26.07.07 Theoretische Informationstechnik - Rechenübung

A1

$M_j = \{$ Münze j wird entnommen $\}$

$K = \{$ Kopf geworfen $\}$

$P(M_j) = \frac{1}{3} \quad j = 1,2,3$

$P(K|M_1) = 1, \; P(K|M_2) = \frac{1}{2}, \; P(K|M_3) = 0{,}8$

a) $P(M_1|K) = \dfrac{P(K|M_1) \cdot P(M_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(K|M_j) P(M_j)} = 0{,}4348$

b) $(M_i, M_j) = \{$ Münzen M_i und M_j werden entnommen $\}$

$A_1 = (M_1, M_2), \; A_2 = (M_2, M_3), \; A_3 = (M_1, M_3)$

$(K, Z) = \{ M_i = \text{"Kopf"}, M_j = \text{"Zahl"} \}$

$(Z, K) = \{ M_i = \text{"Zahl"}, M_j = \text{"Kopf"} \}$

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

$$P(\text{"Kopf und Zahl"}) = P((K,Z)) + P((Z,K)) = \sum_{i=1}^{3} P((K,Z)|A_i) \cdot P(A_i) + \sum_{i=1}^{3} P((Z,K)|A_i) \cdot P(A_i)$$

$$= 0{,}4$$

A2

$$f(x) = \begin{cases} ax, & -1 \leq x < 0 \\ be^x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Voraussetzung für Dichte

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \stackrel{!}{=} 1$

2) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\underline{b = 1:}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} ax\,dx + \int_{0}^{2} e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{2} a (x^2)\Big|_0^1 + e^x\Big|_0^2$$

$$= -\frac{1}{2} a + e^2 - 1 \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow a = 2(e^2 - 2) \quad \Rightarrow a > 0$$

b) $Y = 1 \;\hat{=}$ gerade Augenzahl

$Z = 1 \;\hat{=}$ Augenzahl < 5

$P(Y=1) = 0{,}575$

$P(Z=1) = 0{,}625$

$H(Y) = 0{,}983$

$$H(Y|Z) = -\big(P(Y=0, Z=0)\, ld(P(Y=0|Z=0))$$
$$+ P(Y=1, Z=0) \cdot ld(P(Y=1|Z=0))$$
$$+ P(Y=0, Z=1)\, ld(P(Y=0|Z=1))$$
$$+ P(Y=1, Z=1) \cdot ld\, P(Y=1|Z=1)\big)$$
$$= 0{,}959$$

c) U fairer Würfelwurf

$V = X \bmod U \quad \in \{0, \dots, 5\}$

$$P(V=0) = P(X=1, U=1) + \dots + P(X=6, U=1)$$
$$+ P(X=2, U=2) + \dots + P(X=6, U=6)$$
$$+ P(X=4, U=2) + P(X=6, U=3) + P(X=6, U=2)$$
$$= \tfrac{1}{6} \cdot 1 + \tfrac{1}{6}\left(1 - \tfrac{1}{5}\right) + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{12} = 0{,}477$$

$$P(V=1) = P(1,2) + \dots + P(1,6)$$
$$+ P(3,2) + P(4,3) + P(5,4) + P(6,5) + P(5,2)$$
$$= 0{,}3$$

$$P(V=2) = P(2,3) + \dots + P(2,6)$$
$$+ P(5,3) + P(6,4) = 0{,}146$$

$P(V=3) = P(3,4) + P(3,5) + P(3,6) = 0{,}05$

$P(V=4) = P(4,5) + P(4,6) = 0{,}067$

$P(V=5) = P(5,6) = 0{,}02$

$H(V) = -\big(0{,}477\, ld(0{,}477) + 0{,}3 \cdot ld(0{,}3) + \dots\big) = 2{,}043$

$\Rightarrow f(x) < 0$ für $-1 \leq x < 0$

$\Rightarrow f(x)$ mit $b = 1$ keine Dichte wegen 2)

b)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

$$= \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & , -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2e^2-2}e^x - \frac{1}{2e^2-2} + \frac{1}{2} & , 0 \leq x \leq 2 \\ \underbrace{\frac{e^2}{2e^2-2} - \frac{1}{2e^2-2} + \frac{1}{2}}_{1} & , x > 2 \end{cases}$$

c)

$$P(X > 1) = 1 - F_X(1) = 0{,}366$$

A3

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma^2 > 0$$

$y = g(x) 3x - 2$ Transformation

Vorraussetzung:

$g(x)$ monoton in $\mathbb{R} \Rightarrow$ injektive Abbildung

$$g^{-1}(y) = x = \frac{y+2}{3}$$

$$\frac{d g^{-1}}{d y} = \frac{1}{3} \qquad \left|\frac{d g^{-1}}{d y}\right| = \frac{1}{3}$$

Transformationssatz

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} f_X(g^{-1}(y))$$

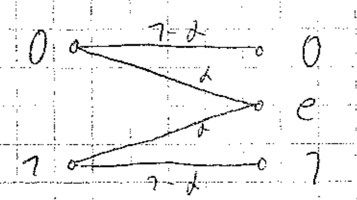
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,3\sigma} e^{-\frac{1}{18\sigma^2}(y+2-3\mu)^2}$$

