TI - Zusatz SS06

RWTHAACHEN UNIVERSITY

Lehrstuhl für Theoretische Informationstechnik

Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Daniel Bielefeld, Tobias Rick

Aufgabe 1 Einem E-Mail-Benutzer werden drei Klassen W, I und U von Nachrichten geschickt:

W: 10% wichtige E-Mails,

I: 10% interessante E-Mails,

U: 80% unerwünschte E-Mails.

Der Benutzer verwendet einen Spam-Filter zum automatischen Löschen von zugeschickten E-Mails. Der Spam-Filter löscht mit Wahrscheinlichkeit $p_{L_W} = 0.1$ wichtige E-Mails, mit Wahrscheinlichkeit $p_{L_I} = 0.4$ interessante E-Mails und mit Wahrscheinlichkeit $p_{L_U} = 0.8$ unerwünschte E-Mails.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine eingehende E-Mail automatisch gelöscht wird.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine E-Mail, die nicht gelöscht wurde, wichtig?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war eine E-Mail, die gelöscht wurde, interessant?

d) Wie hoch ist der prozentuale Anteil unerwünschter E-Mails nach Einsatz des Spam-Filters?

Aufgabe 2 Gegeben sei eine absolut-stetige Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) \quad \begin{cases} \cos^2(\frac{\pi x}{2}) & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass f_X die Voraussetzungen an eine Verteilungsdichte erfüllt.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

d) Berechnen Sie die Varianz von X.

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(X > 0)$?

Hinweis:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Aufgabe 3 Man betrachte das folgende Zufallsexperiment:

Eine faire Münze ("Kopf" vs. "Zahl") wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal "Kopf" erscheint. Die Zufallsvariable $X \in \mathbb{N}$ gibt die Nummer des Wurfs an, in dem erstmalig "Kopf" fällt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im n-ten Wurf zum ersten Mal "Kopf" erscheint.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Zufallsexperiment spätestens im n-ten Wurf beendet ist.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

d) Berechnen Sie die Varianz von X.

e) Berechnen Sie die Entropie $H(X)$ (bzgl. $\log_2$).

f) Gegeben sei die Abbildung

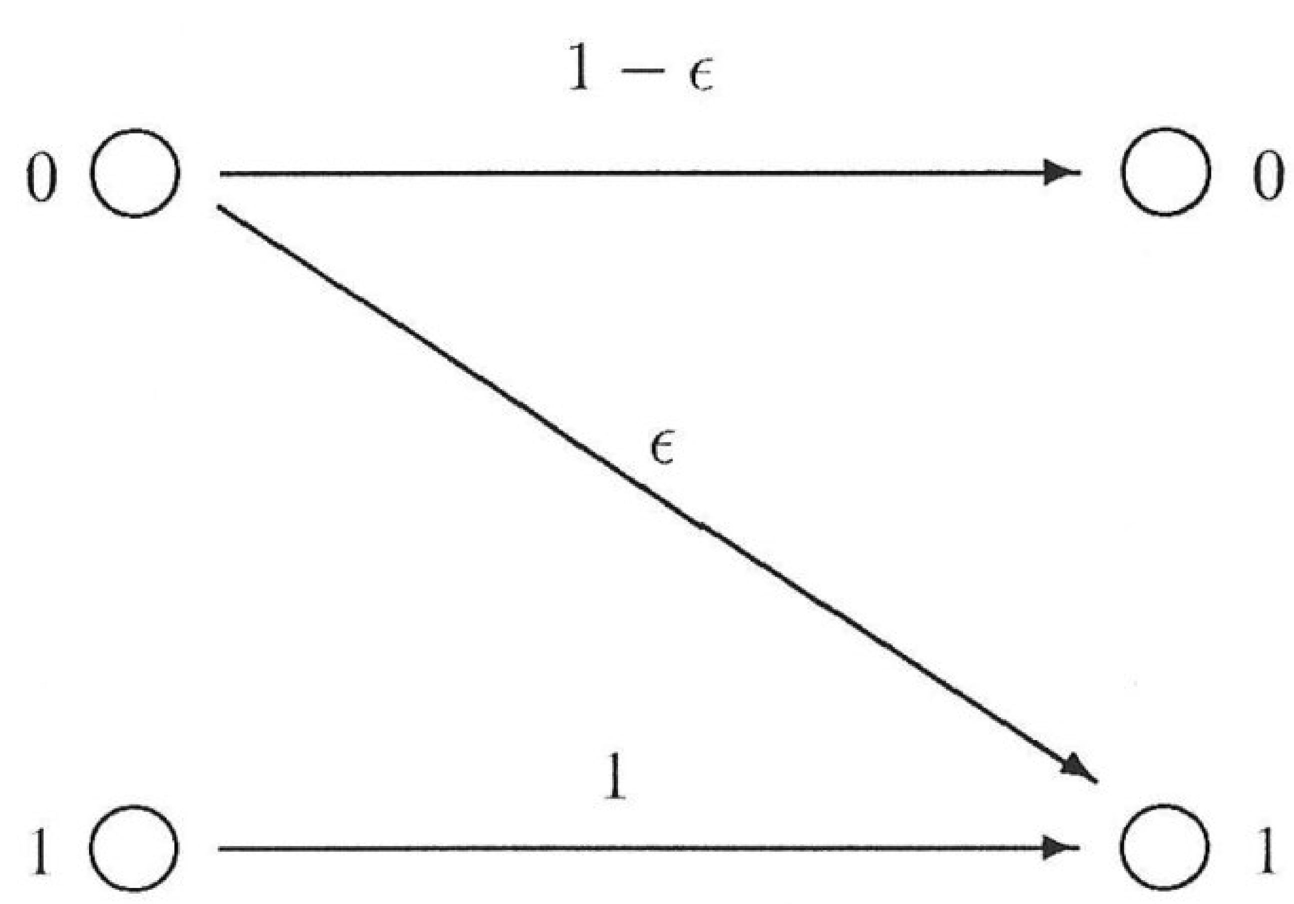
$$g : \mathbb{N} \to \{0,1\}, \quad n \mapsto n \bmod 2.$$

