$\underline{B\,40}$ a) $(*)$ 1 HöMa UG 8 15.06.09

$\Leftrightarrow u'(x) + \sin(x)\, u(x) = \sin^3(x)$ ist lin. inhomogene DGL (Satz 6.7 benutzbar)

$x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u_h'(x) = -\sin(x)\, u_h(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{u_h} \frac{d u_h}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow \int \frac{1}{u_h}\, d u_h = \int -\sin(x)\, dx \,\Big|\int$

$\Rightarrow \ln |u_h| = \cos(x) + \ln c$

$$u_h = e^{\cos(x) + \ln c} = c\, e^{\cos(x)}$$

$\Rightarrow$ Gesamtlsg. mittels Variation der Konstanten

Ansatz: $u(x) = c(x)\, e^{\cos(x)}$

$u'(x) = c'(x)\, e^{\cos(x)} - \sin(x)\, c(x)\, e^{\cos(x)}$

einsetzen in $(*)$ $c'(x)\, e^{\cos(x)} \cancel{- \sin(x)\, c(x)\, e^{\cos(x)}}$

$= \cancel{-\sin(x)\, c(x)\, e^{\cos(x)}} + \sin^3(x)$

$c'(x) = \sin^3(x) \cdot e^{-\cos(x)}$

$c(x) = \int \underbrace{\sin^3(x)\, e^{-\cos(x)}}_{= \sin^2(x) \cdot \sin(x)} dx$

$u(x) = e^{\cos(x)} \underbrace{\int e^{-\cos(x)} \sin^3(x)\, dx}_{c(x)}$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$\overset{\checkmark}{=} \int e^{-\cos(x)} \cdot \sin(x)\, dx - \int e^{-\cos(x)} \sin(x) \cos^2(x)\, dx$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{subst.}\\ y = -\cos(x)\\ \frac{dy}{dx} = \sin(x)\end{array}}$

$= \int e^y\, dy - \int e^y y^2\, dy$

$= e^y - e^y y^2 + 2\int y e^y\, dy$

$= e^y - e^y y^2 + 2 y e^y - 2 e^y + C$

$= e^{-\cos(x)} - e^{-\cos(x)} \cdot \cos^2(x) - 2\cos(x)\, e^{-\cos(x)} - 2 e^{-\cos(x)} + C$

$$\Rightarrow u(x) = e^{\cos(x)} \cdot \left[-e^{-\cos(x)} \cos^2(x) - 2\cos(x) e^{-\cos(x)} - e^{-\cos(x)} + C \right]$$

$$= -\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 + C \cdot e^{\cos(x)}$$

Also löst $u(x) = -\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 + C \cdot e^{\cos(x)}$ die DGL

---

b) $u'(x) = -\tan(x)\, u(x) + \cos^2(x)$, $u(\pi) = 1$

$x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$

Satz 6.8 $\begin{cases} u'(x) + a(x)\, u(x) = f(x) & x \in (x_0, \beta) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow u(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi\right) \cdot \left[\int_{x_0}^{x} f(\xi) \exp\left(\int_{x_0}^{\xi} a(\eta)\, d\eta \right) d\xi + u_0 \right]$$

---

b) mit Satz 6.8 folgt

($\tan(x)$, $\cos^2(x)$ stetig in $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$)

$$u(x) = \exp\left(-\int_{\pi}^{x} \tan(y)\, dy\right) \cdot \left[1 + \int_{\pi}^{x} \cos^2(y) \exp\left(\int_{\pi}^{y} \tan(z)\, dz \right) dy \right]$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{x} \tan(y)\, dy = \Big[-\ln|\cos(x)| \Big]_{\pi}^{x} = -\ln(-\cos(x)) + \ln(1)$$

$\cos(x) < 0$ für $x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$

$$= -\ln(-\cos(x))$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{x} \cos^2(y) \exp(-\ln(-\cos(y)))\, dy = \int_{\pi}^{x} \frac{\cos^2(y)}{-\cos(y)}\, dy$$

$$= -\int_{\pi}^{x} \cos(y)\, dy = \Big[-\sin(y) \Big]_{\pi}^{x} = -\sin(x)$$

$$\Rightarrow u(x) = \exp\left(+\ln\left(-\cos(x)\right)\right)\left(1-\sin(x)\right)$$
$$= \cos(x)\left(\sin(x)-1\right)$$

---

c) Löse homogene DGL:

$$u_h'(x) = \frac{x}{1+x^2}\, u_h(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{u_h'(x)}{u_h(x)} = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|u_h| = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln C$$

$$u_h(x) = C\cdot \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = C\cdot\sqrt{1+x^2}$$

Gesamtlsg. (Variation der Konstanten)

