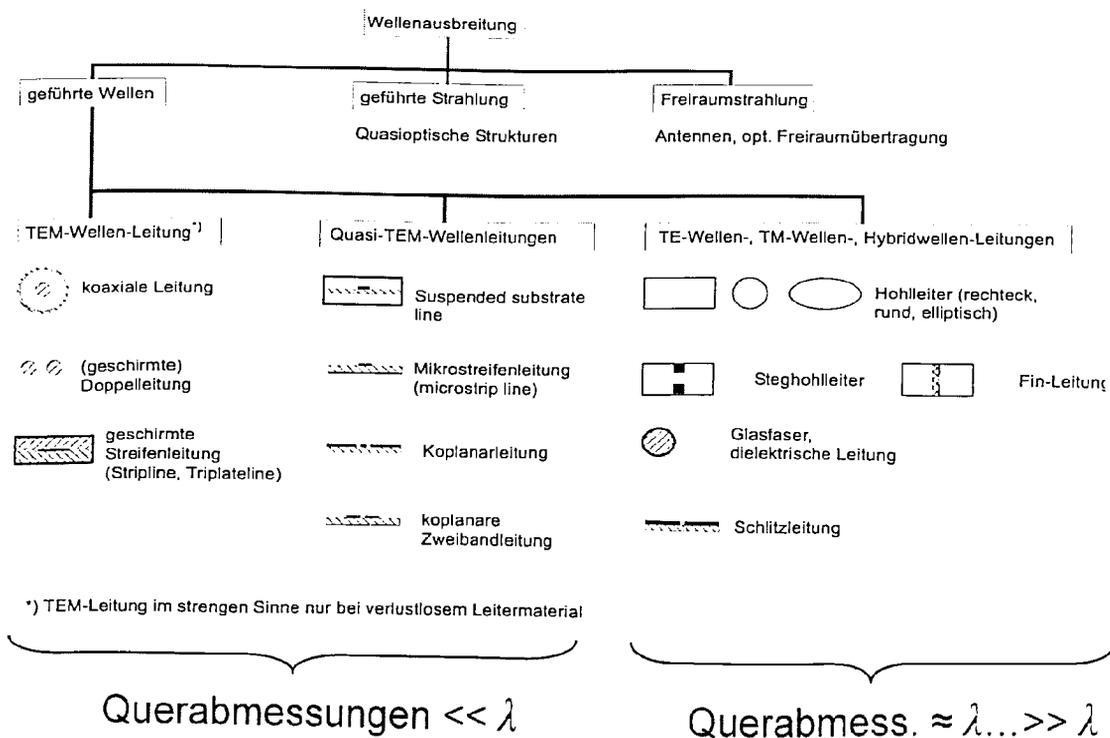


3. Wellenausbreitung auf TEM- und Quasi-TEM-Wellenleitungen

- Einordnung von Leitungen
- Leitungsgleichung und Definitionen
- Das Leitungsdiagramm
- Streumatrizen
- Technische Ausführungen von TEM-Wellenleitern
- Quasi-TEM-Wellenleiter



Einordnung von Leitungen



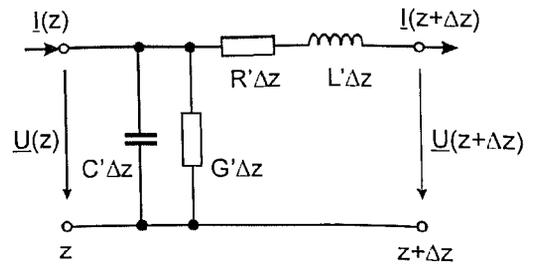
*) TEM-Leitung im strengen Sinne nur bei verlustlosem Leitermaterial

Querabmessungen $\ll \lambda$

Querabmess. $\approx \lambda \dots \gg \lambda$

Leitungsersatzschaltbild

Ersatzschaltbild eines
Leitungsstücks der Länge
 Δz mit $\Delta z \ll \lambda$



mit:

- L' Induktivitätsbelag
– magnetischer Energiespeicher
- C' Kapazitätsbelag
– elektrischer Energiespeicher
- R' Widerstandsbelag
– endliche Leitfähigkeit
- G' Ableitungsbelag
– Verlustfaktor der Isolation

messtechnische Ermittlung ($\Delta l \ll \lambda/4$):

offene Leitung:

$$\underline{Y}_{in} = G + j\omega C \Leftrightarrow$$

$$\hookrightarrow G' = \frac{G}{\Delta l}, \quad C' = \frac{C}{\Delta l}$$

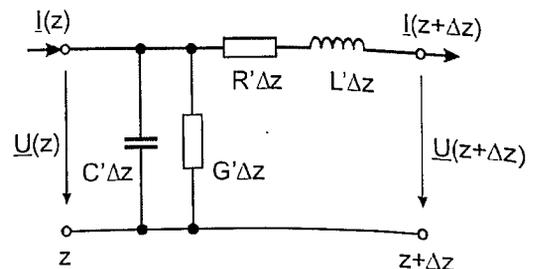
kurzgeschlossene Leitung:

$$\underline{Z}_{in} = R + j\omega L \Leftrightarrow$$

$$\hookrightarrow R' = \frac{R}{\Delta l}, \quad L' = \frac{L}{\Delta l}$$

Leitungsgleichung 1

Ersatzschaltbild eines
Leitungsstücks der Länge
 Δz mit $\Delta z \ll \lambda$



für den eingeschwungenen Zustand ergibt

der Spannungsumlauf: $\underline{U}(z + \Delta z) - \underline{U}(z) = -\underline{I}(z + \Delta z)(R' + j\omega L')\Delta z$

die Knotenregel: $\underline{I}(z + \Delta z) - \underline{I}(z) = -\underline{U}(z)(G' + j\omega C')\Delta z$

\underline{U} und \underline{I} sind die komplexen Amplituden von Spannung und Strom auf der Leitung

der Übergang zum infinitesimal
kurzen Leitungsstück ergibt
die Differenzialgleichungen:

$$\frac{d\underline{U}}{dz} = -\underline{I}(R' + j\omega L')$$

$$\frac{d\underline{I}}{dz} = -\underline{U}(G' + j\omega C')$$

Leitungsgleichung 2

Erneutes Differenzieren der ersten Gleichung nach z und Einsetzen der zweiten Gleichung für dI/dz ergibt:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \underline{U}$$

Diese Gleichung wird **Leitungsgleichung** bzw. **Telegrafengleichung** genannt.

mit der Abkürzung $\underline{\gamma}^2 = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')$

erhält man die Wellengleichung $\frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U}$

mit der allgemeinen Lösung $\underline{U} = \underline{U}_p + \underline{U}_r = \underline{U}_{p0} e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{U}_{r0} e^{\underline{\gamma}z}$

Interpretation:

\underline{U}_p in positive z -Richtung (p = propagating) fortschreitende Welle

\underline{U}_r in negative z -Richtung (r = reflected) fortschreitende Welle



5

Leitungsgleichung 3

Aus der ersten Differentialgleichung erhalten wir durch Einsetzen der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d\underline{U}}{dz} = \frac{\underline{\gamma}}{R' + j\omega L'} (\underline{U}_{p0} e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{U}_{r0} e^{\underline{\gamma}z}) \\ &= \frac{1}{\underline{Z}_L} (\underline{U}_{p0} e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{U}_{r0} e^{\underline{\gamma}z}) = \underline{I}_{p0} e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{I}_{r0} e^{\underline{\gamma}z} \end{aligned}$$

mit der **Ausbreitungskonstanten** $\underline{\gamma}$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = j\omega \sqrt{L'C'} \sqrt{\left(1 - j \frac{R'}{\omega L'}\right) \left(1 - j \frac{G'}{\omega C'}\right)}$$

und dem **Leitungswellenwiderstand** \underline{Z}_L

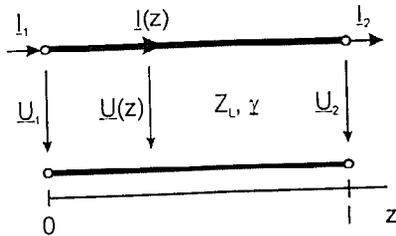
$$\underline{Z}_L = \frac{R' + j\omega L'}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \sqrt{\frac{1 - j \frac{R'}{\omega L'}}{1 - j \frac{G'}{\omega C'}}} = + \frac{\underline{U}_p}{\underline{I}_p} = - \frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}$$



6

Leitungsgleichung 4

\underline{U}_{p0} und \underline{U}_{r0} werden durch die Bedingungen am Anfang und Ende der Leitung festgelegt.



