

Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Daniel Bielefeld, Tobias Rick

Aufgabe 1 In einer Geldbörse befinden sich drei Münzen. Die erste zeigt auf beiden Seiten Kopf, die zweite zeigt beim Werfen Zahl und Kopf mit gleicher Wahrscheinlichkeit und die dritte ist so beschaffen, dass sie beim Werfen mit Wahrscheinlichkeit 0.8 Kopf und mit Wahrscheinlichkeit 0.2 Zahl zeigt.

- Der Börse wird zufällig eine Münze entnommen und geworfen. Nach dem Wurf zeigt sie Kopf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es die erste Münze?
- Es werden zwei Münzen gleichzeitig aus der Börse entnommen und geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Münze Kopf und die andere Zahl zeigt?

Aufgabe 2 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax, & -1 \leq x < 0 \\ be^x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass die Funktion für $b = 1$ keine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellen kann.
- Für $a = -1$ und $b = \frac{1}{2e^2 - 2}$ ist $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen X . Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X .
- Berechnen Sie mit den Werten aus b) die Wahrscheinlichkeit für $P(X > 1)$.

Aufgabe 3 Die Amplitude eines Signals werde durch die Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ beschrieben. Das Signal werde durch einen Verstärker mit der Kennline $y = 3x - 2$ verstärkt. Bestimmen Sie die Dichte $f_Y(y)$ der Zufallsvariable Y , welche die Amplitude des Signals am Ausgang des Verstärkers beschreibt.

Aufgabe 4 Bei einem verfälschten Würfel werde die Verteilung der Zufallsvariablen X der Augenzahlen beschrieben durch:

Augenzahl k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

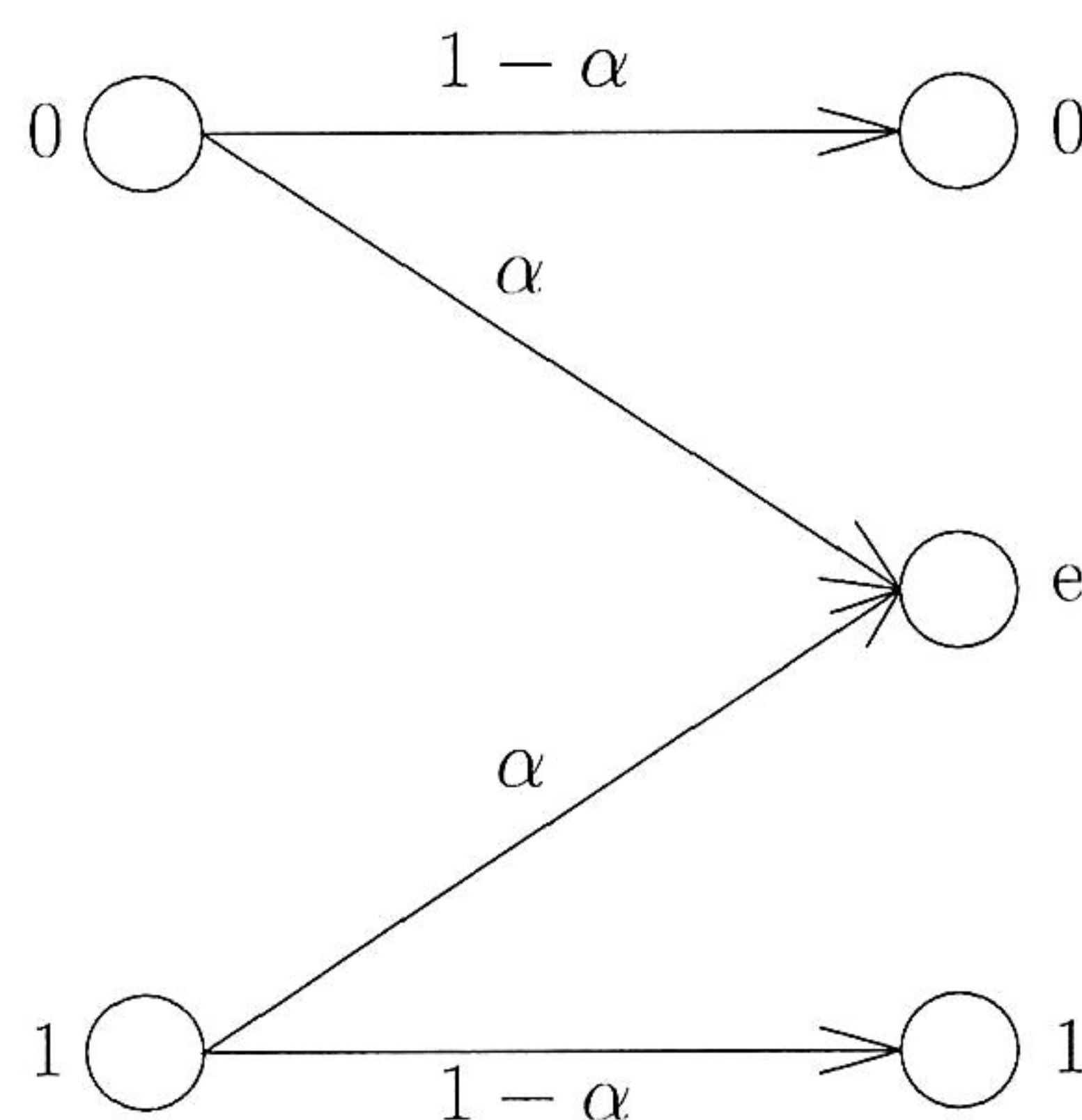
- a) Wie groß ist die Entropie $H(X)$ bzgl. $\log_2$?
- b) Die Bernoulli-verteilte Zufallsvariable Y beschreibe, dass eine gerade Augenzahl auftritt und die Bernoulli-verteilte Zufallsvariable Z , dass eine Augenzahl kleiner 5 auftritt, d.h.