Berechnen Sie die Entropie $H(g(X))$ (bzgl. $\log_2$).

Hinweis:

Es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ für $|x| < 1$.

Aufgabe 4 Betrachten Sie den folgenden gedächtnislosen binären Kanal:



Die Zufallsvariable $X \in \{0,1\}$ beschreibe die Eingabe des Kanals und die Zufallsvariable $Y \in \{0,1\}$ die Ausgabe. Ferner seien $p_0 = P(X=0)$ und $p_1 = P(X=1)$ die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der Eingabesymbole sowie $\epsilon \in (0,1)$.

a) Bestimmen Sie die Transinformation $I(X, Y)$ in Abhängigkeit von p_0 und ϵ bezüglich des Logarithmus zur Basis 2.

b) Bestimmen Sie das p_0, für das die Transinformation maximal ist, für das also die Kapazität C des Kanals erreicht wird.

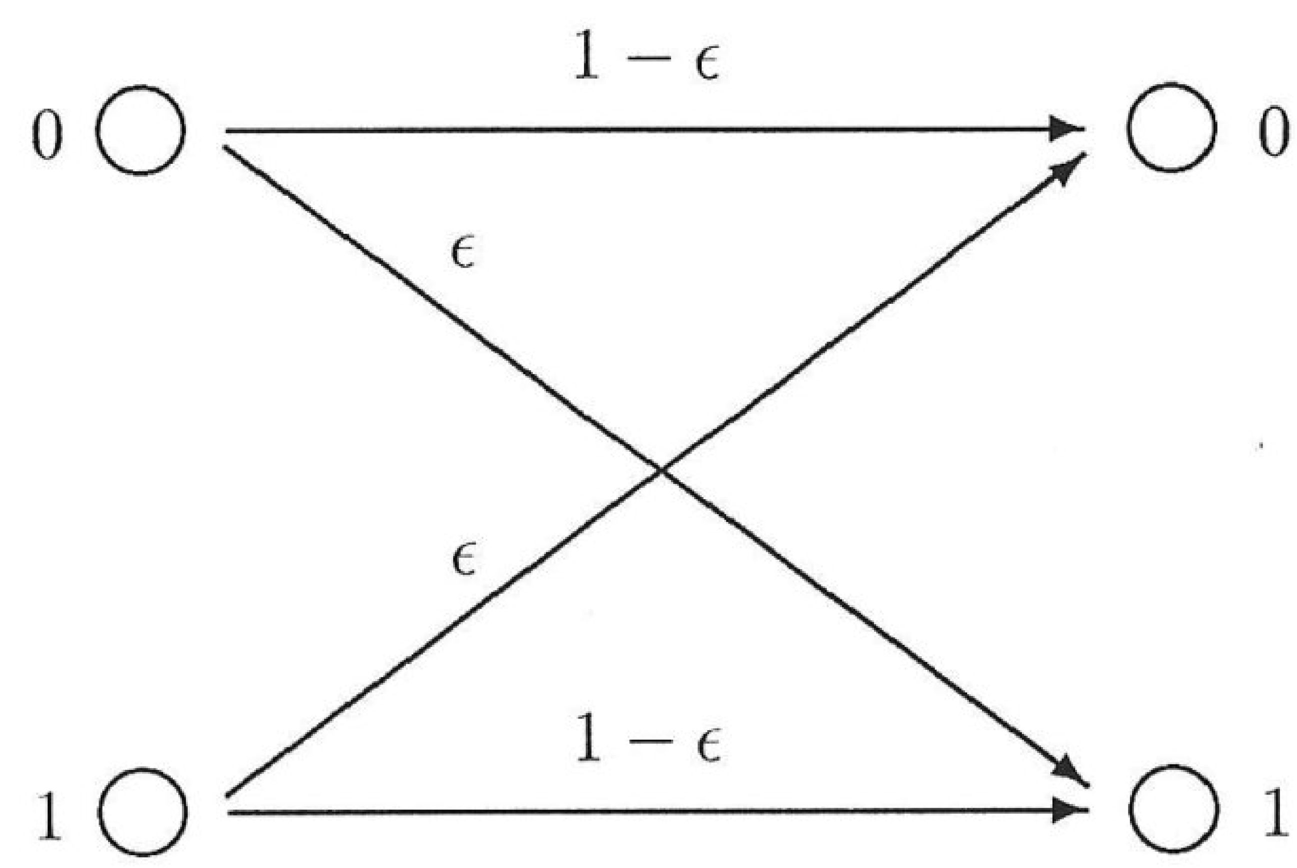
c) Berechnen Sie für $\epsilon = \frac{1}{2}$ die Kapazität C des Kanals bezüglich des Logarithmus zur Basis 2.

