\pi f} = 1 + 2\cos(2\pi f)$$

$Sa(f) = 0$ bei $1 + 2\cos(2\pi f) = 0 \Rightarrow \cos(2\pi f) = -\frac{1}{2}$

$f = \frac{1}{3},\ f = -\frac{2}{3}$



b)
$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, z^{-n} = \left(\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)\right) z^{-n}$$

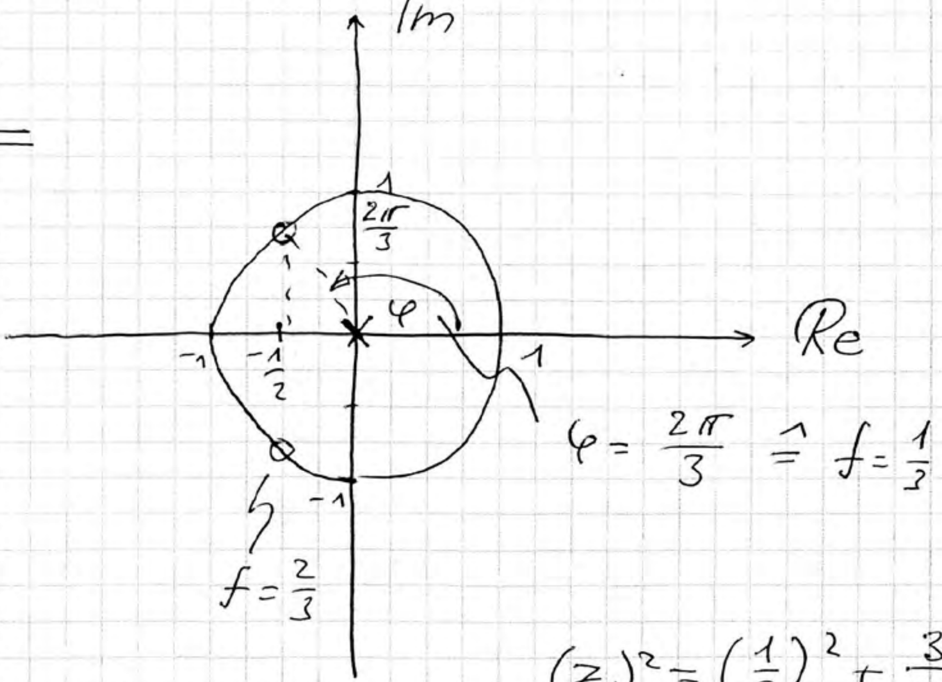
$$= z^{1} + 1 + z^{-1}$$

$$= \frac{z^2 + z + 1}{z}$$

Nullstellen: $z_{N_{1,2}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{j}{2}\sqrt{3}$

Polstellen: $z_p = 0$

$\underline{z}$-Ebene



$(z_1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2^2} = 1$

KB: ganze Ebene außer $z=0$

Nullstellen auf Einheitskreis

c) $\boxed{S(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f}} = S_a(f)}$

$$z^1 + 1 + z^{-1}\Big|_{z=e^{j2\pi f}} = 1 + 2\cos(2\pi f)$$

Nur möglich falls EK im KB.

24.06.10

ETIV

Aufgabe 4.15

a) $s(n) = 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(n) - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n)$

$$= 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

mit $\sum_{n=0}^{\infty} g^n = \frac{1}{1-g}$ wenn $|g| < 1$

$$S(z) = \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1 \qquad \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |z| > \frac{1}{3} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

„stärkere Bedingung"

b)

für NST/Pole

$z^{-1} \rightsquigarrow z^n$

$(n \geq 0)$

$$S(z) = \frac{7\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) - 6\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

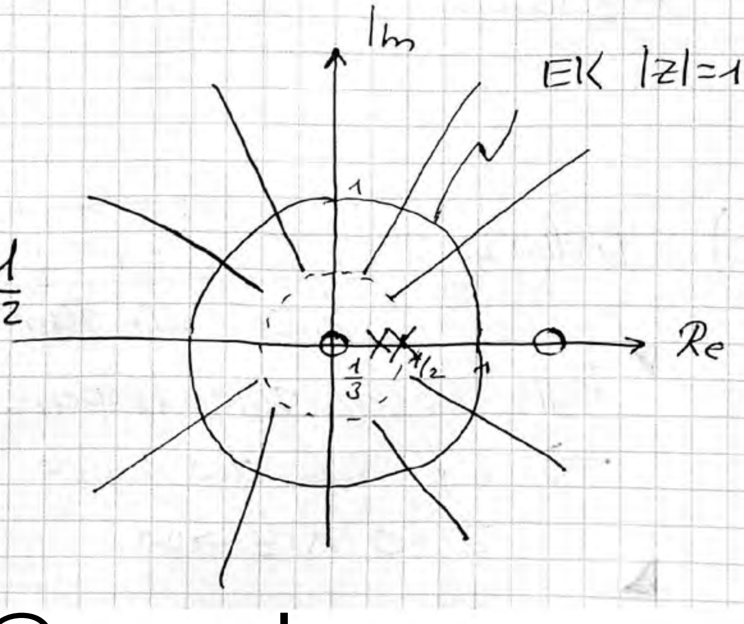
$$= \frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

Nullstellen: $z_{N_1} = 0$; $z_{N_2} = \frac{3}{2}$

Polstellen: $z_{P_1} = \frac{1}{3}$; $z_{P_2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Konv. bereich

$$|z| > \frac{1}{2}$$



EK im Konvergenzbereich

$$|z| > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Fourier-Transformierte existiert!

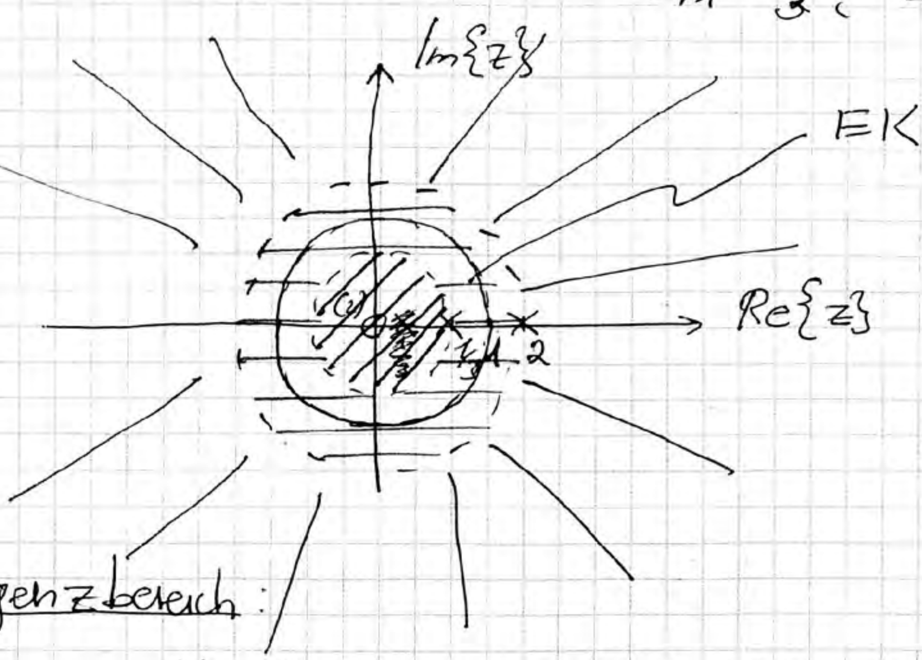
$$S_a(f) = S(z = e^{j2\pi f})$$

ketov@gmx.de

Aufgabe 4.16

a)b) $S(z) = \dfrac{z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-2)} \Rightarrow z_N = 0$ (doppelt)

$z_{P_1} = \frac{1}{3}$; $z_{P_2} = 2$



Konvergenzbereich:

- Immer Kreisförmig um Nullpunkt begrenzt
- enthält keine Pole, irgendein Pol markiert Grenze
- Rechtsseitiges s(n): KB bei $|z| > |z_{,max}| = 2$
- Linksseitiges s(n): KB bei $|z| < |z_{,\cancel{max}\,min}| = \frac{1}{2}$
- Zweiseitiges s(n): KB bei $|z_{p,max}(r)| < |z| < |z_{p,min}(l)|$

rechtsseitiger Pol — linksseitiger Pol

$\frac{1}{3} < |z| < 2$

c) Bedingung: $\boxed{\text{EK } |z| = 1 \text{ im Konvergenzbereich}}$

hier bei dem zweiseitigen Signal

Falls s(n) eine begrenzte Dauer hat
$\Rightarrow$ KB ist die ganze z-Ebene außer
$z = 0 \wedge z \to \infty$

} Merke!

Aufgabe 4.17

a)
$$S(z) = \frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \overset{!}{=} \frac{a_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{a_2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + a_0$$

$a_0 = 0$, da "Grad" des Zählers kleiner als Grad des Nenners $(-1 > -2)$ $(|-1| < |-2|)$

$$= \frac{(a_1+a_2) - \left(a_1/3 + a_2/4\right)z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = 3 \; ; \; \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} = \frac{5}{6} \Rightarrow a_1 = 1 \; ; \; a_2 = 2$$

$$S(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$|z| > \frac{1}{3} \Rightarrow$ rechtsseitiges Signal

Tabelle 4.3 $\quad \frac{1}{1-az^{-1}} \circ\!\!\overset{Z}{-\!\!-}\!\!\circ\, a^n \varepsilon(n)$; falls $|z| > |a|$

$$\Rightarrow s(n) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \cdot \varepsilon(n)$$

b) $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$

„rechtsseitiger" Pol (R)

„linksseitiger" Pol (L)

Tabelle $\quad \frac{1}{1-az^{-1}} \overset{Z}{\longleftrightarrow} -a^n \varepsilon(-n-1)$; falls $|z| < |a|$

ketov@gmx.de

$$S(z) = \overset{(R)}{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}} + \overset{(L)}{\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}$$

$$\Big\updownarrow Z$$

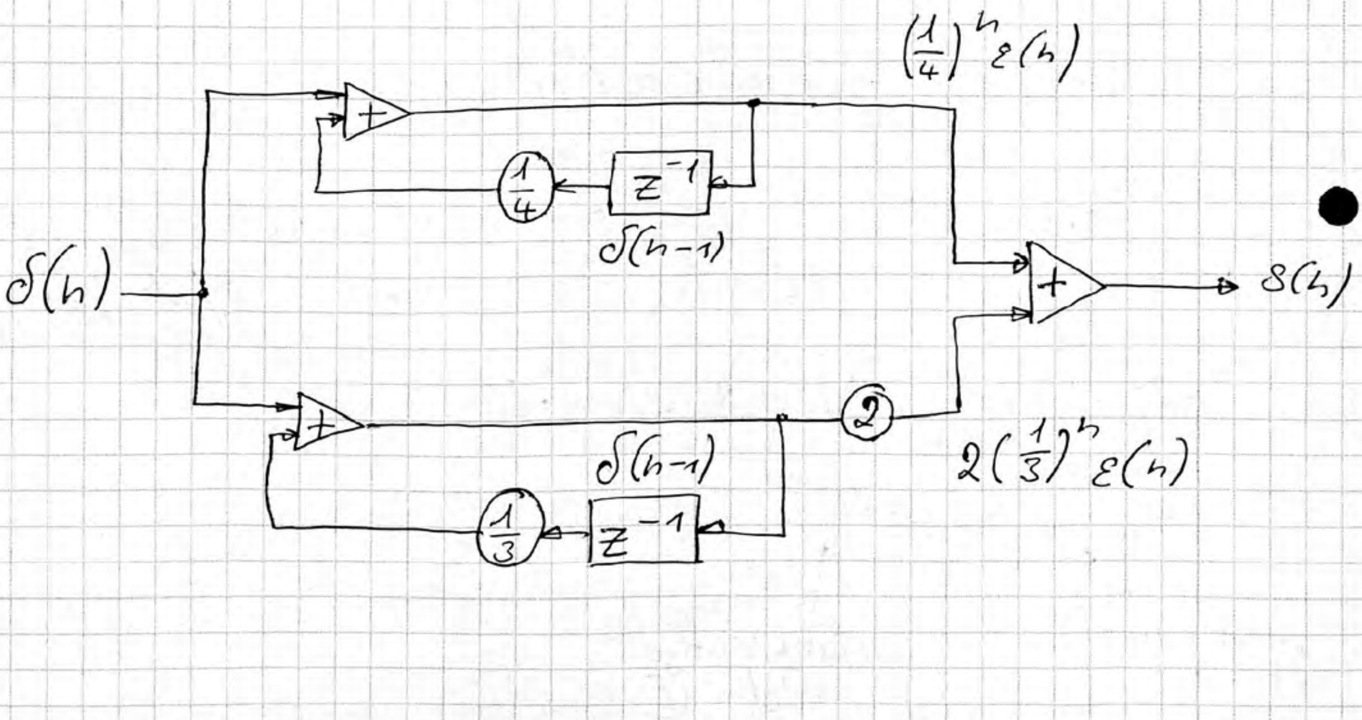
$$s(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(-n-1)$$

c) $|z| < \frac{1}{4}$: linksseitig

$$s(n) = \left[-\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\varepsilon(-n-1)$$

d) $s(n) = h(n)$ eines LSI-Systems
(Impulsantwort)

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{LSI} \longrightarrow s(n)$$



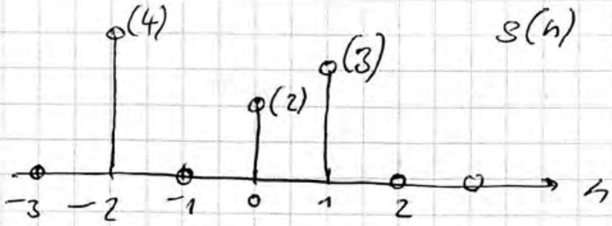
Aufgabe 4.18

$$S(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1} = S(z)$$

$$S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k)\, z^{-k} \quad \text{und} \quad z^{-k} \overset{Z}{\longleftrightarrow} \delta(n-k)$$

$\Rightarrow$ Nur Positionen $k=-2$; $k=0$ und $k=1$ im Signal vorhanden $(s(k) \neq 0)$

$$s(n) = 4\delta(n+2) + 2\delta(n) + 3\delta(n-1)$$



Aufgabe 4.19

$$g(n) - 2g(n-1) = s(n) + 2s(n-2) \Big\} \underline{\underline{\text{Differenzengl.}}}$$

$$Z \updownarrow$$

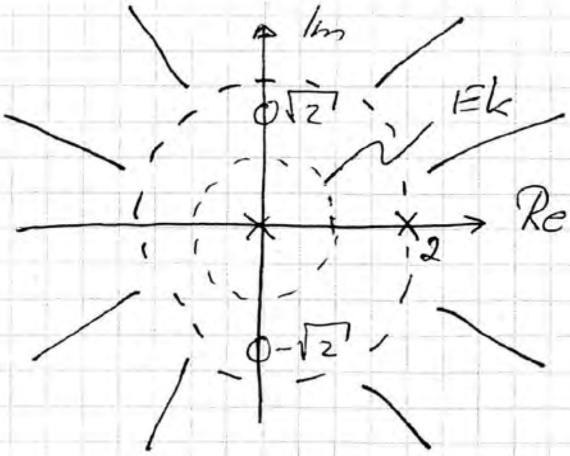
$$G(z) - 2G(z)z^{-1} = S(z) + 2S(z)z^{-2}$$

$$G(z)\left[1 - 2z^{-1}\right] = S(z)\left[1 + 2z^{-2}\right]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{G(z)}{S(z)} = \frac{1+2z^{-2}}{1-2z^{-1}} = \frac{z^2+2}{z^2-2z}$$

Nullstellen: $z_{N1,2} = \pm j\sqrt{2}$

Polstellen: $(z-2)z = 0 \Rightarrow z_{P1} = 0$; $z_{P2} = 2$



Die Differenzengleichung besitzt keine Terme, die auf $\boxed{\text{zukünftige}}$ Werte $s(n+..)$ oder $g(n+..)$ zugreifen $\Longrightarrow$ kausal. K.B. $|z|>2$

$\Longrightarrow$ System ist instabil (EK nicht im KB)

Aufgabe 4.20

Summenpunkt

a) $$G(z) = H_1(z)\,S(z) + H_2(z)\,S(z)$$
$$= S(z)\underbrace{\left[H_1(z) + H_2(z)\right]}_{=H(z)}$$

b) $$G(z) = \left[S(z)\,H_1(z)\right]H_2(z)$$
$$\Longrightarrow H(z) = H_1(z)\,H_2(z)$$

c) $$G(z) = \underbrace{\left[S(z) + G(z)\,H_2(z)\right]}_{\text{„Summenpunkt"}}H_1(z)$$

$$G(z)\left[1 - H_1(z)\,H_2(z)\right] = S(z)\,H_1(z)$$

$$\Longrightarrow H(z) = \frac{G(z)}{S(z)} = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)\,H_2(z)}$$

Aufgabe 4.21

a) mit 4.20c : $H_1(z) = 2$; $H_2(z) = z^{-1}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{2}{1-2z^{-1}} = \frac{2z}{z-2}$$

Merke! System kausal, da nur vorangegangene Werte verwendet werden (keine Glieder „z^{+k}" im FIR- und IIR-Teil)

b) Nullstelle $z_N = 0$, Polstelle $z_P = 2$

kausal: Konvergenzbereich: $|z| > 2$, Polstelle $|z| \geq 1$

$\Rightarrow$ Instabil

c) $$H(z) = 2 \frac{1}{1-2z^{-1}} \overset{Z}{\longleftrightarrow} h(n) = 2 \cdot 2^n \varepsilon(n)$$
$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \delta(n-k)$$

1.) Tabellenlösung!

2) selbst!

$\boxed{\text{Tabellenlösung}}$ wie Vorher (zuerst!)

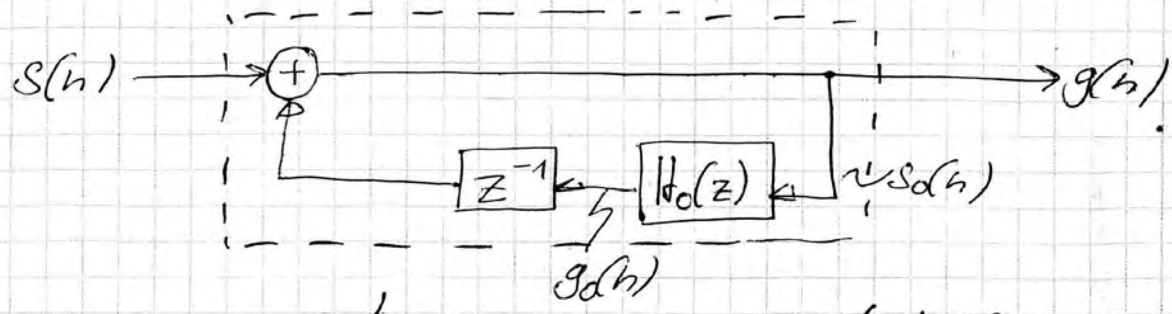
$$\boxed{h(n)} = 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + 8\delta(n-2) + 16 \ldots + \ldots$$

Wächst für $n \to \infty$ über alle Grenzen ($\hat{=}$ Instabilität)

ketov@gmx.de

Aufgabe 4.22

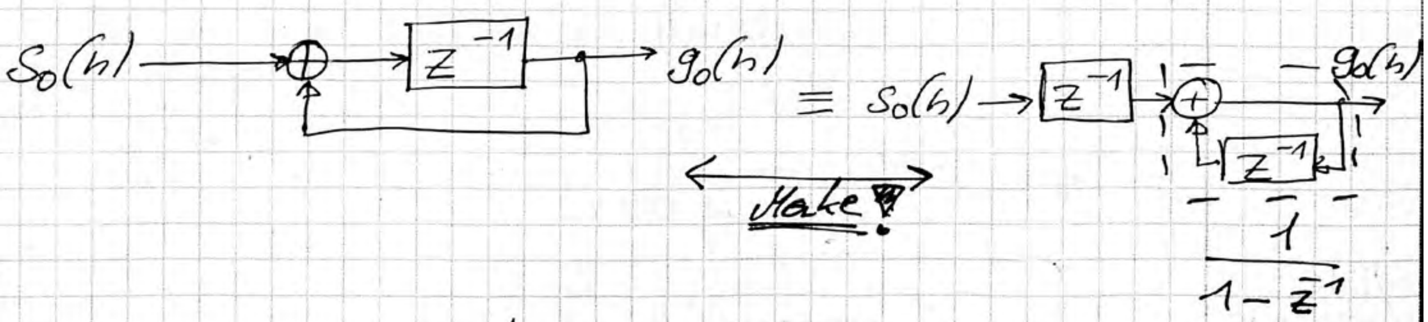
a) Ersatzschaltung:



$$H(z) = \frac{1}{1 - H_0(z)\, z^{-1}}$$

mit 4.20 c
$H_1(z) = 1$
$H_2(z) = H_0(z)\, z^{-1}$

$H_0(z)$



$$H_0(z) = z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

$$= \frac{z^2 - z}{z^2 - z - 1}$$

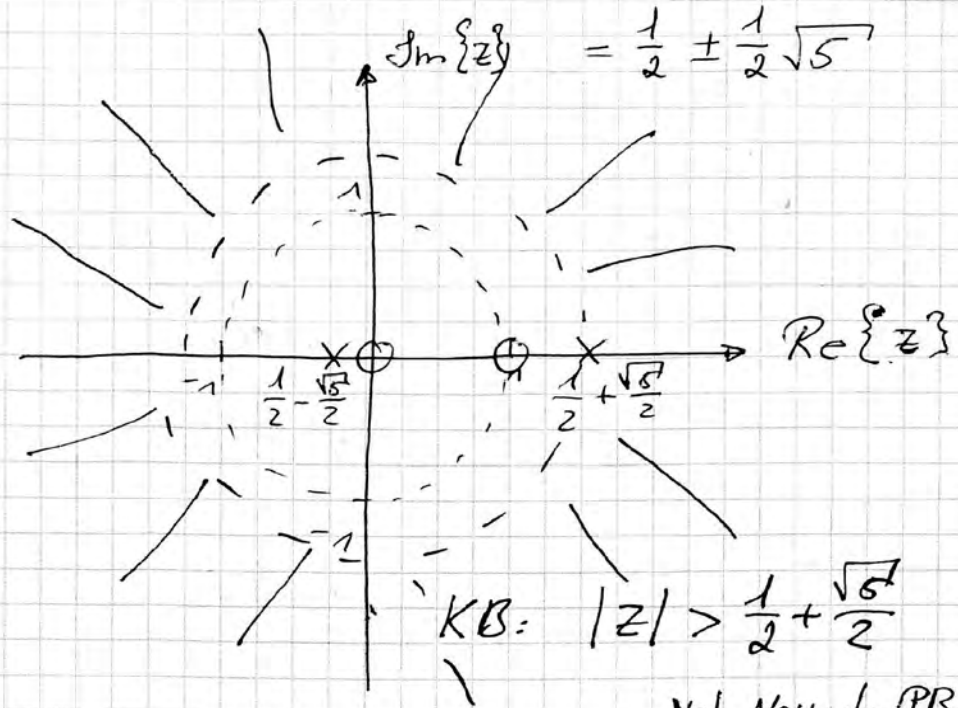
(kausal!)

NST:

b) $z^2 - z = z(z-1) = 0 \Rightarrow z_{N_1} = 0,\ z_{N_2} = 1$

Pole: $z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z_{p_{1,2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$

$= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$



KB: $|z| > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

Vgl. Normale PBZ!

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{z^{-1} \to \infty} H(z) = 0 \\ &\Rightarrow a_0 = 0 \end{aligned}}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - z_{p_1} z^{-1})(1 - z_{p_1} z^{-1})}$$

$$= \frac{a_1}{1 - z_{p_1} z^{-1}} + \frac{a_2}{1 - z_{p_2} z^{-1}} + \underbrace{a_0}_{=0}$$

$$= \frac{(a_1 + a_2) - a_1 z_{p_2} z^{-1} - a_2 z_{p_1} z^{-1}}{(1 - z_{p_1} z^{-1})(1 - z_{p_1} z^{-1})}$$

$$= \frac{(a_1 + a_2) - \overbrace{(a_1 z_{p_2} + a_2 z_{p_1})}^{\overset{!}{=} 1} z^{-1}}{(1 - z_{p_1} z^{-1})(1 - z_{p_1} z^{-1})}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{z_{p_1} - 1}{z_{p_1} - z_{p_2}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$a_2 = \frac{1 - z_{p_2}}{z_{p_1} - z_{p_2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow h(n) = a_1 (z_{p_1})^n \varepsilon(n) + a_2 (z_{p_2})^n \varepsilon(n)$$

<u>Aufgabe 4.23</u>

01.07.10
ETIV
Übung

a) $h_1(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$

$$\updownarrow Z$$

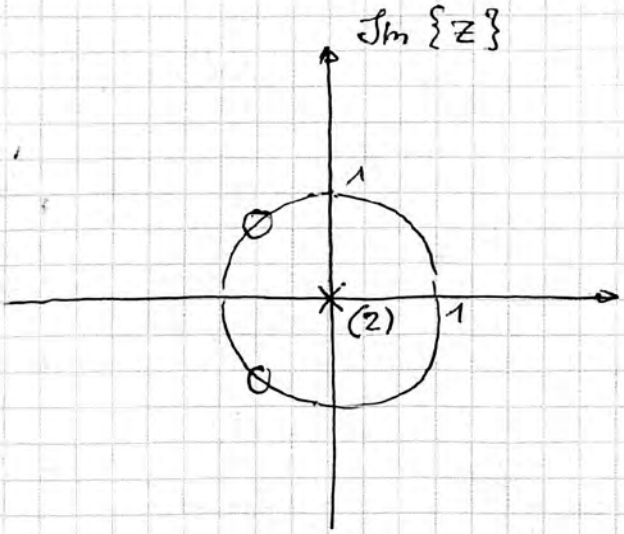
$$H_1(z) = z^0 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$= \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$

Nullstellen: $z_{N_{1,2}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{j\sqrt{3}}{2}$

Polstellen: $z_{P_{1,2}} = 0$

b)



Konvergenzbereich: $|z| > 0$

c) $h_3(n) = \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3) + 2\delta(n-4) + \delta(n-5)$

$$\updownarrow$$

$$H_3(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

~~Aus~~ Aufgabenstellung:

$$h_3(n) = h_1(n) * h_2(n) \longleftrightarrow H_3(z) = H_1(z) H_2(z)$$

$$\Rightarrow H_2(z) = \frac{H_3(z)}{H_1(z)}$$

$$= \frac{z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+2z^{-4}+z^{-5}}{1+z^{-1}+z^{-2}}$$

Polynomdivision:

$$\left[z^{-5}+2z^{-4}+3z^{-3}+2z^{-2}+z^{-1}\right] : \left[z^{-2}+z^{-1}+1\right] = z^{-3}+z^{-2}+z^{-1}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{z^{-5}+z^{-4}+z^{-3}} \\
\quad z^{-4}+2z^{-3}+2z^{-2} \\
\quad \underline{z^{-4}+z^{-3}+z^{-2}} \\
\qquad z^{-3}+z^{-2}+z^{-1} \\
\qquad \underline{z^{-3}+z^{-2}+z^{-1}} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$

$$H_2(z) = z^{-3}+z^{-2}+z^{-1} = H_1(z)\,z^{-1} = \frac{1+z+z^2}{z^3}$$

$$\updownarrow$$

$z_{P_{1,2}} = 0$

KB: $|z| > 0$

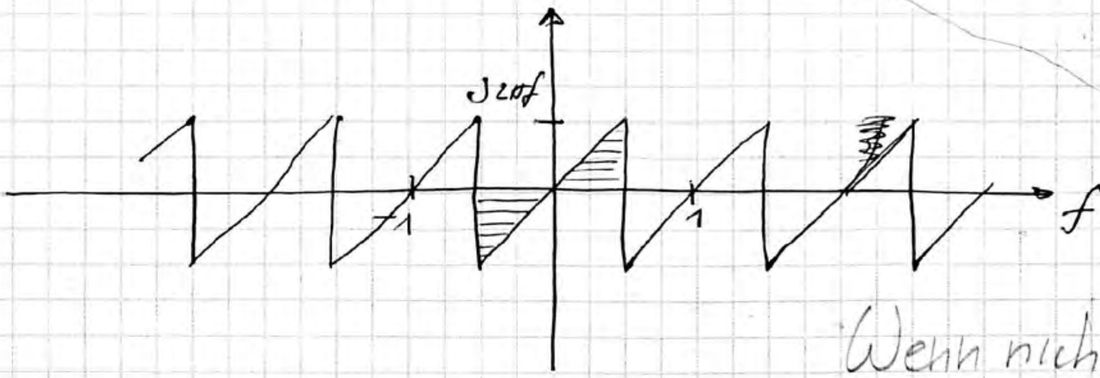
kausal

könnte man direkt sehen $\rightarrow$ $\underline{\underline{h_2(n) = \delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)}}$

Aufgabe 4.26

a) Zeitdiskretes System, Begrenzung $|f| < \frac{1}{2}$

$$H_a(f) = \left[j2\pi f \,\mathrm{rect}(f) \right] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-k)$$



Wenn nichts angegeben $T=1$!

b) $H_a(f)$

$$h_a(t) = \left[\frac{d}{dt} \mathrm{si}(\pi t) \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

$$\frac{d}{dt} \mathrm{si}(\pi t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right) = \frac{\cos(\pi t)}{t} - \frac{\sin(\pi t)}{\pi t^2}$$

$$= \frac{\cos(\pi t)}{t} - \frac{1}{t}\,\mathrm{si}(\pi t)$$

$$h_a(t) = \Big[\underbrace{\frac{\cos(\pi t)}{t}}_{=\frac{(-1)^n}{n}} - \frac{1}{t}\underbrace{\mathrm{si}(\pi t)}_{=0 \text{ für alle } t=n \text{ außer } n=0} \Big] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \qquad \boxed{t \to n}$$

Wert bei Null?

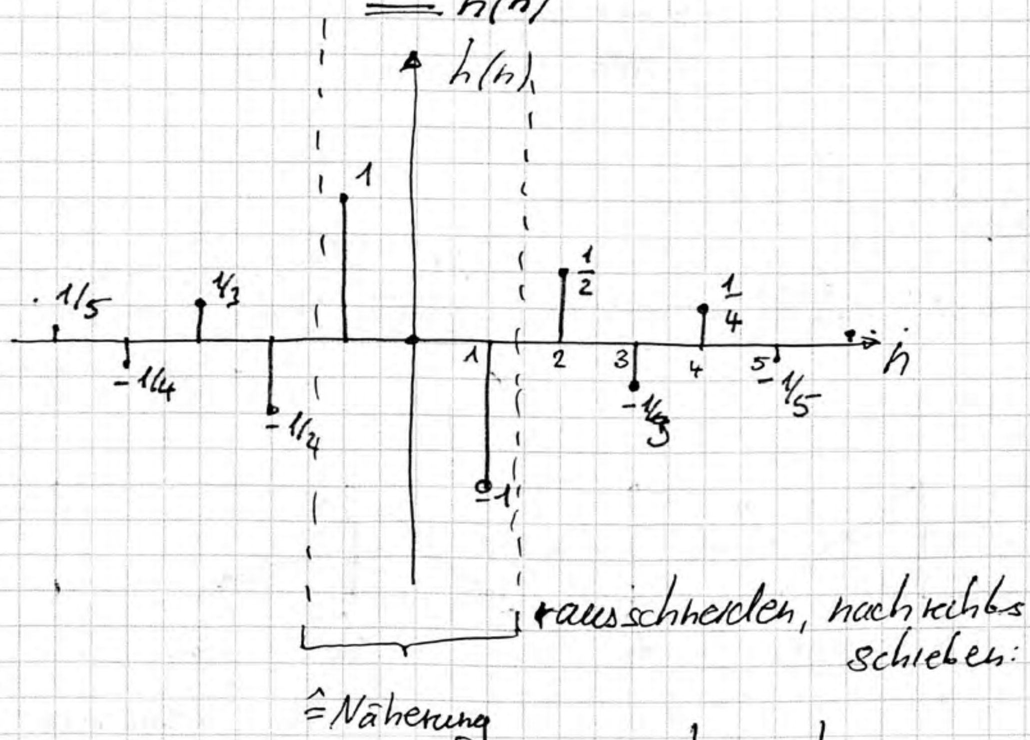
$$h_a(0) = \int_{-1/2}^{1/2} H_a(f)\, e^0 \, df = 0$$

Im Hinterkopf halten!
(FS. S. 9)

da $H_a(f)$ ungerade

$$\Longrightarrow h_a(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{= h(n)} \delta(t-n)$$

c)



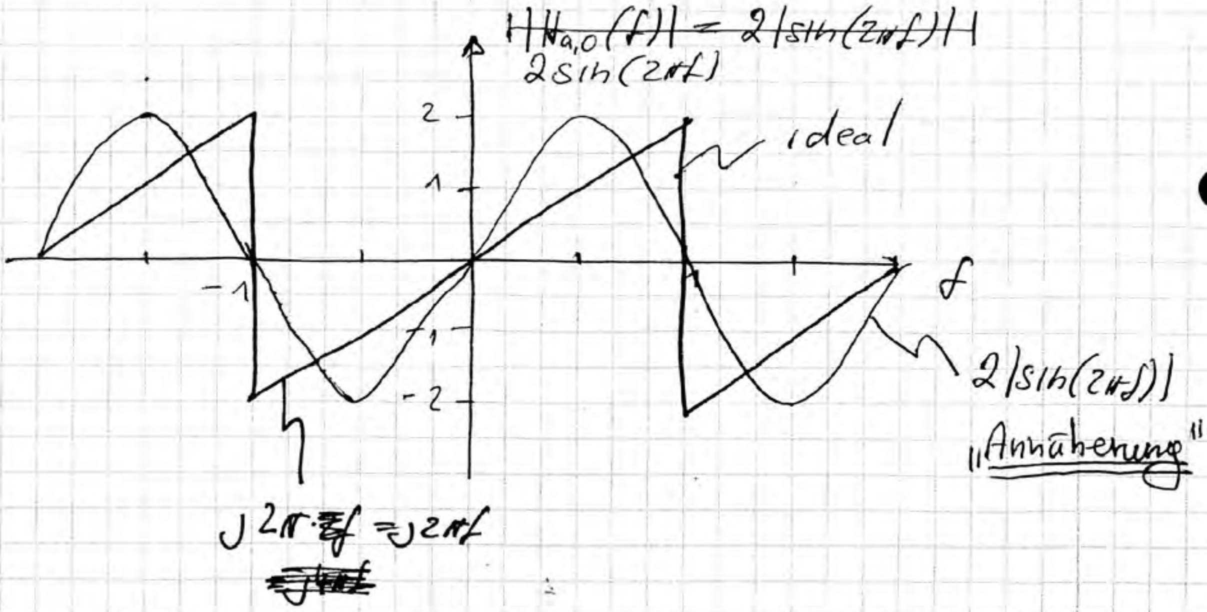
$$h_0(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$$

$$H_{a,0}(f) = 1 - e^{-j2\pi f \cdot 2}$$

$$= e^{-j2\pi f}\left[e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}\right]$$

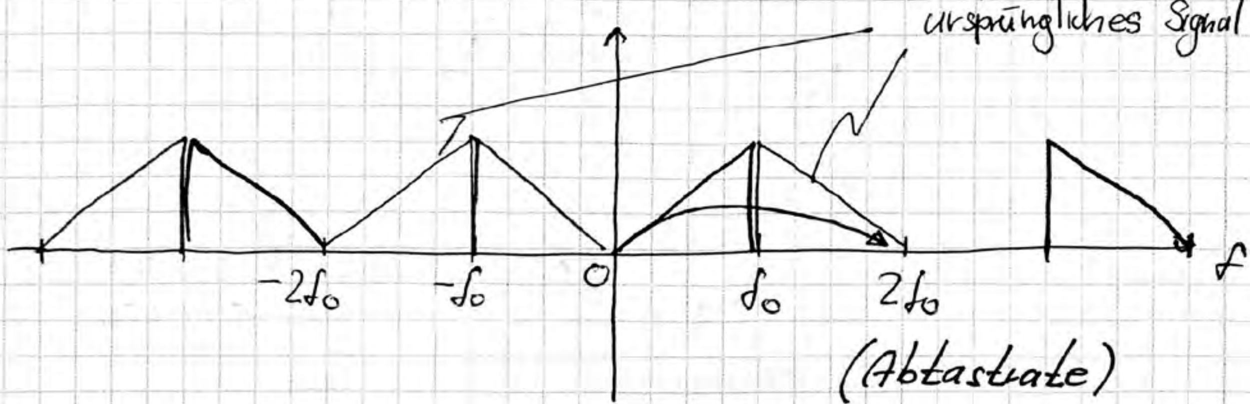
$$= 2j \sin(2\pi f) \cdot e^{-j2\pi f}$$

$$|H_{a,0}(f)| = 2|\sin(2\pi f)|$$



Aufgabe 4.27

$\boxed{\text{Abtastung eines Bandpass-Signals}}$



Abtastung mit $r = 2f_0 = \frac{1}{T}$

2x
- periodische Kopien bei $k \cdot 2f_0$
- Skallierung der Amplitude mit $\frac{1}{T} = 2f_0$ ⚠

=> Es entstehen keine Überlappungen!