$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{p0} + \underline{U}_{r0}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{p0} e^{-\gamma l} + \underline{U}_{r0} e^{\gamma l}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{p0} + \underline{I}_{r0} = \frac{\underline{U}_{p0}}{\underline{Z}_L} - \frac{\underline{U}_{r0}}{\underline{Z}_L}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{p0} e^{-\gamma l} + \underline{I}_{r0} e^{\gamma l} = \frac{\underline{U}_{p0}}{\underline{Z}_L} e^{-\gamma l} - \frac{\underline{U}_{r0}}{\underline{Z}_L} e^{\gamma l}$$

mit $\underline{U}_{p0} = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{\gamma l}$ und $\underline{U}_{r0} = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{-\gamma l}$

ergibt sich: $\underline{U}_1 = \underline{U}_{p0} + \underline{U}_{r0} = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{\gamma l} + \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{-\gamma l}$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{p0} + \underline{I}_{r0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} + \underline{I}_2 \right) e^{\gamma l} - \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} - \underline{I}_2 \right) e^{-\gamma l}$$



Leitungsgleichung 5

Auflösen der Klammern ergibt: $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + \underline{Z}_L \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} + \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2}$$

Mit $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

ergibt sich:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cosh(\gamma l) + \underline{I}_2 \underline{Z}_L \sinh(\gamma l)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \sinh(\gamma l) + \underline{I}_2 \cosh(\gamma l)$$

Diese Darstellung wird die **mathematische Form** der Leitungsgleichung genannt!



Wellenausbreitung auf der Leitung

Die Ausbreitungskonstante $\underline{\gamma}$ ist komplex $\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$

und setzt sich zusammen aus: $= \alpha + j\beta$

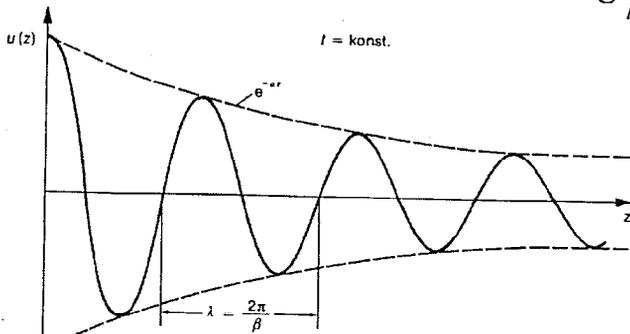
α = Dämpfungskonstante der Leitung und

β = Phasenkonstante der Leitung

Der Momentanwert der Spannung $U_p(z, t)$ auf der Leitung als Funktion von Ort und Zeit lautet:

$$U_p(z, t) = \operatorname{Re}\{ \underline{U}_p \}$$

$$= U_{p0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$$



Spannungsverlauf von $U(z) = U_p(z, t=t_0)$ entlang der Leitung zum Zeitpunkt t_0 .

9

Näherung für geringe Verluste 1

Für schwache Verluste $\frac{R'}{\omega L'} \ll 1$ und $\frac{G'}{\omega C'} \ll 1$ ergeben sich

der Leitungswellenwiderstand

näherungsweise zu:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \sqrt{\frac{1 - j\frac{R'}{\omega L'}}{1 - j\frac{G'}{\omega C'}}$$

$$\underline{Z}_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

die Ausbreitungskonstante

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

$$= j\omega\sqrt{L'C'} \sqrt{\left(1 - j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1 - j\frac{G'}{\omega C'}\right)}$$

Näherung für geringe Verluste 2

$$= j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{1-j\frac{R'}{\omega L'}-j\frac{G'}{\omega C'}-\frac{R'G'}{\omega^2 L'C'}}$$

$$\approx j\omega\sqrt{L'C'}\left(1-j\frac{R'}{2\omega L'}-j\frac{G'}{2\omega C'}-\frac{R'G'}{2\omega^2 L'C'}\right)$$

Näherung für $x \ll 1$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$= j\omega\sqrt{L'C'} + \frac{R'}{2\sqrt{L'/C'}} + \frac{G'\sqrt{L'/C'}}{2}$$

$$= j\omega\sqrt{L'C'} + \frac{R'}{2Z_L} + \frac{G'Z_L}{2}$$

näherungsweise ergibt sich für schwache Verluste:



$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_L} + G'Z_L \right) = \alpha_R + \alpha_G$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{L'C'}$$

Dämpfung und Wellenlänge

Die Dämpfung α wird gewöhnlich als Logarithmus zur Basis 10 in **Bel** angegeben, üblich ist hierbei die Angabe in **Dezibel**:

$$\frac{\alpha}{dB} = 10 \lg \underbrace{\left| \frac{U_{-p1}}{U_{-p2}} \right|^2}_{\text{Leistungsverhältnis (Bezug } Z_L)}} = 20 \lg \underbrace{\left| \frac{U_{-p1}}{U_{-p2}} \right|}_{\text{Spannungsverhältnis}}$$

Die Wellenlänge λ ergibt sich als Abstand von zwei aufeinander folgenden Spannungsmaxima:

$$\beta\lambda = 2\pi \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L'C'}}$$



Geschwindigkeiten auf der Leitung

Die Phasengeschwindigkeit v_{ph} ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Zustand konstanter Phase auf der Leitung fortbewegt.

$$\beta z - \omega t = const \quad \longrightarrow \quad v_{ph} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_{gr} ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpaket als Ganzes fortbewegt; also die Geschwindigkeit, mit der sich ein Puls auf der Leitung fortbewegt.

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad \text{mit } \omega = v_{ph} \beta \quad \text{ergibt sich} \quad v_{gr} = v_{ph} + \beta \frac{dv_{ph}}{d\beta}$$

(Herleitung siehe Skript!)



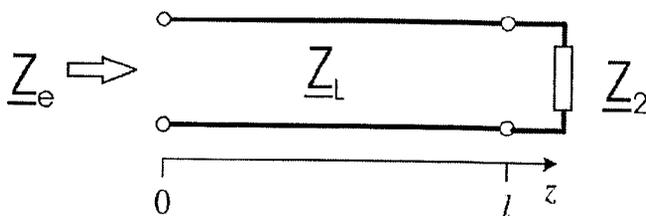
➤ $v_{gr} = v_{ph}$ wenn v_{ph} nicht frequenzabhängig ist

➤ $v_{gr} \neq v_{ph}$ wenn v_{ph} frequenzabhängig ist

Diese Leitungseigenschaft wird **Dispersion** genannt! 13



Eingangsimpedanz einer beliebig abgeschlossenen Leitung



Das Verhältnis Spannung zu Strom am Leitungseingang ergibt die **Eingangsimpedanz** \underline{Z}_e am Anfang der Leitung:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cosh(\underline{\gamma} l) + \underline{I}_2 \underline{Z}_L \sinh(\underline{\gamma} l)}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \sinh(\underline{\gamma} l) + \underline{I}_2 \cosh(\underline{\gamma} l)}$$

mit der Abschlussimpedanz \underline{Z}_2

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \quad \longrightarrow \quad \underline{Z}_e = \underline{Z}_L \frac{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} + \tanh(\underline{\gamma} l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh(\underline{\gamma} l)}$$



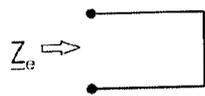
Abgeschlossene Leitungen 1

- 1) Abschluss mit Leitungswellenwiderstand: $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L$, $l = \text{beliebig}$

$$\Rightarrow \underline{Z}_e = \underline{Z}_L \frac{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} + \tanh(\underline{\gamma}l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh(\underline{\gamma}l)} = \underline{Z}_L$$

- 2) verlustlose Leitung: $\alpha = 0 \Rightarrow \underline{\gamma} = j\beta \Rightarrow \tanh(\underline{\gamma}l) = j \tan(\beta l)$

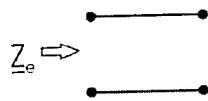
- für Kurzschluss ($\underline{Z}_2 = 0$)



$$\Rightarrow \underline{Z}_e = \underline{Z}_L j \tan(\beta l)$$

für $\beta l \ll 1$ $\underline{Z}_e \approx \underline{Z}_L \cdot j \beta l = j \omega L' l$

- für offenes Ende ($\underline{Z}_2 \rightarrow \infty$)



$$\Rightarrow \underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_L} j \tan(\beta l)$$

für $\beta l \ll 1$ $\underline{Y}_e \approx j \frac{\beta l}{\underline{Z}_L} = j \omega C' l$



Abgeschlossene Leitungen

- 3) Leitungslänge: $l = \lambda/4$

$$\Rightarrow \underline{Z}_e = \underline{Z}_L \frac{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} + j \tan(\beta l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} j \tan(\beta l)} = \frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_2}$$

Eine $\lambda/4$ -Leitung transformiert eine auf \underline{Z}_L normierte Impedanz in ihren Kehrwert!

