Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Gernot Fabeck

26.2.2008, 14:00 Uhr, WSH 24 A 407

Aufgabe 1. Gegeben seien drei binäre symmetrische Kanäle B_1, B_2, B_3, jeweils mit Fehlerwahrscheinlichkeiten $\epsilon_1 = 0.1, \epsilon_2 = 0.05$ und $\epsilon_3 = 0.2$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Null gesendet wird, betrage für jeden Kanal 0.4.

a) Es werde nun zufällig gleichwahrscheinlich ein Kanal ausgewählt. Nach einer Übertragung wird am Ausgang eine Eins empfangen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zur Übertragung Kanal B_3 ausgewählt wurde?

b) Nun werden die Kanäle wie folgt hintereinander geschaltet: $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass am Ausgang von B_3 eine Eins empfangen wird?

c) Berechnen Sie die Kapazität des hintereinander geschalteten Kanals aus Aufgabenteil b).

Aufgabe 2. Gegeben sei eine absolut-stetige Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(2 - \frac{1}{3}|x|), & -6 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f_X die Voraussetzungen für eine Verteilungsdichte erfüllt.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

d) Bestimmen Sie die Verteilungsdichte f_Y der Zufallsvariablen $Y = X + 10$.

e) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Aufgabe 3. Seien $\boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_n)$ und $\boldsymbol{q} = (q_1, ..., q_n)$ stochastische Vektoren mit $p_i, q_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$.
Beweisen Sie folgende Ungleichung

$$H(\boldsymbol{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i) \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(q_i).$$

Hinweis:
Es gilt $\ln(x) \leq x - 1$ für alle $x > 0$.

Aufgabe 4. Eine gedächtnislose Quelle X mit Quellalphabet $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ sende die Symbole mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

k	1	2	3
p_k	0.3	0.6	0.1

a) Berechnen Sie die Entropie der Quelle bzgl. $\log_2$.

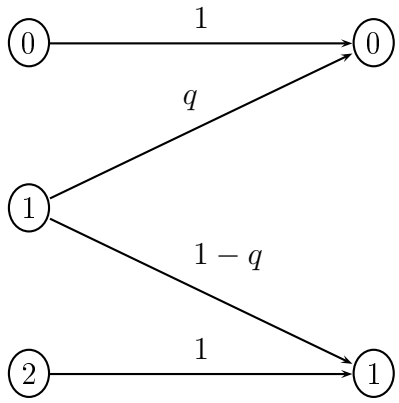
b) Berechnen Sie die Entropie der Quelle für Symbolpaare (Blöcke aus 2 Symbolen) bzgl. $\log_2$.

c) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Code mit Kodealphabet $\mathcal{Y}_b = \{0, 1\}$ für die Einzelsymbole und berechnen Sie seine mittlere Codewortlänge.

d) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Code mit Kodealphabet $\mathcal{Y}_b = \{0, 1\}$ für Symbolpaare und berechnen Sie seine mittlere Codewortlänge und die mittlere Codewortlänge je Symbol.

e) Konstruieren Sie einen ternären Huffman-Code mit Kodealphabet $\mathcal{Y}_t = \{0, 1, 2\}$ für Symbolpaare.

Aufgabe 5. Gegeben sei der folgende gedächtnislose Kanal



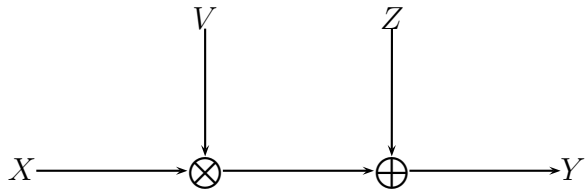
mit Eingabealphabet $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ und Ausgabealphabet $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Die Zufallsvariable X mit Werten in $\mathcal{X}$ beschreibe die Eingabe des Kanals und die Zufallsvariable Y mit Werten in $\mathcal{Y}$ die Ausgabe, $q \in (0, 1)$. Ferner seien $p_0 = P(X = 0)$, $p_1 = P(X = 1)$ und $p_2 = P(X = 2)$ die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der Eingabesymbole.

a) Bestimmen Sie die Transinformation des Kanals bzgl. $\log_2$ in Abhängigkeit von p_0, p_1 und p_2.

b) Nun sei $p_2 = 0$ und $q = \frac{1}{2}$. Geben Sie p_0 und p_1 an, so dass in diesem Fall die Transinformation maximal wird.