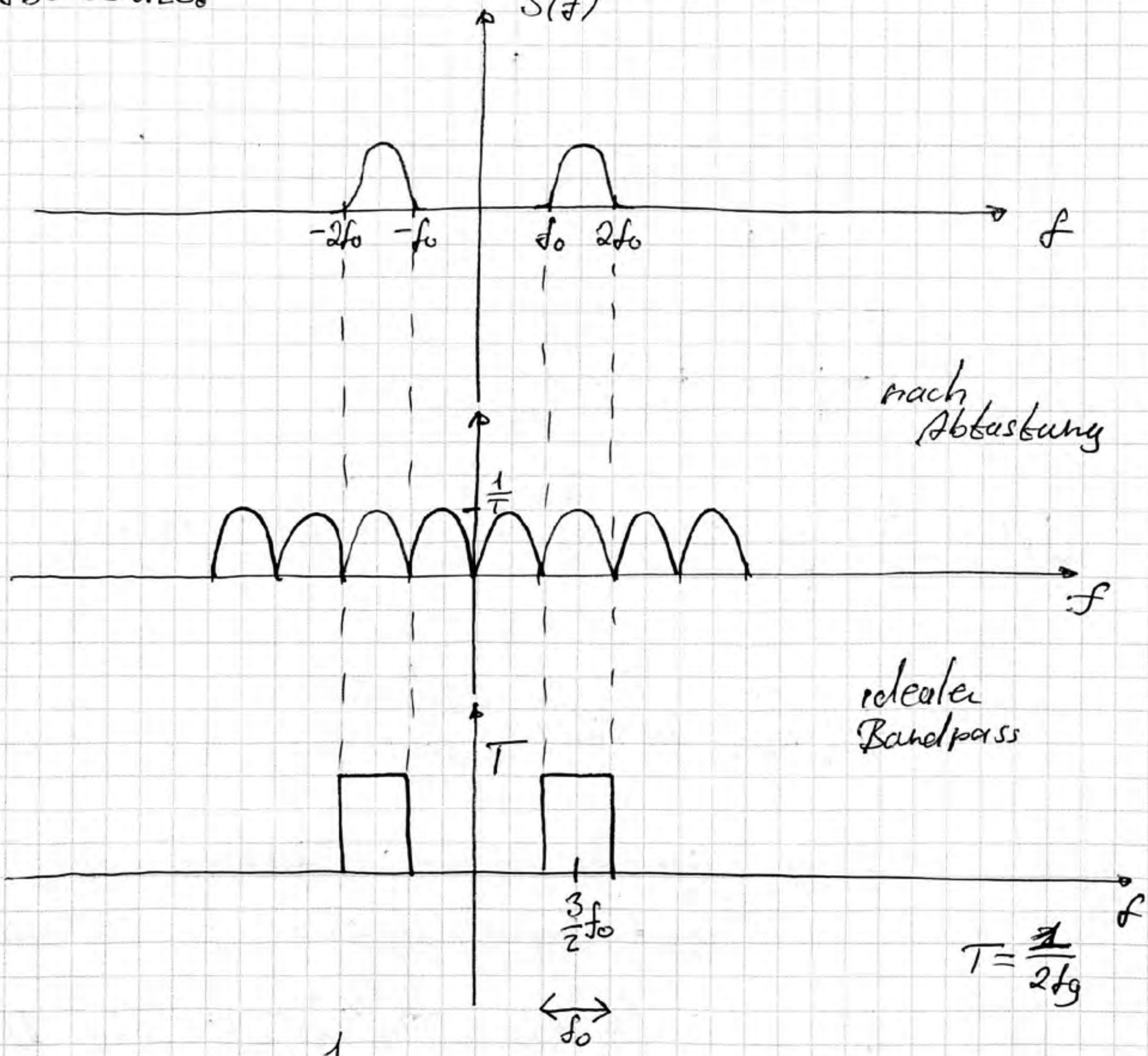
Das ist möglich, weil $f_\Delta = 2f_0 - f_0 = f_0$ und mit doppelter Frequenz abgetastet wird
($\hat{=}$ keine Überlappungen)

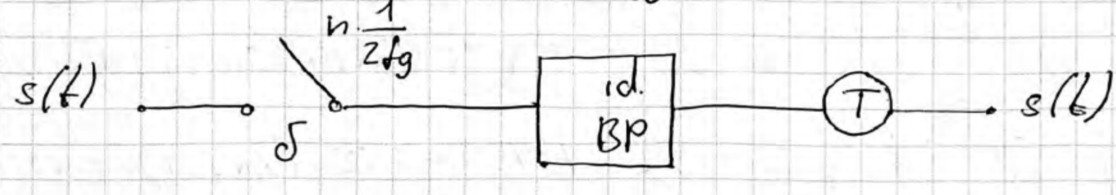
⚠ Achtung:

Spezialfall, sowohl untere als auch obere Bandgrenze haben ganzzahliges Verhältnis zur Abtastrate!

$\frac{1}{T}$ von Abtastung

$$\boxed{T = \frac{1}{2f_0}}$$





Mittenfrequenz: $\frac{3}{2} f_0$

Bandbreite: f_0

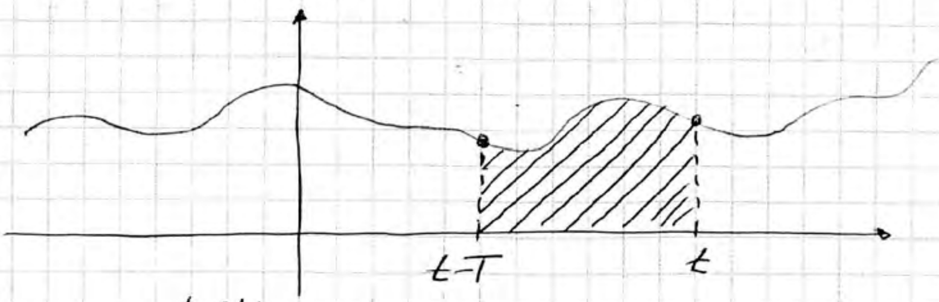
nicht vergessen!

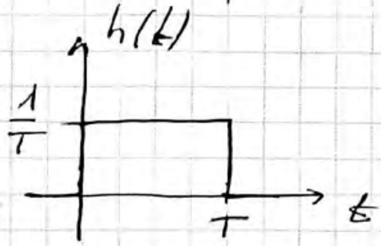
$$\Rightarrow H(f) = T \,\mathrm{rect}\left(\frac{f - \frac{3}{2}f_0}{f_0}\right) + T \,\mathrm{rect}\left(\frac{f + \frac{3}{2}f_0}{f_0}\right)$$

ketov@gmx.de

Aufgabe 5.1

$\boxed{\text{Kurzzeitintegrator}}$ bildet Mittelwert eines Signals über T





$$g(t) = \underbrace{\cos(2\pi Ft)}_{=s(t)} * h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \cos(2\pi F\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2\pi F}\sin(2\pi F\tau)\right]_{t-T}^{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi FT}\left[\sin(2\pi Ft) - \sin(2\pi F(t-T))\right]$$

mit $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ | FS

$$= \frac{1}{2\pi FT}\left[\sin(2\pi Ft) - \sin(2\pi Ft)\cos(2\pi FT) + \cos(2\pi Ft)\sin(2\pi FT)\right]$$

(1) $F = k\cdot\frac{1}{T} \Rightarrow k = FT \Rightarrow \cos(2\pi FT) = 1$

$\sin(2\pi FT) = 0$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi FT}\left[\sin(2\pi Ft) - \sin(2\pi Ft)\right] + \cos(2\pi Ft)\sin(2\pi FT)$$

$\Rightarrow g(t) = 0 \quad$ für $k \neq 0$

$k=0$: $si(0) = 1 \Rightarrow g(t) = \cos(0) = 1$

(2) $F = (k+\frac{1}{2})\frac{1}{T} \Rightarrow FT = \frac{2k+1}{2}$

$\Rightarrow \cos((2k+1)\pi) = -1; \quad \sin((2k+1)\pi) = 0$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{\sin(2\pi Ft) + \sin(2\pi Ft)}{2\pi Ft} = \frac{\sin(2\pi Ft)}{\pi FT}$$

b) $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(f) = S(f) \cdot H(f)$

$h(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right), \quad \mathrm{rect}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, si(\pi f)$

mit $\quad a \cdot s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a\,S(f)$

Formel-sammlung $\left\{ \quad s(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{|b|} S\left(\frac{f}{b}\right) \right.$ Betrag ! ⚠

$s(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-j2\pi f t_0} S(f)$

hier: $a = \frac{1}{T}; \quad b = \frac{1}{T}; \quad t_0 = \frac{T}{2}$

$$\Rightarrow H(f) = a \cdot \frac{1}{|b|} \cdot si\left(\frac{\pi f}{b}\right) e^{-j2\pi f t_0} = \underline{si(\pi f T) e^{-j\pi f T}}$$

$s(t) = \cos(2\pi Ft) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2}[\delta(f+F) + \delta(f-F)] = S(f)$

$$G(f) = S(f)\cdot H(f) = \frac{1}{2}\, si(\pi T f)\, e^{-j\pi T f}\left[\delta(f+F)+\delta(f-F)\right]$$

mit Siebeigenschaft:

$$S(f)\cdot\delta(f-F) = S(F)\,\delta(f-F)$$

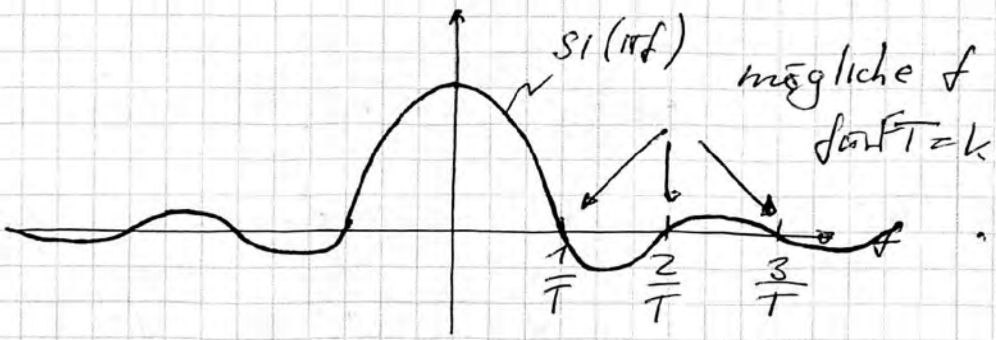
$$G(f) = \underbrace{\frac{1}{2}\, si(\pi F T)}_{\text{identisch bei } \pm}\cdot\left[e^{+j\pi T F}\delta(f+F) + e^{-j\pi T F}\delta(f-F)\right]$$

(1) $F\cdot T = k$; $\frac{FT}{2} = \frac{k}{2}$

$$\Rightarrow si(\pi\cdot k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0 \\ 1 & \text{für } k = 0 \quad [\Rightarrow F = 0 = T] \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(f) = 0 \quad \text{für } k \neq 0$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta(f) + \delta(f)\right] = \delta(f) \circ\!\!-\!\!\circ\; g(t) = 1$$



(2) $FT = k + \frac{1}{2}$; $F\frac{T}{2} = \frac{k+1/2}{2}$

$$e^{j2\pi F\frac{T}{2}} = e^{jk\pi}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos(k\pi)\, j = j\,(-1)^k$$

$$e^{-j2\pi F\frac{T}{2}} = \ldots = \cos(-k\pi)\, j = -j\,(-1)^k$$

ketov@gmx.de

(bereits mit Siebeigenschaft)

$$G(f) = \underbrace{\frac{1}{2} j \, si\left(\left[k+\frac{1}{2}\right]\pi\right)(-1)^k}_{\neq f(f)} \cdot \left[\delta(f+F) - \delta(f-F)\right]$$

$$g(t) = (-1)^k si\left(\left[k+\frac{1}{2}\right]\pi\right) \sin(2\pi F t)$$

- si-Funktion etwa in der Mitte eines Nebenmaximums nimmt ab für wachsende k (s.o)
- Vorzeichen $(-1)^k$ hebt Vorzeichen der Nebenmaxima der si-Fkt. auf

Aufgabe 5.2

a) $$H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f T} = |H(f)| \cdot e^{j\varphi(f)}$$; mit $T=RC$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f)^2 T^2}}$$

$$\varphi(f) = -\arctan(2\pi f T)$$

b)
$$a(f) = -20 \log |H(f)| = -10 \log |H(f)|^2$$
$$= -10\left[\lg(1) - \lg\left(1+(2\pi f)^2 T^2\right)\right]$$
$$= 10 \lg\left(1+(2\pi f)^2 T^2\right)$$

für $f \gg \frac{1}{T}$: $a(f) \approx 20 \lg(2\pi f T)$

$$\approx \frac{20\,dB}{Dekade}$$

ketov@gmx.de

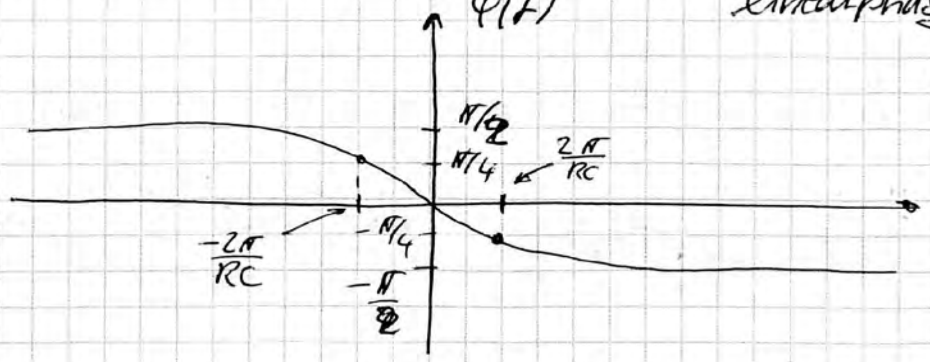
$$t_P(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi f} = \frac{\arctan(2\pi f T)}{2\pi f}$$

$$t_g(f) = -\frac{d\varphi(f)}{df}\cdot\frac{1}{2\pi} \quad ; \text{ mit } \frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+(2\pi f T)^2}\, T$$

innere Ableitung $2\pi T$, kürzen

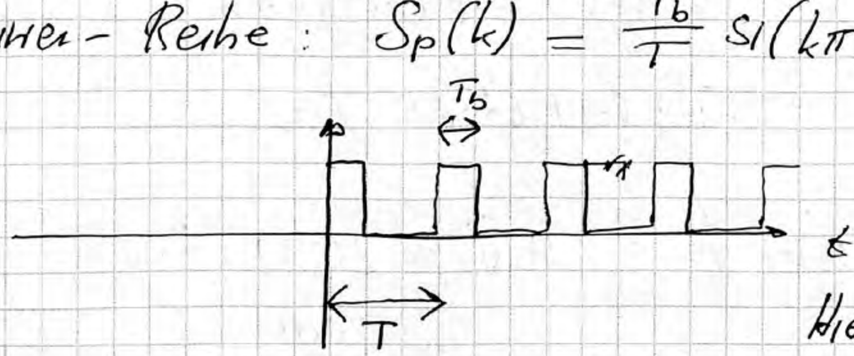
c) $t_g(f) \neq t_P(f) \neq const \Rightarrow$ System ist nicht linearphasig



Rein sin-förmiges Signal: <u>keine Phasenverzerrung</u> (bleibt sinus); aber zeitverzögerung aufgrund $\varphi(f)$ und Amplitudendämpfung $|H(f)|$

d) Rechteck-Impuls-Folge (Siehe ~~Anhang~~ Aufgabe 3.3)

Fourier-Reihe: $S_P(k) = \frac{T_b}{T}\, si\left(k\pi\frac{T_b}{T}\right)$



Hier: $T_b = \frac{T}{2}$

$$\overset{T_b = \frac{T}{2}}{\Longrightarrow} S_p(k) = \frac{1}{2} si\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k)\, H_{RC}(kF) \cdot e^{jk2\pi F t}$$

06.07.09
ETIV
Übung

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_p(k)|\, |H_{RC}(kF)|\, e^{j[\varphi_s(k) + \varphi_{RC}(kF)]} \cdot e^{jk2\pi F t}$$

$\varphi_s(k)$: $= 0$ für $si \geq 0$, $= \pi$ für $si < 0$

$\varphi_{RC}(kF)$: nicht $= f \cdot const$ für $F \cdot K$

Da Rect ∞ viele Frequenzen hat!!

$\Longrightarrow$ **Phasenverzerrungen** am Ausgang

$\Longrightarrow$ d.h. Frequenzanteile $k \cdot F$ haben unterschiedliche Durchlaufzeiten

Periodendauer T; $F = \frac{1}{T}$

1. Koeffizient bei $f = \frac{1}{T}$ ist $\neq$ Null

2. Koeffizient bei $f = \frac{2}{T}$ ist Null

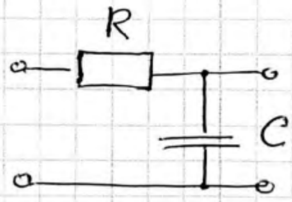
3. Koeffizient bei $f = \frac{3}{T}$ ist $\neq$ Null

RC-Tiefpass mit $RC = T$, $F = 1$

	Gruppenlaufzeiten
$\varphi(F) = -\arctan(2\pi) \approx -0{,}45\pi$	$t_g(F) \approx 0{,}024T$
$\varphi(3F) = -\arctan(6\pi) \approx -0{,}48\pi$	$t_g(3F) \approx 0{,}0028T$
$\varphi(f \to \infty) = -\frac{\pi}{2}$	$t_g(f \to \infty) \approx 0$

Aufgabe 5.3

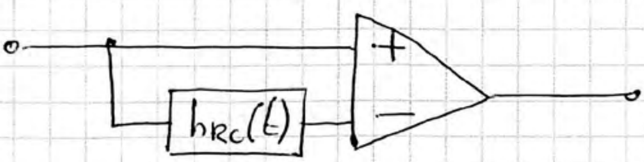
a) RC-Tiefpass $\quad h_{RC}(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \varepsilon(t)$



$RC = T$

hier:

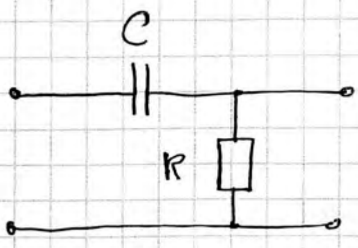
$$h(t) = \delta(t) - h_{RC}(t)$$



b)

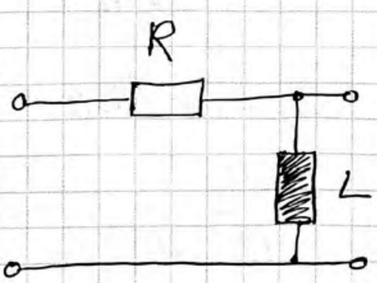
$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(f) = 1 - \frac{1}{1 + j2\pi f T} = \frac{j2\pi f T}{1 + j2\pi f T}$$

c)



$RC = T$

d)

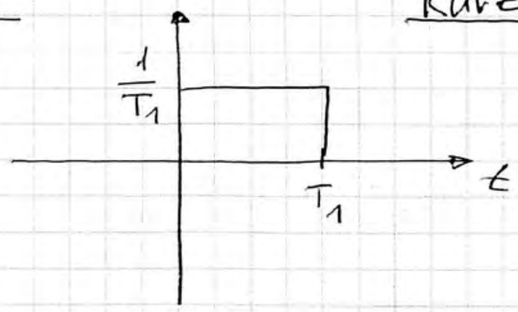


$\frac{L}{R} = T$

ketov@gmx.de

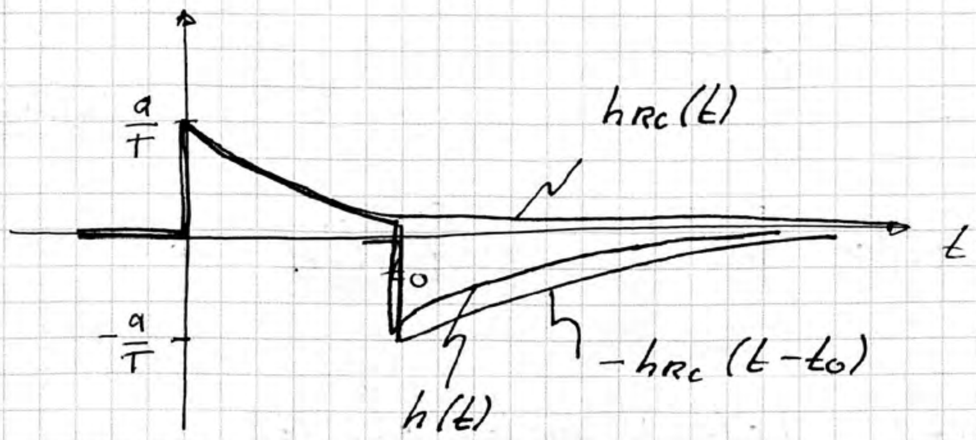
Aufgabe 5.4 Kurzzeitintegrator

Ziel:



a) $h(t) = a\left[h_{RC}(t) - \underbrace{h_{RC}(t-t_0)}_{= h_{RC}(t) * \underbrace{h_L(t)}_{= \delta(t-t_0)}}\right]$

$h_{RC}(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \varepsilon(t)$



Approximation:

$t_0 = T_1$

$h_{RC}(T_1) = \frac{1}{T} e^{-\frac{T_1}{T}} \overset{!}{\geq} \frac{0{,}99}{T} \Rightarrow e^{-\frac{T_1}{T}} \geq 0{,}99$

$\Rightarrow e^{\frac{T_1}{T}} \leq \frac{1}{0{,}99}$

$\Rightarrow \frac{T_1}{T} \leq -\ln(0{,}99)$

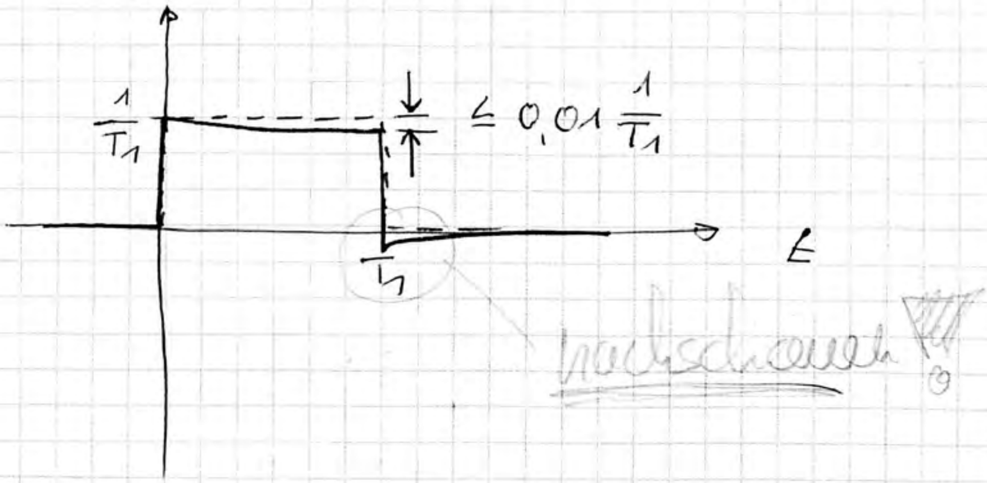
$\approx 0{,}01$

$\Rightarrow \quad T \geq 99{,}5\, T_1$

$a = \frac{T}{T_1} \longleftarrow$ „Amplitude anpassen"

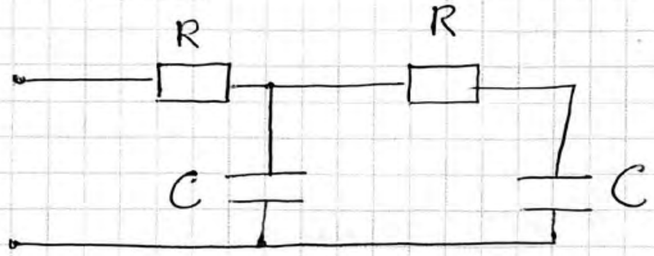
ketov@gmx.de

b)



Aufgabe 5.5

a)



„Kettenschaltung"

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!- \boxed{h_{RC}(t)} -\!\!- \boxed{h_{RC}(t)} -\!\!-\!\!\circ$$

$$h(t) = [\delta(t) * h_{RC}(t)] * h_{RC}(t)$$
$$= h_{RC}(t) * h_{RC}(t)$$
$$\updownarrow$$
$$H(f) = H_{RC}(f) \cdot H_{RC}(f) = H_{RC}^2(f) = \left(\frac{1}{1+j2\pi f T}\right)^2$$

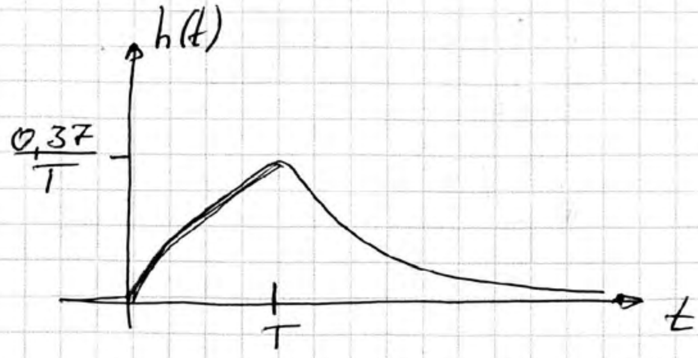
b) $$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{RC}(\tau)\, h_{RC}(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{\cancel{\infty}\ t} \frac{1}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} \cancel{\varepsilon(\tau)} \frac{1}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cancel{\varepsilon(t-\tau)}\, d\tau \cdot \underline{\underline{\varepsilon(t)}}$$

$$= \frac{1}{T^2}\,\varepsilon(t)\int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}} e^{-\frac{t-\tau}{T}}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T^2}\,\varepsilon(t)\; e^{-\frac{t}{T}}\int_0^t \underbrace{e^{-\frac{\tau}{T}}\, e^{+\frac{\tau}{T}}}_{=1}\,d\tau = \frac{1}{T^2}\varepsilon(t) e^{-\frac{t}{T}} t$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{T^2}\;\varepsilon(t) e^{-\frac{t}{T}}\cdot t$$



Maximum : $t > 0$

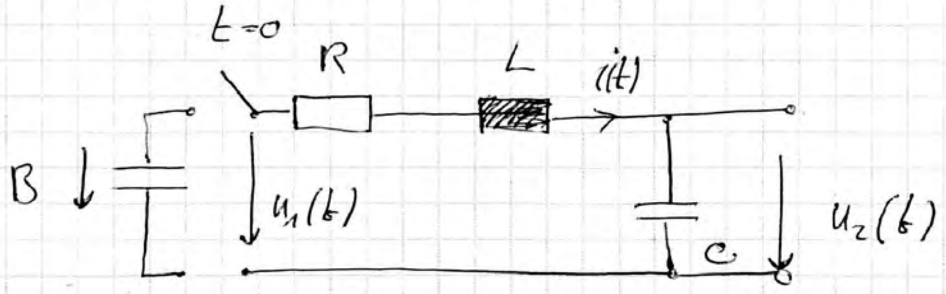
$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{T^2}\left[e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{t}{T} = 0 \Leftrightarrow \quad t = T$$

$$\Rightarrow h(T) = \frac{1}{T^2} e^{-1}\, T \approx \frac{0{,}37}{T}$$

ketov@gmx.de

c)



genau anschauen (S.22/23)

Exkurs:

$$B = R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(\tau)d\tau$$

$$L\frac{d^2}{dt^2}\, i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\, i(t) = 0$$

mit $i(t) = A\cdot e^{pt}$

$$A e^{pt}\left(p^2 L + Rp + \frac{1}{C}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow p^2 L + Rp + \frac{1}{C} = 0$$

$$p_{1,2} = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{=:a} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}}_{=:b}$$

$$i(t) = A_1 e^{(-a+b)t} + A_2 e^{(-a-b)t}$$

mit $i(0) = 0$

$$\Longrightarrow A_2 = -A_1 = -A$$

$$i(t) = A\left(e^{(-a+b)t} - e^{(-a-b)t}\right)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = A\left[(-a+b)\,e^{(-a+b)t} + (a+b)\,e^{(-a-b)t}\right]$$

$t=0$:

$$B = R\cdot \underbrace{i(0)}_{=0} + L\cdot \left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} + \underbrace{\left.\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau\right|_{t=0}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{B}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{L} = A\left((-a+b)+(a+b)\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{B}{2bL}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{B}{b\cdot L}\, e^{-at}\left(\frac{e^{bt}-e^{-bt}}{2}\right)$$

<u>3 Fälle</u>:

a) b reell: $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow i(t) = \frac{B}{bL} e^{-at} \sinh(bt)$

b) $b=0$: $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \underset{(\ldots)}{\Rightarrow} i(t) = \frac{B}{L} t e^{-at}$

(l'Hospital)

c) $b = j\beta$, imaginär: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{B}{bL} e^{-at}\, j\cdot\sin(\beta t)$$

$$= \frac{B}{\beta L} e^{-at} \sin(\beta t)$$

ketov@gmx.de

Ausgangsspannung:

$$u_2(t) = B - R \cdot i(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

3 Fälle:

a) $u_2(t) = B \cdot \left(1 - \frac{e^{-at}}{b} \left[b \cdot \cosh(bt) + a \sinh(bt) \right] \right)$

b) $u_2(t) = B \left(1 - e^{-at} \left[1 + at \right] \right)$

c) $u_2(t) = B \left(1 - e^{-at} \left[\cos(\beta t) + \frac{1}{\beta} \sin(\beta t) \right] \right)$

c)

$$h_\varepsilon(t) = u_2(t) = B \left[1 - e^{-at} (1 + at) \right] \varepsilon(t)$$

$B = 1$

$a = \frac{R}{2L}$

$$\boxed{h(t) = \frac{d h_\varepsilon(t)}{dt}} = \frac{d}{dt} \underbrace{\left[1 - e^{-at} (1 + at) \right]}_{=: x} \underbrace{\varepsilon(t)}_{=: y}$$

„$\boxed{= x' y + x y'}$"

$$= \left[a e^{-at} (1 + at) - a e^{-at} \right] \varepsilon(t)$$

$$+ \underbrace{\left[1 - e^{-at} (1 + at) \right] \delta(t)}_{= 0 \cdot \delta(t)} \text{, Siebeigenschaft}$$

$$= a e^{-at} (1 + at - 1)\, \varepsilon(t)$$

$$= a^2 t\, e^{-at}\, \varepsilon(t)$$

mit $a = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\Rightarrow h_{RLC}(t) = \frac{1}{LC}\, t\, e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}\, \varepsilon(t) \stackrel{!}{=} \underbrace{\frac{1}{T^2}\, t\, e^{-\frac{t}{T}}\, \varepsilon(t)}_{\text{RC-Kettenschaltung}}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\frac{4L^2}{R^2} = LC = T^2$$

$\Rightarrow$ Induktivitäten können in geeigneten Schaltungen durch Kondensatoren ersetzt werden.

Aufgabe 5.6

a) $g(t) = s(t) + s(t) * \delta(t-T)$

$$= s(t) * \underbrace{[\delta(t) + \delta(t-T)]}_{= h(t)}$$

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$$

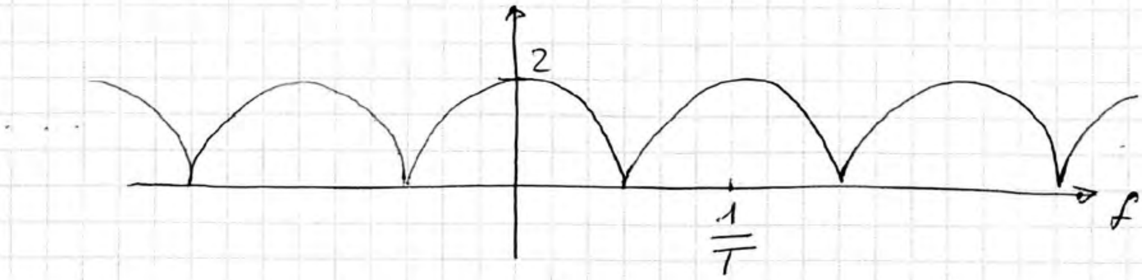
$$H(f) = 1 + e^{-j2\pi f T} = \underbrace{1 + \cos(2\pi f T)}_{= \mathrm{Re}\, H(f)} + j \underbrace{\sin(-2\pi f T)}_{\mathrm{Im}\, H(f)}$$

$$= e^{-j\pi f T} \cdot \left[e^{j\pi f T} + e^{-j\pi f T} \right]$$

$$= \underbrace{e^{-j\pi f T}}_{\text{„Phase"}} \cdot \underbrace{2 \cdot \cos(\pi f T)}_{\text{„Amplitude"}}$$

⚠ Vorzeichen vom cos !

$$|H(f)| = 2 \cdot |\cos(\pi f T)|$$



$$\varphi(f) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(f)\}}{\mathrm{Re}\{H(f)\}}\right) \pm k(f)\cdot\pi$$

$$\text{mit} \quad k(f) = \begin{cases} 0 & , \mathrm{Re}\{H(f)\} \geq 0 \\ 1 & , \mathrm{Re}\{H(f)\} < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(f) = \arctan\left(\frac{2\cos(\pi f T)\ (-\sin(\pi f T))}{2\cos(\pi f T)\ \cos(\pi f T)}\right)$$

$$= \arctan(-\tan(\pi f T)) \quad ; \quad k(f) = 0, \text{ da } 1$$

$\mathrm{Re}\{H(f)\} \geq 0$ für alle f

$$= -\pi f T$$

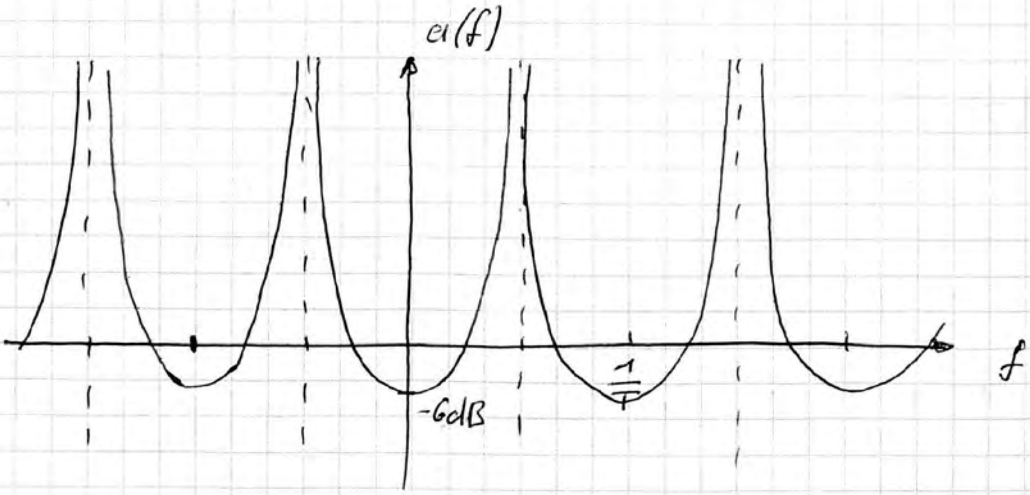
b)

$$a(f) = -20\lg(|H(f)|)$$

$$= -20\lg(2) + (-20\lg|\cos(\pi f T)|) \quad [dB]$$

$$= -6\,dB - 20\lg|\cos(\pi f T)|$$

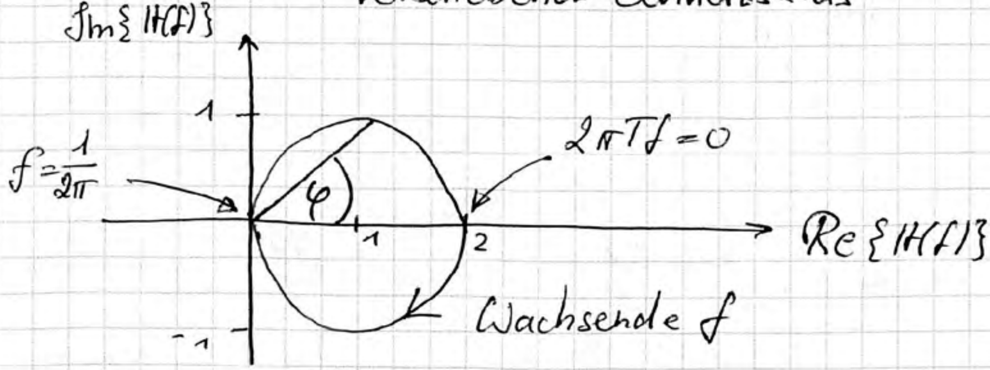
ketov@gmx.de



Phase:

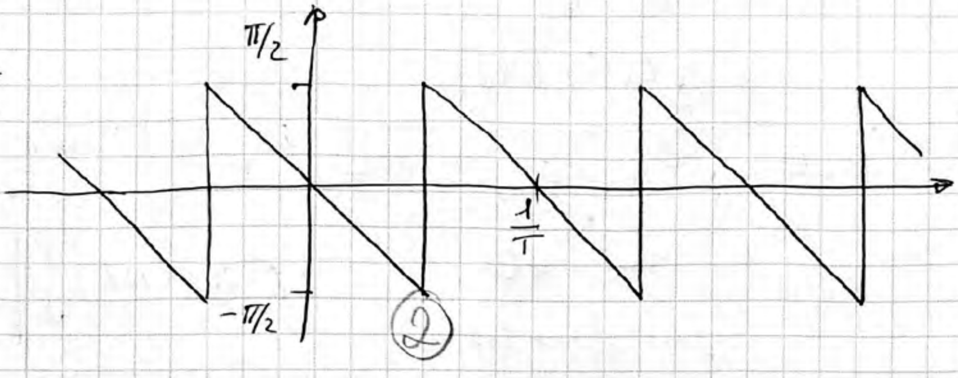
$$H(f) = 1 + \cos(2\pi f T) - j \sin(2\pi f T)$$

"verschobener Einheitskreis"



Realteil der Funktion: immer positiv, aber Imaginärteil wechselt das Vorzeichen.