Hinweis:

Zu a) Es ist $0 \cdot \log_2 0 = 0$.

Zu b) Die Transinformation $I(X, Y)$ aus a) besitzt als Funktion von p_0 ein eindeutiges Maximum im Intervall $(0, 1)$.

Aufgabe 5 Gegeben sei ein gedächtnisloser binärer symmetrischer Kanal



mit Ein- und Ausgabealphabet $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Die Menge der Eingabewörter sei $\mathcal{C} = \{(0,0,0), (1,1,1)\}$. Dabei trete $(0,0,0)$ mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ sowie $(1,1,1)$ mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ auf. Ferner sei $\epsilon = 1/3$.

a) Welche Ausgabewörter sind bei der Übertragung im Kanal möglich und wie groß sind deren Auftrittswahrscheinlichkeiten?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_K für die fehlerfreie Übertragung eines Eingabeworts?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_E dafür, ein Element aus $\mathcal{C}$ zu empfangen, das nicht gesendet wurde?

d) Geben Sie eine ML-Dekodierung $h_{ML} : \mathcal{Y}^3 \to \mathcal{C}$ an.

e) Geben Sie eine ME-Dekodierung $h_{ME} : \mathcal{Y}^3 \to \mathcal{C}$ an.

Aufgabe 6 Gegeben sei ein MIMO-Kanal $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$ mit 2 Sendeantennen, 4 Empfangsantennen und Leistungsbeschränkung $L = 4$. Für die additive Störung gelte $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{0}, 8 \cdot \boldsymbol{I}_4)$, mit $\boldsymbol{I}_4$ die 4×4-Einheitsmatrix. Die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}_1$ sei

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des MIMO-Kanals (bzgl. log = ln).

b) Geben Sie die Verteilung des Zufallsvektors $\boldsymbol{X}$ an, für welche die Kapazität angenommen wird.

c) Betrachten Sie einen MIMO-Kanal mit der 1×1-Kanalmatrix $\boldsymbol{H}_2 = 1$ (also einen SISO-Kanal). Wie hoch darf bei gleicher Leistungsbeschränkung $L = 4$ die Varianz der additiven Störung sein, so dass dieser Kanal die gleiche Kapazität besitzt wie der MIMO-Kanal aus a)?

Aufgabe 7 Zeigen Sie, dass die Menge der stochastischen Vektoren der Länge n

$$\mathcal{P}_n = \{\boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_n) \mid p_i \geq 0 \ \forall i, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

konvex ist.

Aufgabe 8 Ein Mobilfunknetzbetreiber plant das an einer Basisstation vorhandene Frequenzband auf zwei Dienste aufzuteilen. Für den ersten Dienst, einen Voicecall, werden pro Nutzer ein Nutzkanal sowie zwei Signalisierungskanäle benötigt. Marktuntersuchungen haben ergeben, dass pro Nutzer 25 Euro Gewinn erzielt werden können und dass 30 Nutzer den Dienst an dieser Basisstation nutzen würden. Der zweite Dienst ist eine mobile Fernsehübertragung, die sowohl einen Nutz- und einen Signalisierungskanal benötigt. Die Marktforschung ergab hier einen Gewinn von 15 Euro pro Nutzer und eine Nutzerzahl von 70.

An der Basisstation stehen insgesamt 75 Nutz- und 85 Signalisierungskanäle zur Verfügung, die jeweils einem Dienst zugeordnet werden müssen. Wieviele Nutzer müssen unter den genannten Bedingungen für die beiden Dienste geplant werden, um den Gewinn des Betreibers zu maximieren.

a) Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem als lineares Programm in kanonischer Form.

b) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

c) Wie hoch ist der maximale Gewinn des Mobilfunknetzbetreibers?