Hinweis:
Es ist $0 \cdot \log(0) = 0$.

Aufgabe 6. Betrachten Sie den folgenden Gaußkanal mit Fading, mit reeller Eingabe X mit $E(X) = 0$, additivem weißen Rauschen $Z \sim N(0, \sigma^2)$ und einer Zufallsvariable V, welche die Schwankung des Signalpegels (Fading) beschreibt. X, V und Z seien paarweise stochastig unabhängig. X unterliege der Leistungsbeschränkung L.



a) Sei V zunächst einpunktverteilt mit $P\left(V = \frac{1}{2}\right) = 1$. Geben Sie für diesen Fall die Kanalkapazität an (ohne Beweis).

b) Sei V weiterhin einpunktverteilt mit $P(V = 1) = 1$. Ferner unterliege nun der Ausgang Y einer Leistungsbeschränkung P, d.h. $E(Y^2) \leq P$. Es gelte $\sigma^2 \leq P$. Bestimmen Sie die Kanalkapazität für diesen Fall.

c) Die Verteilung von V sei nun beliebig. Zeigen Sie, dass durch Kenntnis des Fadingfaktors V die Transinformation erhöht wird, also gilt:

$$I(X, Y \mid V) \geq I(X, Y).$$

Hinweis:
Benutzen Sie:

$$I(R, S \mid T) = H(R \mid T) - H(R \mid S, T)$$

Aufgabe 7. Gegeben seien drei unabhängige MIMO-Kanäle mit Kapazitäten C_1, C_2 und C_3. Die Leistungsbeschränkung für die ersten beiden Kanäle betrage $L_1 = 16$ bzw. $L_2 = 8$. Für die additiven Störungen gelte $\boldsymbol{Z}_1 \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, 16 \cdot \boldsymbol{I}_3)$, $\boldsymbol{Z}_2 \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, 18 \cdot \boldsymbol{I}_4)$ sowie $\boldsymbol{Z}_3 \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, 18 \cdot \boldsymbol{I}_1)$. Die Kanalmatrizen seien

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 2-2i \\ \sqrt{3}-i & 0 \\ 0 & \sqrt{2}+2i \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Sendeleistung L_3 so, dass $C_3 = C_1 - C_2$ gilt.

b) Geben sie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}_1$ an, so dass für die Eingabe $\boldsymbol{X}_1 \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q}_1)$ die Kapazität des Kanals angenommen wird.

Aufgabe 8. Ein Forschungsinstitut plant, einen bestehenden Supercomputer durch neue Prozessoren zu erweitern. Insgesamt steht dazu ein Budget von 63000 Euro zur Verfügung. Zur Auswahl stehen zwei Prozessortypen: ein Standardprozessor und ein Spezialprozessor. Der Standardprozessor hat eine Rechengeschwindigkeit von 6 GFLOPS, eine Leistungsaufnahme von 40 Watt und kostet 450 Euro pro Stück. Ein Spezialprozessor kostet 1500 Euro und kommt auf eine Rechengeschwindigkeit von 15 GFLOPS und hat eine Leistungsaufnahme von $26\frac{2}{3}$ Watt. Aufgrund von Lieferengpässen sind von dem Spezialprozessor maximal 35 Exemplare erhältlich.

In dem Supercomputer stehen insgesamt 150 Steckplätze zur Verfügung, die von beiden Prozessortypen genutzt werden können. Zudem ist der Supercomputer maximal für eine zusätzliche Leistungsaufnahme von 4kW ausgelegt.

Das Forschungsinstitut möchte den Supercomputer unter den gegebenen Bedingungen um die maximale Rechengeschwindigkeit erweitern.

a) Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem als lineares Programm in kanonischer Form.

b) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

c) Wie hoch ist die maximale zusätzliche Rechengeschwindigkeit des Supercomputers unter den gegebenen Bedingungen (in GFLOPS)?

d) Wie teuer ist die Erweiterung des Supercomputers unter den gegebenen Bedingungen (in Euro)?