Vgl. mit $|H(f)|$



Aufgabe 5.7

07.07.10

ET IV

$$h(t) = \frac{1}{\beta LC} e^{-at} \sin(\beta t)\, \varepsilon(t) \qquad (2.38) \text{ Übung}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad ; \; a = \frac{R}{2L} \, ;$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{\beta LC} \int_{\cancel{-\infty}\; 0}^{\infty} e^{-at} \sin\beta t \; \cancel{\varepsilon(t)}\, e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{\beta LC} \int_{0}^{\infty} \sin(\beta t)\, e^{-t(a+j2\pi f)} dt$$

Formelsammlung:

$$\int e^{at} \sin bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} \left[a \sin(bt) - b\cos(bt) \right]$$

$$H(f) = \frac{1}{\beta LC} \underbrace{\frac{e^{-t(a+j2\pi f)}}{\beta^2 + (-a-j2\pi f)^2}}_{\xrightarrow{\text{für } t \to \infty} 0} \underbrace{\left[(-a-j2\pi f) \sin(\beta t) - \beta \cos(\beta t) \right] \Bigg|_0^{\infty}}_{\text{unbestimmt für } t\to\infty, \text{ aber auf jeden Fall kleiner als Konstante } 0}$$

unbestimmt für $t \to \infty$, aber auf jeden Fall kleiner als Konstante 0

$$= -\frac{1}{\beta LC} \frac{1}{\beta^2 + (a + j2\pi f)^2} (-\beta)$$

$$= \frac{1}{LC} \frac{1}{\beta^2 + (a + j2\pi f)^2} \quad ; \text{mit } \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

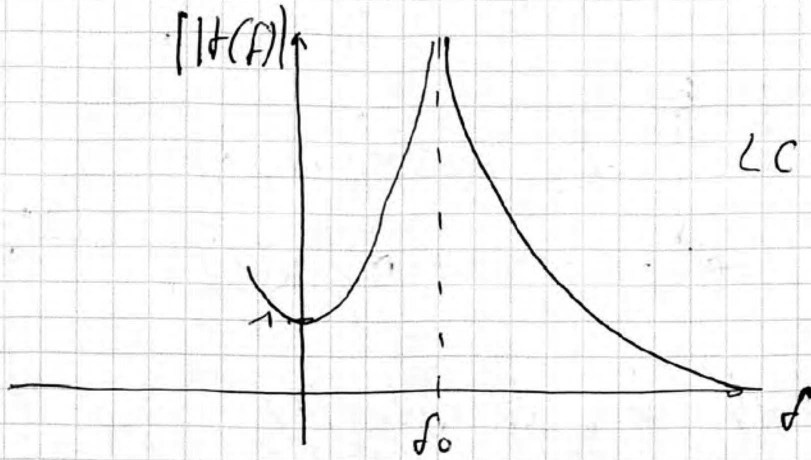
$$a = \frac{R}{2L}$$

$$H(f) = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{LC} \cancel{- \left(\frac{R}{2L}\right)^2} + \cancel{\left(\frac{R}{2L}\right)^2} + \cancel{2}\frac{R}{\cancel{2}L} j2\pi f - (2\pi f)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + j2\pi f RC - (2\pi f)^2 LC}$$

b) $R = 0 \Rightarrow H(f) = \frac{1}{1 - (2\pi f)^2 LC}$

Polstelle bei $f_0 = \pm \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ „Oszillatorfrequen."



$LC = 1$

Aufgabe 5.8

$$h_T(t) = j\,\mathrm{rect}(t) \quad ; \quad f_0 = 10$$

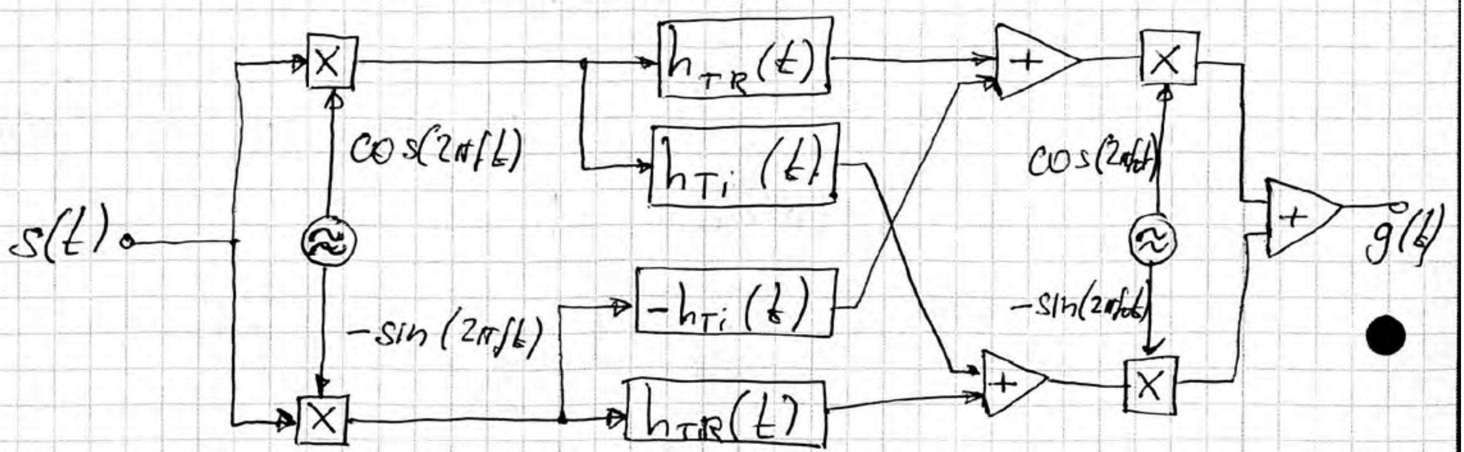
$$h(t) = \mathrm{Re}\left\{ h_T(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ j\,\mathrm{rect}(t) \left[\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t) \right] \right\}$$

$$= -\,\mathrm{rect}(t)\, \sin(2\pi f_0 t)$$

⚠ Hier: $H_T(f)$ nicht bandbegrenzt (si-Fkt), aber stark abgeklungen → Näherung

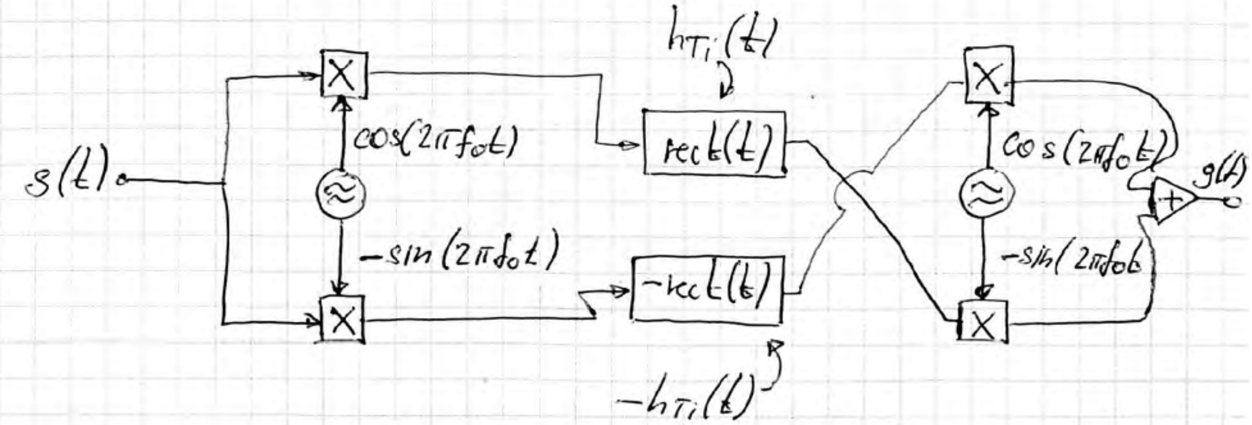
$$H(f) = \mathrm{si}(\pi f) * \left[-\frac{j}{2}\delta(f+f_0) + \frac{j}{2}\delta(f-f_0) \right]$$



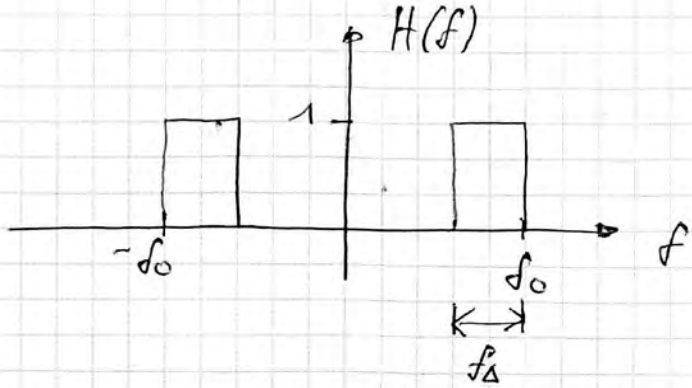
Quadraturschaltung

$$h_T(t) = h_{TR}(t) + j\,h_{Ti}(t)$$

Hier: $h_T(t) = j\,\mathrm{rect}(t)$



Aufgabe 5.9



$$H_T(f) = 2\ \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * \delta\left(f + \frac{f_\Delta}{2}\right)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$h_T(t) = 2 f_\Delta\, \mathrm{si}(\pi f_\Delta t)\ e^{-j2\pi \frac{f_\Delta}{2} t}$$

$$= 2 f_\Delta\, \mathrm{si}(\pi f_\Delta t)\left[\cos(\pi f_\Delta t) - j\sin(\pi f_\Delta t)\right]$$

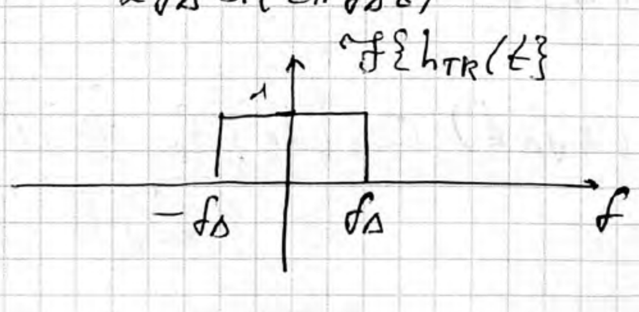
$$h_{TR}(t) = 2 f_\Delta\, \mathrm{si}(\pi f_\Delta t)\cos(\pi f_\Delta t)$$

$$= 2 f_\Delta \cdot \frac{\sin(\pi f_\Delta t)\cos(\pi f_\Delta t)}{\pi f_\Delta t}$$

$$h_{TR}(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(2\pi f_\Delta t) = 2 f_\Delta\, \mathrm{si}(2\pi f_\Delta t)$$

$$\left|\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)\right.$$

$$= 2 f_\Delta\, \mathrm{si}(2\pi f_\Delta t)$$

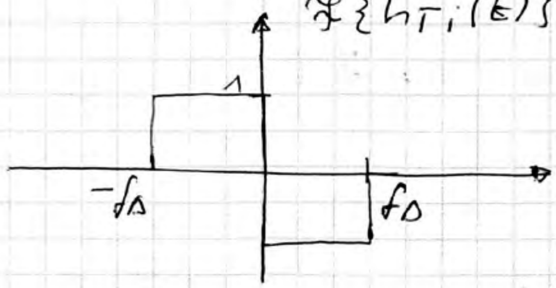


ketov@gmx.de

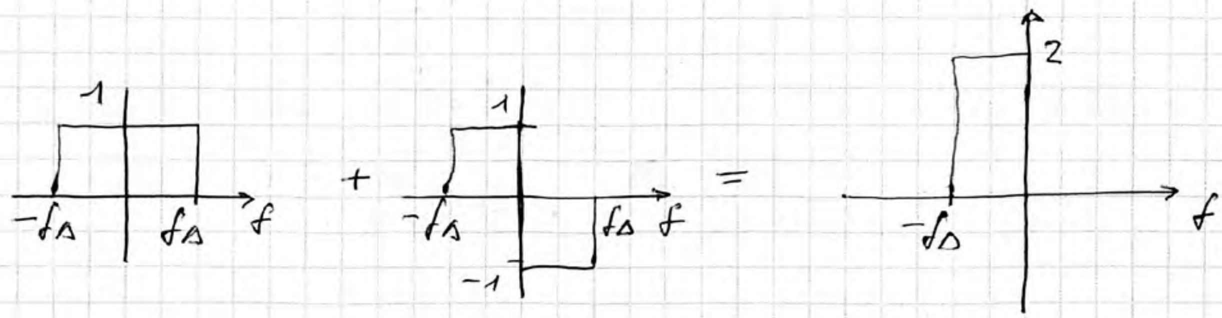
$$h_{Ti}(t) = -2f_\Delta \, si(\pi f_\Delta t) \sin(\pi f_\Delta t)$$

$$= -2f_\Delta \frac{\sin^2(\pi f_\Delta t)}{\pi f_\Delta t}$$

$$= -\frac{1}{\pi t}\left[1-\cos(2\pi f_\Delta t)\right]$$



$\Rightarrow$



$$\mathcal{F}\{h_{TR}(t)\} = \frac{1}{2}\left[H_T(f) + H_T^*(-f)\right]$$

$$\mathcal{F}\{h_{Ti}(t)\} = \frac{1}{2}\left[H_T(f) - H_T^*(-f)\right]$$

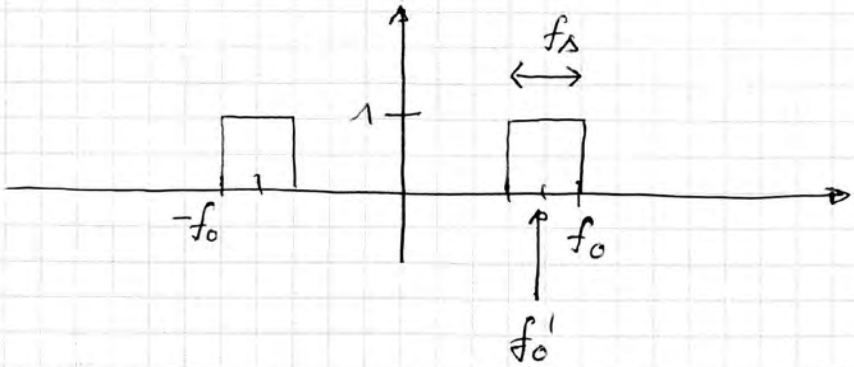
$$h(t) = \mathrm{Re}\left\{ h_T(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\Big\{ \underbrace{2f_\Delta \, si(\pi f_\Delta t) \, e^{-j2\pi f_\Delta t}}_{h_T(t)} \; e^{j2\pi f_\Delta t} \Big\}$$

$$= 2f_\Delta \, si(\pi f_\Delta t) \cdot \mathrm{Re}\left\{ e^{-j2\pi\left(f_0 - \frac{f_\Delta}{2}\right)t} \right\}$$

$$h(t) = 2f_\Delta \, si(\pi f_\Delta t) \cos\Big[2\pi \underbrace{\left(f_0 - \frac{f_\Delta}{2}\right)}_{=f_0'} t\Big]$$

ketov@gmx.de



Aufgabe 5.10

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2n}}}$$

a)
$$a(f) = -20\lg|H(f)| = -20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2n}}}\right)$$

$$= -20\lg(1) + 20\lg\left(\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2n}}\right)$$

$$= 20\lg\left(\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2n}}\right) = 10\lg\left(1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2n}\right)$$

$$a(f_g) = 10\lg\left(1+\left(\frac{f_g}{f_g}\right)^{2n}\right) = 10\lg 2$$

$$\approx 3\,dB$$

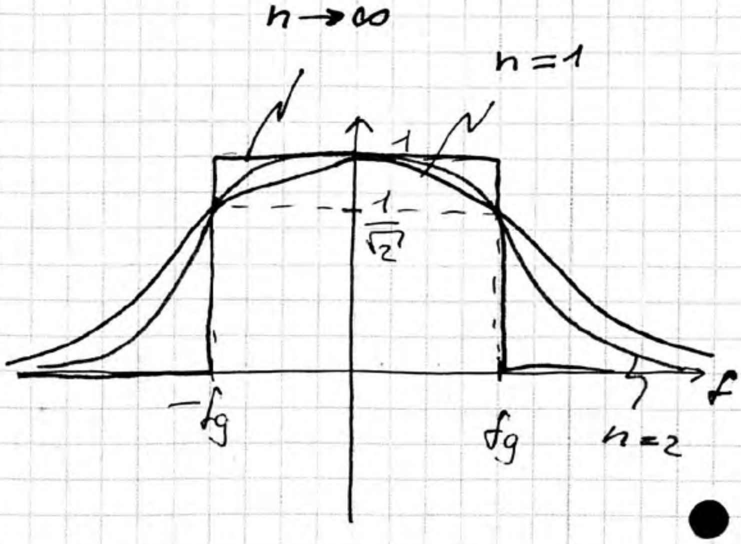
b) Grenzwertbetrachtung:

$$\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{für } f < f_g \\ 1 & \text{für } f = f_g \\ \infty & \text{für } f > f_g \end{cases}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2n}}} = \begin{cases} 1 & \text{für } f < f_g \\ 1/\sqrt{2} & \text{für } f = f_g \\ 0 & \text{für } f > f_g \end{cases}$$

$\longrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right)$, bis auf Stelle $f = f_g$

$n = 1$:



$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}$$

$n = 2$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^4}}$$

c) RC-TP: $H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f T}$ $\quad T = RC$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}}$$

Butterworth:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^{2n}}}$$

Parametervergleich:

$n = 1$

$f_g = \frac{1}{2\pi T}$

ketov@gmx.de

d) siehe a):

$$a(f) = 10\lg\underbrace{\Big(\underbrace{1+\left(\tfrac{f}{f_g}\right)^{2n}}_{\geqslant 1}\Big)}_{\geqslant 0}$$

$$a(f=0{,}8f_g) = 10\lg\left(1+(0{,}8)^{2n}\right) \overset{!}{=} 1$$

$$1+0{,}8^{2n} = 10^{1/10}$$

$$0{,}8^{2n} = 10^{1/10}-1$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{1}{2}\log_{0{,}8}\left(10^{1/10}-1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\lg\left(10^{1/10}-1\right)}{\lg(0{,}8)} \approx 3{,}0277$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{n=4}}$; da nur ganzzahlige Filtergrade erlaubt sind!

Aufgabe 6.1

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt \qquad \text{(reellwertig)}$$

$$s_1(t) = a \cdot s\left(\frac{t+t_0}{T}\right)$$

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 s^2\left(\frac{t+t_0}{T}\right) dt$$

mit $\frac{t+t_0}{T} = \eta \Rightarrow d\eta = \frac{1}{T}dt \Rightarrow dt = T d\eta$

$$E_{s_1} = a^2 T \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(\eta)\,d\eta}_{= E_s} = a^2 T E_s$$

Allgemein: $(|T| > 0)$ $\boxed{E_{s_1} = a^2 |T| E_s}$

- Amplitudenskallierung wirkt quadratisch
- Zeitskallierung wirkt linear
- Zeitverschiebung ohne Auswirkung

Merke

Übersicht zu Korrelationsfunktionen

Def.: Korrelationsfunktion: (Energiesignale)

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t)\, g(t+\tau)\, dt$$

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = s(\tau) \star g(\tau)$$ "Korrelationsprodukt"

$$\varphi_{sg}^{E}(\tau) = s^*(-\tau) * g(\tau)$$ Reihenfolge wichtig!

Autokorrelationsfunktion:

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = s^*(-\tau) * s(\tau)$$

- gerade Funktion: $\varphi_{ss}^{E}(\tau) = [\varphi_{ss}(-\tau)]^*$

ohne Verschiebung Signal sich am ähnlichsten (identisch)

- maximaler Wert bei $\tau = 0$
- $\varphi_{ss}^{E}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\, dt = E_s$

Vgl KGÜ Nr 114 und 43

- zeitbefristete Signale: doppelte Signaldauer
[$\hat{=}$ Energiesignale]

muss für $\tau \to \infty$ $\varphi_{gg}(\tau \to \infty) \overset{!}{=} 0$

- $m_s^2 = \lim_{\tau \to \infty} \varphi_{ss}(\tau)$

ketov@gmx.de

Aufgabe 6.2

a) $\varphi_{fg}^{E}(\tau) = f(\tau) \star g(\tau) = f^*(-\tau) * g(\tau)$

$g(\tau) = f(\tau) * h_2(\tau)$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{fg}^{E}(\tau)} = [f^*(-\tau) * f(\tau)] * h_2(\tau)$$

$$\boxed{= \varphi_{ff}^{E}(\tau) * h_2(\tau)} \quad ① \quad \Big\} \text{ Wichtig!}$$

Winer - Lee - Beziehung: bzgl. Eingangs-/Ausgangsverhalten eines Systems:

$$\boxed{\varphi_{ff}^{E}(\tau) = \varphi_{ss}^{E}(\tau) * \varphi_{mm}^{E}(\tau)} \quad ②$$

(2) in (1)

$$\boxed{\varphi_{fg}^{E}(\tau) = \varphi_{ss}^{E}(\tau) * \varphi_{mm}^{E}(\tau) * h_2(\tau)}$$

Wie ähnlich eine Funktion zur anderen

21.07.10
Übung
Vertretung

Aufgabe 6.3

b) $\varphi_{ss}^{E}(\tau) \mathrel{\hat{=}} \Lambda(t) * \Lambda(t) = \underbrace{\mathrm{rect}(t) * \ldots * \mathrm{rect}(t)}_{\#4}$

$\longrightarrow$ Lösung mit Faltungsintegral

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = \begin{cases} 0 & , |\tau| > 2 \\ \frac{(2+|\tau|)^3}{6} & , 1 \leq |\tau| \leq 2 \\ \frac{3|\tau|^3 + 12|\tau|^2 + 12|\tau| + 4}{6} & , |\tau| \leq 1 \end{cases}$$

c)
$$s(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$$
$$S(f) = e^{j\pi f}\, 2\cos(\pi f)$$

$$\varphi_{ss}^{E}(\tau) = [\delta(t) + \delta(t-1)] * [\delta(t) + \delta(t+1)]$$
$$= \delta(t-1) + 2\delta(t) + \delta(t+1)$$

$$|S(f)|^2 = \mathcal{F}\{\varphi_{ss}^{E}(\tau)\} = e^{-j2\pi f T} + 2 + e^{j2\pi f T}$$
$$= 2 + 2\cos(2\pi f T)$$

ketov@gmx.de

Aufgabe 6.4

$s(t)$ reell

$$s_g(t) = \frac{1}{2}\left[s(t) + s(-t)\right]$$

$$s_u(t) = \frac{1}{2}\left[s(t) - s(-t)\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Orthogonalität} \quad s_g(t) \perp s_u(t) \\ \Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} s_g(t) s_u(t) = 0\end{array}}$$

Formelsammlung S.14

$\Rightarrow \varphi_{s_g s_u}(0) = 0$

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (s(t) + s(-t))(s(t) - s(-t))\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (-s(t))\,s(-t)\,dt$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} s(-t)s(t)\,dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} -s^2(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}E_s - \frac{1}{4}E_s = 0 \quad \Rightarrow \text{Orthogonal}$$

Aufgabe 6.5

a)

$$s_1(t) = A\cos(2\pi t)$$

$$\varphi_{ss}^L(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^*(t)\,s(t+\tau)\,dt$$

Formelsammlung { Bei periodischen Signalen.

$$\varphi_{ss}^L(\tau) = \frac{1}{kT}\int_{-k\frac{T}{2}}^{k\frac{T}{2}} s^*(t)\,s(t+\tau)\,dt$$

T: Periodendauer

k: Anzahl Perioden

$k \in \mathbb{N}_{>0}$

$\left[\int_0^{kT} \dots dt\right.$ geht auch

$\llcorner$ periodisch (Leistungssignal)

$T = 1$

$$\varphi_{s_1s_1}^L(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} A\cos(2\pi t)\,A\cos(2\pi(t+\tau))\,dt$$

Formelsammlung $\left\{ \cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2} \right.$

$$= \frac{A^2}{2}\int_{-1}^{1}\Big[\cos(-2\pi\tau) + \underbrace{\cos(4\pi t + 2\pi\tau)}_{=0\text{, da über Periode integriert wird}}\Big]\,dt\,\frac{1}{2}$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\tau)$$

$s_1(t) = A \sin(2\pi t)$ $\qquad$ s_1, s_2 periodisch mit T

$s_2(t) = s_1(t - t_1)$ $\qquad$; t_1 beliebig

$$\varphi^L_{s_2 s_2}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s_2^*(t)\, s_2(t+\tau)\, dt$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s_1^*(t - t_1)\, s_1(t - t_1 + \tau)\, dt$$

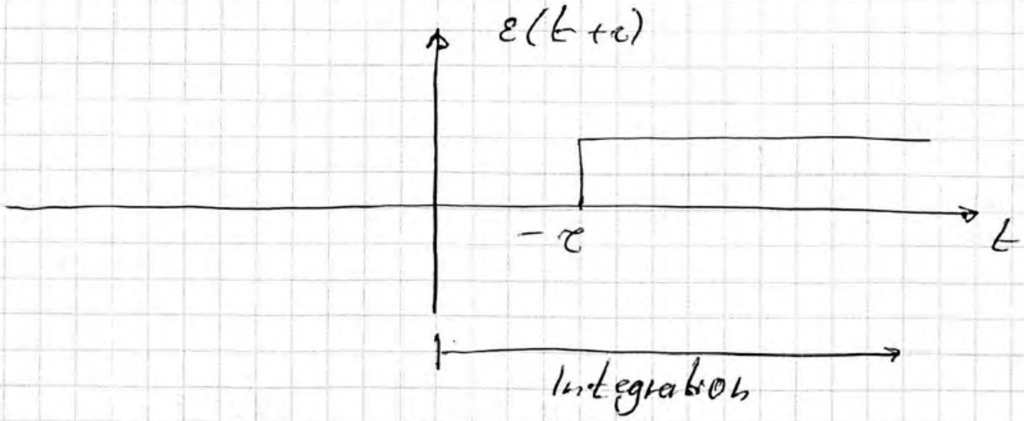
$$= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \underbrace{s_1^*(t - t_1)\, s_1(t - t_1 + T)}_{\text{periodisch mit } T}\, dt$$

$$= \varphi^L_{s_1 s_1}(\tau)$$

$s_3(t) = \varepsilon(t)$ $\qquad$ (Bsp. für Leistungssignal, welches nicht periodisch)

$$\varphi^L_{s_3 s_3}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \underbrace{\varepsilon^*(t)}_{=\varepsilon(t)}\, \varepsilon(t+\tau)\, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_{0}^{T} \varepsilon(t+\tau)\, dt$$



für $\tau \geq 0$:

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \underbrace{\int_0^T \varepsilon(t)\,dt}_{=T} = \frac{1}{2}$$

für $\tau < 0$:

$$\varphi^L_{s_3 s_3}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{T+\tau}{2T} = \frac{1}{2} \quad \left(= \lim_{T\to\infty} \int_{-\tau}^{T} \frac{1}{2T}\,dt \right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^L_{s_3 s_3} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\varphi^L_{s_1 s_2}(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} A\cdot\cos(2\pi t)\,A\sin(2\pi t + 2\pi\tau)\,dt$$

falls ganz. Perioden
= Grenzwertsatz

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\beta-\alpha) + \sin(\beta+\alpha)\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sin(2\pi\tau)}_{\hat{=}\,\mathrm{const}} + \underbrace{\sin(4\pi t + 2\pi\tau)}_{\hat{=}\,0}\Big]\,dt$$

$$= \frac{A^2}{2} \sin(2\pi\tau)$$

Aufgabe 6.6

Energiesignale $s(t), g(t)$

$$u(t) = s(t) \pm g(t)$$

$$\varphi_{uu}^E(\tau) = u^*(-\tau) \ast u(\tau)$$

$$= \left[s^*(-\tau) \pm g^*(-\tau)\right] \ast \left[s(\tau) \pm g(\tau)\right]$$

$$= s^*(-\tau) \ast s(\tau) \pm s^*(-\tau) \ast g(\tau) \pm g^*(-\tau) \ast s(\tau)$$
$$+ g^*(-\tau) \ast g(\tau)$$

$$= \varphi_{ss}^E(\tau) \pm \underbrace{\varphi_{sg}^E(\tau) \pm \varphi_{gs}^E(\tau)}_{\text{Kreuzterme}} + \varphi_{gg}^E(\tau)$$

$$\boxed{E_s = \varphi_{ss}^E(0)}$$

$$\left.\boxed{E_u = E_s + E_g \pm \left[\varphi_{sg}^E(0) + \varphi_{gs}^E(0)\right]}\right\} \text{Merke}$$

$$\left.\boxed{\varphi_{gs}^E(\tau) = \left[\varphi_{sg}^E(-\tau)\right]^*}\right\} \text{FS}$$

$$\Rightarrow \quad E_h = E_s + E_g \underbrace{\pm 2\mathrm{Re}\{\varphi_{sg}^E(0)\}}_{\overset{!}{=}0}$$

$$\mathrm{Re}\{\varphi_{sg}^E(0)\} \overset{!}{=} 0$$

Bei <u>reellen</u> Signalen:

$$\varphi_{sg}^E(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s,g \quad \underline{\text{orthogonal}}$$

z.B. $s(t) = g(t) \Rightarrow u(t) = 2s(t)$

$$E_u = 4E_s$$

$$\varphi_{sg}^E(0) = E_s$$

$$s(t) = -g(t) \Rightarrow u(t) = 0$$

$$E_h = 0$$

$$\varphi_{sg}^E(0) = -E_s$$

Hinweis: Kapitel 6 $\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$ Aufg. 4
NT-Klausuren

Kapitel 7 $\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$ Aufg 5
NT-Klausuren
(Nachrichtentechnik)

Zur Klausurvorbereitung !
(Alte Klausuren, Website)

Aufgabe 7.1

$$^k s(t) = A_k$$

A_k const
$k \in \mathbb{N}$

$A_k \in \{0V, 2V\}$ W'keit gleich $\hat{=} \frac{1}{2}$

a)

$$\mathcal{E}\{s^n(t_1)\} = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \left[{}^k s(t_1) \right]^n$$

M Musterfunktionen beobachten.

Wir erwarten:

- $\frac{M}{2}$ Musterfunktionen mit $A_k = 0V$
- $\frac{M}{2}$ Musterfunktionen mit $A_k = 2V$

$$\mathcal{E}\{s(t_1)\} = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M} \left[\underbrace{\sum_{k=\emptyset}^{M/2} 0V}_{=0V} + \underbrace{\sum_{k=1}^{M/2} 2V}_{=MV} \right]$$

$$= 1V$$

ketov@gmx.de

$$\mathcal{E}\{s^n(t_1)\} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{M/2}[0V]^n}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{M/2}[2V]^n}_{=\frac{M}{2}(2V)^n}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}(2V)^n$$

<u>Stationarität:</u>

$$\mathcal{E}\{F(s(t_1))\} = \mathcal{E}\{F(s(t_1+t_0))\}$$

t_0 beliebig

$$\mathcal{E}\{F(s(t_1), s(t_2))\} = \mathcal{E}\{F(s(t_1+t_0), s(t_2+t_0))\}$$

<u>usw.</u>

Alle möglichen <u>Scharmittelwerte</u> sind invariant gegenüber einer relativen Verschiebung t_0.

$$\mathcal{E}\{s(0)\} = \mathcal{E}\{s(t_1)\} = 1V \quad ; F(x) = x$$

$$\mathcal{E}\{s^2(0)\} = \mathcal{E}\{s^2(t_1)\} = 2V^2 \quad ; F(x) = x^2$$

$\Rightarrow$ Signal ist stationär

$$\mathcal{E}\{s(0)\, s(t_1)\} = \mathcal{E}\{s^2(0)\} = 2V^2$$

$\forall t_1 \in \mathbb{R}$

b) Zeitmittelwert

$$\overline{{}^k s^n(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left[{}^k s(t)\right]^n dt$$

$$= \begin{cases} 0V & \text{mit W'keit } \frac{1}{2} \\ (2V)^n & \text{mit W'keit } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zeitmittelwert abhängig von k!

<u>Ergodizität:</u> Zeitmittelwert sind gleich Scharmittelwerten

$$\mathcal{E}\{F(s(t_1))\} = \overline{F({}^k s(t))}$$

$t_1, k,$ beliebig

usw. für alle F höherer Ordnung

① $\overline{{}^k s^n(t)}$ hängt von K ab!

② $\mathcal{E}\{s^n(t)\}$ ist weder $\equiv 0$ noch $\equiv (2V)^n$

$\Rightarrow$ Prozess nichtergodisch

ketov@gmx.de

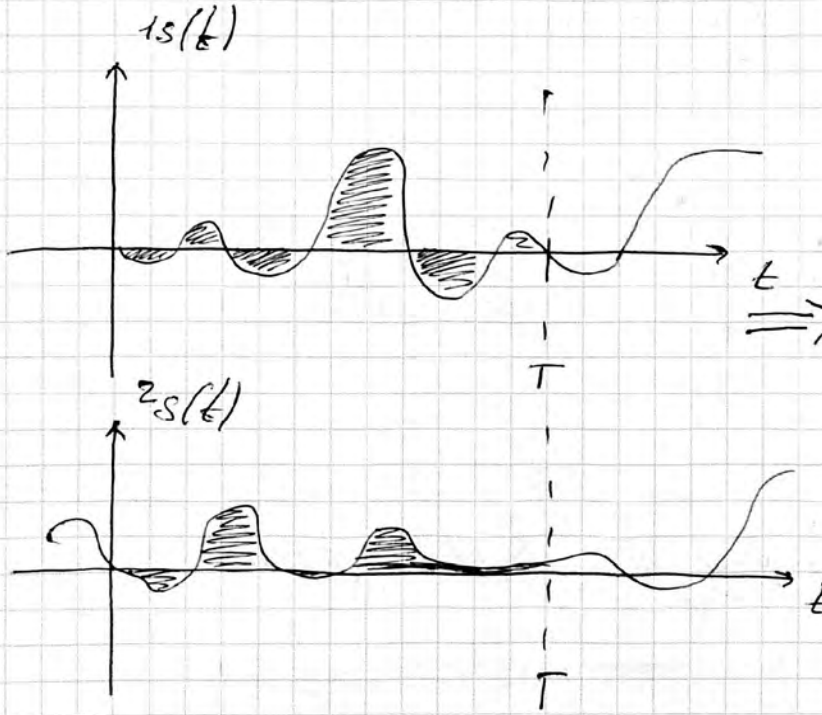
Folien

Aufgabe 7.2

a) Ergodisch: Aussagen über

- Zeitmittelwerte $T \to \infty$
- Scharmittelwerte $M \to \infty$

Über Kurzzeitmittelwert können wir nichts sagen!



$\Longrightarrow$ $k_m(\tau)$ ist Zufallsgröße!

b) $$\mathcal{E}\{m(T)\} = \mathcal{E}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\mathcal{E}\{s(t)\}}_{= m_s}\,dt = m_s \underset{\text{ergodisch}}{=} \overline{{}^{k}s(t)}$$

Vgl. Statistik

Aufgabe 7.3

22.07.10
Übung
Vertretung

$s_i(t)$ Leistungssignale

m_{s_i} $\sigma^2_{s_i}$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} s_i(t)$$

Könnte ja nicht periodisch sein

$$L_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left[\sum_{i=1}^{N} s_i(t)\right]^2 dt$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} s_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} s_i s_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s_i(t)\, s_j(t)\, dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \varphi^{L}_{s_i s_j}(0)$$

gegeben

$\mu_{s_i s_j}(0) = 0$ für $i \neq j$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mu^{L}_{s_i s_j}(0) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} m_{s_i} m_{s_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\mu^{L}_{s_i s_i}(0)}_{\sigma_i^2} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} m_{s_i} m_{s_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} m_{s_i}\right)^2 = L_f$$

1.A. $\neq \sum_{i=1}^{N} L_{s_i} = \sum_{i=1}^{N} \left[\sigma_i^2 + m_{s_i}^2\right]$

Leistungen nicht einfach addierbar!

Merke!