- 4) Leitungslänge: $l = \lambda/2$

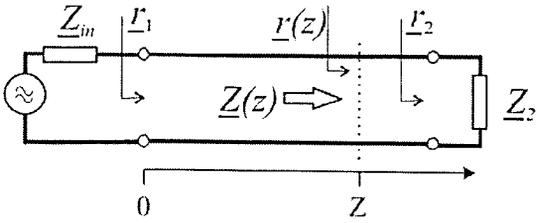
$$\Rightarrow \underline{Z}_e = \underline{Z}_L \frac{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} + j \tan(\beta l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} j \tan(\beta l)} = \underline{Z}_2$$

Eine $\lambda/2$ -Leitung transformiert den Abschlusswiderstand an den Eingang!



Reflektionsfaktor 1

Das Spannungsverhältnis der in negative z-Richtung zu der in positive z-Richtung laufenden Welle wird als **Reflektionsfaktor** \underline{r} an der Stelle z bezeichnet.



$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{U}_r(z)}{\underline{U}_p(z)} = \frac{\underline{U}_{r0}}{\underline{U}_{p0}} e^{2\gamma z}$$

Der Reflektionsfaktor \underline{r}_2 am Ende der Leitung ergibt sich damit aus dem Reflektionsfaktor \underline{r}_1 am Eingang der Leitung zu:

$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{U}_{r0}}{\underline{U}_{p0}} e^{2\gamma l} = \underline{r}_1 e^{2\gamma l}$$

Mit
$$\underline{Z}(z) = \frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{U}_{p0} e^{-\gamma z} + \underline{U}_{r0} e^{\gamma z}}{\underline{U}_{p0} e^{-\gamma z} - \underline{U}_{r0} e^{\gamma z}} = \underline{Z}_L \frac{1 + \frac{\underline{U}_{r0}}{\underline{U}_{p0}} e^{2\gamma z}}{1 - \frac{\underline{U}_{r0}}{\underline{U}_{p0}} e^{2\gamma z}}$$

ergibt sich

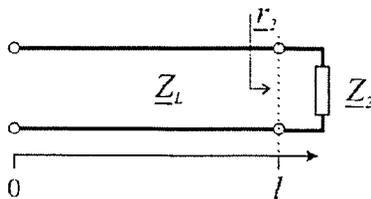


$$\underline{Z}(z) = \underline{Z}_L \frac{1 + \underline{r}(z)}{1 - \underline{r}(z)} \quad \underline{r}(z) = \frac{\underline{Z}(z) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(z) + \underline{Z}_L}$$

17

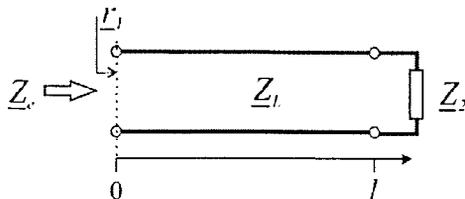
Reflektionsfaktor 2

Der Reflektionsfaktor auf der Leitung ist damit am Ende:



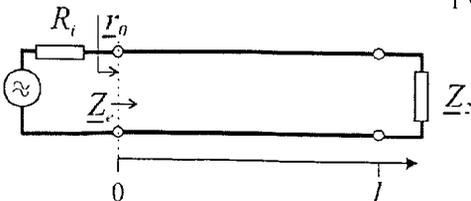
$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_e}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_e}$$

Der Reflektionsfaktor auf der Leitung ist damit am Anfang:



$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_e}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_e}$$

Der Eingangsreflektionsfaktor der Schaltung, die vom Generator mit Innenwiderstand R_i gespeist wird, ist damit:



$$\underline{r}_0 = \frac{\underline{Z}_L - R_i}{\underline{Z}_L + R_i}$$



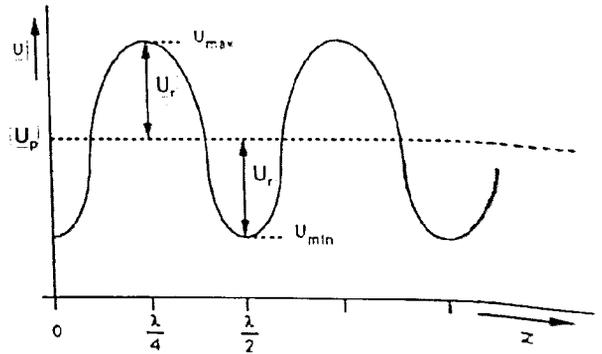
18

Spannung auf der Leitung

Für eine verlustlose oder schwach verlustbehaftete Leitung treten regelmäßig Spannungsmaxima und Spannungsminima auf.

$$U_{\max} = |\underline{U}_p| + |\underline{U}_r|$$

$$U_{\min} = |\underline{U}_p| - |\underline{U}_r|$$



mit $\underline{U} = \underline{U}_p + \underline{U}_r$ als Gesamtspannungswelle.

Das Verhältnis der maximalen zur minimalen Spannung nennt man

Stehwellenverhältnis s .

Dieses Verhältnis wird auch **VSWR** genannt (Voltage Standing Wave Ratio).

$$s = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|\underline{U}_p| + |\underline{U}_r|}{|\underline{U}_p| - |\underline{U}_r|} = \frac{1 + |\underline{U}_r/\underline{U}_p|}{1 - |\underline{U}_r/\underline{U}_p|} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$$



Der Kehrwert von s ist der **Anpassungsfaktor** $m = 1/s$

Leistungstransport auf der Leitung

Die von der hinlaufenden Welle transportierte Wirkleistung beträgt:

$$P_p = \frac{|\underline{U}_p|^2}{2Z_L}$$

Die von der zurücklaufenden Welle transportierte Wirkleistung beträgt:

$$P_r = \frac{|\underline{U}_r|^2}{2Z_L}$$

Somit gilt allgemein für die auf der Leitung transportierte Wirkleistung P_w :

$$P_w = \frac{1}{2Z_L} (|\underline{U}_p|^2 - |\underline{U}_r|^2) = \frac{|\underline{U}_p|^2}{2Z_L} (1 - |r|^2)$$



Smith-Diagramm 1

Das Leitungsdiagramm (Smith-Diagramm) stellt einen grafischen Zusammenhang her zwischen Reflektionsfaktor \underline{r} und Impedanz \underline{Z} auf der Leitung.

$$\underline{r} = \frac{\underline{w} - 1}{\underline{w} + 1} \quad \text{mit} \quad \underline{w} = \frac{\underline{Z}}{Z_L}$$

Gesucht sind die Abbildungen der Geraden $\text{Re}\{\underline{w}\} = \text{const}$ und $\text{Im}\{\underline{w}\} = \text{const}$.

