ZSÜ(?)
Klausur F06
WS 05/06

Ti Lehrstuhl für
Theoretische Informationstechnik

RWTH RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Daniel Bielefeld, Gernot Fabeck

Aufgabe 1. Die an einer Radaranlage eintreffenden Signale bestehen zu 30% aus Nutzsignalen und zu 70% aus Rauschen. Den Gütecharakteristiken der Anlage ist zu entnehmen, dass bei Vorliegen eines Nutzsignals die Anlage mit Wahrscheinlichkeit $p_d = 0.9$ den Empfang eines Nutzsignals meldet. Bei Vorliegen von Rauschen zeigt die Anlage den Empfang eines Nutzsignals mit Wahrscheinlichkeit $p_f = 0.2$ an.
Die Radaranlage zeige nun den Empfang eines Nutzsignals an. Bestimmen Sie unter Verwendung der relevanten Ereignisse die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wirklich ein Nutzsignal vorliegt, d.h. dass die Anlage eine richtige Anzeige macht.

Aufgabe 2. Ein zweidimensional normalverteilter Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ werde durch folgende Dichte beschrieben:

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswertvektor μ sowie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$ des Zufallsvektors $\boldsymbol{X}$.

b) Geben Sie die Dichten $f_{X_1}(x_1)$ und $f_{X_2}(x_2)$ an.

c) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig?

Aufgabe 3. Gegeben sei der stochastische Prozess $\{X(t) \mid -\infty < t < \infty\}$ mit

$$X(t) = W_1(t)\cos(2\pi f_0 t) + W_2(t)\sin(2\pi f_0 t),$$

wobei f_0 eine feste Frequenz und $W_1(t)$ und $W_2(t)$ unkorreliertes mittelwertfreies Gaußsches weißes Rauschen sind. Es gelte $S_{W_1W_1}(f) = S_{W_2W_2}(f) = 1$ für alle $f \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Erwartungswertfunktion $\mu_X(t)$.

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t)$ und das Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(f)$.

c) Ist $X(t)$ schwach stationär?

Hinweis:

$$\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 = \frac{1}{2}(\cos(\phi_2 - \phi_1) + \cos(\phi_2 + \phi_1))$$

$$\sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 = \frac{1}{2}(\cos(\phi_2 - \phi_1) - \cos(\phi_2 + \phi_1))$$

Aufgabe 4. Eine Nachrichtenquelle sende *periodisch* die Folge

AABBABCBABBABCABCBBBACBBBABABC

von 30 Symbolen. Ein vom Empfänger zu einem zufälligen Zeitpunkt beobachtetes Symbol werde durch die Zufallsvariable X beschrieben. Die Zufallsvariable Y bezeichne das Symbol, welches direkt auf X folgt.

a) Bestimmen Sie die Symbolwahrscheinlichkeiten

$$p(x) = P(X = x),\ x \in \{A, B, C\}.$$

b) Bestimmen Sie die Verbundwahrscheinlichkeiten

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y),\ x, y \in \{A, B, C\}$$

für zwei aufeinanderfolgende Buchstaben x und y.

c) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p(y|x) = P(Y = y|X = x),\ x, y \in \{A, B, C\}.$$

d) Berechnen Sie die Entropie $H(X)$ (in bit, d.h. $\log_2$).

e) Berechnen Sie die bedingte Entropie $H(Y|X)$ (in bit, d.h. $\log_2$).

naja **Aufgabe 5.** Es sei $I(X, (Y_1, Y_2))$ die Transinformation von X und (Y_1, Y_2). Zeigen Sie:

a) $I(X, (Y_1, Y_2)) \geq I(X, Y_1) + I(X, Y_2)$, falls Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig.

b) $I(X, (Y_1, Y_2)) \leq I(X, Y_1) + I(X, Y_2)$, falls Y_1 und Y_2 bedingt stochastisch unabhängig gegeben X (d.h. $H(Y_1, Y_2|X) = H(Y_1|X) + H(Y_2|X)$).

Aufgabe 6. Gegeben sei folgende Anordnung zweier binärer symmetrischer Kanäle mit Fehlerwahrscheinlichkeiten p bzw. q:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{\text{1-p}} & 0 & \xrightarrow{\text{1-q}} & 0 \\ & \times & & \times & \\ 1 & \xrightarrow[\text{1-p}]{} & 1 & \xrightarrow[\text{1-q}]{} & 1 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeiten p' und p'' des äquivalenten Ersatzkanals der Form:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\text{1-p'}} & 0 \\ & \times & \\ 1 & \xrightarrow[\text{1-p''}]{} & 1 \end{array}$$

b) Ist der Ersatzkanal symmetrisch (Begründung)?

c) Für welche Werte von p und q wird die Kapazität C des Kanals Null?

Aufgabe 7. Eine gedächtnislose Nachrichtenquelle X mit dem Quellalphabet $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ sende die Symbole mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

k	1	2	3	4
$p(x_k)$	0.70	0.20	0.05	0.05

a) Berechnen Sie die Entropie der Quelle (in bit, d.h. $\log_2$).

b) Berechnen Sie die Entropie der Quelle für Symbolpaare, also für Blöcke aus zwei Symbolen (in bit, d.h. $\log_2$).

c) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Code für die Einzelsymbole und berechnen Sie seine mittlere Codewortlänge.

d) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Code für Symbolpaare und berechnen Sie seine mittlere Codewortlänge und die mittlere Codewortlänge je Symbol.

Aufgabe 8. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit drei Empfangsantennen und drei Sendeantennen. Die Leistungsbeschränkung betrage $L = 9$. Für die additive Störung gelte $Z \sim \mathrm{SCN}(0, 32 \cdot \boldsymbol{I}_3)$. Die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ sei

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.

b) Berechnen Sie eine Inputverteilung, für welche die Kapazität angenommen wird.