Wenn die Signale $\boxed{\text{orthogonal}}$ sind:

$\Longleftrightarrow \quad \varphi_{s_i s_j}(0) = 0 \quad$ für $i \neq j$

$$\boxed{L_f = \sum_{i=1}^{N} L_{s_i}}$$

oder Energien einfach summierbar!

$$\mu_{sg}(\tau) = E\left\{\left[s(t) - m_s\right] \cdot \left[g(t+\tau) - m_g\right]\right\} \qquad (7.25)$$

Aufgabe 7.4

Wiener - Lee - Beziehung

Nur Autokorr. Fkt ↑ FS

$$\boxed{\varphi_{gg}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{hh}^{E}(\tau)}$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$\phi_{gg}(f) = \phi_{ss}(f) \cdot |H(f)|^2$$

a)

Hier:

$$\boxed{\varphi_{ss}(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau)}$$

$\phi_{ss}(f) = N_0 \qquad$ (weißes Rauschen)

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}}$$

mit $T = RC$

$$\phi_{gg}(f) = \frac{N_0}{1 + (2\pi f T)^2}$$

$$L_g = \varphi_{gg}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{gg}(f)\, df$$

$$= N_0 \cdot \frac{1}{(2\pi T)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi T}\right)^2 + f^2}\, df$$

$$\left[\int \frac{1}{\alpha^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right.$$

$$= \frac{N_0}{(2\pi T)^2}\, 2\pi T \arctan(f \cdot 2\pi T) \Big|_{f=-\infty}^{\infty}$$

$$= N_0 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] \frac{1}{2\pi T} = \frac{N_0}{2T}$$

ketov@gmx.de

b)

$$\varphi_{gg}(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau) * \varphi_{hh}^E(\tau)$$

$$= N_0 \cdot \varphi_{hh}^E(\tau)$$

$$(6.23) \qquad = N_0 \cdot \frac{1}{2T} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T}\right)$$

$$L_g = \varphi_{gg}(0) = \frac{N_0}{2T}$$

Aufgabe 7.5.

genau anschauen

(wichtige Aufgabe)

a)

$$\varphi_{gf}(\tau) = \mathcal{E}\{g(t) \cdot f(t+\tau)\} = \mathcal{E}\{g(t) \cdot f(t+\tau)\}$$

$$= \mathcal{E}\{(h_1(t) * s(t))(h_2(t) * s(t)) * \delta(t+\tau)\}$$

$$= \mathcal{E}\{(h_1(t) * s(t))(h_2(t) * s(t+\tau))\}$$

$$= \mathcal{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h_1(m) s(t-m)\, dm \int_{-\infty}^{\infty} h_2(n) s(t+\tau-n)\, dn\right\}$$

$m, n \in \mathbb{R}$

linearer Operator

$$= \mathcal{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(m) h_2(n) \underbrace{s(t-m) s(t+\tau-n)}\, dm\, dn\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(m) h_2(n) \underbrace{\mathcal{E}\{s(t-m) s(t-n+\tau)\}}_{\text{Stationarität von } S}\, dm\, dn$$

$+m \qquad +m$

$$= \mathcal{E}\{s(t) \cdot s(t-n+m+\tau)\}$$

$$= \varphi_{ss}(\tau - n + m)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(m)\, h_2(n)\, \varphi_{ss}(\tau - n + m)\, dm\, dn$$

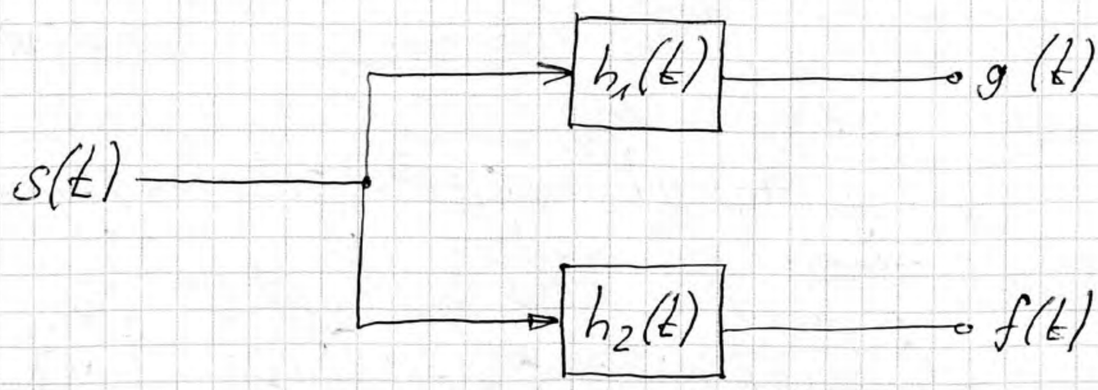
Subst. $x = n - m$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(m)\, h_2(m + x)\, \varphi_{ss}(\tau - x)\, dm\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}(\tau - x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h_1(m)\, h_2(m + x)\, dm}_{\varphi^E_{h_1 h_2}(x)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ss}(\tau - x)\, \varphi_{h_1 h_2}^{E}(x)\, dx$$

$$= \varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{h_1 h_2}^{E}(\tau) = \varphi_{gf}(\tau)$$



① Sei: $h_1(t) = \delta(t) \Rightarrow s(t) = g(t)$

Einsetzen:

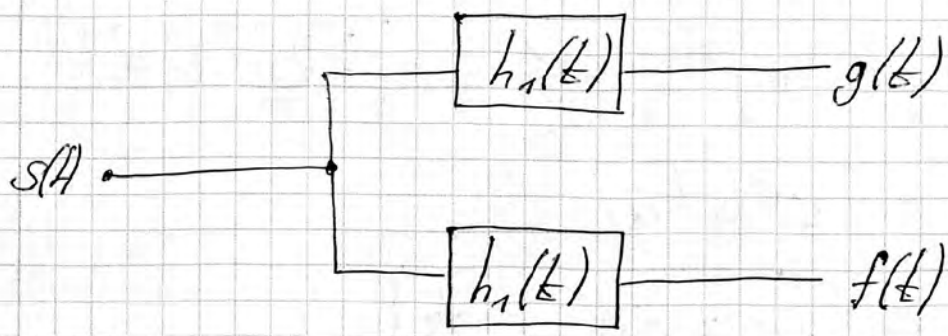
$$\varphi_{sf}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi^{E}_{\delta h_2}(\tau)$$

$$= \varphi_{ss}(\tau) * \underbrace{\delta^*(-\tau)}_{=\delta(\tau)} * h_2(\tau)$$

$$= \varphi_{ss}(\tau) * h_2(\tau)$$

<u>Kreuzkorrelation</u> zwischen Eingang und Ausgang <u>eines LTI-Systems</u>

② Sei: $h_1(t) = h_2(t)$



$h_2(t) = h_1(t)$

$f(t) = g(t)$

Einsetzen:

$$\varphi_{gg}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi^{E}_{h_1 h_2}(\tau)$$

Wiener-Lee-Beziehung

(Spezialfall: Herleitung im Skript K.7.2.2)

b) $h_1(t) \perp h_2(t) \iff \varphi^{E}_{h_1 h_2}(0) = 0$

$$\boxed{\varphi_{ss}(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau)}$$ Weißes Rauschen } const. Spektrum

$$\varphi_{gf}(\tau) = N_0 \cdot \varphi_{h_1 h_2}{}^{E}(\tau)$$

$$\Longrightarrow \varphi_{gf}(0) = 0$$

c) $\mu_{gf}(\tau) = \varphi_{gf} - m_g m_f \overset{!}{=} 0 \quad \forall \tau$

$$\Rightarrow \varphi_{gf}(\tau) = m_g m_f = \text{const}$$

Wie groß ist m_g?

$$s(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow g(t)$$

$$m_g = \mathcal{E}\{s(t) * h(t)\}$$

$$= \mathcal{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, s(t-\tau)\, d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \underbrace{\mathcal{E}\{s(t-\tau)\}}_{= m_s} d\tau$$

$$= m_s \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, d\tau = m_s \cdot H(0)$$

Also: $\varphi_{gf}(\tau) \overset{!}{=} m_g m_f = m_s^2 H_1(0) H_2(0)$

$$\varphi_{gf}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) * \varphi^E_{h_1 h_2}(\tau)$$

$$= \varphi_{ss}(\tau) * h_1^*(-\tau) * h_2(\tau) = \text{const.}$$

für beliebige $\varphi_{ss}(\tau)$

$$\updownarrow$$

$$\phi_{gf}(f) = \phi_{ss}(f)\, H_1^*(f)\, H_2(f)$$

$$= m_s^2 H_1(0) H_2(0) \delta(f)$$ für beliebige $\phi_{ss}(f)$

$\Rightarrow H_1^*(f) H_2(f) = 0$ für $f \neq 0$

z.B. $H_1(f)$ TP

$H_2(f)$ BP

Dann sind Ausgangssignale unkorreliert!

(Schau bei Orthogonalität)

Aufgabe 7.6

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow g(t)$$

$u(t)$ weißes Rauschen mit Leistungsdichte N_0

Spezialfall Nr. 1 (aus 7.5) : $\varphi_{ug}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) * h(\tau)$
$= \varphi_{ug}(\tau)$

$$\varphi_{ug}(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau) * h(\tau) = N_0 h(\tau)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$\Phi_{ug}(f) = \Phi_{nn}(f)\; H(f) = N_0 \cdot H(f)$$

$$\Rightarrow \quad h(\tau) = \frac{\varphi_{ug}(\tau)}{N_0}$$

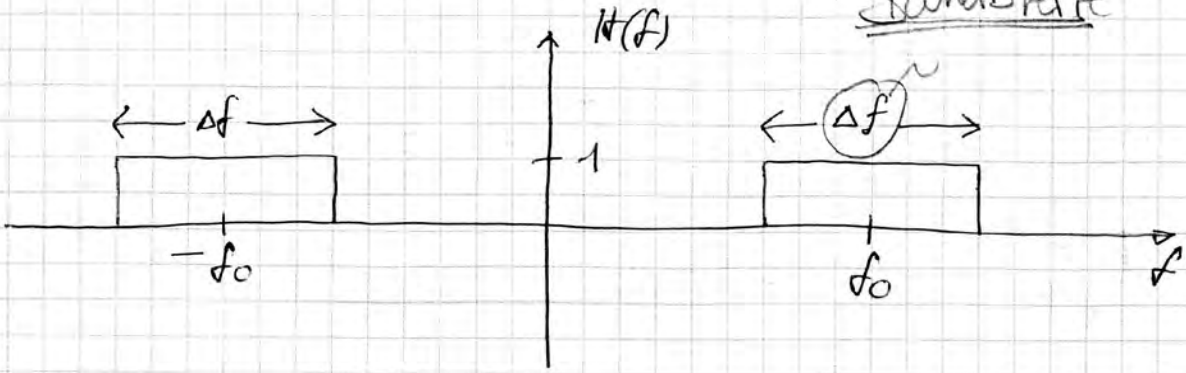
Messung der Korrelation zwischen Eingang und Ausgang.

$\longrightarrow$ Impulsantwort

Aufgabe 7.7

- $h(\tau)$ ein idealer Bandpass

Bandbreite



$\Delta f = f_\Delta$

- Spezialfall Nr. 2: Wiener – Lee – Beziehung
(Aufg. 7.5)

$$\varphi_{gg}(\tau) = N_0 \cdot \varphi_{hh}^{E}(\tau)$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}$$

FS

da Amplitude $= 1$

$$\boxed{\Phi_{gg}(f) = N_0 \cdot |H(f)|} \; 2 \quad = N_0 \cdot H(f)$$

$$= N_0 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\Delta}\right) * \left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

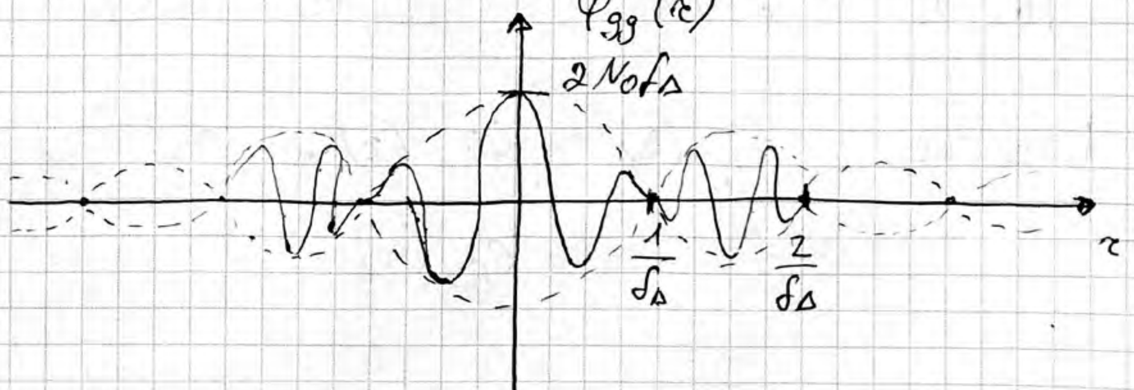
- $$= N_0 \left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{f_\Delta}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{f_\Delta}\right)\right]$$

Leistungsdichtespektrum

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}^{-1} \qquad \text{Tabelle, Ähnlichkeitssatz}$$

c) $$\varphi_{gg}(\tau) = N_0 \cdot f_\Delta \cdot si(\pi f_\Delta \tau) \cdot 2 \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)$$

Energiedichtespektrum



b) $$m_g = m_s \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = \underbrace{m_s}_{=0} \cdot \underbrace{H(0)}_{=0}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Weißes Rauschen: OHNE Mittelwert}}$

┌ falls $s(t)$ Mittelwert hätte:

$$\varphi_{ss}(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau) + m_s^2$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$\left.\phi_{ss}(f) = N_0 + m_s^2 \cdot \delta(f)\right\}$$ Kein weises Rauschen mehr

└

$$L_g = \varphi_{gg}(0) = 2 \cdot N_0 \cdot f_\Delta$$

$$\sigma_g^2 = L_g - m_g^2 = 2 N_0 f_\Delta$$

d) Spezialfall Nr. 1 (aus 7.5) : $\varphi_{ng}(\tau) = \varphi_{nn}(\tau) * h(\tau)$

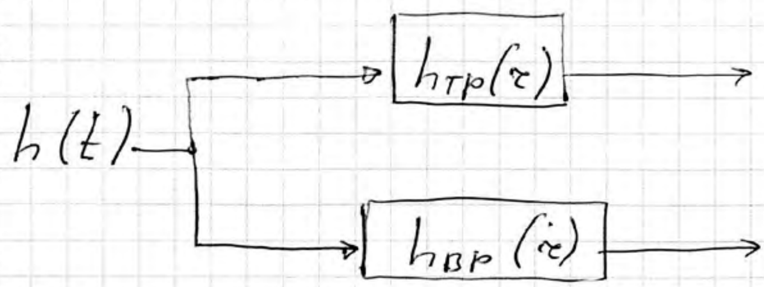
$$|H(f)|^2 = H(f) \Rightarrow \varphi_{hh}^E(\tau) = h(\tau)$$

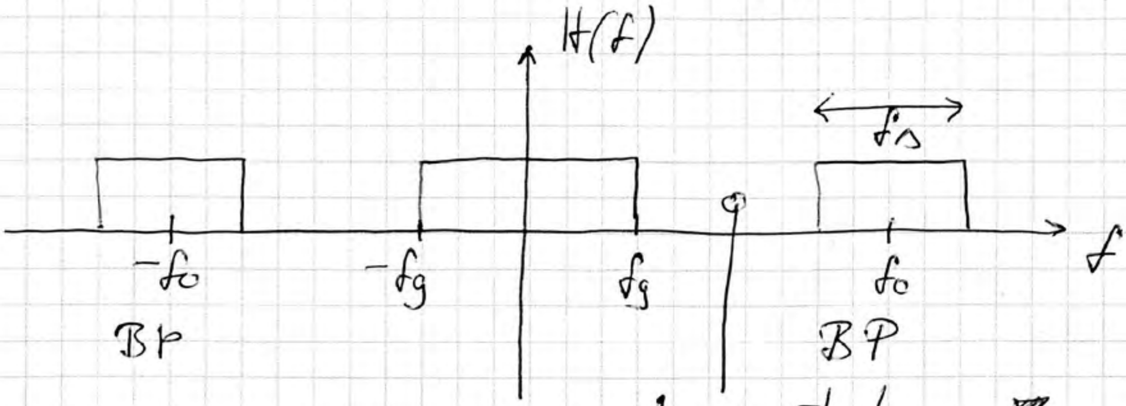
Vergleiche: $\varphi_{ng}(\tau) = \varphi_{nn}(\tau) * \varphi_{hh}^E(\tau)$

$$= \varphi_{gg}(\tau)$$

ketov@gmx.de

e)





keine Überlappung!

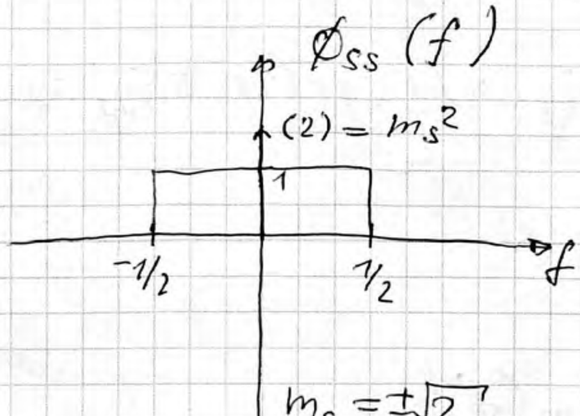
aus 7.5c)

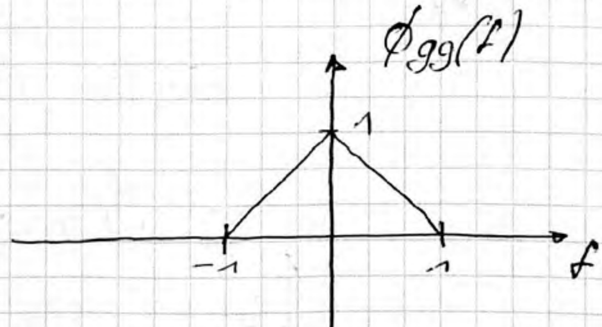
$$\Longrightarrow \quad \varphi_{BP,TP}(\tau) = \underbrace{m_h^2}_{=0} \cdot H_{BP}(0)\, H_{TP}(0)$$

$$= 0$$

Ausgänge von BP und TP sind unkorreliert

Aufgabe 7.8





$m_s = \pm\sqrt{2}$

Def.

$m_g = 0$

a) $m_s = \pm\sqrt{2}$; $m_g = 0$

(kein δ)

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f)\,df$$

$$L_s = \underset{\text{rect}}{1} + \underset{\delta}{2} = 3 \quad ; \quad L_g = 1$$

$$\sigma_s^2 = L_s - m_s^2 = 1 \quad ; \quad \sigma_g^2 = 1$$

b) $f(t) = s(t) + g(t)$

sind unkorreliert: $\mu_{sg}(\tau) = 0$ (laut Aufgabe)

$$\Rightarrow \varphi_{sg}(\tau) = \mu_{sg}(\tau) + m_s \underbrace{m_g}_{=0} = 0$$

$$\varphi_{ff}(\tau) = \mathcal{E}\{f(\tau) f(t+\tau)\}$$

$$= \varphi_{ss}(\tau) + \underbrace{\varphi_{sg}(\tau) + \varphi_{gs}(\tau)}_{=0} + \varphi_{gg}(\tau)$$

$$= \varphi_{ss}(\tau) + \varphi_{gg}(\tau)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$\phi_{ff}(f) = \phi_{ss}(f) + \phi_{gg}(f)$$

ketov@gmx.de

c)

$$\mathcal{E}\{p(t)\} = \mathcal{E}\{s(t)g(t)\} = \varphi_{sg}(0) = 0$$

<u>Definition</u>: Mittelwert

$$\boxed{m_s^2 = \lim_{\tau \to \infty} \varphi_{ss}(\tau)}$$

20.04.10

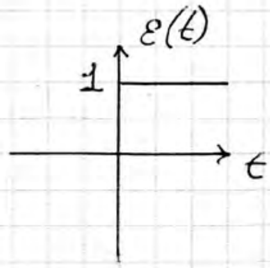
Kleingruppe

①

KGÜ ist unvöllständig und teilweise fehlerhaft!

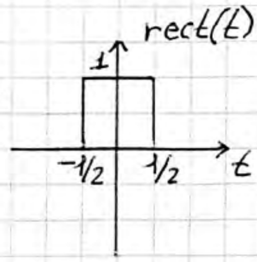
Sprungfunktion $\varepsilon(t)$ [1.3]

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



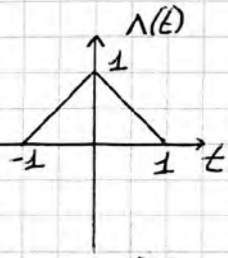
Rechteckimpuls $\mathrm{rect}(t)$ [1.4]

$$\mathrm{rect} = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



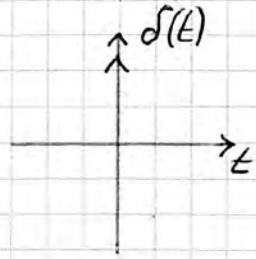
Dreieckimpuls $\Lambda(t)$ [1.5]

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$



Diracimpuls $\delta(t)$

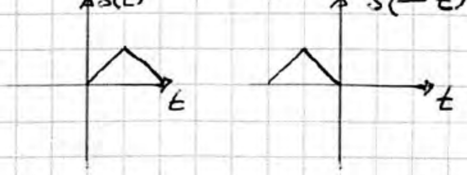
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



---

① Spiegelung (1)

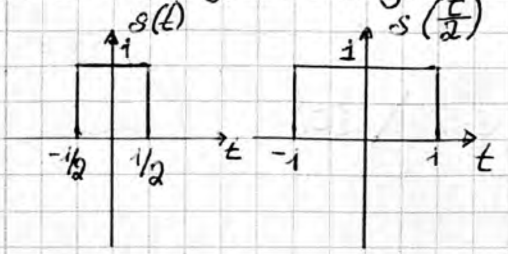
$s(-t) \mathrel{\widehat{=}}$ Spiegelung von $s(t)$ (an y-Achse)



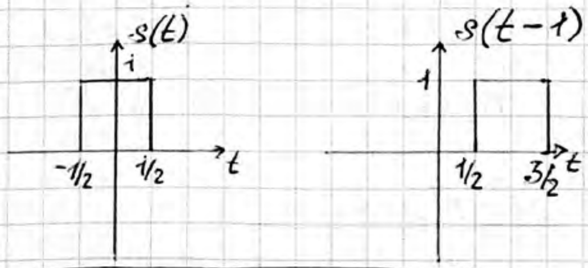
Strecken $T > 1$

Stauchen $T < 1$

② Stauchung/Streckung (2)



③ Verschiebung (3)



$\boxed{\text{Reihenfolge beachten!}}$

1) S Spiegeln
2) S Strecken
3) V Verschieben

$$\boxed{s\left((-)\frac{t - t_0}{T}\right)}$$

ketov@gmx.de

Siebeigenschaft des Dirac-Impuls

$$\delta(t)\, s(t) = \delta(t) \cdot s(0)$$
$$\delta(t-t_0)\,\varepsilon(t) = \delta(t-t_0)\,\varepsilon(t_0)$$

Transformatio

$g(t) = Tr\{s(t)\}$

Zeitinvarianz

$$Tr\{s(t-t_0)\} = g(t-t_0)$$

Linearität

$$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(t)\right\} = \sum_i a_i g_i(t)$$

$\Rightarrow$ LTI-System

Faltung

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Rechenregeln

$$s(t) * \delta(t) = s(t)$$
$$s(t) * \delta(t-t_0) = s(t-t_0)$$
$$s(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau)\, d\tau$$
$$s(t) * \delta'(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$
$$h_\varepsilon(t) = h(t) * \varepsilon(t)$$

Siebeigenschaft

[Vgl. $s(t)\delta(t) = s(0)\delta(t)$
$s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t)$]

Si-Funktion

$$si(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Nullstellen bei $x = k\pi \;;\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$si(\pi f) \overset{\mathcal{F}}{\updownarrow} rect(t)$

Aufgabe 1.1

Sei $s(t) = 0$ für $t < 3$.

a)

$$s(1-t) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-t < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t > -2}}$$

b)

$$s(1-t) + s(2-t) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-t < 3 \wedge 2-t < 3$$
$$\Leftrightarrow \quad t > -2 \wedge t > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t > -1}}$$

c)

$$s(1-t) \cdot s(2-t) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad s(1-t) = 0 \vee s(2-t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad t > -2 \vee t > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t > -2}}$$

d)

$$s(3t) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3t < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t < 1}} \quad \text{„Stauchung"}$$

e)

$$s\left(\frac{t}{3}\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t}{3} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t < 9}} \quad \text{„Streckung"}$$

Aufgabe 1.2

a)

$$s_1(t) = -2 \overset{!}{=} A e^{-at} \cos(\omega t + \phi)$$
$$= 2 \cdot e^{-0 \cdot t} \cos(0 \cdot t + \pi) = 2\cos(\pi)$$

b)

$$s_2(t) = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} \cos(3t + 2\pi) =$$
$$Re\{s_2(t)\} = \sqrt{2} \cos(3t) \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}_{= \frac{1}{\sqrt{2}}} = \cos(3t)$$
$$= 1 \cdot e^{-0t} \cos(3t + 0)$$

Nützlich!

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$
$$\cos(x \pm \pi) = -\cos x \qquad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

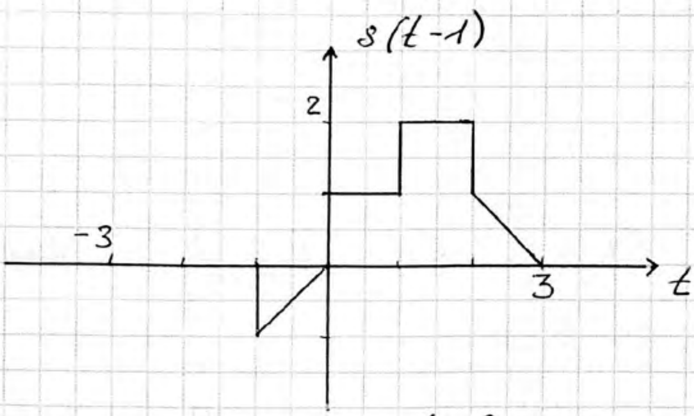
c) $$s_3(t) = e^{-t}\sin(3t+\pi) = 1\cdot e^{-1\cdot t}\cos(3t+\tfrac{\pi}{2})$$
$$= e^{-t}\cos(3t+\tfrac{\pi}{2})$$

d) $$s_4(t) = j\, e^{(-2+j100)t} = e^{j\frac{\pi}{2}}\, e^{-2t}\, e^{j100t} = e^{-2t+j(100t+\frac{\pi}{2})}$$

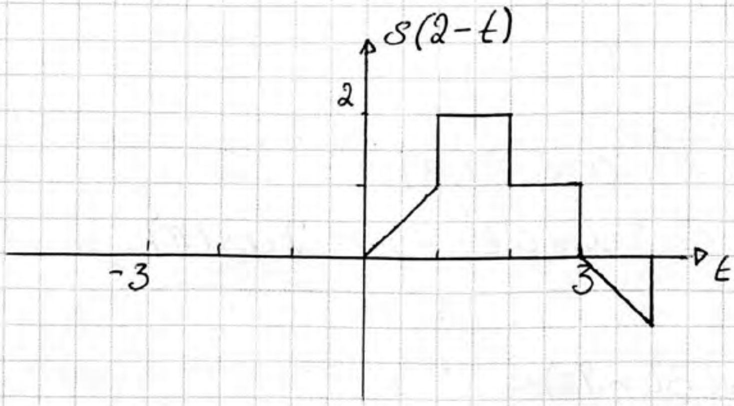
$$\mathrm{Re}\{s_4(t)\} = \cos(100t+\tfrac{\pi}{2})\cdot e^{-2t} = 1\cdot e^{-2t}\cos(\cancel{\omega}\,100t+\tfrac{\pi}{2})$$

Aufgabe 1.3

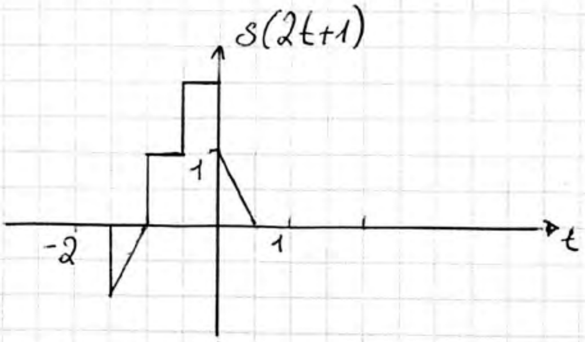
a) $s(t-1) = s\left(\frac{\cancel{t}-1}{1}\right)$ Nur Verschiebung



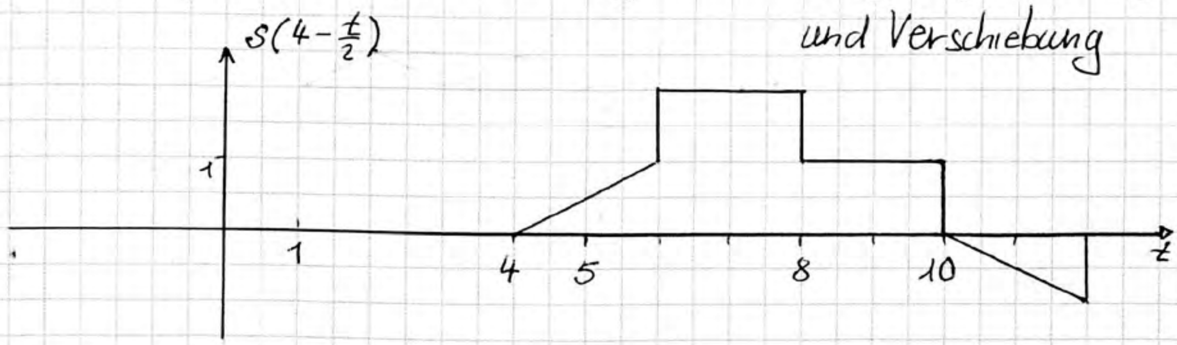
b) $s(2-t) = s\left(-\frac{t-2}{1}\right)$ Spiegelung und Verschiebung



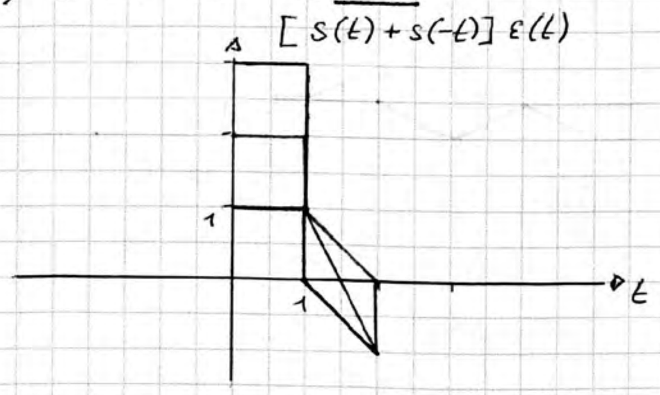
c) $s(2t+1) = s\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$ Stauchung und Verschiebung



d) $s\left(4-\frac{t}{2}\right) = s\left(\frac{8-t}{2}\right) = s\left(-\frac{t-8}{2}\right)$ Spiegelung, Streckung und Verschiebung



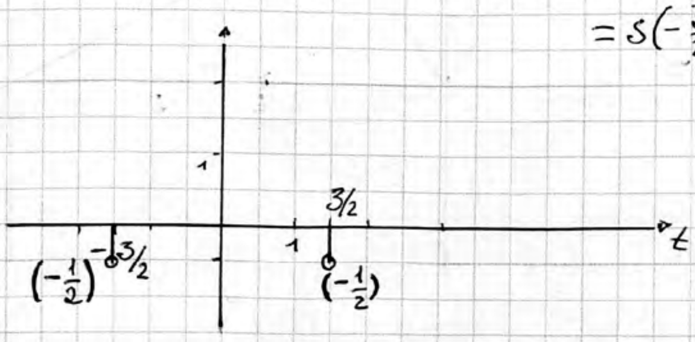
e) $\underline{[s(t)} + \underline{s(-t)]}\ \underline{\underline{\varepsilon(t)}}$



Vgl. mit Faltung!

f) $s(t)\left[\delta\left(t+\frac{3}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\right] = s(t)\delta\left(t+\frac{3}{2}\right) - s(t)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$

$= s\left(-\frac{3}{2}\right)\delta\left(t+\frac{3}{2}\right) - s\left(\frac{3}{2}\right)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$



„herausfiltern"

Aufgabe 1.4 (Hausaufgabe)

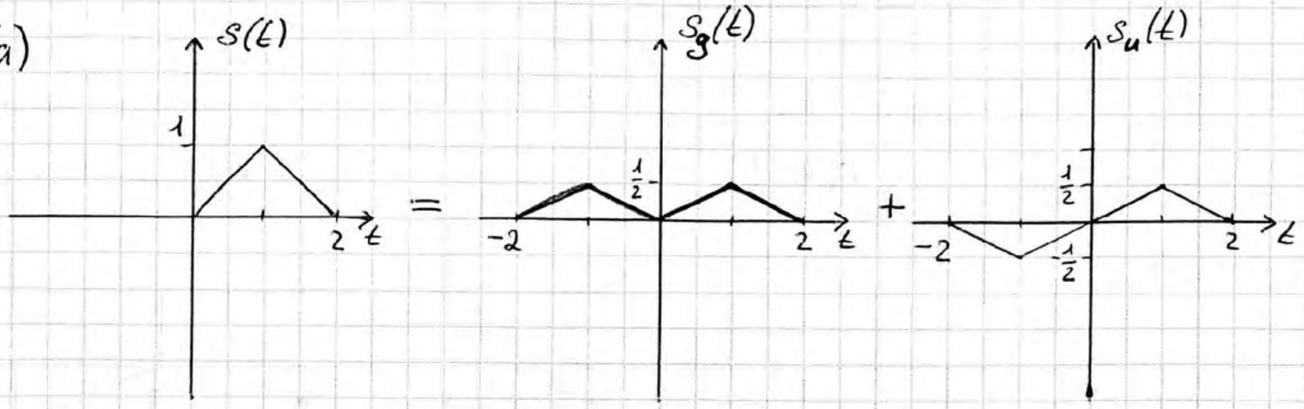
06.05.10
Kleingruppe
2

Jede Funktion eindeutig zerlegbar:

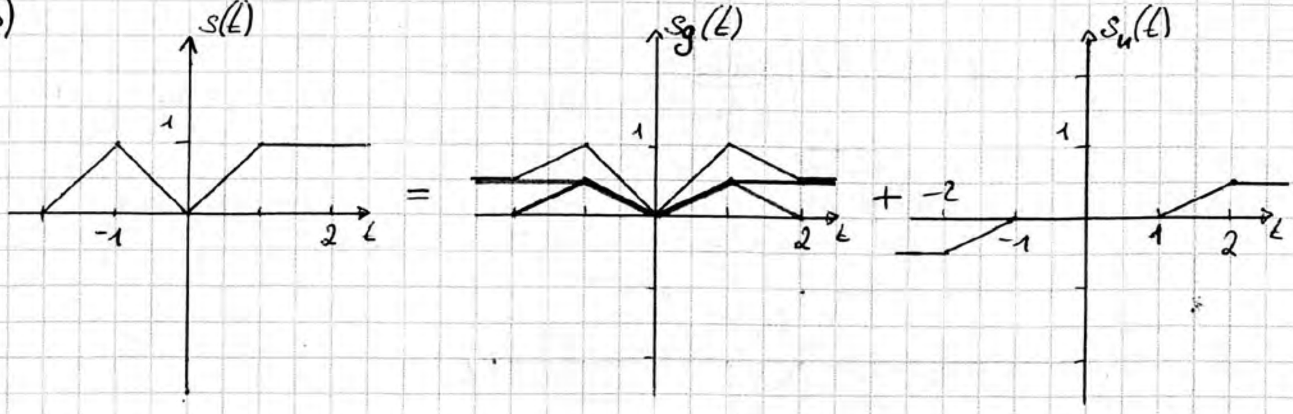
$$s(t) = s_g(t) + s_u(t)$$

- gerade Komponente $\quad s_g(t) = \dfrac{s(t) + s^*(-t)}{2} = s_g^*(-t)$
- ungerade Komponente $\quad s_u(t) = \dfrac{s(t) - s^*(-t)}{2} = -s_u^*(-t)$

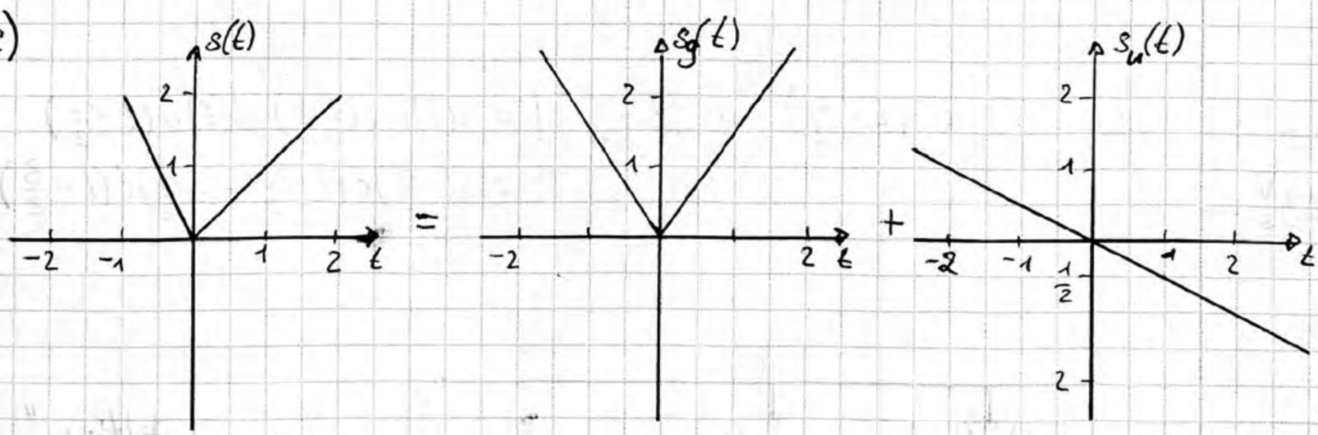
(a)