$$Y = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } X \text{ gerade} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad Z = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } X < 5 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}.$$

Wie groß ist die Entropie $H(Y)$ und die bedingte Entropie $H(Y | Z)$ bzgl. $\log_2$?

- c) Die Zufallsvariable U beschreibe die Augenzahl bei einem fairen Würfelwurf. Wie groß ist die Entropie $H(V)$ bzgl. $\log_2$ mit $V = X \bmod U$?

Aufgabe 5 Gegeben sei ein gedächtnisloser binärer Kanal mit Auslöschung



mit Eingabealphabet $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ und Ausgabealphabet $\mathcal{Y} = \{0, 1, e\}$. Die Zufallsvariable X mit Werten in $\mathcal{X}$ beschreibe die Eingabe des Kanals und die Zufallsvariable Y mit Werten in $\mathcal{Y}$ die Ausgabe. Ferner seien $p_0 = P(X = 0)$ und $p_1 = P(X = 1)$ die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der Eingabesymbole.

Im binären Auslöschungskanal gehen Informationsbits mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in (0, 1)$ bei der Übertragung verloren. Durch das Beobachten des Zustandes e am Empfänger ist bekannt, ob Bits gelöscht wurden.

- a) Berechnen Sie die Kapazität des binären Auslöschungskanals bzgl. $\log_2$.
- b) Bestimmen Sie das p_0 , für das die Transinformation maximal ist, für das also die Kapazität des Kanals erreicht wird.

Hinweis:

Es ist $0 \cdot \log(0) = 0$.

Aufgabe 6 Gegeben seien n identische hintereinander geschaltete binäre symmetrische Kanäle, jeweils mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Die Zufallsvariable G_k beschreibe, ob bis zum Ausgang des k -ten Kanals ein Übertragungsfehler vorliegt:

$$G_k = \begin{cases} 1, & \text{falls ein Fehler bis zum Ausgang des } k\text{-ten Kanal auftritt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Leiten Sie her, dass der resultierende Gesamtkanal ein binärer symmetrischer Kanal ist, der folgende Fehlerwahrscheinlichkeit $\epsilon_n = P(G_n = 1)$ besitzt:

$$\epsilon_n = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2\epsilon)^n)$$

- b) Bestimmen Sie die Kapazität des resultierenden Gesamtkanals, der aus hintereinander Schaltung von 5 identischen binären symmetrischen Kanälen mit $\epsilon = 0.1$ entsteht (bzgl. $\log_2$).

Hinweis: Zu a): Benutzen Sie vollständige Induktion:

$A(n)$ sei eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage. Zeigt man die Aussagen 1) und 2), dann ist $A(n)$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$.

- 1) $A(1)$ ist eine wahre Aussage (Induktionsanfang).
- 2) Unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, so ist auch $A(n+1)$ wahr (Induktionsschluss).

Aufgabe 7 Betrachten Sie den additiven Gaußkanal

$$Y = X + Z.$$

Die Eingangsvariable X sei diskret mit endlichem Symbolraum $\{x_1, \dots, x_n\}$ und Verteilung $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, \dots, n$. Für die stochastisch unabhängige additive Störung Z gelte $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. $\varphi(z)$ bezeichne die zugehörige Dichte und $\varphi_i(z) = \varphi(z - x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Weisen Sie nach, dass für die Transinformation

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n p_i D(\varphi_i \| \sum_{j=1}^n p_j \varphi_j)$$

gilt, wobei $D(f \| g) = \int f \log \frac{f}{g}$ die Kullback-Leibler-Distanz zwischen den Dichten f und g bezeichnet.

Aufgabe 8 Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit vier Empfangsantennen und drei Sendeanennen. Die Leistungsbeschränkung betrage $L = 32$. Für die additive Störung gelte $\mathbf{Z} \sim \text{SCN}(\mathbf{0}, 110 \cdot \mathbf{I}_4)$. Die Kanalmatrix $\mathbf{H}$ sei

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals (bzgl. $\ln$).
- b) Geben Sie die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ an, so dass für die Eingabe $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ die Kapazität des Kanals angenommen wird.