

Zusatzaufg.

Aufgabe 1

$$X = (x_1, x_2)^T \sim N_2(\mu, C)$$

$$E(x_1) = 2, E(x_2) > 0$$

$$E(x_1^2) = 30 \quad E(x_2^2)$$

$$E(x_1 x_2) = 0$$

$$H(x) = \frac{\ln(20)}{2} + \ln(2\pi e)$$

$$H(x) = \frac{1}{2} \ln((2\pi e)^2 \cdot |C|) = \frac{\ln(20)}{2} + \ln(2\pi e)$$

$$\Rightarrow |C| = \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = 20 \quad (4)$$

$$\left[\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - EX)(Y - EY)\} = E(XY) - EX \cdot EY \right]$$

$$\begin{aligned} E(x_1 x_2) &= E\{(x_1 - \mu_1 + \mu_1)(x_2 - \mu_2 + \mu_2)\} = E\{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\} + \mu_1 \mu_2 \\ &= \sigma_{12} + \mu_1 \mu_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{12} + 2\mu_1^2 = 0 \Rightarrow \sigma_{12}^2 = 4\mu_1^4 \quad (1)$$

$$\left[\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \right]$$

$$E(x_1^2) = E\{(x_1 - \mu_1)^2\} + \mu_1^2 = \sigma_{11} + \mu_1^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} + \mu_1^2 = 30 \quad (2)$$

$$E(x_2^2) = E\{(x_2 - \mu_2)^2\} + \mu_2^2 = \sigma_{22} + \mu_2^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{22} + \mu_2^2 = 10 \quad (3)$$

Gleichungen:

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 20 + 4\mu_2^4$$

$$\sigma_{11} = 30 - 4\mu_2^2$$

$$\sigma_{22} = 10 - \mu_2^2$$

$$\Rightarrow \mu_2 = 2, \mu_1 = 4$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = 14, \sigma_{22} = 6, \sigma_{12} = -8$$

$$\Rightarrow \mu = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^T$$

Dabei sei $X = (x_1, x_2, x_3)$ mit:

$$p_X(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{a \cdot b \cdot c} \prod_{[0, a]}(x_1) \cdot \prod_{[0, b]}(x_2) \cdot \prod_{[0, c]}(x_3)$$

Umkehrabbildung:

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_1 \cdot x_2 \quad y_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$\Rightarrow x_1 = y_1 \quad x_2 = \frac{y_2}{y_1} \quad x_3 = \frac{y_3}{y_2}$$

$$\Rightarrow T^{-1}(y_1, y_2, y_3) = \left(y_1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_2} \right)$$

Transformationsatz:

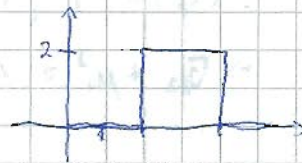
$$p_Y(y_1, y_2, y_3) = \left| \left(\frac{\partial T_i^{-1}}{\partial y_j} \right)_{i,j} \right| p_X(T^{-1}(y_1, y_2, y_3))$$

$$\left| \left(\frac{\partial T_i^{-1}}{\partial y_j} \right)_{i,j} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{y_2}{y_1^2} & \frac{1}{y_1} & 0 \\ 0 & -\frac{y_3}{y_2^2} & \frac{1}{y_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{y_1 \cdot y_2}$$

$$\Rightarrow p_Y(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{y_1 \cdot y_2} \cdot \frac{1}{a \cdot b \cdot c} \prod_{[0, a]}(y_1) \cdot \prod_{[0, b]} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \cdot \prod_{[0, c]} \left(\frac{y_3}{y_2} \right)$$

Aufgabe 3

Impulsantwort: $h(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 1 \\ 2 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 \leq t < \infty \end{cases}$