(b)



(c)



Aufgabe 1.5 (Hausaufgabe)

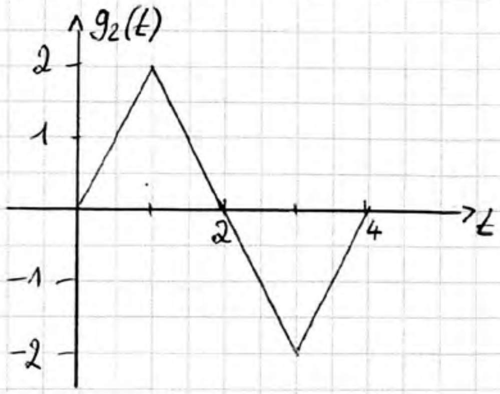
Es gilt: $g_1(t) = s_1(t) * h(t)$ LTI-System

sodaß

$$g_2(t) = s_2(t) * h(t) \qquad ; s_2(t) = s_1(t) - s_1(t-2)$$

$$= (s_1(t) - s_1(t-2)) * h(t)$$

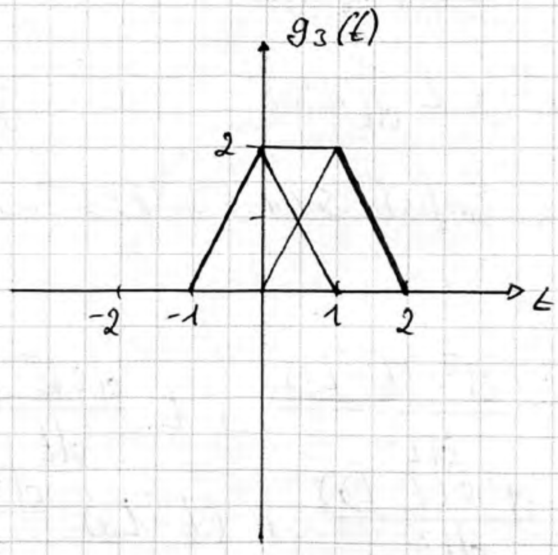
$$= s_1(t) * h(t) - s_1(t-2) * h(t) \overset{LTI}{=} g_1(t) - g_1(t-2)$$



$$g_3(t) = s_3(t) * h(t) \qquad ; s_3(t) = s_1(t) + s_1(t+1)$$

$$= (s_1(t) + s_1(t+1)) * h(t)$$

$$= s_1(t) * h(t) + s_2(t+1) * h(t) \overset{LTI}{=} \underline{g_1(t)} + \underline{g_1(t+1)}$$



„lineare Interpolation"

Aufgabe 1.6

Es gilt, $\delta(t) = \lim\limits_{T_0 \to 0} \frac{1}{T_0} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$ (S. 11 Skript)

sodaß

$$\delta(2t) = \lim_{T_0 \to 0} \frac{1}{T_0} \operatorname{rect}\left(\frac{2t}{T_0}\right) = \frac{1}{2} \lim_{T_0 \to 0} \frac{1}{\frac{T_0}{2}} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right)$$

Subst. $T = \frac{T_0}{2}$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{2T \to 0} \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)}_{= \delta(t)}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta(2t) = \frac{1}{2} \delta(t)$$

Aufgabe 1.7

bzgl. Linearität $\quad g(t) = t^2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + t \frac{ds(t)}{dt} =$ [redacted]

$$Tr\{\underbrace{\sum_i a_i s_i(t)}_{= s(t)}\} = t^2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i a_i s_i(t)\right) + t \frac{d}{dt}\left(\sum_i a_i s_i(t)\right)$$

$$= \sum_i a_i t^2 \frac{d^2}{dt^2} s_i(t) + \sum_i t a_i \frac{d}{dt} s_i(t)$$

$$= \sum_i a_i \left[t^2 \frac{d^2}{dt^2} s_i(t) + t \frac{d}{dt} s_i(t) \right] = \sum_i a_i g_i(t)$$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{\text{linear}}}$ („Einfach Summe in Fkt "reinstecken" ")

bzgl. Zeitinvarianz

$$Tr\{s(t-t_0)\} = t^2 \frac{d^2 s(t-t_0)}{dt^2} + t \frac{ds(t-t_0)}{dt}$$

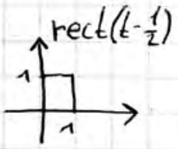
Vgl.

$$g(t-t_0) = (t-t_0)^2 \frac{d^2 s(t-t_0)}{dt^2} + (t-t_0) \frac{ds(t-t_0)}{dt}$$

$Tr\{s(t-t_0)\} \neq g(t-t_0) \Longrightarrow$ $\underline{\underline{\text{nicht zeitinvariant!}}}$

Aufgabe 1.8 (Zusatz)

$$g(t) = \underbrace{\mathrm{rect}(t-\tfrac{1}{2}) * \mathrm{rect}(t-\tfrac{1}{2})}_{=:\, f(t)} * \left[\delta(t+2) + 2\delta(t+1)\right]$$

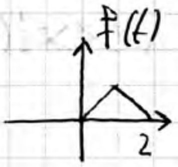


$$f(t) = \mathrm{rect}(t-\tfrac{1}{2}) * \mathrm{rect}(t-\tfrac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau-\tfrac{1}{2})\,\mathrm{rect}(t-\tau-\tfrac{1}{2})\,d\tau$$

$$= \int_0^1 \mathrm{rect}(t-\tau-\tfrac{1}{2})\,d\tau \quad = 0 \text{ für } t<0 \text{ und } t>2$$

$$= \int_0^t 1\,d\tau = t \quad \text{für } 0 \le t \le 1 \quad (\text{reinschieben})$$

$$= \int_{t-1}^1 1\,d\tau = 1-t+1 = 2-t \quad \text{für } 1 < t \le 2 \quad (\text{herausschieben})$$



$$= \Lambda(t-1) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Schneller mit Formelsammlung:} \\ f(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) * \delta(t-1) = \Lambda(t-1)\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow g(t) = \Lambda(t-1) * \left[\delta(t+2) + 2\delta(t+1)\right]$$

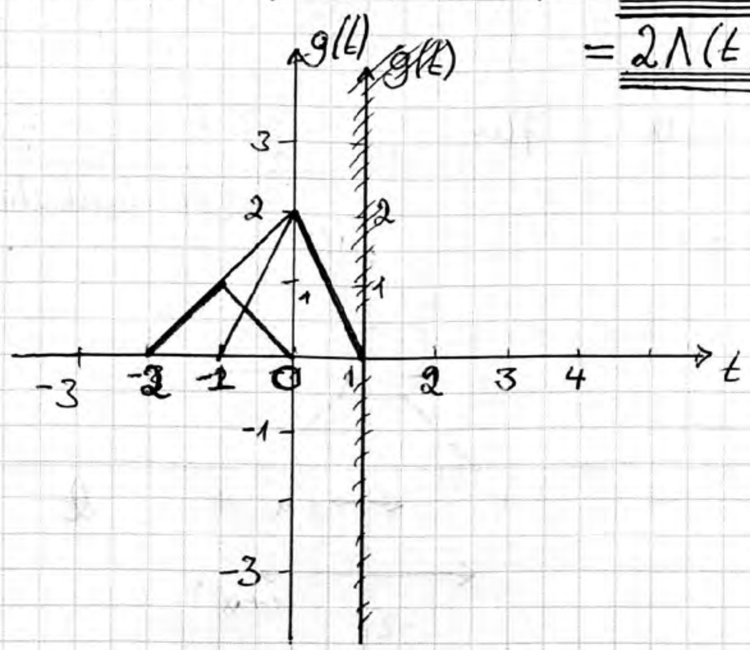
$$= \Lambda(t-1) * \delta(t+2) + \Lambda(t-1) * 2\delta(t+1)$$

$$= \Lambda(t+1) + 2\Lambda(t+0) = \Lambda(t+1) + 2\Lambda(t+0)$$

$$= \underline{\underline{2\Lambda(t) + \Lambda(t+1)}}$$

Achtung bei $\delta(t-t_0)$ bei Faltung nur t substituieren!

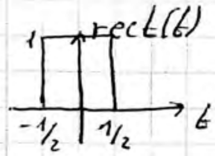
(Vgl. Multiplikation)

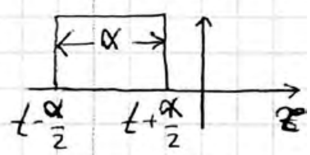


Aufgabe 1.9 (Zusatz)

$$s(t) = \mathrm{rect}(t) \;;\quad h(t) = s\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\alpha}\right) \;;\quad \alpha \in (0,1]$$

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) d\tau$$





$$= \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) d\tau = 0 \quad \text{für} \quad t + \frac{\alpha}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$\underline{t < -\frac{1}{2}(1+\alpha)}$$

$$\text{und für} \quad t - \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\underline{t > \frac{1}{2}(1+\alpha)}$$

(keine gemeinsame Fläche)

(komplett drinn)

$$= \int_{-1/2}^{t+\frac{\alpha}{2}} 1\,d\tau = t + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} = t + \frac{1}{2}(\alpha+1) \quad \text{für} \quad t - \frac{\alpha}{2} < -\frac{1}{2} \wedge t \geq -\frac{1}{2}(1+\alpha)$$

(hinein)

$$\underline{-\frac{1}{2}(1+\alpha) < t < \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}}$$

(hineinschieben)

$$= \int_{t-\frac{\alpha}{2}}^{1/2} 1\,d\tau = \frac{1}{2} - t + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\alpha) - t \quad \text{für} \quad t - \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2} \wedge t > \frac{1}{2}(1-\alpha)$$

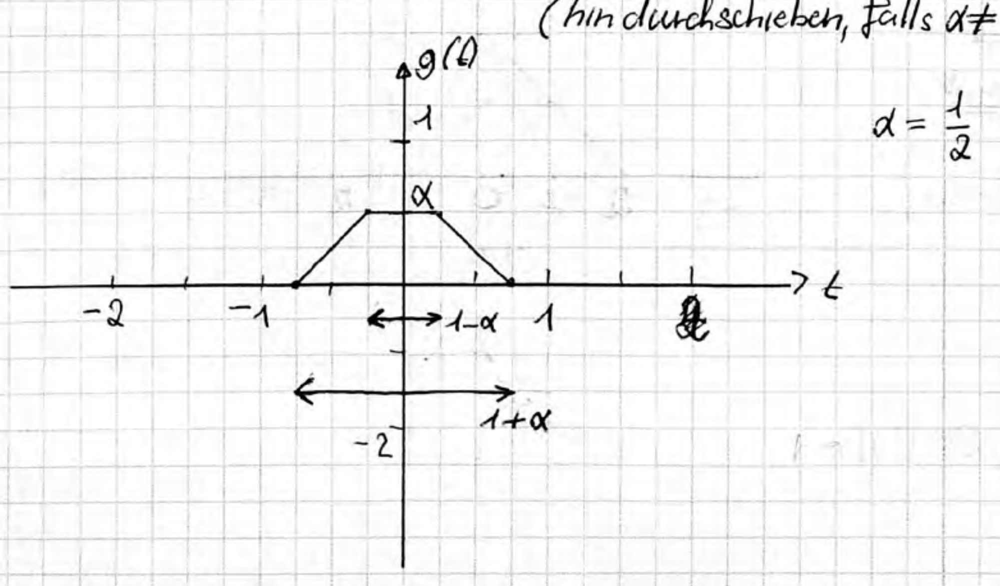
(heraus)

$$\underline{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} < t < \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}}$$

(herausschieben)

$$= \int_{t-\frac{\alpha}{2}}^{t+\frac{\alpha}{2}} 1\,d\tau = \alpha \quad \text{für} \quad \underline{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}}$$

(hindurchschieben, falls $\alpha \neq 1$)



ketov@gmx.de

Aufgabe 1.10

a) 1. Fall $\alpha = \beta$

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau} \varepsilon(\tau)\, e^{-\beta(t-\tau)} \varepsilon(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha t} e^{\alpha\tau} \varepsilon(t-\tau)\, d\tau = 0 \text{ ; für } t<0$$

$$= \int_0^t e^{-\alpha t} d\tau = e^{-\alpha t} t \text{ ; für } t \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(t) = e^{-\alpha t} \cdot t \cdot \varepsilon(t)}}$$

2. Fall $\alpha \neq \beta$

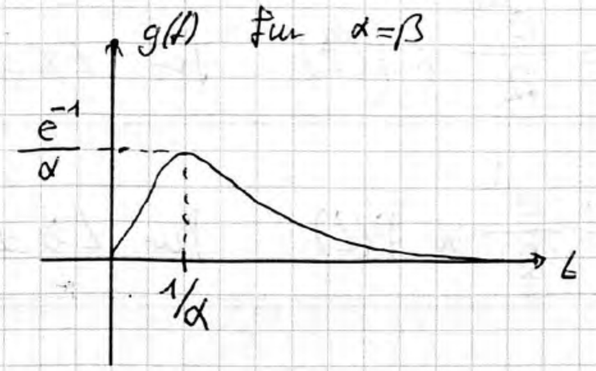
$$g(t) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-\beta t} e^{\beta\tau} \varepsilon(t-\tau)\, d\tau = 0 \text{ für } t<0$$

$$= e^{-\beta t} \int_0^t e^{-(\alpha-\beta)\tau} d\tau = e^{-\beta t} \left[\frac{-1}{\alpha-\beta} e^{\tau(\beta-\alpha)} \right]_0^t$$

$$= -e^{-\beta t} \frac{1}{\alpha-\beta} \left(e^{t(\beta-\alpha)} - e^{0} \right) = \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta} \text{ für } t \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(t) = \varepsilon(t) \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}}}$$

$$\frac{dg}{dt} = -\alpha e^{-t} t + e^{-t} \overset{!}{=} 0$$
$$= e^{-t}(1-\alpha t) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{\alpha}$$
$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = e^{-1} \frac{1}{\alpha}$$



b) (Zusatz)

$$g(t) = s(t) * h(t) = \left[\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-2) + \varepsilon(t-5)\right] * \left(e^{2t}\varepsilon(1-t)\right)$$

$$= \varepsilon(t) * e^{2t}\varepsilon(1-t) - 2\varepsilon(t-2) * e^{2t}\varepsilon(1-t) + \varepsilon(t-5) * e^{2t}\varepsilon(1-t)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{2\tau}\varepsilon(1-\tau)\,d\tau - 2\int_{-\infty}^{t-2} e^{2\tau}\varepsilon(1-\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{t-5} e^{2\tau}\varepsilon(1-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2\tau}\right]_{-\infty}^{t} - 2\,\frac{1}{2}\left[e^{2\tau}\right]_{-\infty}^{t-2} + \frac{1}{2}\left[e^{2\tau}\right]_{-\infty}^{t-5}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2(t-2)}}{1} + \frac{e^{2(t-5)}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(e^{2t} + e^{2t-10}\right) - e^{2(t-2)}}} \quad \text{für } t < 1$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(e^{2} + e^{-8}\right) - e^{-2} \quad \text{für } t \geq 1}}$$

Alternative Darstellung:

$$g(t) = s(t) * h(t) = \left(e^{2t}\varepsilon(1-t)\right) * \varepsilon(t) * \underbrace{\left[\delta(t) - 2\delta(t-2) + \delta(t-5)\right]}_{= f(t) = f(t)}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{2\tau}\varepsilon(1-\tau)\,d\tau * f(t)$$

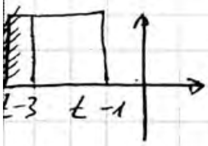
$$\underline{\underline{= \frac{e^{2t}}{2} * f(t) \quad \text{für } t < 1}}$$

$$\underline{\underline{= \frac{e^{2}}{2} * f(t) \quad \text{für } t \geq 1}}$$

nicht vergessen → $h(t) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{2}\right)$

c) (a)

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



$$= \int_0^2 \sin(\pi\tau)\, 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\tau-2}{2}\right) d\tau = 0 \quad \text{für } t<1 \text{ und } t>5$$

$$= \int_0^{t-1} 2\sin(\pi\tau)\, d\tau = 2\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi\tau)\right]_0^{t-1}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi t-\pi)-1\right) = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}\left(1+\cos(\pi t)\right) \text{ für } 1\leq t\leq 3}}$$

$$\left(\overset{ML}{=} \left(1-\cos(\pi(t-1))\right)\right)$$

$$= \int_{t-3}^{2} 2\sin(\pi\tau)\, d\tau = \frac{2}{\pi}\left[-\cos(\pi\tau)\right]_{t-3}^{2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(-\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \underbrace{\cos(t\pi-3\pi)}_{=-\cos(t\pi)}\Big) = \underline{\underline{-\frac{2}{\pi}\left(1+\cos(\pi t)\right) \text{ für } 3\leq t\leq 5}}$$

$$\left(\overset{ML}{=} \frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi(t-3))-1\right)\right)$$

(b)

$s(t) = at+b$ $\qquad h(t) = -\frac{1}{3}\delta(t-2) + \frac{4}{3}\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (a\tau+b)\left[-\frac{1}{3}\delta(t-\tau-2) + \frac{4}{3}\mathrm{rect}\left(t-\tau-\frac{1}{2}\right)\right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (a\tau+b)\left(-\frac{1}{3}\delta(t-\tau-2)\right) d\tau + \frac{4}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \left(a(t-\tau)+b\right)\mathrm{rect}\left(\tau-\frac{1}{2}\right) d\tau$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(a(t-2)\right) + \frac{4}{3}\int_{\cancel{-\infty}\,0}^{\cancel{\infty}\,1} at+b-a\tau\, d\tau + \left(-\frac{b}{3}\right)$$

$$= -\frac{at-2a-b}{3} + \frac{4}{3}\left[(at+b)\tau - \frac{a\tau^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{at}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{4}{3}\left(at+b-\frac{a}{2}\right)$$

$$= -\frac{at}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{4at}{3} + \frac{4b-1b}{3} - \frac{2a}{3} = \underline{\underline{at+b = s(t)}}$$

$h(t) = 1-t$

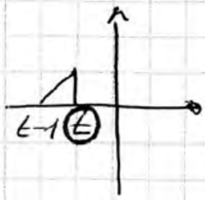
$t \in [0,1]$

(c)

$$s(t) = [\mathrm{rect}(t) - \mathrm{rect}(t-1)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n)$$

$$g(t) = \underbrace{h(t) * [\mathrm{rect}(t) - \mathrm{rect}(t-1)]} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n)$$

$$= \underbrace{h(t) * \mathrm{rect}(t)}_{\equiv g_{neu}(t)} * [\delta(t) - \delta(t-1)] \equiv f(t)$$



$$g_{neu}(t) = h(t) * \mathrm{rect}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,\mathrm{rect}(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} h(t-\tau)\,d\tau = 0 \text{ für } t < -\frac{1}{2} \text{ und } t > \frac{3}{2}$$

$$= \int_{-1/2}^{t} 1-t+\tau\,d\tau = \left[(1-t)\tau + \frac{\tau^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{t} = (1-t)t + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}(1-t) - \frac{1}{8}$$

$$= t - t^2 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \quad \text{für } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}}}$$

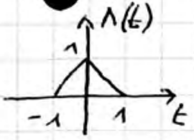
$$= \int_{t-\frac{1}{2}}^{1/2} 1-t+\tau\,d\tau = \left[(1-t)\tau + \frac{\tau^2}{2}\right]_{t-\frac{1}{2}}^{1/2} = \frac{1-t}{2} + \frac{1}{8} - (1-t)(t-1) - \frac{(t-1)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{8} + (t-1)^2 - \frac{(t-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{8} + \frac{t^2 - 2t + 1}{2}$$

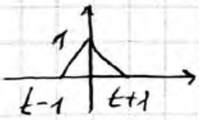
$$= 1 + \frac{1}{8} - \frac{3t}{2} + \frac{t^2}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{8} - \frac{3t}{2} + \frac{t^2}{2} \quad \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}}}$$

08.05.10 **Aufgabe 1.11** (Zusatz)

$$h(t) = \Lambda(t) \quad ; \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$



a)
$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t-\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT)\, d\tau$$



$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t-\tau)\delta(\tau-nT)\, d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t-nT)\delta(\tau-nT)\, d\tau$$

Vgl:
$\Lambda(t) * \delta(t-t_0)$
$= \Lambda(t-t_0)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-nT)\, d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-nT) =$$

$\Lambda(t) \cdot \delta(t-t_0)$
$= \Lambda(t_0)\delta(t-t_0)$

a) für $T=4$: $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-4n) = 1$

b) für $T=2$: $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-2n) = 1$

c) für $T=\frac{3}{2}$: $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-\frac{3n}{2}) = 1$

d) für $T=1$: $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-n) = 1$

für $\underline{\underline{T = \frac{1}{2}}}$ ergibt sich ein konstantes $g(t) = 2$, denn

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(t - \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$$

ketov@gmx.de

Aufgabe 1.12 (Hausaufgabe)

a) $$g(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} s(\tau-2)\,d\tau \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,s(\tau)\,d\tau$$

Subst: $\tau - 2 = y \Leftrightarrow \tau = y+2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)} s(\tau-2)\,\varepsilon(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-(t-y-2)}\varepsilon(t-y-2)}_{=h(t-y)} s(y)\,dy$$

$$\underset{\substack{\text{Subst}\\ t-y=x}}{\Longrightarrow} h(x) = e^{-(x-2)}\varepsilon(x-2) \underset{\substack{\text{Subst}\\ x=t}}{\Longrightarrow} \underline{\underline{h(t) = e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)}}$$

Alternativ:

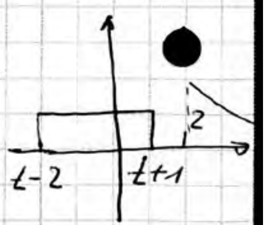
$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} s(\tau-2)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau-2)\, e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$$

$$= s(t-2) * \left(e^{-t}\varepsilon(t)\right) = s(t) * \delta(t-2) * \left(e^{-t}\varepsilon(t)\right)$$

$$= s(t) * \left(e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{h(t) = e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)}}$$

b) $$s(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-2)$$



$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau-2)}\varepsilon(\tau-2)\,s(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{2}^{\infty} e^{-(\tau-2)} s(t-\tau)\,d\tau \;\underline{\underline{=0 \quad \text{für} \quad t<1}} \quad \cancel{\text{und } t}$$

$$= \int_{2}^{t+1} e^{-(\tau-2)}\,d\tau = \left[-e^{2-\tau}\right]_{2}^{t+1} = \underline{\underline{1 - e^{-t+1} \quad \text{für } 1 \le t \le 4}}$$

(hireinschieben)

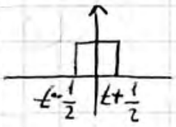
$$= \int_{t-2}^{t+1} e^{2-\tau}\,d\tau = \left[-e^{2-\tau}\right]_{t-2}^{t+1} = -e^{1-t} + e^{4-t} = \underline{\underline{e^{4-t} - e^{1-t} \quad \text{für } t>4}}$$

(hindurchschieben)

Aufgabe 1.13

$2\pi f = \omega$

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}\, \mathrm{rect}(t-\tau)\, d\tau$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\, e^{j\omega(t-\tau)}\, d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j\omega t - j\omega\tau}\, d\tau$$

$$= e^{j\omega t}\left[e^{-j\omega\tau}\left(\frac{-1}{j\omega}\right)\right]_{-1/2}^{1/2} = e^{j\omega t}\frac{1}{j\omega}\left(e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}\right)$$

$$= \frac{e^{j\omega t}\cdot 2}{\omega}\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right) = \frac{2}{\omega}e^{j\omega t}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= e^{j\omega t}\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = e^{j\omega t}\, si\left(\frac{\omega}{2}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \omega_0 = 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \quad \Rightarrow k = f_0$$

Aufgabe 1.14 (Zusatz)

$s(t) = 0$ für $|t| > T_1$

$h(t) = 0$ für $|t| > T_2$

$g(t) = s(t) * h(t) = 0$ für $|t| > T_3 = T_1 + T_2$

Vgl. neue bandbegrenzung bei Multiplikation von Signalen!

$$\Rightarrow \quad T_3 = \begin{cases} \cancel{T_1 \; ; \; \text{für } T_1 > T_2} \\ \cancel{T_2 \; ; \; \text{für } T_2 > T_1} \\ T_1 + T_2 \; ; \; \cancel{\text{für } T_1 = T_2} \end{cases}$$

Aufgabe 1.15

a) $$g(t) = s(t) * h(t) = s(t) * h(t) * \underbrace{\delta'(t) * \varepsilon(t)}_{=\delta(t)} = s'(t) * h_\varepsilon(t)$$

b) $$g(t) = s'(t) * h(t) = \delta'(t) * s(t) * h(t) = s(t) * h(t) * \delta'(t) = s(t) * h'(t)$$

c) $$g(t) = \left[\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\, d\tau\right] * h'(t) = \varepsilon(t) * s(t) * h(t) * \delta'(t) = \int_{-\infty}^{t}\left[s'(\tau) * h(\tau)\right] d\tau = s'(t) * \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

20.05.10

Kleingruppe

③

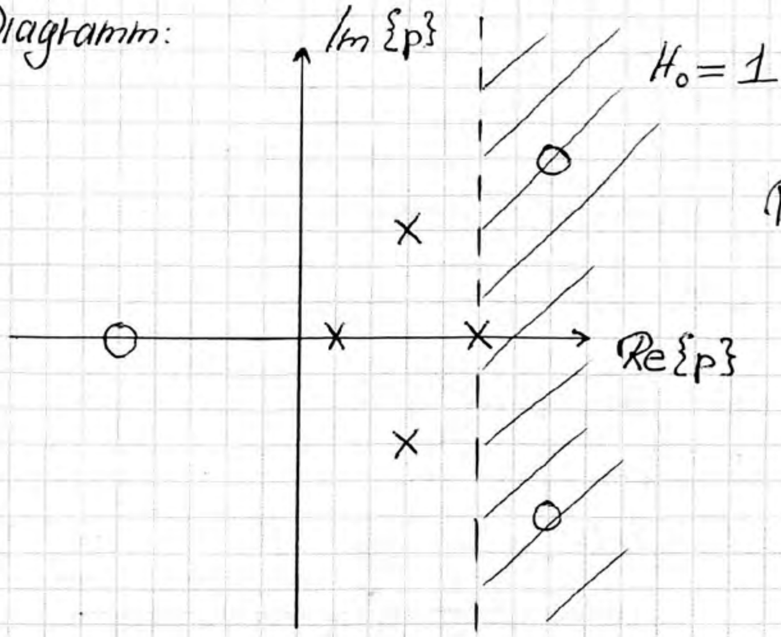
Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{\}$

$$S(p) = \mathcal{L}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-pt}\, dt$$

rechtsseitiges Signal: $s(t) = \dfrac{\varepsilon(t)}{1+t}$

linksseitiges Signal: $s(t) = e^{t} \cdot \varepsilon(-t)$

n-p-Diagramm:



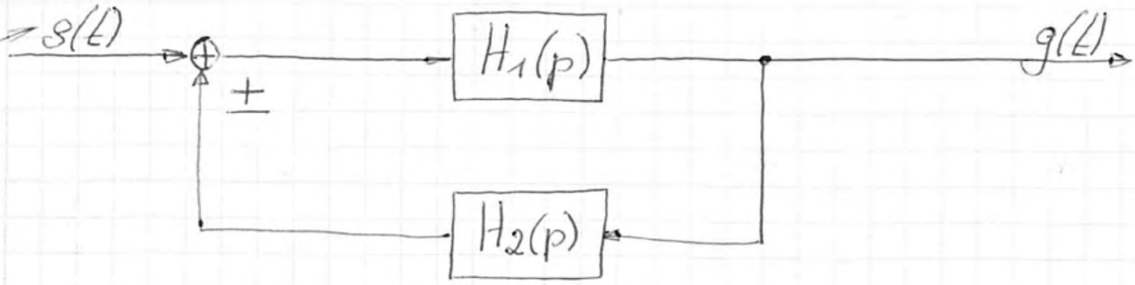
Rechtsseitiges Signal

System stabil <=> Im-Achse liegt im Konvergenzbereich

Bei zeitlich begrenzten Signalen $s(t)$ ist der Konvergenzbereich die komplette p-Ebene
(z.B. $s(t) = \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2})$)

Merke!

Übertragungsfunktion $H(p)$



nicht vergessen anzugeben $[S(p), G(p)]$

$$H(p) = \frac{G(p)}{S(p)} = \frac{H_1(p)}{1 \mp H_1(p) H_2(p)}$$

Aufgabe 2.1 (Hausaufgabe)

$$s(t) = e^{-5t}\,\varepsilon(t) + e^{-\beta t}\,\varepsilon(t)$$

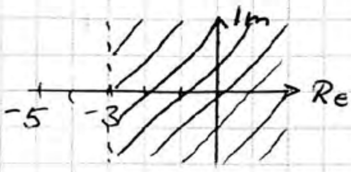
$$\Big\updownarrow \mathcal{L}$$

$$S(p) = \frac{1}{p+5} + \frac{1}{\beta + p} \quad \Big\} \text{ Tabelle!}$$

$\Rightarrow$ Polstellen bei $p_{P_1} = -5$; $p_{P_2} = -\beta$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Re}\{\beta\} > 3}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{Im}\{\beta\} \in \mathbb{R}}}$$



Aufgabe 2.2

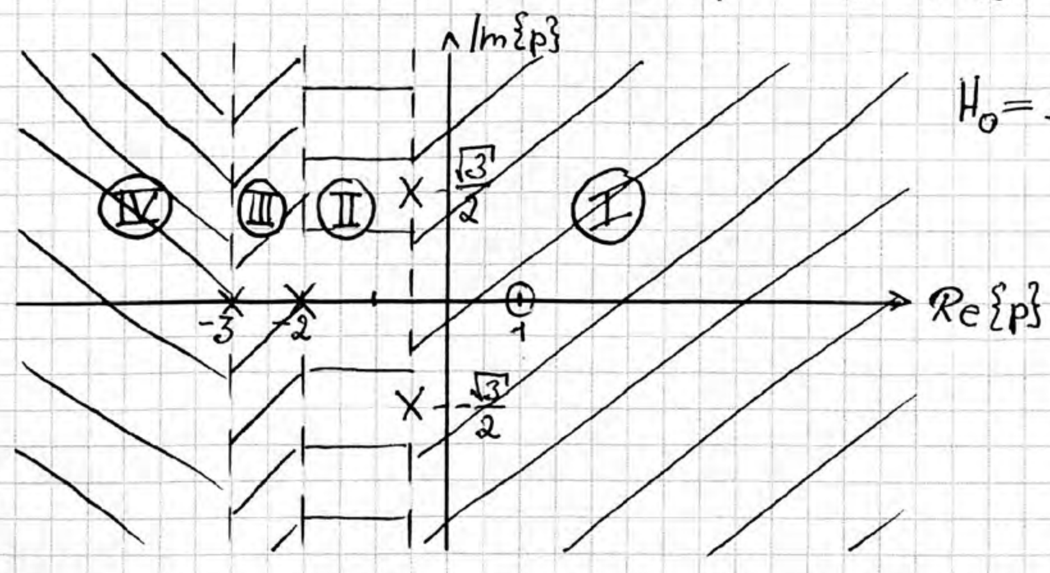
$$S(p) = \frac{p-1}{(p+2)(p+3)(p^2+p+1)}$$

Nullstellen: $p_N = 1$

Polstellen: $p_{P_1} = -2$; $p_{P_2} = -3$; $p_{P_3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$p_{P_4} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$H_0 = 1$



ketov@gmx.de

I 1) $\mathrm{Re}\{p\} > -\frac{1}{2}$ (rechtsseitige Polstellen)

II 2) $-2 < \mathrm{Re}\{p\} < -\frac{1}{2}$ (zweiseitig)

III 3) $-3 < \mathrm{Re}\{p\} < -2$ (zweiseitig)

IV 4) $\mathrm{Re}\{p\} < -3$ (linksseitige Polstellen)

(5) Es könnte auch gar kein Konvergenzbereich zustande kommen bei entsprechender Wahl der Polstellen (z.B. p_{P_1}, p_{P_2} linksseitig und p_{P_3}, p_{P_4} rechtsseitig)

<u>Aufgabe 2.3</u> (Hausaufgabe)

$$H(p) = \frac{2(p+2)}{p^2+7p+12} = \frac{2(p+2)}{(p+3)(p+4)} \quad ; \mathrm{Re}\{p\} > -3$$

$$= 2\left[\frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+4}\right] = \frac{4}{p+4} - \frac{2}{p+3}$$

Zuhaltemethode
$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{-3+2}{-3+4} = -1 \\ B &= \frac{-4+2}{-4+3} = 2 \end{aligned}\right.$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$\underline{\underline{h(t) = \left[4e^{-4t} - 2e^{-3t}\right]\varepsilon(t)}}$$

RC-Tiefpass: $H(p) = \frac{1}{1+pRC}$

$\Longrightarrow$ Durch geeignete Zusammenschaltung von RC-Tiefpässen und Verstärkern realisierung möglich

ketov@gmx.de

Aufgabe 2.4

$-1 < Re\{p\} < 1$

$$g(t) = s(t) + \alpha s(-t) = \beta e^{-t}\varepsilon(t) + \alpha\beta e^{t}\varepsilon(-t)$$

$\updownarrow \mathcal{L}$

zweiseitig!

$$G(p) = \frac{\beta}{p+1} - \frac{\alpha\beta}{p-1} = \frac{\beta(p-1) - \alpha\beta(p+1)}{p^2-1}$$

$$= \frac{p(\beta - \alpha\beta) - (\beta + \alpha\beta)}{p^2-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \beta(1-\alpha) \\ 0 = \beta(1+\alpha) \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -1}} \quad \underline{\underline{\beta = \frac{1}{2}}}$$

Aufgabe 2.5

ketov@gmx.de

Aufgabe 2.6

$$H_1(p) = \frac{\frac{2}{p}}{1-\frac{2}{p}\cdot(-4)} = \frac{2}{p+8}$$

$$H_2(p) = \frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}\cdot(-2)} = \frac{1}{p+2}$$

Falls keine Angabe am Knoten [±] dann positive Summation (+)!

$$\Rightarrow H(p) = H_1(p) + H_2(p) = \frac{2}{p+8} + \frac{1}{p+2} = \frac{2p+4+p+8}{p^2+10p+16}$$

$$= \frac{3p+12}{p^2+10p+16} = \frac{G(p)}{S(p)}$$

$$\Rightarrow S(p)\left[3p+12\right] = \left[p^2+10p+16\right]\cdot G(p)$$

$$\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$3\frac{ds(t)}{dt} + 12s(t) = \frac{d^2g(t)}{dt^2} + 10\frac{dg(t)}{dt} + 16g(t)$$

Aufgabe 2.7 (Zusatz / Hausaufgabe)

a) $s(t) = e^{-2t}\varepsilon(t) + e^{-3t}\varepsilon(t)$ $\Rightarrow$ Rechtsseitig

$$\updownarrow \mathcal{L}$$

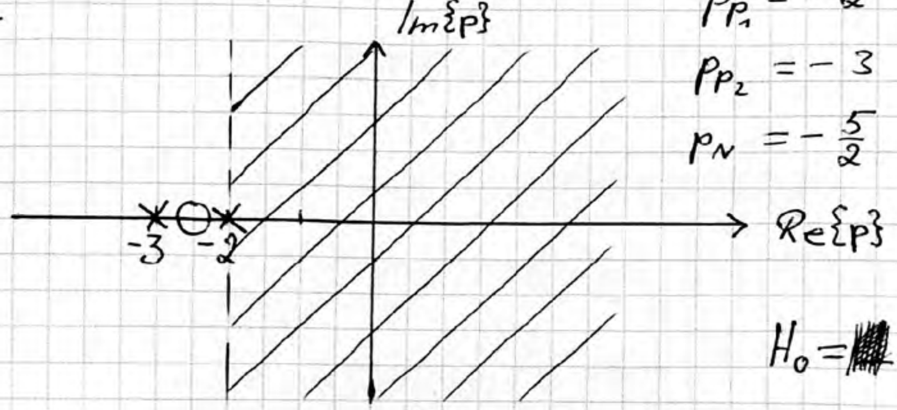
$$S(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Re\{p\} > -2}}$$

$$= \frac{2p+5}{(p+2)(p+3)}$$

$p_{P_1} = -2$

$p_{P_2} = -3$

$p_N = -\frac{5}{2}$



$H_0 = 2$

ketov@gmx.de

b) $s(t) = e^{-4t}\varepsilon(t) + e^{-5t}\sin(5t)\varepsilon(t)$ $\Rightarrow$ Rechtsseitig

$$\updownarrow \mathcal{L}$$

$$S(p) = \frac{1}{p+4} + \frac{5}{(p+5)^2+25} = \frac{(p+5)^2+25+5p+20}{(p+4)((p+5)^2+25)}$$

$$= \frac{p^2+10p+25+45+5p}{(p+4)(p^2+10p+25+25)} = \underline{\underline{\frac{p^2+15p+70}{(p+4)(p^2+10p+50)}}}$$