A4

k	1	2	3	4	5	6
p(X=k)	1/3	1/8	1/10	1/5	1/8	1/4

a) $H(X) = -\sum_{i=1}^{6} p_i \log_2(p_i) = 2{,}57$

A5 gedächtnisloser binärer Kanal mit Auslöschung



$p_0 = P(X=0)$, $p_1 = P(X=1)$

$\alpha \in (0,1)$

a) Kapazität

$$C = \max_{p_0,p_1} I(X,Y) = \max_{p_0 p_1} H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y) = -\big((1-\alpha)p_0\, ld((1-\alpha)p_0) + \alpha\, ld(\alpha) + (1-\alpha)p_1\, ld((1-\alpha)p_1)\big)$$

$$= -\big((1-\alpha)p_0(ld(1-\alpha) + ld(p_0)) + \alpha\, ld(\alpha)$$
$$+ (1-\alpha)p_1(ld(1-\alpha) + ld(p_1))\big)$$

$$= -\big((1-\alpha)p_0\, ld(1-\alpha) + (1-\alpha)p_0\, ld(p_0) + \alpha\, ld(\alpha)$$
$$+ (1-\alpha)p_1\, ld(1-\alpha) + (1-\alpha)p_1\, ld(p_1)\big)$$

$$= -(1-\alpha)(p_0\, ld(p_0) + p_1\, ld(p_1)) - \alpha\, ld(\alpha) - (1-\alpha)\, ld(1-\alpha)(p_0 + p_1)$$

$$= (1-\alpha)H(X) + H(\alpha, 1-\alpha)$$

$$H(Y|X) = -\big(P(X=0,Y=0)\, ld(P(Y=0|X=0))$$
$$+ \underbrace{P(X=1,Y=0)}_{=0 \text{ laut Kanalmodell}}\, ld(P(Y=0|X=1))$$
$$+ \underbrace{P(X=0,Y=1)}_{=0}\, ld(P(Y=1|X=0))$$
$$+ P(X=1,Y=1)\, ld(P(Y=1|X=1))$$
$$+ P(X=1,Y=e)\cdot ld(P(Y=e|X=1))$$
$$+ P(X=0,Y=e)\cdot ld(P(Y=e|X=0)\big)$$

$$= -\big(p_0(1-\alpha)\cdot ld(1-\alpha) + 0 + 0 + p_1(1-\alpha)\, ld(1-\alpha) + p_1\alpha\cdot ld(\alpha) + p_0\alpha\, ld(\alpha)\big)$$

$$= -(1-\alpha)\, ld(1-\alpha)\underbrace{(p_0+p_1)}_{=1} - \alpha\, ld(\alpha)\underbrace{(p_0+p_1)}_{=1}$$

$$= H(\alpha, 1-\alpha)$$

$$C = \max_{p_0,p_1}\big(H(Y) - H(Y|X)\big)$$

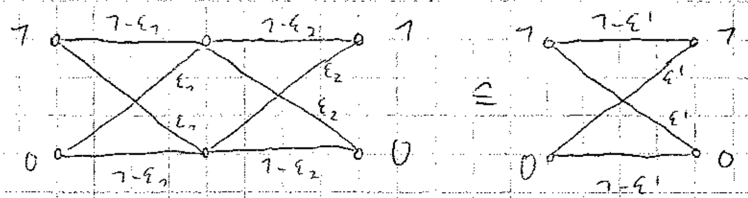
$$= \max_{p_0,p_1}\big((1-\alpha)H(X) + H(\alpha,1-\alpha) - H(\alpha,1-\alpha)\big)$$

$$= \max_{p_0,p_1}\big((1-\alpha)H(X)$$

b) $p_0 = \frac{1}{2}$

A6

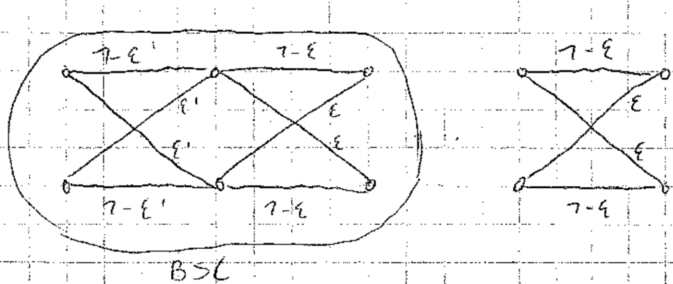
a) 1. zeige Gesamtkanal ist BSC



$$\varepsilon' = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2) + (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2$$

$$1-\varepsilon' = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1 \underbrace{-\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}_{\varepsilon'}$$

→ resultierender Kanal ist BSC



→ resultierender Gesamtkanal ist BSC

2. zeige Fehlerwahrscheinlichkeit des Gesamtkanals

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}\left(1 - (1-2\varepsilon)^n\right)$$

Induktionsanfang: $\varepsilon_1 = P(G_1 = 1) = \varepsilon$

$$= \frac{1}{2}\left(1-(1-2\varepsilon)^1\right) = \frac{1}{2}(2\varepsilon) = \varepsilon \quad ✓$$