Weißes Rauschen mit der AKF $R_{ww}(t) = \frac{1}{2} \delta(t)$

Leistungsdichtespektrum:
$$S_{ww}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ww}(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j2\pi f t} dt = 2 \int_1^3 e^{j2\pi f t} dt = 2 \left[-\frac{1}{j2\pi f} \cdot e^{j2\pi f t} \right]_1^3 \\
 &= \frac{1}{j\pi f} \left(e^{-j2\pi f} - e^{-j4\pi f} \right) = \frac{1}{j\pi f} \left(\cos(2\pi f) - i \sin(2\pi f) - \cos(4\pi f) + i \sin(4\pi f) \right) \\
 &= \frac{1}{j\pi f} \left(\cos(2\pi f) - i \sin(2\pi f) - \cos(4\pi f) + i \sin(4\pi f) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |H(f)|^2 &= \frac{1}{\pi^2 f^2} \left[\left(\cos(2\pi f) - \cos(4\pi f) \right)^2 + \left(\sin(4\pi f) - \sin(2\pi f) \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{\pi^2 f^2} \left[\underbrace{\cos^2(2\pi f) - 2\cos(2\pi f)\cos(4\pi f) + \cos^2(4\pi f)}_{=1} + \underbrace{\sin^2(4\pi f) - 2\sin(2\pi f)\sin(4\pi f) + \sin^2(2\pi f)}_{=1} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi^2 f^2} \left[2 - 2\cos(2\pi f)\cos(4\pi f) - 2\sin(2\pi f)\sin(4\pi f) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi^2 f^2} \left[2 - (\cos(2\pi f) + \cos(6\pi f)) - (\cos(2\pi f) - \cos(6\pi f)) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi^2 f^2} (2 - 2\cos(2\pi f))
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{\text{NW}}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{\text{ww}}(f) = \frac{1 - \cos(2\pi f)}{\pi^2 f^2}$$

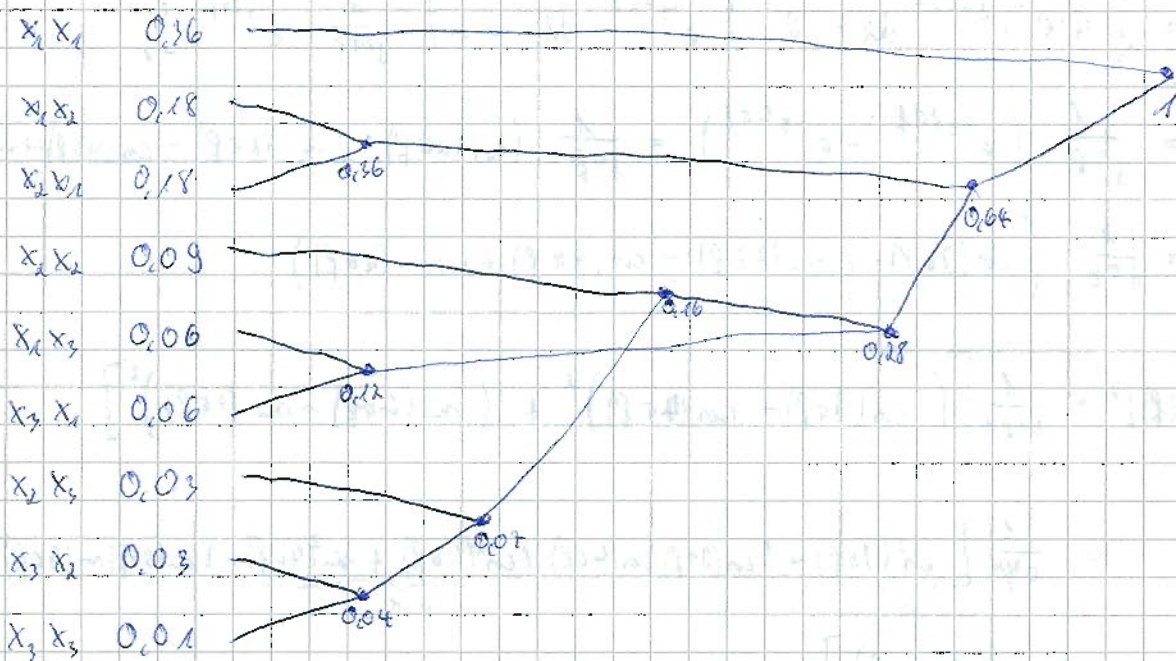
(Schnelle Beweisung über Fourier-Identitäten ist erlaubt!)