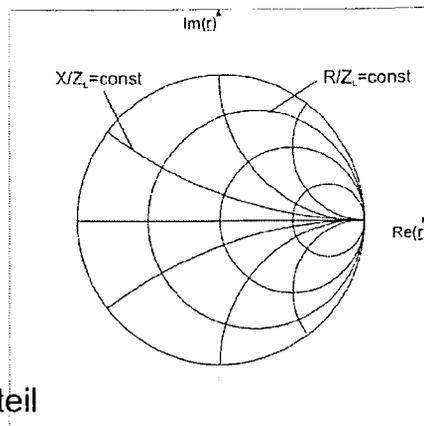
Mit $\underline{r} = x + jy$ und $\underline{w} = u + jv$

eingesetzt in $\underline{r} = \frac{\underline{w} - 1}{\underline{w} + 1}$

ergibt sich nach Trennung in Real- und Imaginärteil

$$\left(x - \frac{u}{u+1}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(1+u)^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Kreise für } u = \frac{R}{Z_L} = \text{const}$$

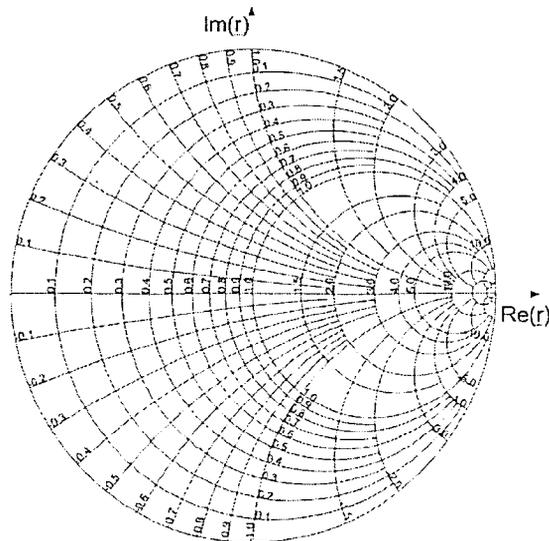
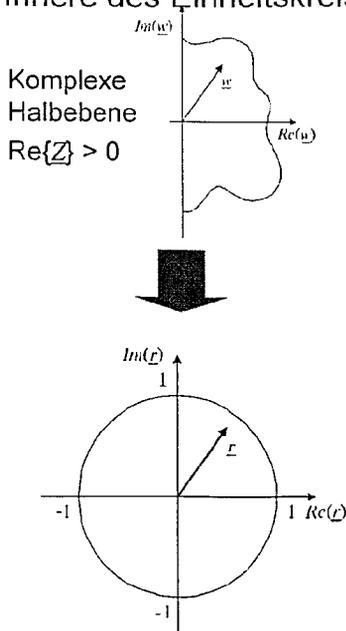
$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{v}\right)^2 = \frac{1}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Kreise für } v = \frac{X}{Z_L} = \text{const}$$



21

Smith-Diagramm 2

Das Leitungsdiagramm bildet die komplexe Halbebene $\text{Re}\{\underline{Z}\} > 0$ auf das Innere des Einheitskreises der komplexen r -Ebene ($|\underline{r}| \leq 1$) ab.



Einheitskreis $|\underline{r}| \leq 1$

Die Abbildung von \underline{w} nach $\underline{r}(\underline{w})$ ist eine **konforme Abbildung** (winkeltreue Abb.).

22

Punkte im Smith-Diagramm

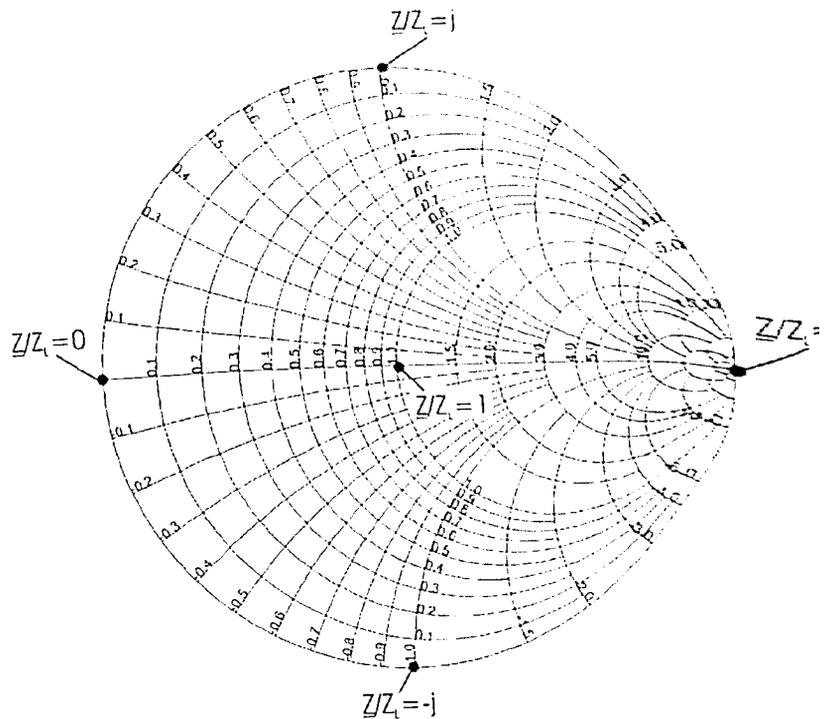
$$\underline{w} = \frac{Z}{Z_L} = 0 \Rightarrow \underline{r} = -1$$

$$\underline{w} = \frac{Z}{Z_L} = 1 \Rightarrow \underline{r} = 0$$

$$\underline{w} = \frac{Z}{Z_L} \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{r} = 1$$

$$\underline{w} = \frac{Z}{Z_L} = j \Rightarrow \underline{r} = j$$

$$\underline{w} = \frac{Z}{Z_L} = -j \Rightarrow \underline{r} = -j$$



Linien im Smith-Diagramm

$$\text{Re}(\underline{w}) = \text{Re}\left(\frac{Z}{Z_L}\right) = 0$$

↳ Einheitskreis

$$\text{Im}(\underline{w}) = \text{Im}\left(\frac{Z}{Z_L}\right) = 0$$

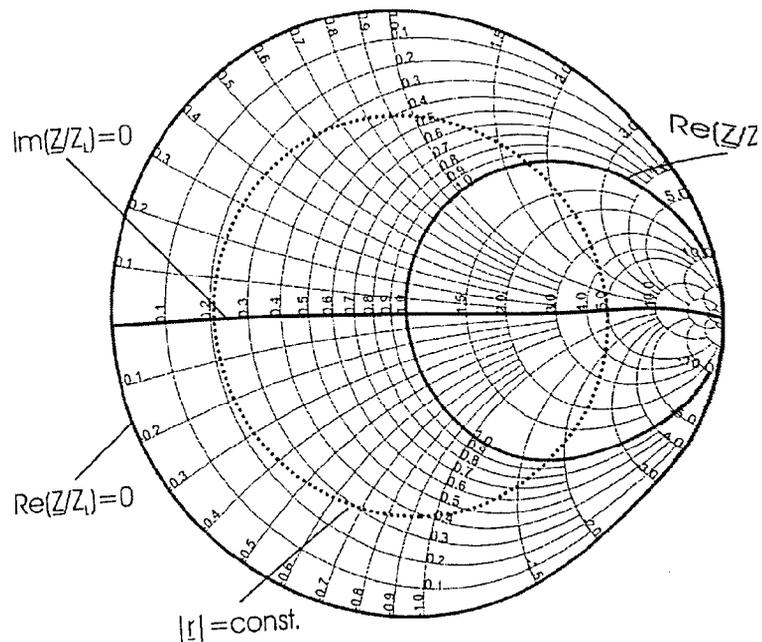
↳ horizontale Gerade

$$\text{Re}(\underline{w}) = \text{Re}\left(\frac{Z}{Z_L}\right) = 1$$

↳ Kreis durch den Mittelpunkt

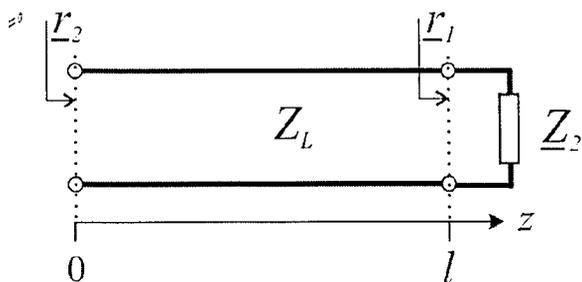
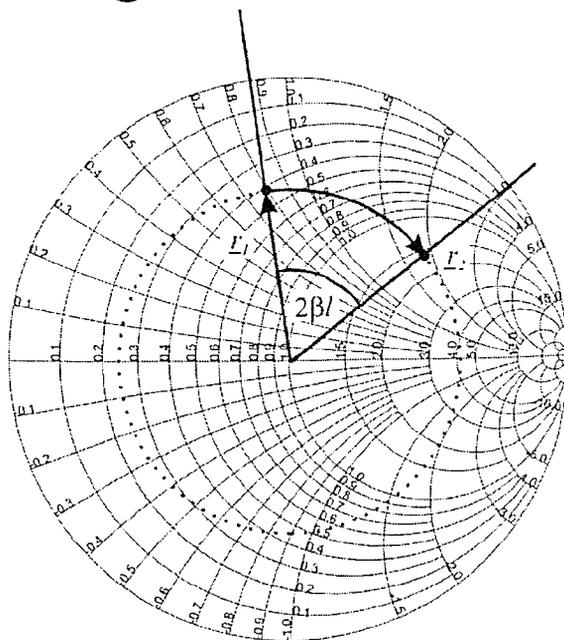
$$|\underline{r}| = \text{const}$$