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschluss: $n \to n+1$

$$P(G_{n+1} = 1) = P(G_{n+1} = 1 \mid G_n = 1)\, P(G_n = 1)$$
$$+ P(G_{n+1} = 1 \mid G_n = 0)\cdot P(G_n = 0)$$

Induktionsvoraussetzung

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{2}\left(1-(1-2\varepsilon)^n\right) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\left(1-(1-2\varepsilon)^n\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left((1-\varepsilon) - (1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)^n + 2\varepsilon - \varepsilon + \varepsilon(1-2\varepsilon)^n\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-(1-2\varepsilon)^{n+1}\right) \quad ✓$$

b) Kapazität eines BSC (resultierender Kanal):

$$C = 1 + (1-\varepsilon_n)\log_2(1-\varepsilon_n) + \varepsilon_n \log_2 \varepsilon_n$$

$$= 1 + \left(1 - \tfrac{1}{2}(1-2\varepsilon)^n\right)\log_2\left(1 - \tfrac{1}{2}\left(1-(1-2\varepsilon)^n\right)\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(1-(1-2\varepsilon)^n\right)\log_2\left(\tfrac{1}{2}\left(1-(1-2\varepsilon)^n\right)\right)$$

$\varepsilon = 0{,}1,\ n = 5 \Rightarrow C = 0{,}0789$

A7

$Y = X + Z \qquad Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),\ \varphi(z)$

$I(X,Y) = H(Y) + H(Y|X) = H(Y) - H(X+Z|X) = H(Y) - H(Z)$

Es gilt $f_Y(y) = \sum_{j=1}^{n} p_j \underbrace{\varphi(y-x_j)}_{\varphi_j(y)} = \sum_{j=1}^{n} p_j \varphi_j(y)$

$$H(Y) = \int \sum_{j=1}^{n} p_j \varphi_j(y) \cdot \log\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi_i(y)\right) dy)$$

$$H(Z) = -\int \varphi(y) \log(\varphi(y))\, dy$$

$$= -\int \varphi_j(y) \cdot \log(\varphi_j(y))\, dy$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} p_j \int \varphi_j(y) \log(\varphi_j(y))\, dy$$

mit 1 multiplizieren

$$H(Y) - H(Z) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \int \varphi_j(y) \log\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi_i(y)\right) dy$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} p_j \int \varphi_j(y) \log(\varphi_j(y))\, dy$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j \int \varphi_j(y) \cdot \log\left(\frac{\varphi_j(y)}{\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi_i(y)}\right) dy$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j D\left(\varphi_j \,\Big\|\, \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi_i\right)$$

A8

$$C = \sum_{i=1}^{3} \left(\log\left(\frac{\upsilon \cdot \gamma_i}{\sigma^2}\right)\right)^+$$

$$H^* H = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 & -1-i \\ 0 & 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 2-i & -1-i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von H^*H: 5, 10, 11

Bestimmung des Waterfilling Parameters

$$\left(\vartheta - \frac{110}{5}\right)^+ + \left(\vartheta - \frac{110}{10}\right)^+ + \left(\vartheta - \frac{110}{11}\right)^+ = 32$$

$$= (\vartheta - 22)^+ + (\vartheta - 11)^+ + (\vartheta - 10)^+ = 32$$

$$\Rightarrow \vartheta = 25$$

$$C = \sum_{i=1}^{3} \left(\log\left(\frac{\vartheta \cdot \gamma_i}{\sigma^2}\right)\right)^+$$

$$= \left(\log\left(\frac{25 \cdot 5}{100}\right)\right)^+ + \left(\log\left(\frac{25 \cdot 10}{110}\right)\right)^+ + \left(\log\left(\frac{25 \cdot 11}{110}\right)\right)^+$$

$$= \left(\log\left(\frac{25}{22} \cdot \frac{25}{11} \cdot \frac{5}{2}\right)\right)^+ \approx 1{,}865$$

b) EV zu EW ~~5~~5:

$$5x = 8x + 3z \quad \Rightarrow x = -z$$
$$5y = 10y \quad\quad y = 0 \quad\quad \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$5z = 3x + 8z$$

EV zu EW 10:

$$10x = 8x + 3z$$
$$10y = 10y \quad \Rightarrow y = 1 \quad \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$10z = 3x + 8z$$

EV zu EW 11:

$$11x = 8x + 3z \quad \Rightarrow x = z$$
$$11y = 10y \quad\quad y = 0 \quad\quad \Rightarrow u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$11z = 3x + 8z$$

$$X \sim SCN\left(0, U \cdot \mathrm{diag}\left(\vartheta - \frac{\sigma^2}{\gamma_i} \cdot U^*\right)\right)$$

$$\mathrm{diag}\left(\vartheta - \frac{\sigma^2}{\gamma_i}\right)^+ = \mathrm{diag}(3, 14, 15)$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 0 & 6\\ 0 & 14 & 0\\ 6 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$u \cdot \mathrm{diag}(0,2,3)u^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: Q$$

$$\Rightarrow X \sim SCN(0, Q)$$