Aufgabe 4

$$P(X=x_1) = 0,6 \quad P(X=x_2) = 0,3 \quad P(X=x_3) = 0,1$$

$$a) \text{ Entropie: } H(X) = \sum_{i=1}^3 -p_i \cdot \log_2(p_i) = 1,295$$

$x_1 x_1$	0,36	$x_2 x_1$	0,06
$x_2 x_2$	0,18	$x_1 x_3$	0,03
$x_3 x_1$	0,18	$x_3 x_2$	0,03
$x_1 x_2$	0,09	$x_2 x_3$	0,01
$x_2 x_3$	0,06		



Vorgehensweise:

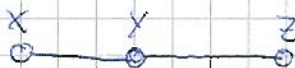
$x_1 x_1$	1
$x_1 x_2$	0 1 1
$x_2 x_1$	0 1 0
$x_2 x_2$	0 0 1 1
$x_1 x_3$	0 0 0 1
$x_3 x_1$	0 0 0 0
$x_2 x_3$	0 0 1 0 1
$x_3 x_2$	0 0 1 0 0 1
$x_3 x_3$	0 0 1 0 0 0

Durchlaufe Pfad von links nach rechts und schreibe für den oberen Ast eine 1 und den unteren Ast eine 0 von links nach rechts

$$c) \frac{\bar{n}}{2} = 1,335$$

Aufgabe 5

$$p(x, y, z) = p(x) \cdot p(y|x) \cdot p(z|y) \quad (\text{Markov-Kette})$$



$$\begin{aligned}
 I(x, (y, z)) &= \sum_{x \times y \times z} p(x, y, z) \cdot \log \frac{p(x, y, z)}{p(x) \cdot p(y, z)} \\
 &= \sum_{x \times y \times z} p(x, y, z) \cdot \log \frac{p(x) \cdot p(y|x) \cdot p(z|y)}{p(x) \cdot p(z|y) \cdot p(y)} \\
 &= \sum_{x \times y} \log \frac{p(x) \cdot p(y|x)}{p(x) \cdot p(y)} \underbrace{\sum_z p(x, y, z)}_{p(x, y)} \\
 &= \sum_{x \times y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x) \cdot p(y)} = I(x, Y)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

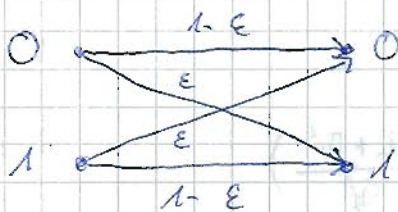
a) Übergangsw'keit $0 \rightarrow 0$ entspricht $1 \rightarrow 1$ in, dass Gesamtheit sich selbst ist:

$$P(y=0|x=0) = P(y=1|x=1)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \varepsilon_1) \cdot 1 + \varepsilon_1 \cdot q = (1 - \varepsilon_2)(1 - q)$$

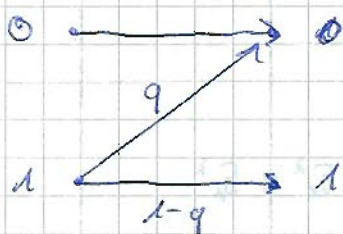
$$\Leftrightarrow q = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

b)



$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot (1 - q) = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right) = \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

c)



$$P(x=0) = p_0$$

$$P(x=1) = 1 - p_0 = p_1$$

Entropie am Ausgang wird maximal $P(y=0) = P(y=1) = \frac{1}{2}$

Beachte f0 so daß $P(X=0) = P(Y=1) = \frac{1}{2}$

$$P(Y=1) = P(X=1) \cdot (1-q) = p_1(1-q) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2(1-q)}$$

$$p_0 = \frac{1-2q}{2(1-q)}$$

Aufgabe 7

$$E(X)=0 \quad E(X^2) \leq L$$

$$N_1 \sim N(0, \sigma_1^2) \quad N_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$$

X, N_1, N_2 sind stoch. unabhängig

a) Von Fomellwert:

$$C_{X,Y} = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{L}{\sigma_1^2} \right)$$

$$b) \quad Z = X + N_2 = \underbrace{X + N_1}_{\text{Signal}} + \underbrace{N_2}_{\text{Rauschen}}$$

$$\text{Var}(X + N_1) \stackrel{\text{S.u. } X, N_1}{\leq} L + \sigma_1^2$$

$$\text{Var}(N_2) = \sigma_2^2$$

$$\Rightarrow \text{I}_{\text{max}}(Y, Z) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{L + \sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right)$$