↳ Kreis um den Mittelpunkt



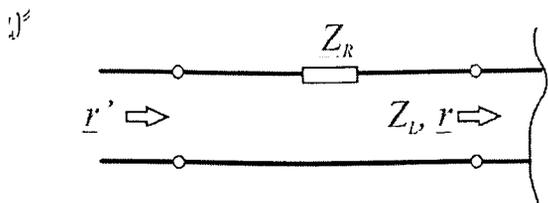
Wichtige Regeln 1

Wegen $\underline{r}_2 = \underline{r}_1 e^{-j2\beta l}$ mit $\underline{r}_1 = \underline{r}(z=l)$ und $\underline{r}_2 = \underline{r}(z=0)$ ist bei einer verlustlosen Leitung der Betrag des Reflektionsfaktors längs der Leitung konstant, d.h. $\underline{r}(z)$ läuft auf einem Kreis um den Mittelpunkt.

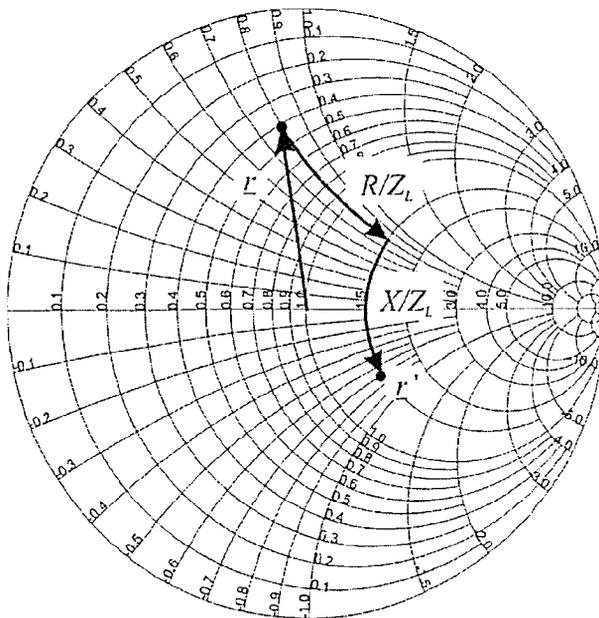


Wichtige Regeln 2

Einfügen von normierten Längsimpedanzen durch Addition.



mit $\underline{Z}_R = R_R + jX_R$



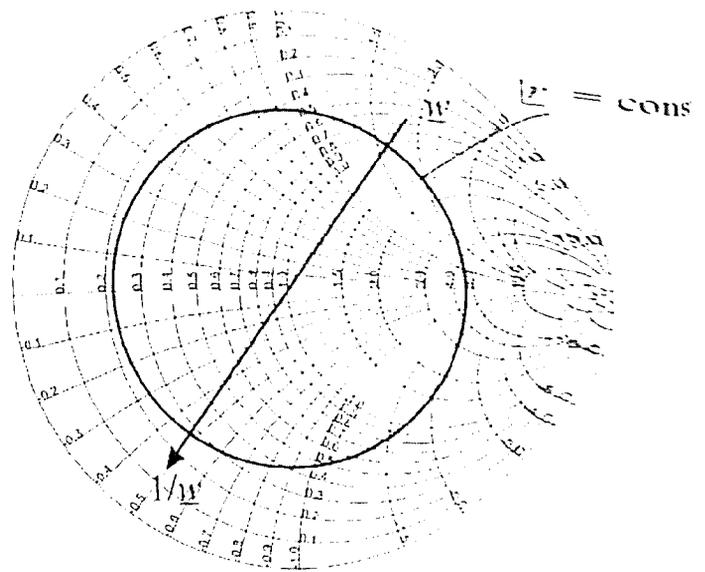
Wichtige Regeln 3

Wegen $\underline{w} = \frac{1+r}{1-r}$ und $\frac{1}{\underline{w}} = \frac{1-r}{1+r}$

erhält man die inverse Größe $1/\underline{w}$, d.h. die normierte Admittanz, durch Spiegelung des Reflektionsfaktors am Ursprungspunkt $r \rightarrow -r$. Aus dem Impedanzdiagramm wird das Admittanzdiagramm!

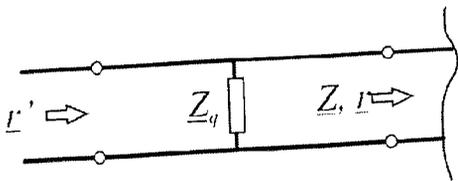


$$\frac{1}{\underline{w}} = \underline{Y} \cdot \underline{Z}_L = G \cdot \underline{Z}_L + jB \cdot \underline{Z}_L$$



Wichtige Regeln 4

Einfügen von normierten Queradmittanzen durch Addition.

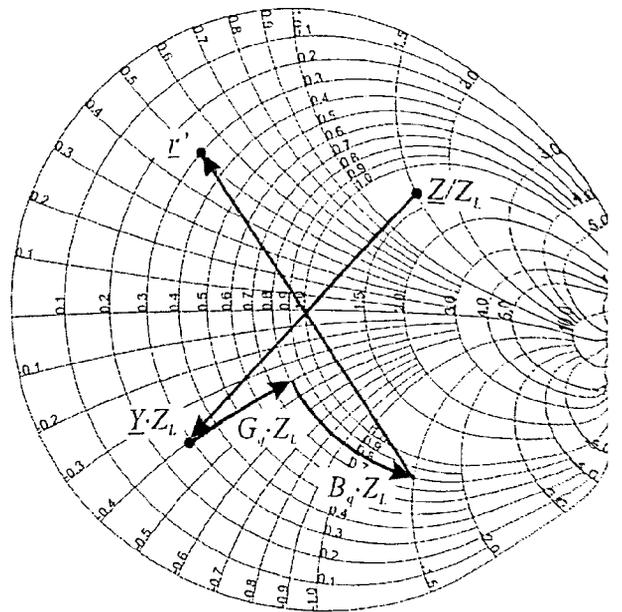


mit $\underline{Z}_q = R_q + jX_q$

bzw. $\underline{Y}_q = G_q + jB_q$



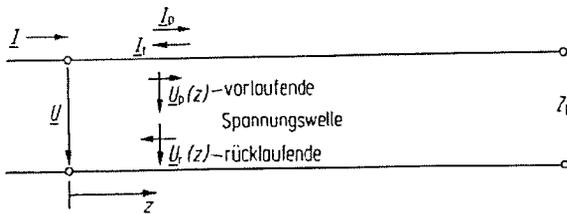
Berechnung von Kettenschaltungen durch Wechseln zwischen Impedanzdiagramm und Admittanzdiagramm



Definition der Wellengrößen 1

In vielen Fällen ist die Definition von Strom und Spannung nicht eindeutig möglich, da die Integrale $\int \vec{E} d\vec{s}$ und $\oint \vec{H} d\vec{s}$ nicht wegunabhängig sind.