Ansatz: $u(x) = c(x)\cdot\sqrt{1+x^2}$

$$u'(x) = c'(x)\cdot\sqrt{1+x^2} + c(x)\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\overset{!}{=} \frac{x}{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot c(x) + \sqrt{1+x^2}\cosh(x)$$

$$c'(x) = \cosh(x)$$

$$\Rightarrow \quad c(x) = \sinh(x) + C_2\,, \quad C_2\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow u(x) = \left(\sinh(x)+C_2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}$$

Anfangsbedingung: $1 = u(0) = (0+C_2)\sqrt{1} \Rightarrow C_2 = 1$

$$\Rightarrow u(x) = \left(\sinh(x)+1\right)\cdot\sqrt{1+x^2}$$

B41 ④

a) $u'(x) = \frac{x^2}{u(x)}, x \in \mathbb{R}$

ist eine separable DGL:

Die Lsg'en $u(x)$ erhält man, indem man $(f(x) := x^2,\ h(y) := y)$

$$\int h(y)\,dy \Big|_{y=u(x)} = \int f(x)\,dx$$

nach $u(x)$ auflöst.

$$\int y\,dy \Big|_{y=u(x)} = \int x^2 dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 + C_1 \Big|_{y=u(x)} = \frac{1}{3}x^2 + C_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow u(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + C}$$

---

b) $u'(x) = \frac{u^2(x)+1}{x^2+1}$ ist separable DGL

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad g(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\int g(y)\,dy \Big|_{y=u(x)} = \int f(x)\,dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2+1}\,dy \Big|_{y=u(x)} = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\Rightarrow \arctan(y) \Big|_{y=u(x)} = \arctan(x) + C$$

$$u(x) = \cancel{\text{arc}}\tan(\arctan(x) + C)$$

c) $u'(x) = \frac{x - e^{-x}}{u(x) + e^{u(x)}}$ ist sep. DGL

$$\int (y + e^y)\,dy \Big|_{y=u(x)} = \int (x - e^{-x})\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2 + e^y \Big|_{y=u(x)} = \frac{1}{2} x^2 + e^{-x} + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} u^2(x) + e^{u(x)} = \frac{1}{2} x^2 + e^{-x} + C$$

Das ist $u(x)$ in implizierter Form (als Lsg. ok.)

B42 a) $u'(x) = \frac{\log|x|}{1 + u(x)}$, $u(1) = 0$ $\quad x \in (1, \infty)$

Da für $\beta > 1$ $f(x) := \ln(x)$ stetig auf $[1, \beta]$ und

$g(y) := 1 + y$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist, ist dies eine AW-Aufgabe (wie in Satz 6.10)

Löse also $\int_{u(x_0)=0}^{u(x)} g(y)\,dy = \int_{x_0=1}^{x} f(x)\,dx$ nach $u(x)$ auf.

$$\int_0^{u(x)} (1 + y)\,dy = \left[y + \frac{1}{2} y^2\right]_0^{u(x)} = \left[y \ln(y) - y\right]_1^x = \int_1^x 1 \cdot \ln(y)\,dy$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) + \frac{1}{2} u^2(x) = x \ln(x) - x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2(x) + 2u(x) - 2(x\ln(x) - x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = -1 \pm \sqrt{1 + 2(x\ln(x) - x + 1)}$$

wegen $u(1) = 0 \rightarrow u(x) = -1 + \sqrt{1 + 2(x\ln(x) - x + 1)}$

Definitionsbereich von $u(x)$: $1 + 2(x\ln(x) - x) + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x(\ln(x) - 1) \geq -\frac{3}{2}$$

$h(x) = x(\ln(x) - 1)$ $h(1) = -1$ 6

$h'(x) = \ln(x) \cancel{-1} + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \ln(x) > 0$ für $x > 1$

$h(x)$ ist monoton wachsend

$\Rightarrow h(x) \geq -\frac{3}{2}$ für $x \in [1, \beta)$

Also $u(x)$ definiert in $[1, \beta)$

---

b) s. Aufg.

$= \int \frac{1}{y^3} \Big|_{y=u(x)} = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} \Big|_{y=u(x)} = \sqrt{1+x^2} + C$

$-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2(x)} = \sqrt{1+x^2} + C$, $u(0) = -1$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{1}{(-1)^2} = \sqrt{1+0^2} + C$ aus Anfangsbed.

$-\frac{1}{2} = 1 + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{1}{u^2(x)} = \sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{u^2(x)} = -2\sqrt{1+x^2} + 3$

$\Rightarrow u^2(x) = \frac{1}{3 - 2\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow u(x) = \cancel{(+)} - \sqrt{\frac{1}{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

(wegen $u(0) = -1$)

<u>Def. bereich:</u>

$3 - 2\sqrt{1+x^2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + x^2 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 < \frac{5}{4}$

$u(x)$ ist def. für $x \in [0, \frac{\sqrt{5}}{2})$ $\Rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}$