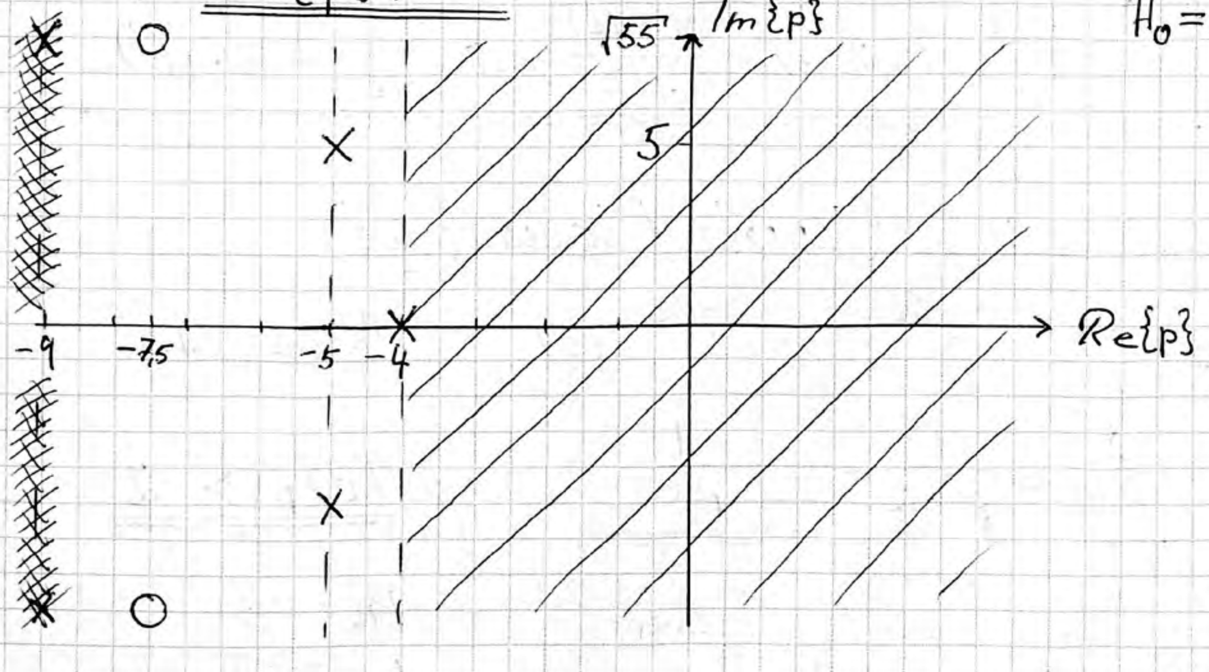
$$\Rightarrow p_{N_{1,2}} = -\frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 70} = -\frac{15}{2} \pm j\frac{\sqrt{55}}{2} = -\frac{1}{2}(15 \pm j\sqrt{55})$$

$$p_{P_1} = -4$$

$$p_{P_{1,2}} = -5 \pm \sqrt{25-50} = -5 \pm j5 = -5(1 \pm j)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Re\{p\} > -4}}$$

$H_0 = 1$



ketov@gmx.de

c) $s(t) = e^{2t}\varepsilon(-t) + e^{3t}\varepsilon(-t)$ => Linksseitig

$\updownarrow \mathcal{L}$

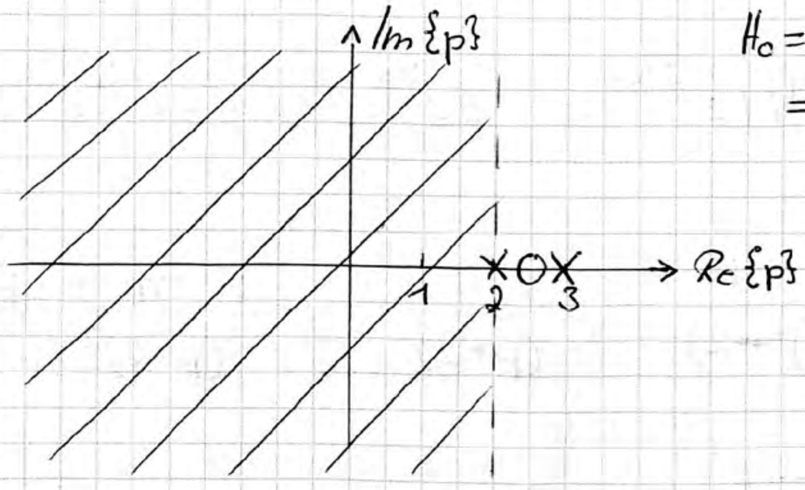
$$S(p) = -\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-3} = \frac{3-p+2-p}{(p-2)(p-3)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5-2p}{(p-2)(p-3)}}} = \underline{\underline{-2\,\frac{(p-\frac{5}{2})}{(p-2)(p-3)}}}$$

Nullstellen: $p_N = \frac{5}{2}$

=> $\underline{\underline{Re\{p\} < 2}}$

Polstellen: $p_{P_1} = 2$; $p_{P_2} = 3$



$H_0 = \cancel{2}$

$= -2$

d) $s(t) = t\,e^{-2|t|} = t\,e^{2t}\varepsilon(-t) + t\,e^{-2t}\varepsilon(t)$ => Zwei seitig

$\updownarrow \mathcal{L}$

$$S(p) = \frac{1}{(p+2)^2} - \frac{1}{(p-2)^2} = \frac{p^2-4p+4-(p^2+4p+4)}{(p+2)^2(p-2)^2}$$

$$= \underline{\underline{-8\,\frac{p}{(p+2)^2(p-2)^2}}}$$

Nullstellen: $p_N = 0$

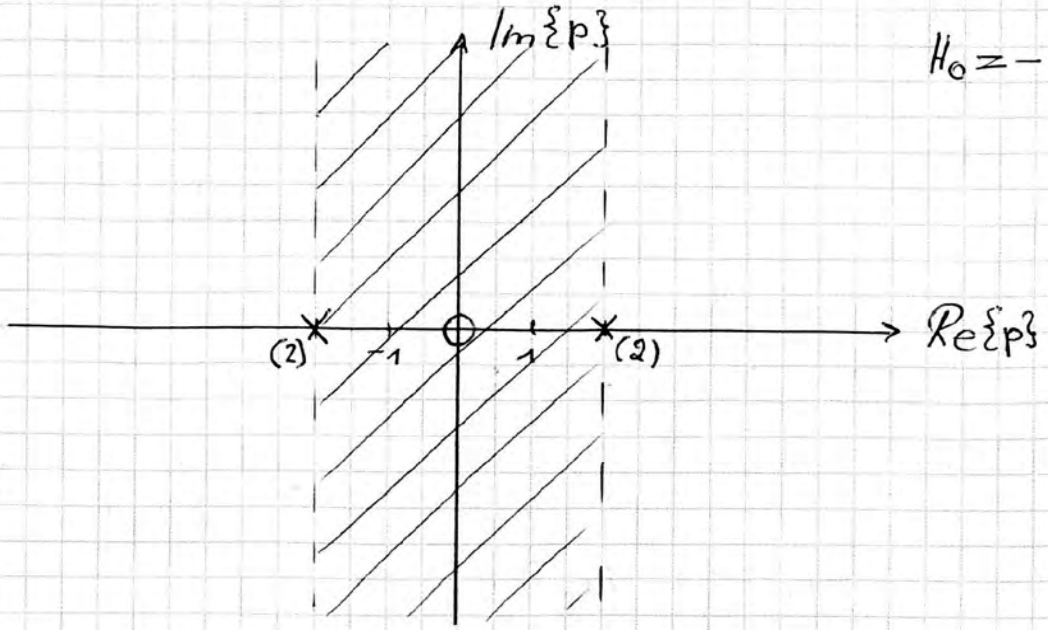
Polstellen: $p_{P_1} = -2$ (doppelt) (~~links~~ rechtsseitig)

$p_{P_2} = 2$ (doppelt) (linksseitig)

K.B.

$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{-2 < \mathrm{Re}\{p\} < 2}}$

$H_0 = -8$



e)

$$s(t) = |t| e^{-2|t|} = -t e^{2t} \varepsilon(-t) + t e^{-2t} \varepsilon(t)$$

$$\updownarrow \mathcal{L}$$

$$S(p) = \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} = \frac{p^2+4p+4+p^2-4p+4}{(p+2)^2 (p-2)^2}$$

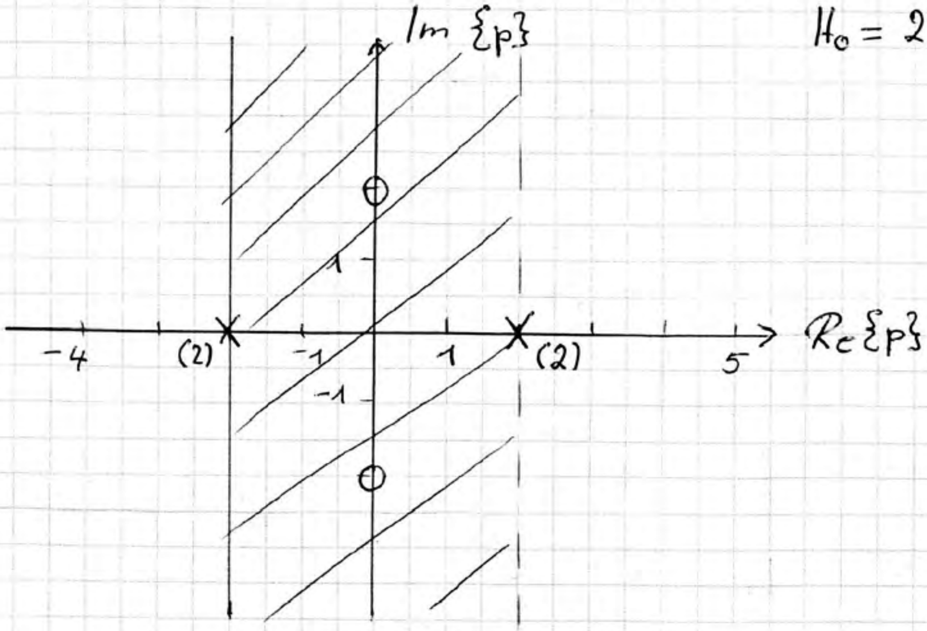
$$= \underline{\underline{2 \frac{p^2+4}{(p+2)^2 (p-2)^2}}} =$$

Nullstellen: $p_{N_{1,2}} = \pm j \cdot 2$

Polstellen: $p_{P_1} = -2$ (doppelt) (kausal)

$p_{P_2} = 2$ (doppelt) (antikausal)

$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{-2 < \mathrm{Re}\{p\} < 2}}$



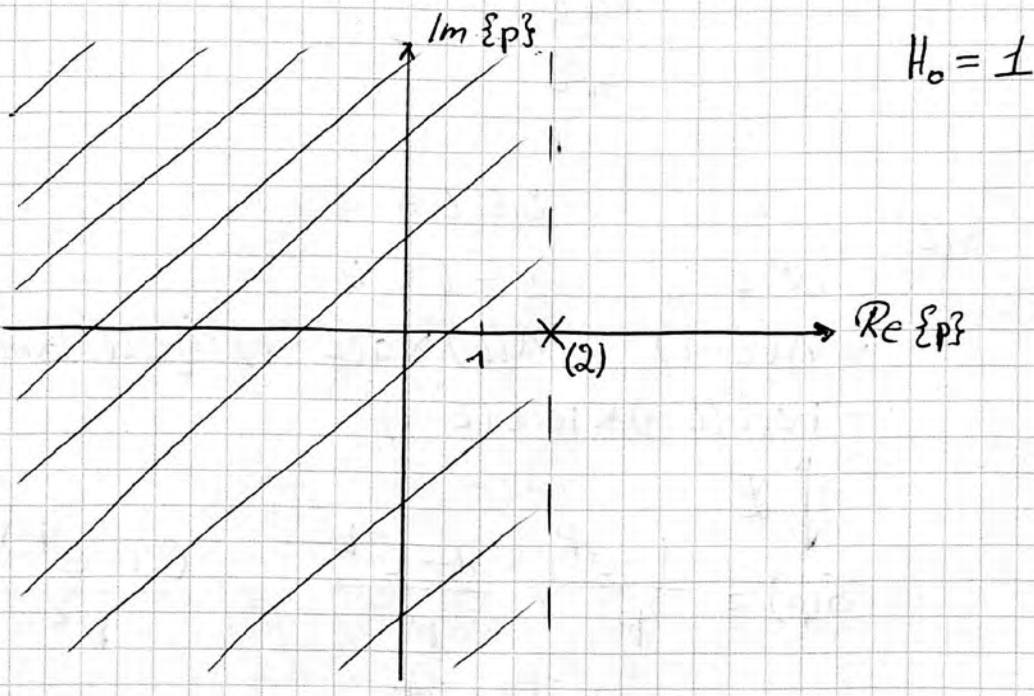
f)

$$s(t) = |t|\, e^{2t}\, \varepsilon(-t) = -t\, e^{2t}\, \varepsilon(-t) \Rightarrow \text{linksseitig (antikausal)}$$

$\updownarrow \mathcal{L}$

$$\underline{\underline{S(p) = \frac{1}{(p-2)^2}}}$$

Polstellen: $p_p = 2$ (doppelt)

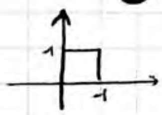


ketov@gmx.de

g) kausales, rechtsseitiges, zeitbegrenztes Signal

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$$
$$= \varepsilon(t) - \varepsilon(t) * \delta(t-1)$$

$\updownarrow \mathcal{L}$ Zeitverschiebung



$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\cdot e^{-p} = \underline{\underline{\frac{1-e^{-p}}{p}}}$$

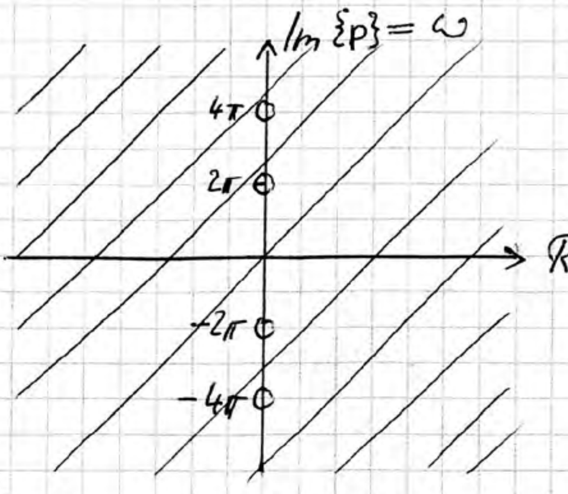
Nullstellen: $p_N = 0$

Polstellen: $p_P = 0$

$\Rightarrow$ Heben sich gerade auf! „$\otimes$ = $\odot$"

$\Rightarrow$ Konvergenzgebiet ist die gesamte p-Ebene! (da $s(t)$ zeitbegrenzt)

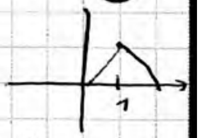
Weitere Nullstellen bei $p_N = jk2\pi$; $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$



$H_0 = 1$

h)

$$s(t) = \begin{cases} t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & ; 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$



$$= \Lambda(t-1) = \Lambda(t) * \delta(t-1) = [\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)] * \delta(t-1)$$
$$= \mathrm{rect}(t-1) * \mathrm{rect}(t-1)$$

$\updownarrow \mathcal{L}$

$$S(p) = \frac{1-e^{-p}}{p} \cdot \frac{1-e^{-p}}{p} = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2}$$
$$= \underline{\underline{\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}}}$$

ketov@gmx.de

Merke { Nullstellen: $p_N = jk2\pi$; $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ doppelt

Polstellen: keine

$Re\{p_N\} = 0$

$Im\{p_N\} = k \cdot 2\pi$

$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

wg. Aufhebung

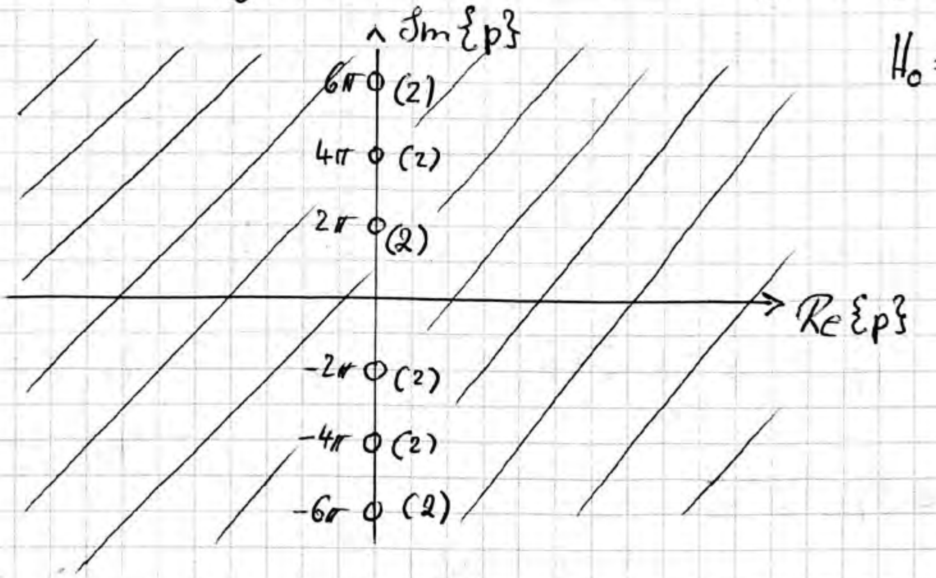
|| Pol und Nullstelle im Ursprung heben sich gerade auf!

Konvergenzbereich:

(Volle Umdrehung in $\mathbb{C}$: 2π)

Ist die gesamte Ebene da Signal zeitlich begrenzt (zeitbegrenzt)! (Zeitdiskret / analog)

$H_0 = 1$



$e^{-p} = e^{-\sigma} \cdot e^{-j2\pi f}$
$= e^{-\sigma} \cdot e^{-j\omega}$

$\boxed{\delta(3t) = \frac{1}{3}\delta(t)}$

Allg.

$\boxed{\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)}$

Allg.

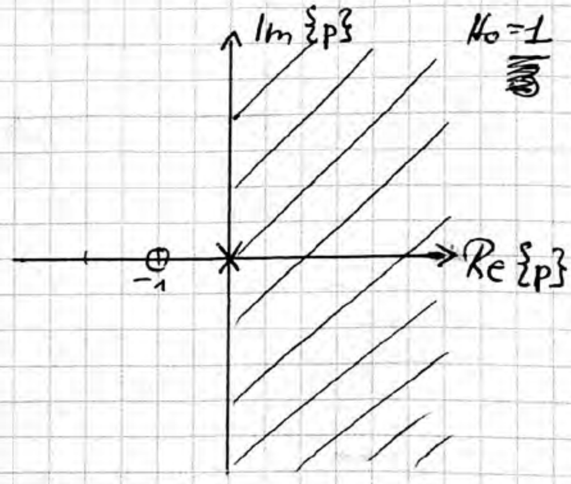
$\boxed{\varepsilon(\alpha t) = \varepsilon(t)}$

j) $s(t) = \boxed{\delta(t)} + \varepsilon(t)$ => rechtsseitig

$\updownarrow \mathcal{L}$

$S(p) = 1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$

$H_0 = 1$



Nullstellen: $p_N = -1$

Polstelle: $p_P = 0$

=> $\underline{\underline{Re\{p\} > 0}}$

i) $s(t) = \boxed{\delta(3t)} + \boxed{\varepsilon(3t)} \neq \delta(t) + \varepsilon(t)$ => $Re\{p\} > 0$

Merke

$= \boxed{\frac{1}{3}\delta(t)} + \boxed{\varepsilon(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} S(p) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\,\frac{p+3}{p}}}$; $p_N = -3$; $p_P = 0$

$H_0 = \frac{1}{3}$

ketov@gmx.de

Aufgabe 2.8

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} - \frac{dg(t)}{dt} - 2g(t) = s(t)$$

a) $\Big\updownarrow \mathcal{L}$

$$p^2 G(p) - pG(p) - 2G(p) = S(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{G(p)}{S(p)} = \frac{1}{p^2-p-2} = \underline{\underline{\frac{1}{p^2-p-2}}} = \frac{1}{(p-2)(p+1)}$$

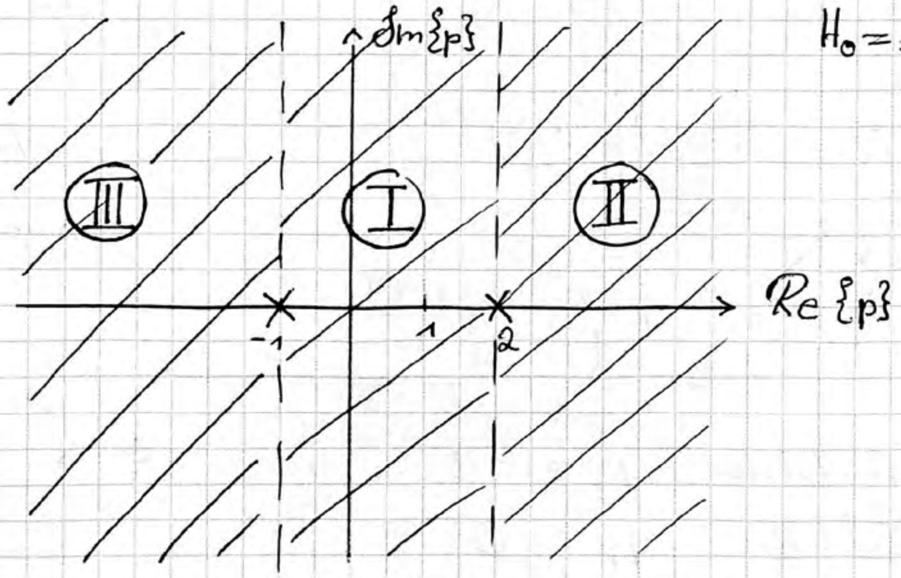
$$= \frac{1/3}{p-2} + \frac{-1/3}{p+1}$$

Nullstellen: keine

Polstellen: $p_{P_{1,2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow p_{P_1} = 2$, $p_{P_2} = -1$

$\cancel{\Rightarrow \mathrm{Re}\{p\} > 2}$

$H_0 = 1$



b)

i) stabil $\quad -1 < \text{Re}\{p\} < 2$ $\quad$ I

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} \varepsilon(-t) - \frac{1}{3} e^{-t} \varepsilon(t)$$

ii) kausal $\quad \text{Re}\{p\} > 2$ $\quad$ II

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{3} e^{2t} \varepsilon(t) - \frac{1}{3} e^{-t} \varepsilon(t)$$

iii) weder stabil noch kausal $\quad \text{Re}\{p\} < -1$ $\quad$ III

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} \varepsilon(-t) + \frac{1}{3} e^{-t} \varepsilon(-t)$$

Fourier-Transformation $\mathcal{F}\{\}$ und Fourier-Reihenentwicklung

05.06.10

Kleingruppe

④

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

(aperiodische Signale $s(t)$)

Häufig Formelsammlung benutzen!

Periodische $s(t)$

$T = \frac{1}{F}$

$$S_p(k) = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\, e^{-j2\pi k F t}\, dt$$

(periodische Signale $s(t)$)

$\{\}^{-1}$

$$s(t) = s\left(t + \frac{n}{F}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k)\, e^{j2\pi k F t}$$

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k)\, \delta(f - kF)$$

zum „Herauslesen" der $S_p(k)$ bei periodischen Signalen

$F :\hat{=}$ Grundfrequenz (bzgl. $s(t)$)

Allg.

$$s(t) = s_g(t) + s_u(t)$$

(Aufteilung geht immer)

$\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$

$$S(f) = \mathrm{Re}\{S(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{S(f)\}$$

(Gilt auch für $S_p(k)$)

Differentiation:

$$\frac{ds(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j2\pi f\, S(f)$$

Parseval Theorem:

Leistung

$$L_s = \frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_p(k)|^2$$

Keine Stabilitätsbetrachtung

Flächentheorem der $\mathcal{F}\{\}$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \, dt = S(f=0)$$

Mittelwert $\hat{=}$ Gleichanteil der Fourier-Reihenentwicklung

$$S_p(k=0) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \, dt = S_p(0)$$

Aufgabe 3.1 (Zusatz) $T = 8 = \frac{1}{F}$

$$s_p(t) = S_p(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\mathrm{Re}\{S_p(k)\}\cos(2\pi kFt) - \mathrm{Im}\{S_p(k)\}\cdot\sin(2\pi kFt)\right\}$$

$$= 2\left[\underbrace{2\cos\left(\frac{\pi k t}{4}\right)}_{\text{für } k=1}\Bigg|_{k=1} \underbrace{-\,4\sin\left(\frac{\pi k t}{4}\right)}_{\text{für } k=3}\Bigg|_{k=3}\right]$$

$$= \underline{\underline{4\cos\left(\frac{\pi \cancel{k} t}{4}\right) - 8\sin\left(\frac{3\pi t}{4}\right)}}$$

<u>Beachte</u>

$s(t) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow S_p(k)$ gerade!

Aufgabe 3.2 (Zusatz)

$$s_{p2}(t) = s_{p1}(1-t) + s_{p1}(t-1)$$
$$= s_{p1}(-(t-1)) + s_{p1}(t-1)$$

$\Longrightarrow \underline{\underline{f_2 = f_1}}$, denn es liegt keine Zeitdehnung bzw. Zeitstauchung vor

<u>Zeitspiegelung</u>:

$$S_{p2}(k) = S_{p1}(-k)\cdot e^{-j2\pi k f_1 \cdot 1} + S_{p1}(k)\, e^{-j2\pi k f_1 \cdot 1}$$

Formelsammlung

$$= \underline{\underline{\left(S_{p1}(k) + S_{p1}(-k)\right)\cdot e^{-j2\pi k f_1}}}$$

Alternativ:

$$s_{p2}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(-k)\, e^{j2\pi k f_1 (t-1)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k)\, e^{j2\pi k f_1 (t-1)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(S_p(k) + S_p(-k)\right) e^{-j2\pi k f_1}}_{= S_{p2}(k)} \cdot e^{j2\pi k f_1 t}$$

ketov@gmx.de

Aufgabe 3.3

Achtung bei kompl. Größen

a) $s_p(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow S_p(k)$ „gerade" $(S_p^*(k) = S_p(-k))$

$s_p(t)$ ungerade $\Rightarrow \begin{cases} Re\{S_p(k)\} = 0 \\ S_p(0) = 0 \end{cases}$ (Gleichanteilsfrei)

b) $T = 2 = \frac{1}{F}$

c) $S_p(k) = 0$ für $|k| > 1$

$\Rightarrow$ es ex. nur $S_p(-1), S_p(1)$

$\Rightarrow S_p^*(1) = S_p(-1)$

Reihenentwicklung:

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k) e^{j2\pi kFt}$$

$$= S_p(1) e^{j2\pi Ft} + S_p(-1) e^{-j2\pi Ft}$$

$$\cancel{= S_p(1)\left[e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}\right]}$$

$$= S_p(1) e^{j2\pi Ft} + S_p^*(1) e^{-j2\pi Ft}$$

$S_p(1) = j\,Im\{S_p(1)\}$

$$= j\,Im\{S_p(1)\} e^{j2\pi Ft} - j\,Im\{S_p(1)\} e^{-j2\pi Ft}$$

$$= j\,Im\{S_p(1)\}\left(e^{j2\pi Ft} - e^{-j2\pi Ft}\right)$$

$$= -2\,Im\{S_p(1)\} \sin(\pi t)$$

d)

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 4\,Im^2\{S_p(1)\} \sin^2(\pi t)\,dt = 2\,Im^2\{S_p(1)\} \cdot 1 \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow Im\{S_p(1)\} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) Alternativ:

Hilbert-Theorem

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} s_p^2(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_p(k)|^2 = \underbrace{|S_p(1)|^2 + |S_p(-1)|^2}_{= 2|S_p(1)|^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad |S_p(1)| = |\operatorname{Im}\{S_p(1)\}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\xRightarrow{a,b,c,d} \quad s_{p_{1,2}}(t) = \pm\sqrt{2}\,\sin(\pi t)$$

Es kann keine weiteren Signale geben.

Aufgabe 3.4 (Hausaufgabe / Zusatz)

a)

(a)

$$T = 2 = \frac{1}{F}$$

$$S_p(k) = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} s_p(t)\, e^{-j2\pi kFt}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\, e^{-j2\pi kFt}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\cancel{2}\pi k\cancel{F}t}}{(\cancel{+j}\cancel{2}\pi k\cancel{F})^2}(+j\cancel{2}\pi k\cancel{F}t+1)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2(\pi k)^2}\left(\underbrace{e^{-j\pi k}}_{=(-1)^k}(1+j\cancel{2}\pi k\cancel{F}) - \underbrace{e^{j\pi k}}_{=(-1)^k}(1-j\pi k)\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{2(\pi k)^2}\left(\cancel{1} + j\pi k - \cancel{1} + j\pi k\right)$$

$$= j\,\frac{(-1)^k}{\pi k} \quad \text{für } k \neq 0 \qquad \left(\frac{\text{nicht}}{k>0}\right) \quad \left(\frac{\text{denn}}{k \in \mathbb{Z}}\right)$$

$$S_p(0) = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} s_p(t)\,dt = 0 \quad \text{für } k=0$$

ketov@gmx.de

$T = 6 = \frac{1}{F}$

(b)

$$s_p(t) = \left(\Lambda(t+1) + \Lambda(t) + \Lambda(t-1)\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-6n)$$

$$= \Lambda(t) * \left[\delta(t+1) + \delta(t) + \delta(t-1)\right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-6n)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$S(f) = si^2(\pi f) \cdot \left[1 + e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}\right] \cdot \frac{1}{6} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-kF)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{6} \cdot si^2(k\pi F)\left[1 + e^{j2\pi \cdot kF} + e^{-j2\pi kF}\right]}_{= S_p(k)} \cdot \delta\left(f - k\frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow S_p(k) = \frac{si^2\left(\frac{k\pi}{6}\right)\left(1 + e^{j\frac{\pi k}{3}} + e^{-j\frac{\pi k}{3}}\right)}{6}$$

$$\left(= \frac{6}{\pi^2 k^2}\left(\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{6}\right)\right)\right) \text{ für } k \text{ ungerade}$$

$T = 3 = \frac{1}{F}$

(c)

$$s(t) = \left(\Lambda(t+1) + 2\Lambda(t)\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3n)$$

$$= \Lambda(t) * \left(\delta(t+1) + 2\delta(t)\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3n)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$S(f) = si^2(\pi f) \cdot \left(e^{j2\pi f} + 2\right) \cdot \frac{1}{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-kF)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} si^2(\pi kF)\left(2 + e^{j2\pi kF}\right) \delta(f-kF)$$

$$\Rightarrow S_p(k) = \frac{1}{3} si^2(\pi kF)\left(2 + e^{j2\pi kF}\right) \quad ; F = \frac{1}{3}$$

$$\left(= \frac{1}{T} \frac{1}{(2\pi k f_0)^2}\left[2\left(1 + j4\pi k f_0\right)e^{-j2\pi k f_0} - \left(e^{j4\pi k f_0} + 1\right)\right]\right.$$

(Integrieren) evtl falsch

ketov@gmx.de

$T = \cancel{1/2}\, 2 = \frac{1}{F}$

(d)
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) \cancel{*} - 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cancel{t+2\ldots 2k}\; t-2k-1)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) - 2\delta(t-(2k+1))$$

$$S_p(\cancel{f}k) = \frac{1}{T}\int_{0}^{1+1} (\delta(t) - 2\delta(t-1))\, e^{-j2\pi kFt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \delta(t)\,dt - \frac{2}{2}\int_0^2 \delta(t-1)\, e^{-j2\pi k\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} - 1 \cdot e^{-j\pi k} \cdot 1 = \frac{1}{2} - (-1)^k = \underline{\underline{\frac{1-2(-1)^k}{2}}}$$

(e)

$T = 6 = \frac{1}{F}$

$$s(t) = \mathrm{rect}(t) * \left[\delta(t+\tfrac{3}{2}) - \delta(t-\tfrac{3}{2})\right] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k6)$$

$$\updownarrow$$

$$S(f) = \mathrm{si}(\pi f) \cdot \underbrace{\left(e^{j2\pi f\frac{3}{2}} - e^{-j2\pi f\cdot\frac{3}{2}}\right)}_{=2j\sin(3\pi f)} \cdot \frac{1}{6}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-kF)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{j\frac{1}{6}\,\mathrm{si}(\pi kF) \cdot 2\sin(3\pi kF)}_{=S_p(k)}\; \delta(f-kF)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_p(k) = j\frac{1}{3}\,\mathrm{si}\left(\frac{\pi k}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}}$$

(f)

$T = 3 = \frac{1}{F}$

$$s(t) = \mathrm{rect}(t) * \left[2\delta(t-\tfrac{1}{2}) + \delta(t-\tfrac{3}{2})\right] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k)$$

$$\updownarrow$$

$$S(f) = \mathrm{si}(\pi f) \cdot \left(2e^{-j\pi f} + e^{-j3\pi f}\right) \cdot \frac{1}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-kF)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(\pi\tfrac{k}{3})\left(2e^{-j\pi\frac{k}{3}} + e^{-j\pi k}\right) \frac{1}{3}\,\delta(f-\tfrac{k}{3})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_p(k) = \frac{1}{3}\,\mathrm{si}\left(\frac{\pi k}{3}\right)\left(2e^{-j\frac{\pi k}{3}} + \underbrace{e^{-j\pi k}}_{(-1)^k}\right)}}$$

ketov@gmx.de

Aufgabe 3.5 (Zusatz)

$$h(t) = \varepsilon(-t)\, e^{4t} + \varepsilon(t)\, e^{-4t}$$

a) $g(t) = h(t) * s_p(t)$

$$G(f) = \left(\left[\frac{\delta(f)}{2} + j\frac{1}{2\pi f}\right] * \mathcal{F}\{e^{4t}\} + \mathcal{F}\{\varepsilon(t) e^{-4t}\}\right) \cdot \mathcal{F}\{s_p(t)\}$$

$$= \left[\frac{1}{4-j2\pi f} + \frac{1}{4+j2\pi f}\right] \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{4-j2\pi k} + \frac{1}{4+j2\pi k}\right)}_{= S_p(k)} \delta(f-k)$$

$$\Longrightarrow \quad S_p(k) = \frac{1}{4-j2\pi k} + \frac{1}{4+j2\pi k}$$

b) $s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n) - \delta(t-(2n+1)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n) * [\delta(t) - \delta(t-1)]$

$T_{neu} = 2$
$= \frac{1}{F}$

$$G(f) = \left[\frac{1}{4-j2\pi f} + \frac{1}{4+j2\pi f}\right] \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{2}\right) \cdot \left(1 - e^{-j2\pi f}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \underbrace{e^{-j2\pi\frac{k}{2}}}_{=(-1)^k}\right)\left(\frac{1}{4-j2\pi\frac{k}{2}} + \frac{1}{4+j2\pi\frac{k}{2}}\right)\delta\left(f-\frac{k}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad S_p(k) = (1-(-1)^k)\left(\frac{1}{4-j\pi k} + \frac{1}{4+j\pi k}\right)$$

c)

$$G(f) = \left(\frac{1}{4-j\,2\pi f} + \frac{1}{4+j2\pi f}\right) \cdot \frac{1}{2} si\left(\frac{\pi f}{2}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-k)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} si\left(\frac{\pi k}{2}\right)\left(\frac{1}{4-j2\pi k} + \frac{1}{4+j2\pi k}\right)\delta(f-k)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{S_p(k) = \frac{1}{2} si\left(\frac{\pi k}{2}\right)\left(\frac{1}{4-j2\pi k} + \frac{1}{4+j2\pi k}\right)}}$$

Aufgabe 3.6

a) $s_p(t-t_0) + s_p(t+t_0)$

$$\Rightarrow S_{pa}(k) = S_p(k)\, e^{-j2\pi k \cdot \frac{t_0}{T}} + S_p(k)\, e^{j2\pi k \frac{t_0}{T}}$$

$$\underline{\underline{= S_p(k) \cdot 2\cos\left(2\pi k \frac{t_0}{T}\right)}}$$

b) $s_p(t) + s_p(-t)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_{pb}(k) = S_p(k) + S_p(-k)}}$$

c) $s_p(t) + s_p\left(t - \frac{T}{2}\right)$

$$\Longrightarrow S_{pc}(k) = S_p(k) + S_p(k)\underbrace{e^{-j\cancel{2}\pi k \frac{1}{\cancel{T}} \cdot \frac{\cancel{T}}{\cancel{2}}}}_{=(-1)^k}$$

$$= \underline{\underline{S_p(k)\left[1 + (-1)^k\right]}}$$

d) $\frac{d^2 sp(t)}{dt^2}$

$$\Longrightarrow S_{p_d}(k) = S_p(k)\,(j2\pi k \tfrac{1}{T})^2$$

$$= \underline{\underline{-S_p(k)\,(2\pi k F)^2}}$$

e) $sp\,(3t-1) = sp\left(\frac{t-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right)$

$$\Longrightarrow S_{p_e}(k) = S_p(k)\Big|_{F'=3F} \cdot e^{-j2\pi k F' \cdot \frac{1}{3}}$$

$$= \underline{\underline{S_p(k)\Big|_{F'=3F}\, e^{-j2\pi k F}}}$$

Neue Grundfrequenz, wg. Zeitdehnung!