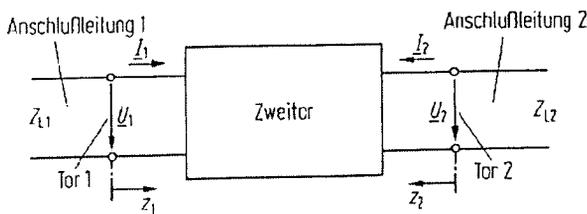
Eine Betrachtung von hin- und zurücklaufenden Wellen ist hier hilfreicher.



$$\underline{U} = \underline{U}_p e^{-\gamma z} + \underline{U}_r e^{+\gamma z}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_p}{Z_L} e^{-\gamma z} - \frac{\underline{U}_r}{Z_L} e^{+\gamma z}$$

Anschlussleitungen beim Zweitor



für $z_1 = 0$ gilt:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{p1} + \underline{U}_{r1}, \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{p1}}{Z_{L1}} - \frac{\underline{U}_{r1}}{Z_{L1}}$$

für $z_2 = 0$ gilt:

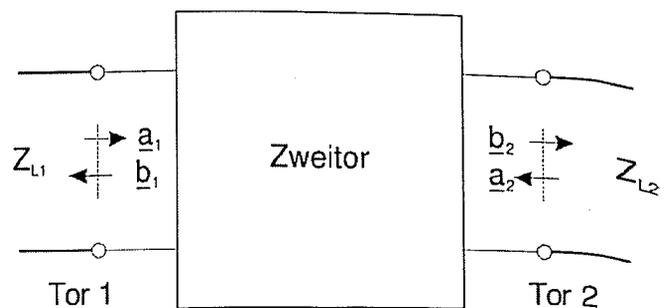
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{p2} + \underline{U}_{r2}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{p2}}{Z_{L2}} - \frac{\underline{U}_{r2}}{Z_{L2}}$$

Definition der Wellengrößen 2

Es werden normierte Wellengrößen \underline{a}_i für die hinlaufende und \underline{b}_i für die rücklaufende Welle definiert um nicht zwischen Spannungs- und Stromgrößen unterscheiden zu müssen:

$$\underline{a}_i = \frac{\underline{U}_{pi}}{\sqrt{Z_{Li}}} = \underline{I}_{pi} \sqrt{Z_{Li}}$$

$$\underline{b}_i = \frac{\underline{U}_{ri}}{\sqrt{Z_{Li}}} = -\underline{I}_{ri} \sqrt{Z_{Li}}$$



Beispiel Zweitor

- Z_{Li} ist der Bezugswiderstand, meist identisch mit Leitungswellenwiderstand
- \underline{a}_i und \underline{b}_i haben die Dimension $\sqrt{\text{Leistung}}$

Streumatrix 1

Die Streumatrix $\underline{\underline{S}}$ gibt den Zusammenhang zwischen den hinlaufenden und den rücklaufenden Wellen an.

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{a}}$$

$\underline{\underline{b}}$ und $\underline{\underline{a}}$ enthalten die Wellen in Form von Spaltenvektoren.

Zum Beispiel für ein Zweitor:
$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

Vorteile der Streumatrixdarstellung:

- Koeffizienten sind in der Hochfrequenztechnik leicht zu messen.
- Oft kann die Streumatrix durch bloße anschauliche Überlegung aufgestellt werden.
- Streumatrix lässt sich auch dann angeben, wenn die Definition von Spannung und Strom nicht einfach möglich ist (z.B. bei einem Hohlleiter).



33

Streumatrix 2

Der Streumatrixkoeffizient \underline{S}_{ii} ist der Eingangsreflektionsfaktor an Tor i . Er entspricht dem Reflexionsfaktor \underline{r} an Tor i für Wellenanpassung an allen anderen Toren.

Eingangsreflektionsfaktor
$$\underline{S}_{ii} = \left. \frac{\underline{b}_i}{\underline{a}_i} \right|_{\underline{a}_j=0} \quad \text{für alle } j \neq i$$

\underline{S}_{ki} ist der Transmissionsfaktor von Tor i nach Tor k . Für Wellenanpassung an allen anderen Toren entspricht er dem Betriebsübertragungsfaktor \underline{A}_B

Transmissionsfaktor
$$\underline{S}_{ki} = \left. \frac{\underline{b}_k}{\underline{a}_i} \right|_{\underline{a}_j=0} \quad \text{für alle } j \neq i$$

d



34

Streumatrix 3

Zwischen Wellengrößen und Klemmengrößen besteht der Zusammenhang

$$\underline{U}_i = \underline{U}_{pi} + \underline{U}_{ri} = (\underline{a}_i + \underline{b}_i) \sqrt{Z_{Li}}$$

$$\underline{I}_i = \underline{I}_{pi} + \underline{I}_{ri} = \frac{(\underline{a}_i - \underline{b}_i)}{\sqrt{Z_{Li}}}$$

Die Leistung der hinlaufende Welle P_{pi} und der rücklaufenden Welle P_{ri} ergibt sich für reelle Normierungswiderstände zu :

$$P_{pi} = \frac{\underline{U}_{pi} \underline{U}_{pi}^*}{2Z_{Li}} = \frac{1}{2} \underline{a}_i \underline{a}_i^* = \frac{1}{2} |\underline{a}_i|^2$$

$$P_{ri} = \frac{\underline{U}_{ri} \underline{U}_{ri}^*}{2Z_{Li}} = \frac{1}{2} \underline{b}_i \underline{b}_i^* = \frac{1}{2} |\underline{b}_i|^2$$

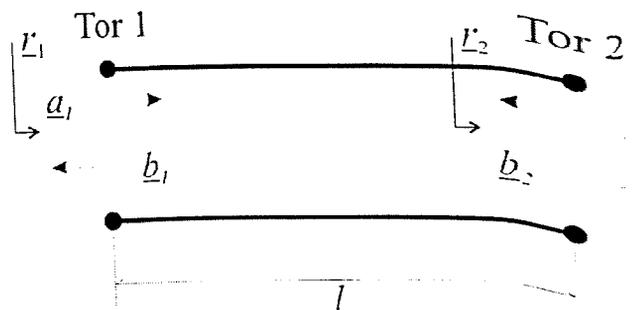


Beispiel Leitung

Mit

$$\underline{b}_1 = \underline{S}_{11} \underline{a}_1 + \underline{S}_{12} \underline{a}_2$$

$$\underline{b}_2 = \underline{S}_{21} \underline{a}_1 + \underline{S}_{22} \underline{a}_2$$



gilt

$$\underline{S}_{11} = \left. \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1} \right|_{\underline{a}_2=0}$$

$\underline{a}_2 = 0$ gilt bei reflektionsfreiem Abschluss $r_2 = 0$, damit wird $\underline{b}_1 = 0$

$$\Rightarrow \underline{S}_{11} = 0$$

und

$$\underline{S}_{21} = \left. \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} \right|_{\underline{a}_2=0}$$

bei idealer Leitung und Reflektionsfreiheit ($r_2 = 0$) entsteht eine Phasendrehung um βl

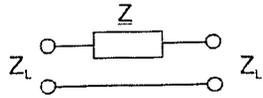
$$\Rightarrow \underline{S}_{21} = e^{-j\beta l}$$

Gleiches Vorgehen für \underline{S}_{12} und \underline{S}_{22} . Damit folgt:

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{pmatrix}$$

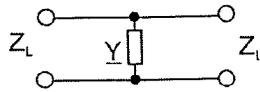
Streumatrix Beispiele

Serien-impedanz



$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \frac{w}{2+w} & \frac{2}{2+w} \\ \frac{2}{2+w} & \frac{w}{2+w} \end{pmatrix}; \quad \underline{w} = \frac{Z}{Z_L}$$

Parallel-admittanz



$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \frac{-v}{2+v} & \frac{2}{2+v} \\ \frac{2}{2+v} & \frac{-v}{2+v} \end{pmatrix}; \quad \underline{v} = \underline{Y} \cdot Z_L$$

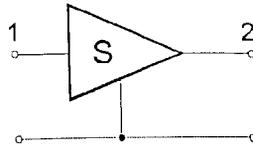
Wellenwiderstandssprung
bzw. Änderung des
Bezugswellenwiderstands



$$S_{11} = -S_{22} = \frac{Z_{L2} - Z_{L1}}{Z_{L2} + Z_{L1}}$$

$$S_{21} = S_{12} = \frac{2\sqrt{Z_{L1} \cdot Z_{L2}}}{Z_{L1} + Z_{L2}}$$

idealer
Verstärker



$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{S}_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