[und ähnlich für $X \sim N(0, L)$]

$$c) \quad Z = \mu Y + N_2 = \underbrace{\mu X}_{\text{Signal}} + \underbrace{\mu N_1 + N_2}_{\text{Rauschen}}$$

$$\text{Var}(\mu X) \leq \mu^2 L$$

$$\text{Var}(\mu N_1 + N_2) = \mu^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

$$\Rightarrow C_{X,Z} = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\mu^2 L}{\mu^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)$$

Aufgabe 8

a) $\text{Var}(x) \in L = 1$

~~21.6.2010, 13.11.10~~

$$Z \sim \text{SCN}(0, 33 \cdot \text{Id}_4)$$

Der Fadlath:

$$C = \sum_{i=1}^t \left[\log \frac{r \cdot x_i}{\sigma^2} \right]^+ \quad \sum_{\substack{i=1 \\ x_i > 0}}^t \left(r - \frac{\sigma^2}{x_i} \right)^+ = L$$

$$H^* H = U \cdot \text{diag}(x_1, \dots, x_t) \cdot U^*$$

hier: $\sigma^2 = 33$ $L = 1$

Schritt:

- 1) Berechne $H^* H$
- 2) Berechne Eigenwerte $x_1, \dots, x_t$ von $H^* H$ (nicht von H)
- 3) Berechne Wertefällig-Parameter r
- 4) Berechne Bayesität

$$1) \quad H^* H = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & 2-i \\ 1 & 0 & -1-i \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ -1-i & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T^*} \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \det(H^* H - x \text{Id}_3) = (x-8)[(x-8)^2 - 9] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 8 \quad x_2 = 11 \quad x_3 = 5$$

$$3) \quad \left(r - \frac{33}{8}\right)^+ + \left(r - \frac{33}{11}\right)^+ + \left(r - \frac{33}{5}\right)^+ \stackrel{!}{=} 1$$

Beginne mit dem letzten Term:

$$r - \frac{33}{11} = r - 3 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow \text{Anspruch! da } r \geq 4 \text{ gilt}$$

$$\Rightarrow \text{Probe führt zu: } r = 4$$

$$4) C = \sum_{i=1}^3 \left[\log \left(\frac{\gamma_i}{\sigma_i^2} \right) \right]^+ = \left[\log \left(\frac{4 \cdot 8}{33} \right) \right]^+ + \left[\log \left(\frac{4 \cdot 11}{33} \right) \right]^+ + \left[\log \left(\frac{4 \cdot 5}{33} \right) \right]^+ \\ = \log \left(\frac{4}{3} \right)$$

$$\Rightarrow C = \ln \left(\frac{4}{3} \right) = 0.28768$$

a) Schritt: Für $x \sim \text{SCN}(0, Q)$ mit $Q = U \text{diag} \left[\left(r - \frac{\sigma_i^2}{r_i} \right)^+ \right] U^T$ sind die
Eigenwerte gegeben

Die Spalten der Matrix U sind die ^{orthogonalen} Eigenvektoren von $H^* H$

Schemata:

1) Bestimme orthogonale Eigenvektoren zu $x_1, \dots, x_n$

2) Berechne Q

1) EV zu $x_1 = 8$

$$8x = 8x + 8z$$

$$8y = 8y$$

$$8z = 3x + 8z$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geo. Vielfachheit $\leq$ algebra. Vielfachheit

$\Rightarrow x_i$ haben geo. Vielfachheit 1

$\Rightarrow$ Eigenvektoren sind orthogonal (aber nicht normal)

$\Rightarrow$ Das ist nicht immer so, siehe Übung 7 Aufgabe 3b

EV zu $x_2 = 11$

$$11x = 8x + 3z$$

$$11y = 8y$$

$$11z = 3x + 8z$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $x_3 = 5$

$$5x = 8x + 3z$$

$$5y = 8y$$

$$5z = 3x + 8y$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$[\text{trd } Q] = L \quad \checkmark$$