Alternativ:

$$sp\,(3t-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_p(k)\, e^{j2\pi k F(3t-1)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{S_p(k)\, e^{-j2\pi k F}}_{=S_{p_e}(k)} \cdot e^{j2\pi k \cdot \overbrace{3F}^{} \cdot t}$$

Neue Grundfrequenz!

ketov@gmx.de

? → Aufgabe 3.7 (Zusatz)

$$S_p(N) = S_p(-N) = \frac{1}{2}$$

$$s_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right) \neq$$

Aufgabe 3.8 (Zusatz)

$\boxed{\delta(t-1) = \delta(1+t)}$

$\boxed{\varepsilon(-1-t) \neq \varepsilon(1+t)}$

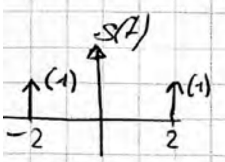
$\boxed{\delta' * \varepsilon = 1}$

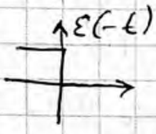
a) $s(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1)\, e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1)\, dt \cdot e^{j2\pi f} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)\, e^{-j2\pi f}\, dt$$

$$= e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f} = \underline{\underline{2\cos(2\pi f)}}$$





b) $s(t) = \frac{d}{dt}\left[\varepsilon(-2-t) + \varepsilon(t-2)\right] = \frac{d}{dt}\left(\cancel{\varepsilon(t+2)} + \varepsilon(t-2)\right)$

$\cancel{*\varepsilon(t)}$

$\varepsilon(-t) * \delta(t+2)$

$$= \delta(t+2)^{*(-\delta(t))} + \delta(t-2)$$

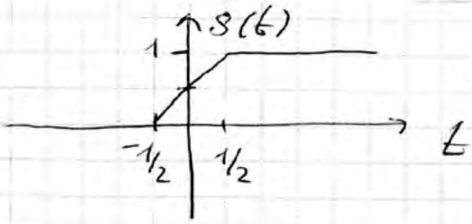
$$S(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2)\, e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= -e^{+j2\pi f 2} + e^{-j2\pi f \cdot 2} = \cancel{2\cos(4\pi f)}$$

$$= \underline{\underline{-2j\sin(4\pi f)}}$$

ketov@gmx.de

Aufgabe 3.9

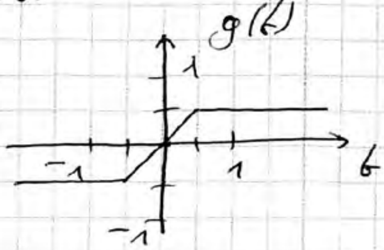


a)
$$s(t) = \varepsilon(t) * \mathrm{rect}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{rect}(\tau)\,d\tau$$

$$\overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} S(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot si(\pi f) + \frac{1}{2} \underbrace{si(0)}_{=1 \,\hat{=}\, \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)d\tau} \delta(f)$$

$$= \underline{\underline{\frac{si(\pi f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}}}$$

b) $s(t) = \varepsilon(t) * \mathrm{rect}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{rect}(\tau)\,d\tau$

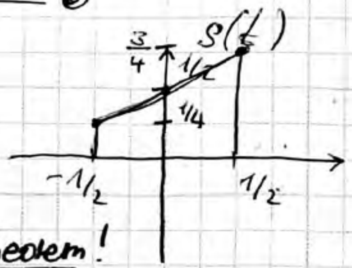


c) $g(t) = s(t) - \frac{1}{2} = g_u(t) + \underbrace{g_g(t)}_{=0}$

$$\overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} \underline{\underline{G(f) = \frac{si(\pi f)}{j2\pi f}}}$$

<u>gerade und rein</u> <u>Imaginär</u>

Aufgabe 3.10 (Zusatz)



a)
$$\boxed{\frac{ds(t)}{dt}} = \frac{1}{4}\delta(t+\tfrac{1}{2}) - \frac{3}{4}\delta(t-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}\mathrm{rect}(t)$$

<u>Differentationstheorem!</u>

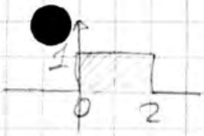
$$\boxed{j2\pi f \cdot S(f)} = \frac{1}{4}e^{j\pi f} - \frac{3}{4}e^{-j\pi f} + \frac{1}{2}si(\pi f) \Rightarrow S(f) = \frac{1}{j8\pi f}\Big[\cos(\pi f) + j\sin(\pi f) - 3\cos(\pi f) + 3j\sin(+\pi f)\Big]$$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{-\cos(\pi f)}{j4\pi f} + \frac{\sin(\pi f)}{2\pi f} + \frac{si(\pi f)}{j4\pi f} = \underline{\underline{\frac{si(\pi f)}{2} + \frac{j}{4\pi f}\Big[\cos(\pi f) - si(\pi f)\Big]}} + \frac{1}{j4\pi f} si(\pi f)$$

b) $\mathrm{Re}\{S(f)\} = \frac{si(\pi f)}{2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \underline{\underline{s_g(t) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(t)}}$

Aufgabe 3.11 (Zusatz) ?

$$S(f) = \delta(f-\pi) + \delta(f-5) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} s(t) = e^{j2\pi^2 t} + e^{j10\pi t}$$



$$h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$$

?

a) $s(t)$ ist nicht periodisch, weil π kein Vielfaches ($\mathbb{N}$) von 5 und umgekehrt ist

?

b) $s(t) * h(t) =$

?

c) Nein ?

Aufgabe 3.12 (Zusatz)

a) $s(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow S(f)$ ist gerade $\Leftrightarrow S(f) = S^*(-f)$

b) $s(t)$ ist kausal $\Rightarrow S(f) = \underbrace{\mathrm{Re}\{S(f)\}}_{\neq 0} + j\,\underbrace{\mathrm{Im}\{S(f)\}}_{\neq 0}$

Inverse $\mathcal{F}$-Trafo

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{S(f)\}\, e^{j2\pi f t}\, df = |t|\, e^{-|t|} = s_g(t)$

$$\Rightarrow s_u(t<0) = -|t|\, e^{-|t|} \cdot \varepsilon(-t) = \varepsilon(-t)\, t\, e^{t}$$

?

ketov@gmx.de

Aufgabe 3.13 (Hausaufgabe/Zusatz)

a)
$$s(t) = \varepsilon(t)\cdot\left[e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)\right] \quad , a>0$$
$$\updownarrow \mathcal{F}$$
$$S(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} * \left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{(a+j2\pi(f-f_0))\cdot 2} + \frac{1}{2\,(a+j2\pi(f+f_0))}$$

Formelsammlung!

b)
$$s(t) = e^{-3|t|}\sin(2t) = e^{3t}\sin(2t)\varepsilon(-t) + e^{-3t}\sin(2t)\varepsilon(t)$$
$$= \left[e^{-|t|} * \delta(3t)\right]\sin(2t) = e^{-\frac{|t|}{\frac{1}{3}}}\cdot\sin 2t$$
$$\updownarrow \mathcal{F}$$
$$S(f) = \cancel{\frac{1}{3-j2\pi f} * \left[\delta(f-\tfrac{1}{\pi})-\delta(f+\tfrac{1}{\pi})\right]\frac{1}{2j}}$$

$\boxed{\text{Zeitdehnung}}$!

$$\cancel{+\frac{1}{3+j2\pi f} * \frac{1}{2j}\left[\delta(f-\tfrac{1}{\pi})-\delta(f+\tfrac{1}{\pi})\right]}$$

Merke!

$$= -\frac{j}{2}\cancel{\left[\frac{1}{3-j2\pi(f-\frac{1}{\pi})} - \frac{1}{3-j2\pi(f+\frac{1}{\pi})} + \frac{1}{3+j2\pi(f-\frac{1}{\pi})} - \frac{1}{3+j2\pi(f+\frac{1}{\pi})}\right]}$$

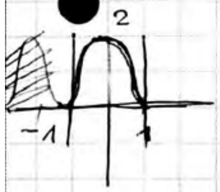
$$= \cancel{-\frac{j}{2}\Big[} = \frac{2}{1+\left(2\pi\frac{f}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3} * \frac{1}{2j}\left[\delta(f-\tfrac{1}{\pi})-\delta(f+\tfrac{1}{\pi})\right]$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot 9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}j}}{9+\left(2\pi(f-\frac{1}{\pi})\right)^2} - \frac{\cancel{2}\cdot 9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}j}}{9+\left(2\pi(f+\frac{1}{\pi})\right)^2}$$

$$= \frac{3j}{9+(2\pi f+2)^2} - \frac{3j}{9+(2\pi f-2)^2}$$

ketov@gmx.de

c) $s(t) = (1+\cos(\pi t))\cdot \cancel{\varepsilon(}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$



$$= \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(\pi t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$S(f) = 2\,\mathrm{si}(2\pi f) + \left(\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)\right)\frac{1}{2} * 2\,\mathrm{si}(2\pi f)$$

?

$$= \underline{\underline{2\,\mathrm{si}(2\pi f) + \mathrm{si}\left(2\pi\left(f-\frac{1}{2}\right)\right) + \mathrm{si}\left(2\pi\left(f+\frac{1}{2}\right)\right)}}$$

d) $s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \delta(t-kT)$, $T>0$, $|b|<1$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b^k \delta(t-kT)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b^k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\, e^{-j2\pi f\cdot kT}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty}\left(b\, e^{-j2\pi f T}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{\underbrace{b^k}_{\leq 1} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k f T}}_{\leq 1}}^{<1,\ \text{da } |b|<1}$$

geometrische Reihe

(→ Formelsammlung)

$$= \underline{\underline{\frac{1}{1-b^{\cancel{k}}e^{-j2\pi f t}} = \frac{1}{1-b\,e^{-j2\pi f t}}}}$$

Unproblematisch sin/cos im Transformierten Bereich zu falten!

e) $s(t) = \varepsilon(t) \cdot t e^{-2t} \cdot \sin(4t)$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$S(f) = \frac{1}{(2+j2\pi f)^2} * \frac{1}{2j}\left(\delta\left(f - \frac{2}{\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{2}{\pi}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{\left(2+j2\pi\left(f-\frac{2}{\pi}\right)\right)^2} - \frac{1}{\left(2+j2\pi\left(f+\frac{2}{\pi}\right)\right)^2}\right)}}$$

f) $s(t) = si(\pi t) \cdot \frac{\sin(2\pi(t-1))}{\pi(t-1)} = si(\pi t) \cdot 2 \cdot si(2\pi(t-1))$

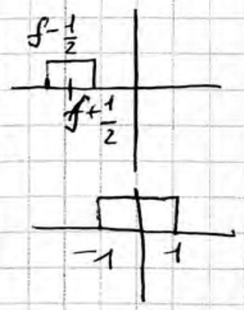
$$= 2 \cdot si(\pi t) \cdot \left[si\left(\frac{t}{\frac{1}{2\pi}}\right) * \delta(t-1)\right] = 2 si(\pi t) * \left[si(2\pi t) \times \delta(t-1)\right]$$

$$\updownarrow$$

$$S(f) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2 \cdot \frac{1}{2}}\right) * \left[\frac{1}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2 \cdot 1}\right) \cdot e^{-j2\pi f}\right]$$

$$= \text{rect}(f) * \left(e^{-j2\pi f}\,\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)\right)$$

$$= \int_{\cancel{-\infty}\,-1}^{\cancel{\infty}\,1} e^{-j2\pi\tau}\, \cancel{\text{rect}\left(\frac{\tau}{2}\right)}\, \text{rect}(f-\tau)\, d\tau$$



$$= \int_{-1}^{f+\frac{1}{2}} e^{-j2\pi\tau}\, d\tau = \left[\frac{e^{-j2\pi\tau}}{-j2\pi}\right]_{-1}^{f+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{j2\pi}\left(\underbrace{e^{j2\pi}}_{=1} - \underbrace{e^{-j2\pi(f+1/2)}}_{= e^{-j2\pi f} e^{-j\pi} = -e^{-j2\pi f}}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1+e^{-j2\pi f}}{j2\pi}}} \quad \text{für } -\frac{3}{2} \leq f < -\frac{1}{2}$$

ketov@gmx.de

$$= \left[\frac{e^{-j2\pi\tau}}{-j2\pi} \right]_{f-\frac{1}{2}}^{f+\frac{1}{2}} = \frac{1}{j2\pi} \Big[\underbrace{e^{-j2\pi(f-\frac{1}{2})} - e^{-j2\pi(f+\frac{1}{2})}}_{= e^{-j2\pi f} \underbrace{e^{j\pi}}_{=(-1)} - e^{-j2\pi f} \underbrace{e^{-j\pi}}_{=(-1)}} \Big]$$

$$= \frac{-e^{-j2\pi f} + e^{-j2\pi f}}{j2\pi} = -\frac{e^{-j2\pi f} - e^{-j2\pi f}}{j2\pi} = 0$$

$$= \cancel{\frac{\sin(2\pi f)}{\pi}}\ 0 \quad \text{für} \quad \cancel{0 \le f \le 1} \quad -\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$$

$$= \cancel{0} \left[\frac{e^{-j2\pi\tau}}{-j2\pi} \right]_{f-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \Big[\underbrace{e^{-j2\pi f + j\pi}}_{=(-1)} - \underbrace{e^{-j2\pi}}_{=1} \Big]$$

$$= \frac{e^{-j2\pi f} \overbrace{e^{j\pi}} - 1}{j2\pi} = -\frac{1 + e^{-j2\pi f}}{j2\pi} \quad \text{für } \frac{1}{2} \le f \le \frac{3}{2}$$

$$= 0 \quad \text{für} \quad f < -\frac{3}{2} \wedge f > \frac{3}{2}$$

g) $$\frac{ds(t)}{dt} = -\delta(t+2) - \delta(t-2) + \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$j2\pi f \cdot S(f) = \underbrace{-e^{j2\pi f 2} - e^{-j4\pi f}}_{= -2\cos(4\pi f)} + 2\,\text{si}(2\pi f)$$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{\text{si}(2\pi f) - \cos(4\pi f)}{j\pi f}$$

h) $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\delta(t-(2n+1))} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\delta(t-2m)$?

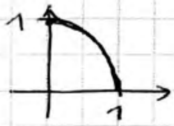
$$= 2\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-2m) + \underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n) * \delta(t-1)}$$

$$S(f) = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{m}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{m}{2}\right) \cdot e^{-j2\pi f}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(f-\frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{k}{2}\right) \underbrace{e^{-j\cancel{2}\pi\frac{m}{\cancel{2}}}}_{=(-1)^m}\right]$$

$$= \underline{\underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(f-\frac{k}{2}\right) + \frac{(-1)^m}{2}\delta\left(f-\frac{k}{2}\right)\right]}}$$

i) $s(t) = (1-t^2)\,\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$



j) $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$

Zeitdiskrete Signale und Systeme

17.06.10

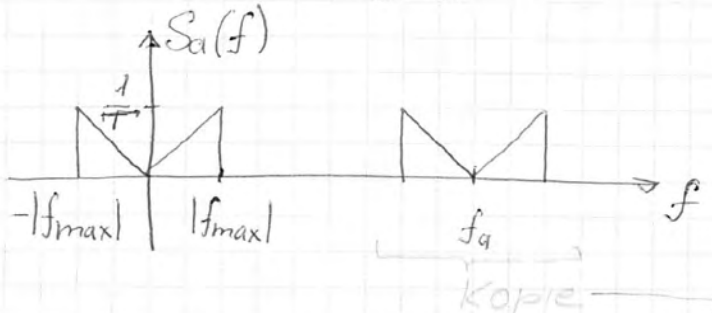
Kleingruppe

5

Abtastung

$f_a > 2 \cdot |f_{max}|$, damit kein Alias auftritt

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$, $f_a = \frac{1}{T} = r$ (Abtastrate)



$$S_a(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - n f_a)$$

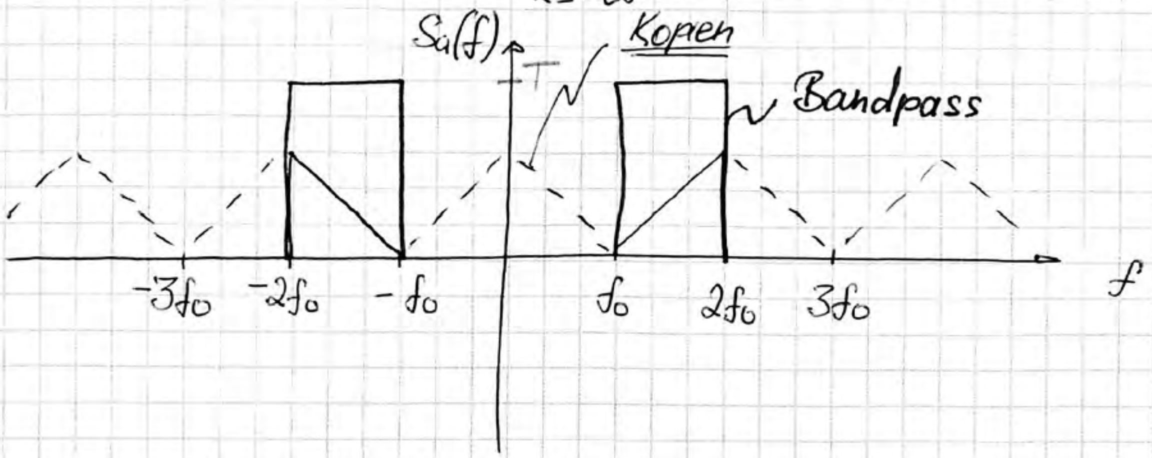
Aufgabe 4.1

$s(t) = 0$ für $f_0 < |f| < 2f_0$

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{2f_0}\right)$$

Abtastrate $= \frac{1}{\frac{1}{2f_0}} = 2f_0$

$$S_a(f) = S(f) * 2f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - 2kf_0)$$



Fehlerfreie Rückgewinnung möglich durch folgenden $\boxed{\text{Bandpass}}$

$$H(f) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{f_0} + 1{,}5\right) + T\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{f_0} - 1{,}5\right)$$

von Abtastrate $T = \frac{1}{2f_0}$

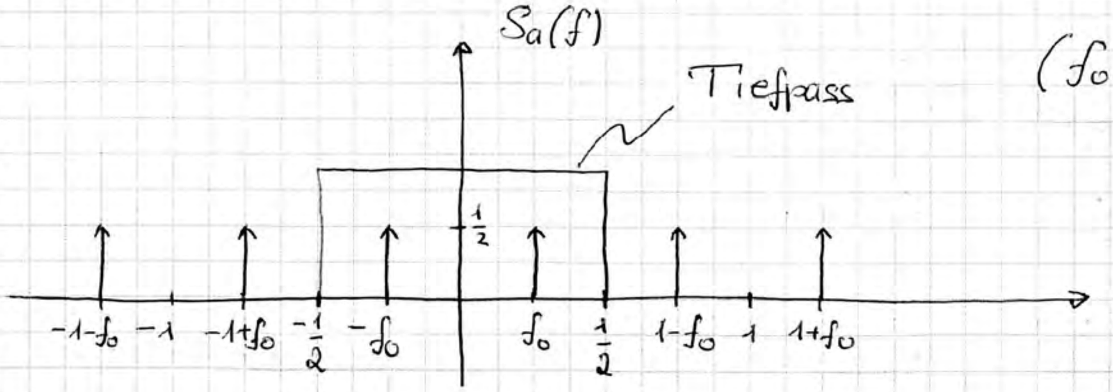
Aufgabe 4.2

$s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$; $S(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$

$$\Rightarrow s_a(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad ; \quad T = \frac{1}{f_a} = 1$$

$$S_a(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\delta(f - f_0 - n) + \delta(f + f_0 - n)\right)$$

ketov@gmx.de



$(f_0 = \frac{1}{4})$

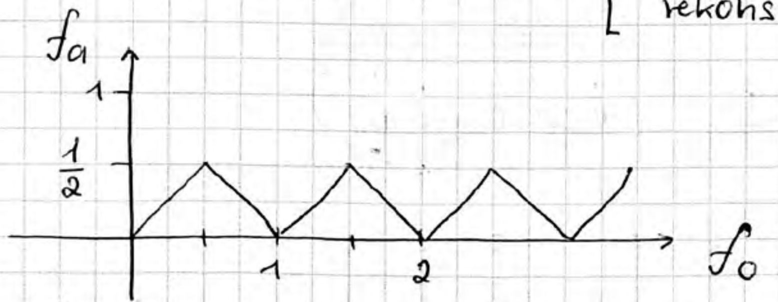
für $f_0 < \frac{1}{2}$

$S_{rek}(t) = s(t)$

für $\frac{1}{2} < f_0 < 1$

$S_{rek}(t) \neq s(t)$

[benachbarte Dirac-Imp. werden fälschlicherweise rekonstruiert]



02.07.10

Aufgabe 4.3 (Zusatz)

~~1. Fall~~ ~~$f_1 \cdot f_2 = f_w$ ist neue~~

~~1. Fall~~ ~~$f_1 > f_2$~~

~~$\Rightarrow w(t)$ ist~~

Vgl. 1.14 {

$$S_1(f) * S_2(f) = 0 \iff |f| > f_1 + f_2$$

$\Rightarrow$ Signal $w(t)$ hat bandbegrenzung auf

$$f_g = f_1 + f_2$$

$$T \leq \frac{1}{2f_g} = \frac{1}{2 \cdot (f_1 + f_2)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_{max} = \frac{1}{2(f_1+f_2)}}}$$

(keine Überlappungen)

Aufgabe 4.4

$$g(t) = s_1(t) * s_2(t)$$

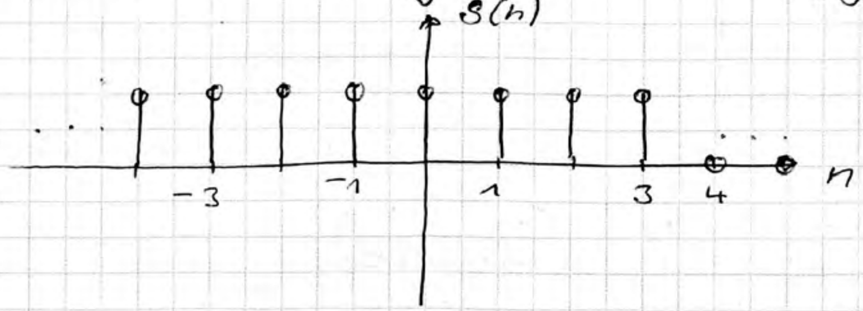
$$G(f) = S_1(f) \cdot S_2(f) \quad \text{ist bandbegrenzt auf } f_g = 500$$

$$G(f) = 0 \iff |f| \geq 500 = f_g$$

$$\Longrightarrow \quad T \leq \frac{1}{2f_g} = \frac{1}{2 \cdot 500} = \frac{1}{1000}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{T_{max} = 0{,}001}}$$

Aufgabe 4.5 (Hausaufgabe)

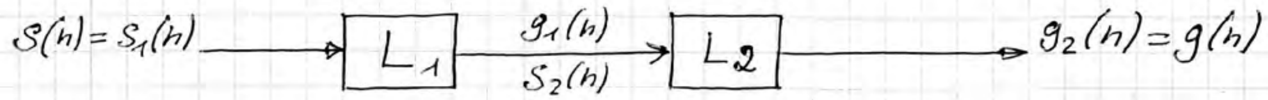


„gespiegeltes & verschobenes $\varepsilon(n)$"

$$\Longrightarrow s(n) = \varepsilon(-(n-3)) = \varepsilon(-n+3)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{M = -1 \ ; \ n = -3}}$$

Aufgabe 4.6 (Hausaufgabe)



a)

$$L_1: \quad g_1(n) = 2s_1(n) + 4s_1(n-1)$$

$$L_2: \quad g_2(n) = s_2(n-2) + \frac{1}{2} s_2(n-3)$$

$$\Rightarrow \quad h_1(n) = 2\delta(n) + 4\delta(n-1)$$
$$h_2(n) = \delta(n-2) + \frac{1}{2}\delta(n-3)$$

$$\Rightarrow \quad h(n) = h_1(n) * h_2(n) = \big(2\delta(n) + 4\delta(n-1)\big) * \big(\delta(n-2) + \tfrac{1}{2}\delta(n-3)\big)$$

$$= 2\delta(n-2) + \delta(n-3) + 4\delta(n-3) + 2\delta(n-4)$$

$$= \underline{\underline{2\delta(n-2) + 5\delta(n-3) + 2\delta(n-4)}}$$

b) Nein, da Faltung kommutativ, d.h

$$h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n) = h(n)$$

Aufgabe 4.7 (Zusatz)

a) $s(n) = \sin\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right)$

Signal Periodisch $\Leftrightarrow$ $s(n) = s(n+T)$; $T \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\sin\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right) \overset{!}{=} \sin\left(\frac{6\pi}{7}n + \frac{6\pi}{7}T + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6\pi}{7}T = 2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{7k}{3} \overset{!}{\in} \mathbb{Z}\setminus\{0\} \text{ ; } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow k = 3 \text{ ; } T = 7$$

$\Rightarrow$ Signal periodisch mit $T = 7$

b)

$$s(n) = \cos\left(\frac{n}{8} - \pi\right)$$

$$\cos\left(\frac{n}{8} - \pi\right) \stackrel{!}{=} \cos\left(\frac{n}{8} + \frac{T}{8} - \pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{T}{8} = 2\pi \cdot k \quad \Rightarrow \quad T = 16\pi k \quad \Rightarrow k = 1;\ T = 16\pi$$

$$T = 16\pi \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow$ Signal nicht periodisch

c)

$$s(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^2\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} n^2\right) \stackrel{!}{=} \cos\left(\frac{\pi}{8}\left(n^2 + 2nT + T^2\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2nT \cdot \frac{\pi}{8} + T^2 \frac{\pi}{8} = 2\pi k$$

$$\Leftrightarrow \quad T^2 + T \cdot 2n - 16k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad T_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 + 16k} \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \forall n, k$$

$\Rightarrow$ Signal nicht periodisch f

$m = 8;\ -n + 4 = k$

d)

$$s(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) \stackrel{!}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{2} T\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} n + \frac{\pi}{4} T\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} T = 2\pi k_1 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{4} T = 2\pi k_2$$

$$\Leftrightarrow \quad T = 4k_1 \quad \wedge \quad T = 8k_2$$

$$\Rightarrow k_1 = 2 \wedge k_2 = 1$$

ketov@gmx.de

$\Rightarrow$ Signal ist periodisch mit $T = 8$

e)

$$s(n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\stackrel{!}{=} 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}T\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n + \frac{\pi}{8}T\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{2}T + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}T = 2\pi k_1 \wedge \frac{\pi}{8}T = 2\pi k_2 \wedge \frac{\pi}{2}T = 2\pi k_3$$

$$\Leftrightarrow T = 8k_1 \wedge T = 16k_2 \wedge T = 4k_3$$

$$\Rightarrow k_1 = 2;\ k_2 = 1;\ k_3 = 4\ ;\ T = 16$$

$\Rightarrow$ Signal ist periodisch mit $T = 16$.

Aufgabe 4.8 (Hausaufgabe)

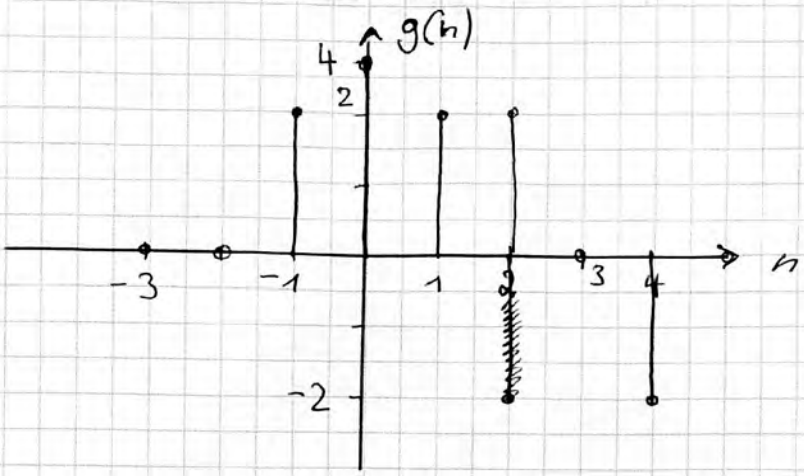
a)

$$g(n) = s(n) * h(n)$$

$$= (\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)) * (2\delta(n+1) + 2\delta(n-1))$$

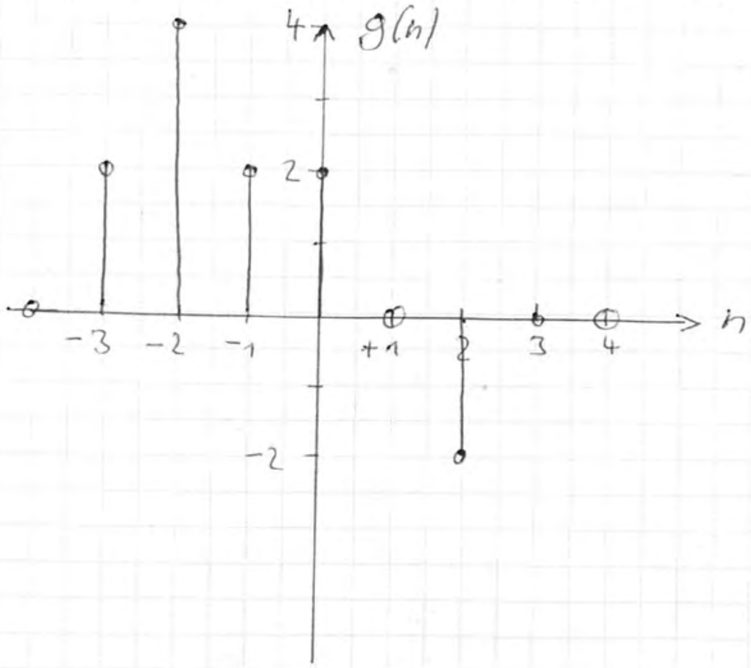
$$= 2\delta(n+1) + 2\delta(n-1) + 4\delta(n) + 4\delta(n-2) - 2\delta(n-2) - 2\delta(n-4)$$

$$= \underline{\underline{4\delta(n) + 2\delta(n-1) + 2\delta(n-2) - 2\delta(n-4) + 2\delta(n+1)}}$$



b)

$$g(n) = s(n+2) * h(n) =$$
$$= \left(\delta(n+2) + 2\delta(n+1) - \delta(n-1)\right) * \left(2\delta(n+1) + 2\delta(n-1)\right)$$
$$= 2\delta(n+3) + 2\delta(n+1) + 4\delta(n+2) + 4\delta(n) - 2\delta(n) - 2\delta(n-2)$$
$$= 2\delta(n+3) + 4\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 2\delta(n) - 2\delta(n-2)$$



c)

$$g(n) = s(n) * h(n+2) = s(n) * h(n) * \delta(n+2)$$
$$= s(n+2) * h(n)$$, da Kommutativ

$\Rightarrow$ Selbe Skizze wie in b)

Aufgabe 4.9

$$g(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} \varepsilon(-(n+1)) * \underbrace{\varepsilon(n-1)}_{= \varepsilon(n) * \delta(n-1)}$$

ohne $\delta(n-1)$ $\longrightarrow$ $g_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} \varepsilon(-(n+1)) * \varepsilon(n)$

(1) $n \geq -1$

$$g_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{m}$$

$\boxed{\text{„Integrator"}}$

da Σ von 1 ab läuft

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}$$

(11) $n < -1$

$$g_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{-m} = \sum_{m=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{m} - \sum_{m=0}^{-(n+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{m}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{-(n+1)+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n} = \frac{3^{n+1}}{2}$$

ketov@gmx.de

LSI-System $\hat{=}$

Aufgabe 4.10 lineares verschiebungsinvariantes System

$$h_2(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-2) = \delta(n) + \delta(n-1)$$?

$$h_2(n) * h_2(n) = (\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-1) + \delta(n-2))$$

$$= \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

? Wie ohne kenntnis von s(n) ?

Aufgabe 4.11

Kreditsumme: $K = 100.000\,€$ bei $n=0$

Zinsen/Monat: $\frac{0{,}12}{12} K = 0{,}01 K \ \hat{=}\ 1\%$ pro Monat (pro n)

Rückzahlung: $E\,€$ ab $n=1$

a) $g(n) = K \cdot \delta(n) + 1{,}01\, g(n-1) - E\, \varepsilon(n-1)$ für $n \geq 0$

$\underline{n>0}$

$$g(n) = 1{,}01\, g(n-1) - E \quad ; g(0) = K$$

Partikuläre Lösung: [$\hat{=}$ irgendeine Lösung aus Lösungsgesamtheit]

$$g_p(n) = 100\,E$$

Homogene Lösung:

$$g_h(n) = A \cdot 1{,}01^n$$

$$\Rightarrow g(n) = g_p(n) + g_h(n) = 100E + A \cdot 1{,}01^n$$

AWP lösen:

$$\Rightarrow 100E + A = K \Rightarrow A = K - 100E$$

$$g(n) = 100E + (K-100E) \cdot 1{,}01^n$$

(Alternativ Z-Trafo)

b) E für $n = 360$ Monate

$$g(360) \overset{!}{=} 0 = [K - 100E] \cdot 1{,}01^{360} + 100E$$

$$\Longrightarrow E = 1028{,}60\,€$$

c) $360 \cdot 1028{,}60\,€ = 370\,296\,€$

$370296\,€ - K = 270296\,€$

Aufgabe 4.12 (Zusatz)

a) (a) $M = 7$

$$S_d(k) = \sum_{n=0}^{7-1} s(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{7} n \cdot k} = \sum_{n=0}^{\cancel{5}\,4} e^{-j\frac{2\pi}{7} nk}$$

$$= \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{7} n \cdot (\cancel{5}\,4 + 1)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{7} n}} = \frac{1 - e^{-j\frac{10\pi}{7} n}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{7} n}}$$

sin

$\rightsquigarrow$ Ausklammern!

$$= e^{j\frac{4\pi k}{7}} \frac{\sin}{\sin}$$

(b) $M = 6$

$$S_d(k) = \sum_{n=0}^{5} 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6} nk} = \sum_{n=0}^{\cancel{4}\,3} e^{-j\frac{\pi}{3} nk}$$

$$z = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{3} k (3+1)}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{3} k}} = \frac{1 - e^{-j\frac{4\pi}{3} k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{3} k}}$$

$$\rightsquigarrow = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[3^k - (3^*)^k\right]\left((-1)^k - j^k\right)$$

(c) $M = 6$

$S_p(0) = ?$

$$S_d(k) = \sum_{n=0}^{5} s(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{6}nk}$$

$$= e^{-j\frac{\cancel{2}\pi}{3}\cdot 0k} + 2e^{-j\frac{\pi}{3}1k} - 1e^{-j\frac{\pi}{3}2k} + 0 - 1e^{-j\frac{\pi}{3}4k}$$

$$+ 2e^{-j\frac{\pi}{3}5k}$$

$$= 1 + 2e^{-j\frac{\pi k}{3}} - e^{-j\frac{2\pi k}{3}} - e^{-j\frac{4\pi k}{3}} + 2e^{-j\frac{5\pi k}{3}}$$

c $\cancel{b}$)

$$S_p(k) = \sum_{n=0}^{3} \left(1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right) e^{-j\frac{2\pi}{4}nk}$$

$$= 1 + \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \underbrace{\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{=0} e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 2k}$$

$$+ \left(1 - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) e^{-j\frac{\pi}{2}3k}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi k}{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{3\pi k}{2}}$$

$$= e^{-j\frac{\pi k}{2}} \left(e^{j\frac{\pi k}{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + (-1)^k \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= e^{-j\frac{\pi k}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \left(1 + (-1)^k\right) + e^{j\frac{\pi k}{2}} \right)$$

$S_p(0) = ?$

ketov@gmx.de

b)

$$S_d(k) = \sum_{n=0}^{11} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk}$$

Periode finden:

$$s(n) \overset{!}{=} s(n+T)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \overset{!}{=} \sin\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{2\pi}{3}T\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{2}T\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}T = 2\pi k_1 \wedge \frac{\pi}{2}T = 2\pi k_2$$

$$\Leftrightarrow T = 3k_1 \wedge T = 4k_2$$

$$\Rightarrow k_1 = 4 \wedge k_2 = 3. \quad \Rightarrow T = 12$$

$$= \sum_{n=1}^{11} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) e^{-j\frac{\pi n k}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 \cdot e^{-j\cdot\frac{\pi k}{6}\cdot 1} + \frac{-\sqrt{3}}{2}(-1)e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 2}$$

$$+ 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} 1 e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 4} + \frac{-\sqrt{3}}{2}(0)e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 5}$$

$$+ 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}(-1)e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 7} + \frac{-\sqrt{3}}{2} 1 e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 8}$$

$$+ 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}(-1)e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 10} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot 0\, e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 11}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[e^{-j\frac{\pi k}{3}} + e^{-j\frac{2\pi k}{3}} - e^{-j\frac{7\pi k}{6}} - e^{-j\frac{4\pi k}{3}} - e^{-j\frac{5\pi k}{3}}\right]$$

$$\overset{!}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}\left[z^k - (z^{\alpha})^k\right]\left((-1)^k - 1\right)$$

d)

$$S_d(k) = \sum_{n=0}^{11} \left(1-\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{-j\frac{\pi}{6}k\cdot 1} + 0 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 3}$$

$$+ 1\, e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 4} + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 5} + 2 e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 6}$$

$$+ \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 7} + 1 e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 8} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 9}$$

$$+ 0 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{-j\frac{\pi k}{6}\cdot 11}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi k}{6}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi k}{3}} + e^{-j\frac{2\pi k}{3}}$$