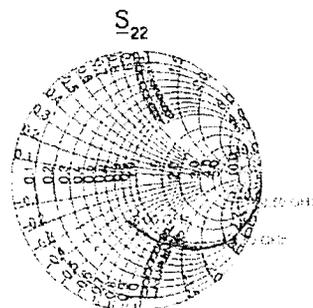
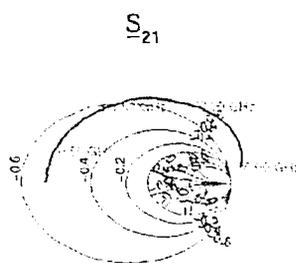
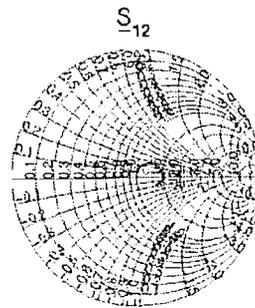
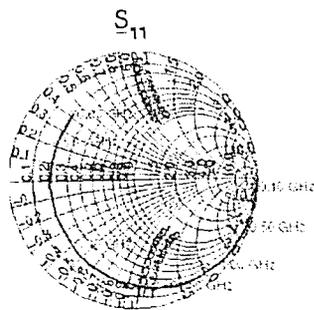
$$|\underline{S}_{21}| > 1$$



Beispiel Transistorverstärker

BFP620 – SiGe NPN

(Grounded Emitter VCE = 2 V, IC = 1 mA)



Eigenschaften von n-Toren

Reziprozität (Übertragungssymmetrie):

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T \quad \text{d.h. } \underline{S}_{ij} = \underline{S}_{ji} \text{ für alle } i, j$$

↳ d.h. der Betriebsübertragungsfaktor ist zwischen zwei beliebigen Toren in beiden Richtungen gleich

Reflexionssymmetrie:

$$\underline{S}_{ii} = \underline{S}_{jj} \text{ für alle } i, j$$

z.B. Idealfall: $\underline{S}_{ii} = 0$ für alle i

↳ das n -Tor ist an allen Toren angepasst!



Leistungsbilanz des n-Tors

$$P = P_p - P_r$$

mit $P_p = \frac{1}{2} \sum_i |a_i|^2$

Leistungssumme der hineinlaufenden Wellen

und $P_r = \frac{1}{2} \sum_i |b_i|^2$

Leistungssumme der herauslaufenden Wellen

somit:
$$P = \frac{1}{2} \sum_i (|a_i|^2 - |b_i|^2)$$

in vektorieller Schreibweise:

$$P = \frac{1}{2} (\underline{\underline{a}}^T \cdot \underline{\underline{a}}^* - \underline{\underline{b}}^T \cdot \underline{\underline{b}}^*)$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\underline{a}}^T (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{S}}^T \cdot \underline{\underline{S}}^*) \cdot \underline{\underline{a}}^*$$

➤ passive ➔ $P > 0$ für jede Beschaltung

➤ verlustfrei ➔ $P = 0$ für jede Beschaltung

↳ $\underline{\underline{S}}^T \cdot \underline{\underline{S}}^* = \underline{\underline{E}}$

➤ aktive ➔ $P < 0$ für jede Beschaltung

➤ bedingt aktive ➔ $P < 0$ für bestimmte Beschaltungen

Beispiel verlustfreies reziprokes 2-Tor

Für ein verlustfreies 2-Tor gilt wegen $\underline{S}^T \cdot \underline{S}^* = \underline{E}$

$$\begin{aligned} |\underline{S}_{11}|^2 + |\underline{S}_{21}|^2 &= 1 & \text{und} & \quad \underline{S}_{11}\underline{S}_{12}^* + \underline{S}_{21}\underline{S}_{22}^* = 0 \\ |\underline{S}_{12}|^2 + |\underline{S}_{22}|^2 &= 1 & & \quad \underline{S}_{12}\underline{S}_{11}^* + \underline{S}_{22}\underline{S}_{21}^* = 0 \end{aligned}$$

Auf Grund der Reziprozität gilt: $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21} \Rightarrow |\underline{S}_{12}| = |\underline{S}_{21}|$

Das heißt, dass mit Festlegung eines Parameters die Beträge der anderen Parameter bestimmt sind!

$$|\underline{S}_{11}| = |\underline{S}_{22}| = \sqrt{1 - |\underline{S}_{21}|^2}$$

z.B. für ein Filter
(verlustlos und
übertragungs-
symmetrisch)

$$\text{mit } |\underline{S}_{11}||\underline{S}_{12}|e^{j(\varphi_{12}-\varphi_{11})} + |\underline{S}_{21}||\underline{S}_{22}|e^{j(\varphi_{22}-\varphi_{21})} = 0$$

$$\text{folgt } \varphi_{12} - \varphi_{11} = \varphi_{22} - \varphi_{21} \pm \pi$$

$$\text{und damit } \varphi_{22} = 2\varphi_{12} - \varphi_{11} \pm \pi$$

$$\text{für Reflexionssymmetrie } (\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22}) \Rightarrow \varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{12} \pm \frac{\pi}{2}$$

41

Umrechnung der Wellenmatrizen

Für die Leitwertmatrix gilt:

$$\underline{\bar{I}} = \underline{Y} \cdot \underline{\bar{U}} \quad \text{mit } \underline{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}, \underline{\bar{U}} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{weiter gilt } \underline{\bar{U}} = \underline{Z}_L^{1/2} (\underline{\bar{a}} + \underline{\bar{b}}), \underline{\bar{I}} = \underline{Z}_L^{-1/2} (\underline{\bar{a}} - \underline{\bar{b}}) \quad \text{und} \quad \underline{\bar{b}} = \underline{S} \cdot \underline{\bar{a}}$$

$$\begin{aligned} \text{Es folgt: } \underline{\bar{I}} = \underline{Y} \cdot \underline{\bar{U}} &\Leftrightarrow \underline{Z}_L^{-1/2} (\underline{\bar{a}} - \underline{S} \cdot \underline{\bar{a}}) = \underline{Y} \cdot \underline{Z}_L^{1/2} (\underline{\bar{a}} + \underline{S} \cdot \underline{\bar{a}}) \\ &\Leftrightarrow (\underline{E} - \underline{S}) \underline{\bar{a}} = \underline{Z}_L^{1/2} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{Z}_L^{1/2} (\underline{E} + \underline{S}) \underline{\bar{a}} \end{aligned}$$

$$\text{für alle } \underline{\bar{a}} \text{ gilt: } (\underline{E} - \underline{S}) = \underline{Z}_L^{1/2} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{Z}_L^{1/2} (\underline{E} + \underline{S})$$

$$\text{Einführen der normierten Leitwertmatrix } \underline{\bar{Y}} \text{ ergibt: } (\underline{E} - \underline{S}) = \underline{\bar{Y}} (\underline{E} + \underline{S})$$



Damit folgt:

$$\underline{S} = (\underline{E} + \underline{\bar{Y}})^{-1} \cdot (\underline{E} - \underline{\bar{Y}})$$

42

Umrechnung $\underline{S} \Leftrightarrow \underline{Y}$

$$\underline{Y} \rightarrow \underline{S}$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{Y}$$

$$\underline{S}_{11} = \frac{(1 - \underline{Y}_{11})(1 + \underline{Y}_{22}) + \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{(1 + \underline{Y}_{11})(1 + \underline{Y}_{22}) - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}$$

$$\underline{Y}_{11} = \frac{(1 - \underline{S}_{11})(1 + \underline{S}_{22}) + \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}{(1 + \underline{S}_{11})(1 + \underline{S}_{22}) - \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}$$

$$\underline{S}_{12} = \frac{-2\underline{Y}_{12}}{(1 + \underline{Y}_{11})(1 + \underline{Y}_{22}) - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}$$

$$\underline{Y}_{12} = \frac{-2\underline{S}_{12}}{(1 + \underline{S}_{11})(1 + \underline{S}_{22}) - \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}$$

$$\underline{S}_{21} = \frac{-2\underline{Y}_{21}}{(1 + \underline{Y}_{11})(1 + \underline{Y}_{22}) - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}$$

$$\underline{Y}_{21} = \frac{-2\underline{S}_{21}}{(1 + \underline{S}_{11})(1 + \underline{S}_{22}) - \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}$$

$$\underline{S}_{22} = \frac{(1 + \underline{Y}_{11})(1 - \underline{Y}_{22}) + \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{(1 + \underline{Y}_{11})(1 + \underline{Y}_{22}) - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{(1 + \underline{S}_{11})(1 - \underline{S}_{22}) + \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}{(1 + \underline{S}_{11})(1 + \underline{S}_{22}) - \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}$$



