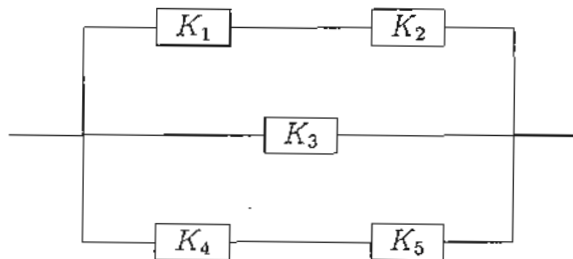


Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

15.05/06

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Daniel Bielefeld, Gernot Fabeck

Aufgabe 1. Man betrachte ein Netzwerk aus 5 Komponenten (siehe Abb.). Jede der Komponenten $K_1, \dots, K_5$ ist mit Wahrscheinlichkeiten $P(K_1) = 0.7$, $P(K_2) = 0.6$, $P(K_3) = 0.5$, $P(K_4) = 0.8$, $P(K_5) = 0.9$ intakt. Die Ereignisse, dass einzelne Komponenten ausfallen, seien stochastisch unabhängig. Das System sei intakt, wenn mindestens ein Pfad intakt ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System intakt ist.



Aufgabe 2. Die Zufallsvariablen S_1, S_2, S_3 seien stochastisch unabhängig und identisch $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt, $\lambda > 0$. Der Zufallsvektor $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ sei definiert durch

$$(Y_1, Y_2, Y_3) = (S_1 + S_2, S_2 + S_3, S_1 + S_3).$$

Berechnen Sie eine gemeinsame Dichte von (Y_1, Y_2, Y_3) .

Aufgabe 3. Es sei $X = (X_1, X_2)$ ein diskreter Zufallsvektor mit

$$P(X = (0, 0)) = \frac{1}{4}, \quad P(X = (0, 1)) = \frac{1}{2}, \quad P(X = (1, 0)) = 0, \quad P(X = (1, 1)) = \frac{1}{4}.$$

Berechnen Sie in bit, d.h. für $\log = \log_2$

- $H(X_1, X_2)$,
- $H(X_1), H(X_2)$,
- $H(X_1|X_2), H(X_2|X_1)$,
- $H(X_2) - H(X_2|X_1)$,
- $I(X_1, X_2)$.

und diskret

Aufgabe 4. Es seien die Zufallsvariablen X_1 und X_2 identisch verteilt aber nicht notwendig unabhängig. Ferner sei

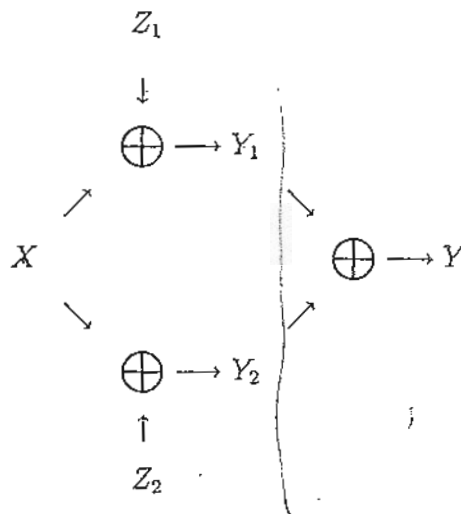
$$\rho = 1 - \frac{H(X_2|X_1)}{H(X_1)}.$$

- a) Zeigen Sie, dass gilt $\rho = \frac{I(X_1, X_2)}{H(X_1)}$.
- b) Zeigen Sie, dass gilt $0 \leq \rho \leq 1$.
- c) In welchem Fall gilt $\rho = 0$?

Aufgabe 5. Es sei X eine Quelle mit Quellalphabet $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_7\}$ und Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i) = p_i$, $(p_1, \dots, p_7) = (0.50, 0.26, 0.11, 0.04, 0.04, 0.03, 0.02)$.

- a) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Kode für X .
- b) Berechnen Sie die erwartete Kodewortlänge des Kodes und vergleichen Sie diese mit $H(X)$.

Aufgabe 6. Gegeben sei folgender reeller Gaußkanal:



mit Leistungsbeschränkung $E[X^2] \leq L$.

- a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals für den Fall

$$(Z_1, Z_2)' \sim N_2(0, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \rho \in (-1, 1).$$

- b) Wie lautet die Kapazität für $\rho = 0$, $\rho \rightarrow 1$, $\rho \rightarrow -1$?

Hinweis:

Verwenden Sie, dass $Z_1 + Z_2$ normalverteilt ist und bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz.

Aufgabe 7. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit drei Empfangsantennen und drei Sendeantennen und Leistungsbeschränkung $L = 5$. Für die additive Störung gelte

$$Z \sim \text{SCN}(0, 12 \cdot I_3).$$

Die Kanalmatrix H sei

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.
- b) Für welche Inputverteilung wird sie angenommen?

Aufgabe 8. Ein Handy-Hersteller produziert zwei verschiedene Mobilfunkgeräte M_1 und M_2 . Der Gewinn für M_1 beträgt 30 €, für M_2 50 €. Die Montage der zugelieferten Einzelteile dauert für M_1 eine Zeiteinheit (ZE), für M_2 zwei ZEen. Insgesamt stehen dafür 170 ZEen zur Verfügung. Für das Verpacken eines Gerätes wird jeweils eine ZE benötigt. Für diesen Vorgang stehen insgesamt 150 ZEen zur Verfügung. Die Oberschale von M_2 wird handsigniert, wofür drei ZEen anfallen. Insgesamt stehen dafür 180 ZEen zur Verfügung. Der Hersteller möchte die Anzahl der produzierten Mobilfunkgeräte M_1 und M_2 so wählen, dass sein Gewinn maximiert wird.

- a) Formulieren Sie das Problem als kombinatorisches Optimierungsproblem.
- b) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.