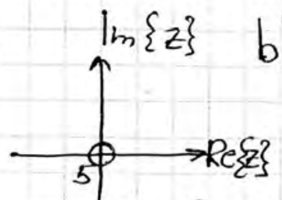
$$+ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{5\pi k}{6}} + 2e^{-j\pi k} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{7\pi k}{6}}$$

$$+ e^{-j\frac{4\pi k}{3}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{3\pi k}{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{11\pi k}{6}} \quad (\checkmark)$$

Aufgabe 4.13 (Zusatz) (Hausaufgabe)

08.07.10

a) $s(n) = \delta(n+5) \quad \circ\!-\!\bullet \quad S(z) = z^{5}$

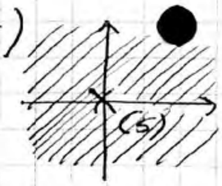


=> 5-fache NST im Ursprung

KB = ?
KB = ganze Z-Ebene außer $(z = \infty)$

wg zeitbegrenztes Signal

b) $s(n) = \delta(n-5) \quad \circ\!-\!\bullet \quad S(z) = z^{-5}$



=> 5-facher Pol im Ursprung

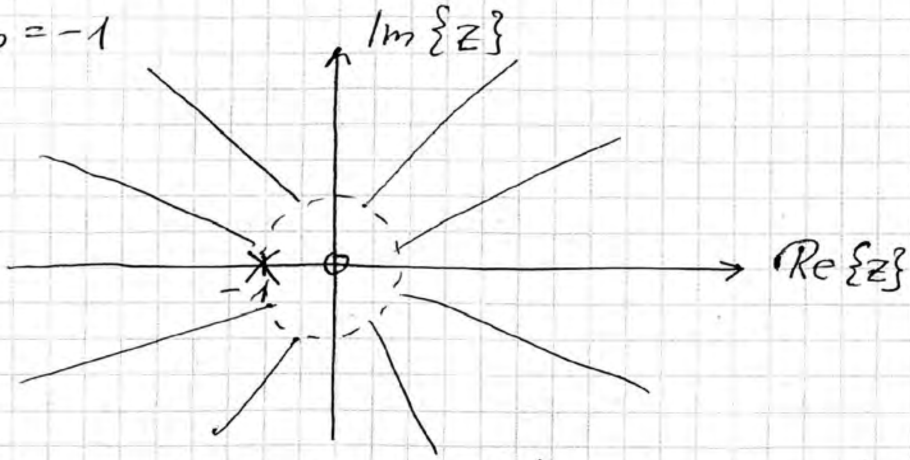
KB: $\boxed{|z| > 0}$

c) $s(n) = (-1)^{n}\,\varepsilon(n)$

$$S(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$

NST: $z_N = 0$

Pol: $z_p = -1$



KB: $|z| > 1$; da kausales Signal

d) $s(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \varepsilon(n+3) = \delta(n+3) * \left(\varepsilon(n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)$

$$= \delta(n+3) * \left(\varepsilon(n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) \cdot 4$$

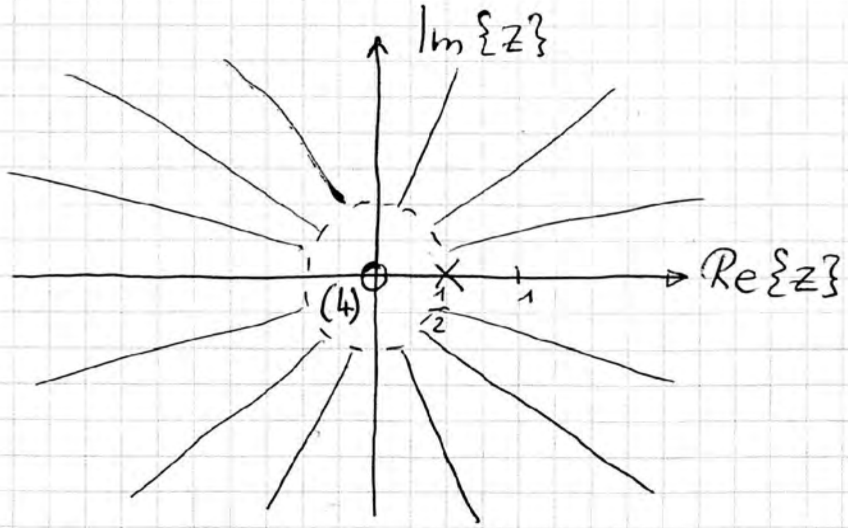
$$S(z) = z^{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{8z^{4}}{2z-1}$$

$$= 4\frac{z^{4}}{z-1/2}$$

NST: $z_N = 0$ (4-fach)

Pol: $z_p = 1/2$

ketov@gmx.de



KB: $|z| > \frac{1}{2}$

e) $s(n) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon(-n-2)$

$$= \left[\varepsilon(-n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] * \delta(n+1)$$

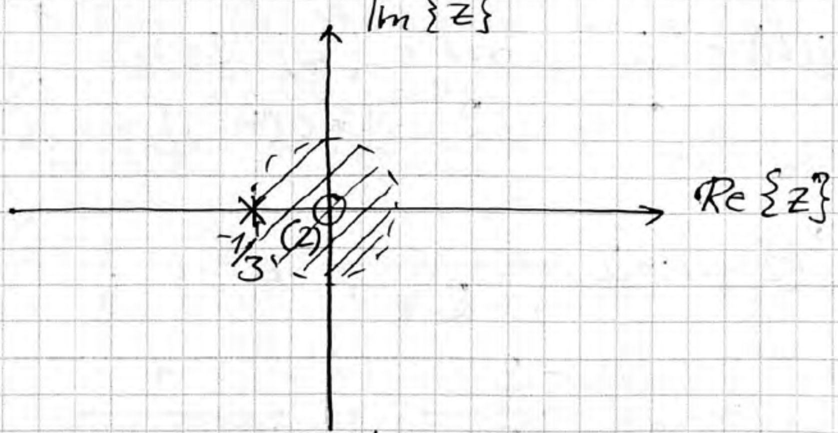
$$= 3\left(-\varepsilon(-n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) * \delta(n+1)$$

$$S(z) = 3 \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \cdot z^1$$

$$= \frac{9z^2}{3z+1} = \frac{3z^2}{z+1/3}$$

NST: $z_N = 0$ (doppelt)

Pole: $z_P = -1/3$



KB: $|z| < \frac{1}{3}$, da antikausal

ketov@gmx.de

f) $s(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(3-n)$

$$= \left(\varepsilon(-n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n+4}\right) * \delta(n-4)$$

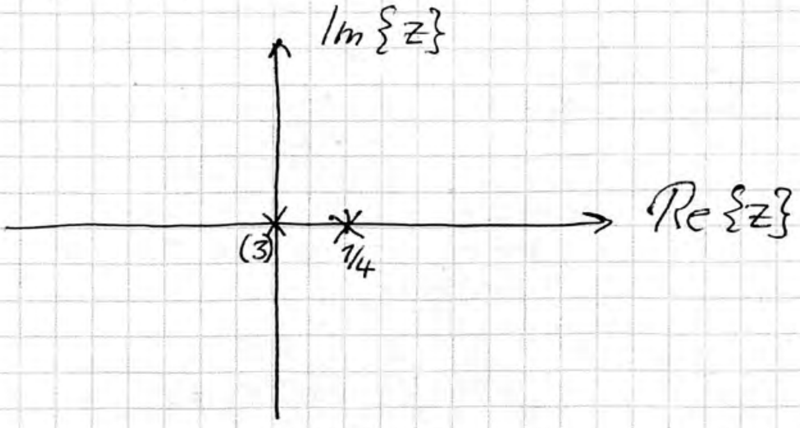
$$S(z) = z^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{4^4}\right) \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{4}\right)z^{-1}}$$

$$= -\frac{1}{4^4} \cdot \frac{4z^{-3}}{4z-1} = -\frac{1}{4^4}\,\frac{z^{-3}}{z-1/4}$$

$$= \frac{1}{z^3(1/4 - z)\,2^8} = \frac{\frac{1}{16} z^{-4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

NST: keine bei $z=\infty$

Pole: $z_{p1,2,3} = 0$, $z_{p4} = 1/4$



antikausaler Teil $z_p = 2$

$\Rightarrow$ Kein Konvergenzgebiet

kausaler Teil $z_p = 1/4$

g) $s(n) = 2^n \varepsilon(-n) + \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon(n-1)$

$$= \left[\varepsilon(-n-1)\,2^{n+1}\right] * \delta(n-1) + \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\varepsilon(n)\right] * \delta(n-1)$$

$$S(z) = -2\,\frac{1}{1-2z^{-1}} \cdot z^{-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \cdot z^{-1}$$

$$= \frac{-2}{z-2} + \frac{1}{4z-1}$$

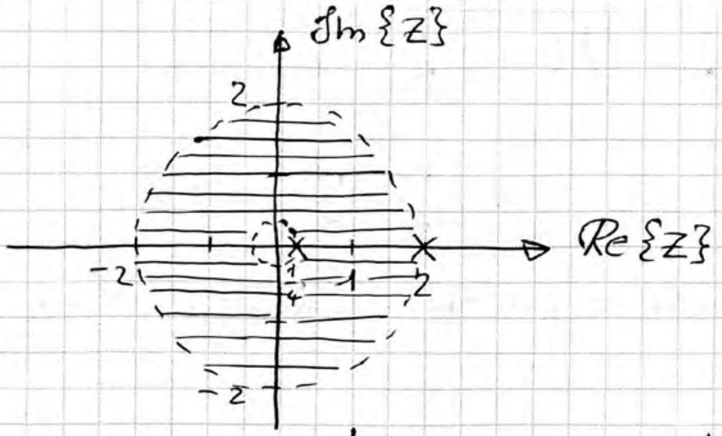
$$S(z) = \frac{\frac{1}{4}}{z-\frac{1}{4}} - \frac{2}{z-2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}z - \frac{1}{2} - 2z + \frac{1}{2}}{(z-\frac{1}{4})(z-2)} = \frac{-\frac{7}{4}z}{(z-\frac{1}{4})(z-2)}$$

NST: $z_N = 0$

Pole: $z_{p_1} = \frac{1}{4}$ (rechtsseitig)

$z_{p_2} = 2$ (linksseitig)



$\Rightarrow$ KB: $\frac{1}{4} < |z| < 2$

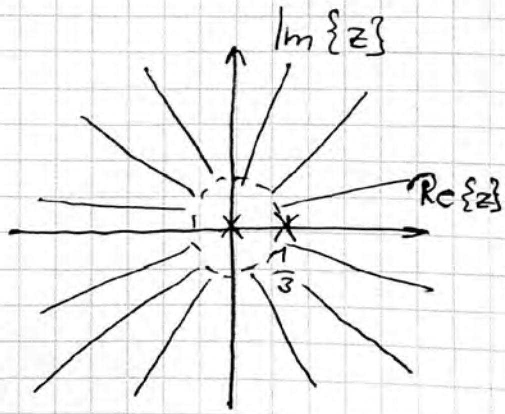
h) $g(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \varepsilon(n-2) = \left[\varepsilon(n)\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] * \delta(n-2)$

$$S(z) = z^{-2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}} = \frac{3}{(z3-1)z}$$

$$= \frac{1}{z(z-1/3)}$$

NST: keine

Pole: $z_{p_1} = 0$; $z_{p_2} = \frac{1}{3}$



$\Rightarrow$ KB: $|z| > \frac{1}{3}$

ketov@gmx.de

Aufgabe 4.14 (Zusatz / Hausaufgabe)

a) $$S(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{2}$$ (rechtsseitig)

$$= \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{A}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{A - \frac{A}{2} z^{-1} + B + \frac{B}{2} z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{(A + B) + z^{-1}\left(\frac{B}{2} - \frac{A}{2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = 1 \quad \wedge \quad \frac{B}{2} - \frac{A}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 = B - (1 - B) = 2B - 1 \quad \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$A = \frac{3}{2}$$

$$S(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$\bullet\!-\!\circ$

$$s(n) = \underline{\underline{\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \varepsilon(n) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \varepsilon(n)}}$$

b) ✓ $$S(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}} \quad , \; |z| < \frac{1}{2}$$

(linksseitig)

$$\overset{a)}{=} \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$s(n) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(-n-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(-n-1) \quad ✓$$

c) $$S(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \quad ; \; |z| > \frac{1}{2}$$

(rechtsseitig)

$$= \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$s(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n)\right] * \delta(n-1) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \varepsilon(n-1) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \varepsilon(n)$$

(✓) Minus fehlt

d) ✓ $$S(z) = \frac{z^{-1} - 1/2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \quad ; \; |z| < \frac{1}{2}$$

(linksseitig)

$$= \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$s(n) = \delta(n-1) * \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(-n-1)\right] + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(-n-1)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \varepsilon(-n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \varepsilon(-n-1) \quad ✓$$

e) $$S(z) = \frac{z^{-1} - 1/2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad ; |z| > \frac{1}{2}$$

(rechtsseitig)

$$= 2\,\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} - \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\cdot z$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$s(n) = 2\cdot n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n) - \left[n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\varepsilon(n)\right] * \delta(n+1)$$

$$= \underline{\underline{2n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\varepsilon(n) - (n+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\varepsilon(n+1)}}\ .\checkmark$$

f) $$S(z) = \frac{z^{-1} - 1/2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad ; |z| < \frac{1}{2}$$

(linksseitig)

$$= 2\,\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} - \frac{1/2\,z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\cdot z$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$s(n) = -2\cdot n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\varepsilon(-n-1) + \left[n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\varepsilon(-n-1)\right] * \delta(n+1)$$

$$= \underline{\underline{-2n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\varepsilon(-n-1) + (n+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\varepsilon(-n-2)}}$$ (f)

(v)

ketov@gmx.de

Aufgabe 4.15

a) $\boxed{s(n) \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Pole und NST paarweise komplex konjugiert}}$

b) 2 Pole

c) $z_{N_{1,2}} = 0 \qquad \Rightarrow X(z) = A \cdot \dfrac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$

d) $z_{p_1} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} \overset{a)}{\Longrightarrow} z_{p_2} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}}$

e) $X(1) = A \cdot \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})} \overset{!}{=} \dfrac{8}{3}$

$$z_{p_1} \overset{Tab}{=} \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} \overset{Tab}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_{p_2} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} \overset{Tab}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \cancel{j\frac{\sqrt{3}}{4}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cancel{j\frac{\sqrt{3}}{16}} - \cancel{j\frac{\sqrt{3}}{4}} + \cancel{j\frac{\sqrt{3}}{16}} + \frac{3}{16}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{X(z) = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{j\pi/3})(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/3})}}}$$

KB: $|z| > \frac{1}{2}$; da rechtsseitig

$|z_p| = \frac{1}{2}$

ketov@gmx.de

Aufgabe 4.17

(1)

$$H_1(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2})(1 - \frac{2}{3} z^{-1} + \frac{1}{9} z^{-2})} = \frac{G(z)}{S(z)}$$

a)

$$S(z) = G(z)\left[1 - \frac{2}{3} z^{-1} + \frac{1}{9} z^{-2} - z^{-1} + \frac{2}{3} z^{-2} - \frac{1}{9} z^{-3} + \frac{1}{4} z^{-2} - \frac{2}{12} z^{-3} + \frac{1}{36} z^{-4}\right]$$

$$= G(z)\left[1 - \frac{5}{3} z^{-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{9}\right)}_{= \frac{9+28}{36} = +\frac{37}{36}} z^{-2} - \frac{5}{18} z^{-3} + \frac{1}{36} z^{-4}\right]$$

keine DGL

$$\Rightarrow s(n) = g(n) - \frac{5}{3} g(n-1) + \frac{37}{36} g(n-2) - \frac{5}{18} g(n-3) + \frac{1}{36} g(n-4)$$

$$g(n) = s(n) + \frac{5}{3} g(n-1) - \frac{37}{36} g(n-2) + \frac{5}{18} g(n-3) - \frac{1}{36} g(n-4)$$

($\hat{=}$ Differenzengleichung)
($g(n) \ldots = s(n) \ldots$)

b)

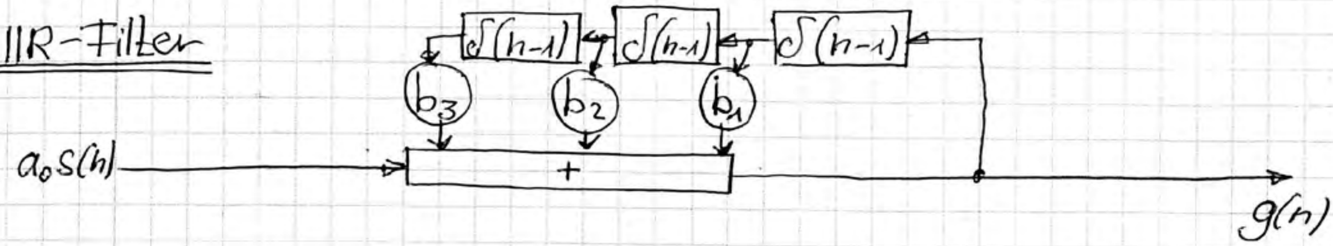
$$H_1(z) = \frac{\sum_{q=0}^{Q} a_q z^{-q}}{1 - \sum_{p=1}^{P} b_p z^{-p}} \quad \begin{matrix} \} \Rightarrow \underline{\underline{FIR}} \\ \} \Rightarrow \underline{\underline{IIR}} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{FIR}$: $a_0 = 1$; $a_q = 0$ für $q \neq 1$

$\boxed{IIR}$: $b_1 = \frac{5}{3}$; $b_2 = -\frac{37}{36}$; $b_3 = \frac{5}{18}$; $b_4 = -\frac{1}{36}$

$$g(n) = \sum_{q=0}^{Q} a_q s(n-q) + \sum_{p=1}^{P} b_p g(n-p)$$

IIR-Filter



c) Hintereinander-Schaltung möglich falls:

$$H_1(z) = H_{11}(z) \cdot H_{12}(z)$$

$$\left.\begin{array}{ll} H_{11}(z) \Rightarrow & b_1 = 1 \; ; \; b_2 = -\frac{1}{4} \quad ; a_0 = 1 \\ H_{12}(z) \Rightarrow & b_1 = \frac{2}{3} \; ; \; b_2 = -\frac{1}{9} \quad ; a_0 = 1 \end{array}\right\} \hat{=}\, p = 2$$

d) 4 - IIR - Filter

$$H_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$= H_{13}^2(z) \cdot H_{14}^2(z)$$

$H_{13}(z) \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2} \; ; \quad a_0 = 1 \quad ; p = 1$

$H_{14}(z) \Rightarrow b_1 = \frac{1}{3} \; ; \quad a_0 = 1 \quad ; p = 1$

ketov@gmx.de

(2)

$$H_2(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2})(1 - \frac{1}{2} z^{-1} + z^{-2})} = \frac{G(z)}{S(z)}$$

a)

$$S(z) = G(z)\left[1 - \frac{1}{2} z^{-1} + z^{-2} - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} - z^{-3} + \frac{1}{2} z^{-2} - \frac{1}{4} z^{-3} + \frac{1}{2} z^{-4}\right]$$

$$= G(z)\left[1 - \frac{3}{2} z^{-1} + 2 z^{-2} - \frac{\cancel{3}5}{4} z^{-3} + \frac{1}{2} z^{-4}\right]$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(n) = s(n) + \frac{3}{2} g(n-1) - 2 g(n-2) + \frac{5}{4} g(n-3) - \frac{1}{2} g(n-4)}}$$

b)

FIR: $a_0 = 1$

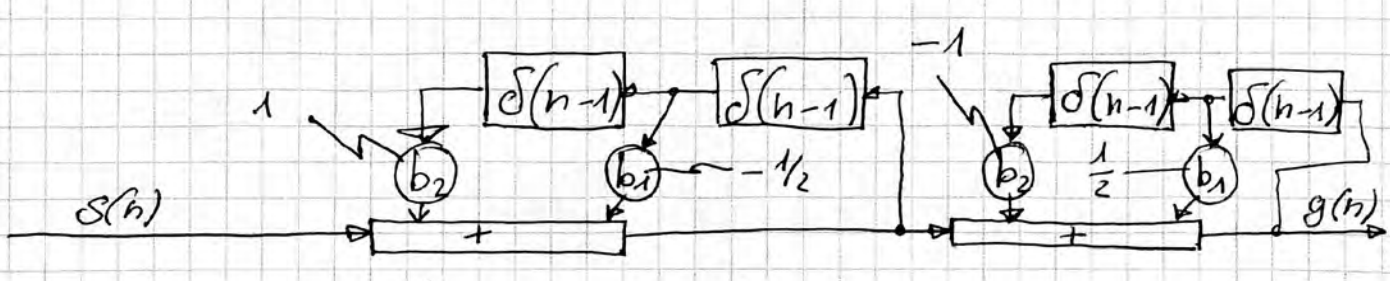
IIR: $b_1 = \frac{3}{2}$; $b_2 = -2$; $b_3 = +\frac{5}{4}$; $b_4 = -\frac{1}{2}$

c)

$H_{21}(z) \Rightarrow b_1 = 1$; $b_2 = -\frac{1}{2}$

$p = 2$

$H_{22}(z) \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}$; $b_2 = -1$



d) $$H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1-j}{2} z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+j}{2} z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+j\sqrt{15}}{4} z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-j\sqrt{15}}{4} z^{-1}}$$

$\Longrightarrow$ komplexe Koeffizienten

$\Longrightarrow$ hintereinanderschaltung von 4 IIR-Filtern nicht möglich

ketov@gmx.de

Aufgabe 4.18 (Zusatz)

H_1 kausal realisierbar ✓

H_2 nicht kausal ✓

H_3 kausal realisierbar ✓

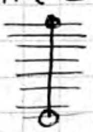
H_4 nicht kausal realisierbar ✓

falls Nennerpotenz > Zählerpotenz => realisierbar

Aufgabe 4.19 (Zusatz) ✓

$$\left.\begin{array}{l} z_P = a < 1 \\ z_N = \frac{1}{a} > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow H(z) = K \cdot \frac{z - \frac{1}{a}}{z - a}$$

$$H(z) = K \cdot \frac{1}{1 - a z^{-1}} - K \cdot \frac{\frac{1}{a} z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$$



~~h(n)~~

$$H(z = e^{j2\pi f}) = K \cdot \frac{e^{j2\pi f} - \frac{1}{a}}{e^{j2\pi f} - a} = \frac{K}{a} \frac{a e^{j2\pi f} - 1}{e^{j2\pi f} - a}$$

$$|H(f)| = \left|\frac{K}{a}\right| \frac{\sqrt{(a \cdot \cos(2\pi f) - 1)^2 + \sin^2(2\pi f) a^2}}{\sqrt{(\cos(2\pi f) - a)^2 + \sin^2(2\pi f)}}$$

$$= \left|\frac{K}{a}\right| \cdot \sqrt{\frac{a^2 \cos^2(2\pi f) - 2a\cos(2\pi f) + 1 + \sin^2(2\pi f) a^2}{\cos^2(2\pi f) - 2a\cos(2\pi f) + a^2 + \sin^2(2\pi f)}}$$

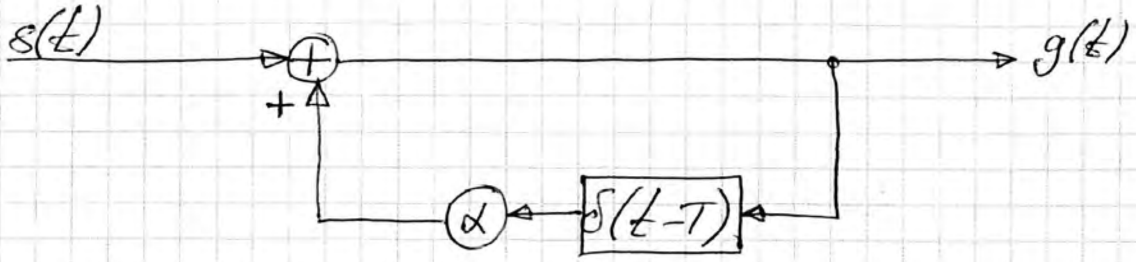
$$= \left|\frac{K}{a}\right| \cdot \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos(2\pi f)}}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos(2\pi f)}} = \left|\frac{K}{a}\right| = \text{const} \quad \checkmark \quad \square$$

Aufgabe 5.1

„Echo" 15.07.10 Kleingruppe ⑥

$$g(t) = s(t) + \alpha g(t-T) \quad ; 0<\alpha<1$$

a)



Vgl. zeitdiskreten Fall

Impulsantwort: $s(t) := \delta(t) \Rightarrow$ Gesucht $g(t)$?

$$\Rightarrow g(t) = h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t-T) + \alpha^2\delta(t-2T) + \alpha^3\delta(t-3T) + \dots$$

$$\Rightarrow h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \delta(t-nT)$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & ; \text{ für } |\alpha| < 1 \\ \infty & ; \text{ für } |\alpha| \geq 1 \end{cases}$$

c)

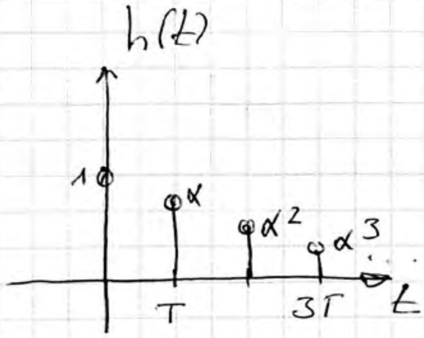
$$g(t) * h'(t) = s(t)$$

„Wie Impulsantwort finden?"

$\Rightarrow$ „Kein Patentrezept!" (intelligentes Sehen)

ketov@gmx.de

Es muss gelten:



$$h(t) * h'(t) = \delta(t)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{h'(t) = \delta(t) - \alpha \cdot \delta(t-T)}}$$

Aufgabe 5.2

$$f_g = 50$$

Zu $s(t)$: $T = \frac{1}{6}$, $f_0 = \frac{1}{T} = 6$

$$k \cdot f_0 > f_g \quad ; \; k > \frac{f_g}{f_0} = 8{,}\overline{3}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{S_p(k) = 0 \quad \text{für} \quad k > 8}}$$

Aufgabe 5.3

$$H(f) = \frac{\sin^2(6\pi f)\cos(2\pi f)}{(2\pi f)^2}$$

$$= 9 \cdot \mathrm{si}^2(6\pi f)\cos(2\pi f)$$

$$\cancel{h(t) = 9\,\frac{1}{6}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{6}\right) * \left[\delta(t+1) + \delta(t-1)\right]\frac{1}{2}}$$

$$\cancel{= \frac{3}{4}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t+1}{6}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{6}\right)\right]}$$

$$H(f) = 9\,\mathrm{si}^2(6\pi f)\cos(2\pi f)$$

$$\bullet\!-\!\circ$$

$$h(t) = 9\cdot\frac{1}{6}\Lambda\left(\frac{t}{6}\right) * \frac{1}{2}\left[\delta(+t-1)+\delta(t+1)\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{4}\left[\Lambda\left(\frac{t-1}{6}\right)+\Lambda\left(\frac{t+1}{6}\right)\right]}}$$

Aufgabe 5.4

$$H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f} \quad ;$$

Es gilt:

$$S(f)\cdot H(f) = G(f)$$

$$g(t) = e^{-3t}\varepsilon(t) - e^{-4t}\varepsilon(t)$$

$$\circ\!-\!\bullet$$

$$G(f) = \frac{1}{3+j2\pi f} - \frac{1}{4+j2\pi f}$$

$$S(f) = \frac{G(f)}{H(f)} = 1 - \frac{3+j2\pi f}{4+j2\pi f}$$

$$= \frac{4+j2\pi f-3-j2\pi f}{4+j2\pi f} = \frac{1}{4+j2\pi f}$$

$$\bullet\!-\!\circ$$ LTI-System, kausal

$$\underline{\underline{s(t) = \varepsilon(t)\,e^{-4t}}}$$

ketov@gmx.de

Aufgabe 5.5

$$h(t) = \frac{\sin(4(t-1))}{t-1} = 4\,si(4(t-1))$$
$$= 4\,si(4t) * \delta(t-1)$$

$$H(f) = 4 \cdot \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2\cdot\frac{2}{\pi}}\right) \cdot e^{-j2\pi f} \qquad ; f_g = \frac{2}{\pi}$$

$$= \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\pi f}{4}\right) e^{-j2\pi f}$$

a) $s_1(t) = \cos\left(6t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(6t)$

$$S_1(f) = -\frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{3}{\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{3}{\pi}\right)\right]$$

$\Rightarrow f_0 = \frac{3}{\pi}$ liegt außerhalb des Filters $\left(\frac{3}{\pi} > f_g\right)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(t) = 0}}$$

b) $s_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt) \quad \Rightarrow f_0 = \frac{3k}{2\pi}$

$\Rightarrow$ Nur $k = 1$ bleibt übrig, Frequenzanteile von $k \neq 1$ werden abgeschnitten

$$\Rightarrow s_2'(t) = \frac{1}{2}\sin(3t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(t) = \frac{\pi}{2}\sin(3(t-1))}}$$

ketov@gmx.de

c) $$s_3(t) = \frac{\sin(4(t+1))}{t+1} = 4\,\mathrm{si}(4(t+1))$$

$$= 4\,\mathrm{si}(4t) * \delta(t+1)$$

$$S_3(f) = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2\cdot\frac{2}{2\pi}}\right) \cdot e^{j2\pi f}$$

$$= \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{f\pi}{4}\right) e^{j2\pi f} = \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{f\pi}{4}\right) e^{j2\pi f}$$

$$G(f) = S_3(f)\cdot H(f) = \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{f\pi}{4}\right) e^{j2\pi f} \cdot \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\pi f}{4}\right) e^{-j2\pi f}$$

$$= \pi^2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f\pi}{4}\right) = \pi^2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{\frac{4}{\pi}}\right)$$

$$g(t) = \pi^2\,\mathrm{si}\left(\frac{4}{\pi}\right) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 2 = \pi^2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\pi}\,\mathrm{si}\left(\overset{2\pi\, t\frac{2}{\pi}}{2\pi \frac{2}{\pi} t}\right)$$

$$\underline{\underline{= 4\pi\,\mathrm{si}(4t)}}$$

d) $$s_4(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2 = \frac{\sin^2(2t)}{4t^2} \cdot 4\frac{1}{\pi^2}$$

$$= \mathrm{si}^2(2t) \cdot \frac{4}{\pi^2} = \frac{2}{\pi}\mathrm{si}(2t) \cdot \frac{2}{\pi}\mathrm{si}(2t)$$

$$S_4(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2\frac{1}{\pi}}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2\cdot\frac{1}{\pi}}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{+1} \Lambda\left(\frac{t}{\frac{2}{\pi}}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} \Lambda\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$G_4(f) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} \Lambda\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\pi f}{4}\right) e^{-j2\pi f}$$

$$= 2\,\Lambda\left(\frac{\pi t}{2}\right) e^{-j2\pi f} = e^{-j2\pi f}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{\pi t}{2}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right]$$

$$2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$g_4(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \mathrm{si}^2\left(2\pi\frac{1}{\pi}t\right) \cdot \left(2\cdot\frac{1}{\pi}\right)^2 * \delta(t-1)$$

$$g_4(t) = \frac{4}{\pi} \, si^2(2(t-1))$$

$$= \frac{4}{\pi} si^2(2(t-1)) = s_4(t-1) \cdot \frac{1}{\pi}$$

Aufgabe 6.1

a)

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \qquad ; \; s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$|s_1(t) + s_2(t)|^2 = s_1^2(t) + s_2^2(t) + \underbrace{s_1(t) s_2^*(t)}_{\hat{=}\, \varphi_{12}(0)} + \underbrace{s_2^*(t) s_1(t)}_{\hat{=}\, \varphi_{21}(0)}$$

$$= |s_1(t)|^2 + |s_2(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\{\varphi_{12}(0)\}$$

$$\boxed{E_{ges}} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |s_2(t)|^2 dt + 2\,\mathrm{Re}\{\varphi_{12}(0)\}$$

$$\boxed{= E_1 + E_2 + 2\,\mathrm{Re}\{\varphi_{12}(0)\}} \quad \Big\} \text{ Merke!}$$

b)

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \underbrace{|s(t)|^2}_{= |s_1(t) + s_2(t)|^2} dt$$

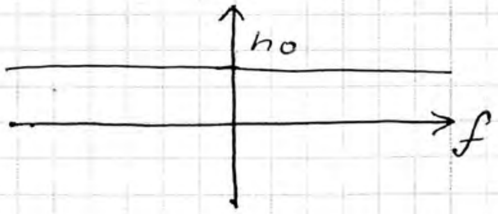
$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s_1(t)|^2 dt + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s_2(t)|^2 dt$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\{\varphi_{12}(0)\}$$

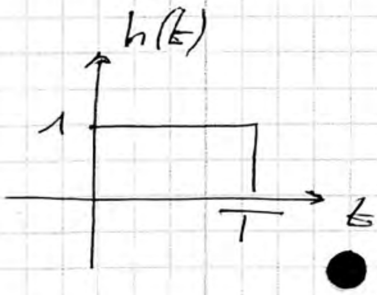
ketov@gmx.de

Aufgabe 6.2

„Weißes Rauschen" ≙



$$g(t) = s(t) * h(t)\Big|_{t=T} = \int_0^T s(\tau)\,d\tau$$



$$h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$$

Leistung Allgemein:

$$L = \mathcal{E}\{s^2(t)\} = \varphi_{ss}(0)$$

{ Autokorrelationsfunktion an der Stelle 0

$$L_S = \mathcal{E}\{g^2(t)\} = \varphi_{gg}(0) = \left[\varphi_{ss}(\tau) * \varphi_{hh}^E(\tau)\right]\Big|_{\tau=0}$$

$$= \left[\left(N_0\,\delta(\tau)\right) * \left(h^*(-\tau) * h(\tau)\right)\right]\Big|_{\tau=0}$$

$$= \left[\left(N_0\,\delta(\tau)\right) * \underbrace{h(-\tau) * h(\tau)}_{= T\,\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)}\right]\Big|_{\tau=0}$$

$$= \underline{\underline{N_0 \cdot T}}$$

(≙ Augenblicksleistung am Ausgang)

Aufgabe 6.3

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_S(x)\,dx \overset{!}{=} 1 = \int_{-1/2}^{1/2} a\Lambda(2x)\,dx$$

$$= a\int_{-1/2}^{1/2} 1-|2x|\,dx = 2a\int_{0}^{1/2} 1-2x\,dx = 2a\left[x-x^2\right]_0^{1/2}$$

$$= 2a\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{a}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$$

b)
$$P_S(x) = \int_{-\infty}^{x} p_S(\tau)\,d\tau = 0 \quad \text{für } x<-\frac{1}{2}$$

$$= 2\int_{-1/2}^{x} 1-|2\tau|\,d\tau = 2\left[\tau+\tau^2\right]_{-1/2}^{x}$$

$$= 2\left(x+x^2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\right) = 2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$$
$$\text{für } -\frac{1}{2}\le x<0$$

$$= \frac{1}{2}+2\int_{0}^{x} 1-2\tau\,d\tau = \frac{1}{2}+2\left[\tau-\tau^2\right]_0^{x}$$

$$= \frac{1}{2}+2x-2x^2 \quad \text{für } 0\le x<\frac{1}{2}$$

$$= 1 \quad \text{für } x>\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad P_s(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < -\frac{1}{2} \\ 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) & ; \quad -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + 2x - 2x^2 & ; \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & ; \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

c) Mittelwert ($\hat{=}$ Erwartungswert)

$$\mathcal{E}\{s(t)\} = m_s = \int_{-\infty}^{\infty} x \, p_s(x) \, dx$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} x \, 2(1 - |2x|) \, dx = 2\int_{-1/2}^{0} x + 2x^2 \, dx + 2\int_{0}^{1/2} x - 2x^2 \, dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}\right]_{-1/2}^{0} + 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_{0}^{1/2}$$

War bei Verteilung zu erwarten!

$$= -2\left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3}\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) = 0$$

falls $m_s = 0$

Quadratischen Mittelwert ($\hat{=}$ Varianz) $\hat{=} L_s - m_s^2$

$$\mathcal{E}\{s^2(t)\} = L_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x) \, dx = \sigma^2$$

$$= 2\int_{\cancel{-\infty}\,-1/2}^{\cancel{\infty}\,1/2} x^2 - x^2 \cdot 2|x| \, dx = 2\int_{-1/2}^{0} x^2 + 2x^3 \, dx + 2\int_{0}^{1/2} x^2 - 2x^3 \, dx$$

ketov@gmx.de

$$= 2\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4}\right]_{-1/2}^{0} + 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right]_{0}^{1/2}$$

$$= -2\left(-\frac{1}{8\cdot 3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\right) + 2\left(\frac{1}{3\cdot 8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{4-3}{24}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

Streuung (≙ Standardabweichung)

$$\underline{\underline{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{24}}}}$$

d) Gesucht:

$$P(0 < s(t_1) \leq 0{,}3)$$

$$= P(s(t_1) \leq 0{,}3) - P(s(t_1) \leq 0)$$

$$= P_s(0{,}3) - P_s(0) = \frac{1}{2} + 2\cdot 0{,}3 - 2\cdot 0{,}3^2 - \frac{1}{2}$$

$$= 0{,}3(2 - 2\cdot 0{,}3) = 0{,}3\cdot(2 - 0{,}6)$$

$$= 0{,}3\cdot 1{,}4 = \cancel{0{,}54}\ \underline{\underline{0{,}42 \mathrel{\widehat{=}} 42\%}}$$

ketov@gmx.de