Umrechnung $\underline{S} \Leftrightarrow \underline{Z}$

$$\underline{Z} \rightarrow \underline{S}$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{Z}$$

$$\underline{S}_{11} = \frac{-(1 - \underline{Z}_{11})(1 + \underline{Z}_{22}) - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{(1 + \underline{Z}_{11})(1 + \underline{Z}_{22}) - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}$$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{(1 + \underline{S}_{11})(1 - \underline{S}_{22}) + \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}{(1 - \underline{S}_{11})(1 - \underline{S}_{22}) - \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}$$

$$\underline{S}_{12} = \frac{2\underline{Z}_{12}}{(1 + \underline{Z}_{11})(1 + \underline{Z}_{22}) - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{2\underline{S}_{12}}{(1 - \underline{S}_{11})(1 - \underline{S}_{22}) - \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}$$

$$\underline{S}_{21} = \frac{2\underline{Z}_{21}}{(1 + \underline{Z}_{11})(1 + \underline{Z}_{22}) - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}$$

$$\underline{Z}_{21} = \frac{2\underline{S}_{21}}{(1 - \underline{S}_{11})(1 - \underline{S}_{22}) - \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}$$

$$\underline{S}_{22} = \frac{-(1 + \underline{Z}_{11})(1 - \underline{Z}_{22}) - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{(1 + \underline{Z}_{11})(1 + \underline{Z}_{22}) - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}$$

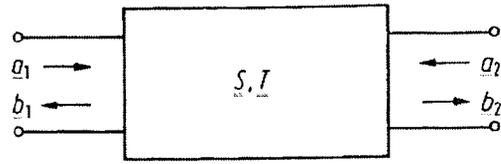
$$\underline{Z}_{22} = \frac{(1 - \underline{S}_{11})(1 + \underline{S}_{22}) + \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}{(1 - \underline{S}_{11})(1 - \underline{S}_{22}) - \underline{S}_{12}\underline{S}_{21}}$$



Wellenkettenmatrix 1

Einführung von Torgruppen für das

- Eingangstor mit \underline{a}_1 und \underline{b}_1
- Ausgangstor mit \underline{a}_2 und \underline{b}_2



Damit kann neben der bekannten Streumatrix $\underline{\underline{S}}$

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

eine torbezogene Wellenkettenmatrix $\underline{\underline{T}}$

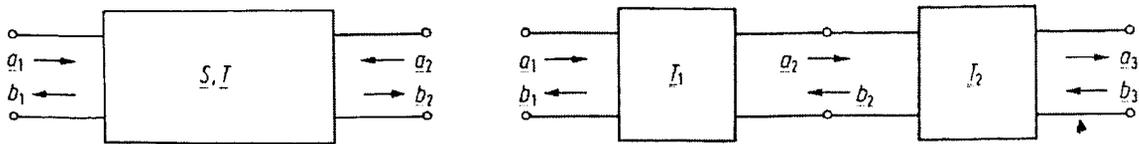
$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a}_2 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix}$$

eingeführt werden.



Wellenkettenmatrix 2

Zur einfachen Berechnung von hintereinander geschalteten 2-Toren (Kettenschaltung) ist Definition des Kettenzählpfeilsystems zweckmäßig!



symmetrische Zählpfeile

Kettenzählpfeile

Dabei ändert sich $\underline{\underline{T}}$ nicht, lediglich die Bezeichnungen \underline{a}_2 und \underline{b}_2 werden vertauscht!

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{a}_1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

Bei der Kettenschaltung zweier torzahlsymmetrischer Mehrpole gilt bei Anpassung der Verbindungsleitungen:

$$\underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{a}_1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}}_1 \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{T}}_1 \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}}_2 \begin{pmatrix} \underline{b}_3 \\ \underline{a}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_1 \cdot \underline{\underline{T}}_2$$



Umrechnung $\underline{\underline{S}} \Leftrightarrow \underline{\underline{T}}$

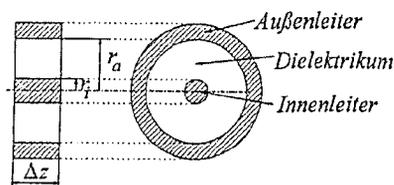
$$\underline{\underline{T}} \rightarrow \underline{\underline{S}} \quad \underline{\underline{S}} = \frac{1}{\underline{\underline{T}}_{22}} \begin{pmatrix} \underline{\underline{T}}_{12} & \underline{\underline{T}}_{11}\underline{\underline{T}}_{22} - \underline{\underline{T}}_{12}\underline{\underline{T}}_{21} \\ 1 & -\underline{\underline{T}}_{21} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}} \rightarrow \underline{\underline{T}} \quad \underline{\underline{T}} = \frac{1}{\underline{\underline{S}}_{21}} \begin{pmatrix} \underline{\underline{S}}_{12}\underline{\underline{S}}_{21} - \underline{\underline{S}}_{11}\underline{\underline{S}}_{22} & \underline{\underline{S}}_{11} \\ -\underline{\underline{S}}_{22} & 1 \end{pmatrix}$$



Koaxialleitung 1

Die Koaxialleitung



Materialeigenschaften:

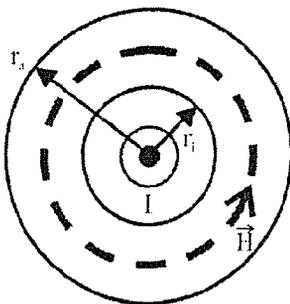
Leiter: Leitfähigkeit κ

Dielektrikum:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r = \epsilon'_r (1 - j \tan \delta_\epsilon)$$

$$\underline{\underline{\mu}}_r = \mu'_r - j\mu''_r = \mu'_r (1 - j \tan \delta_\mu)$$

Bestimmung der Leitungsbeläge für den Grundmode der Koaxialleitung:



H-Feld

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 2\pi r H(r) \Rightarrow B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^{\Delta z} \int_{r_i}^{r_a} \frac{\mu I}{2\pi r} dr dz = \Delta z \mu_0 \mu'_r \frac{I}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

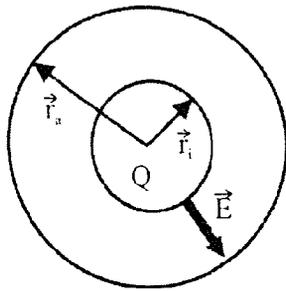
$$\Delta z L' = \frac{\Phi}{I} \Rightarrow$$

Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{\mu_0 \mu'_r}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$$



Koaxialleitung 2



E-Feld

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon 2\pi r \Delta z}$$

$$U_{21} = \int_{r_i}^{r_a} \vec{E} d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_a} \frac{Q}{\epsilon 2\pi r \Delta z} dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon \Delta z} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$\Delta z C' = \frac{Q}{U_{21}} \rightarrow$$

Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon'_r}{\ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)}$$

Der Ableitungsbelag kann bestimmt werden aus:

$$\frac{1}{G' \Delta z} = \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon''_r \Delta z} \rightarrow$$

Ableitungsbelag

$$G' = \frac{2\pi r \epsilon_0 \epsilon''_r}{\ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)} = \omega C' \tan \delta_e$$



49

Koaxialleitung 3

Mit der Eindringtiefe $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu'_r \kappa}}$

bestimmt sich aus

$$R' \Delta z = \frac{\Delta z}{2\pi \kappa \delta} \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right) \rightarrow$$

Widerstandsbelag

$$R' = \frac{1}{2\pi \kappa \delta} \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right)$$

Für eine verlustfreie Koaxialleitung berechnet sich damit der Wellenwiderstand zu:

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu'_r}{\epsilon_0 \epsilon'_r}} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) = \frac{Z_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu'_r}{\epsilon'_r}} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)$$



50

Koaxialleitung 4

Die Phasenkonstante der Leitung beträgt:

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu'_r \varepsilon'_r} = \frac{2\pi f}{c_0} \sqrt{\mu'_r \varepsilon'_r} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\mu'_r \varepsilon'_r}$$

Für die Wellenlänge auf der Leitung ergibt sich:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu'_r \varepsilon'_r}}$$

Und für die Phasengeschwindigkeit ergibt sich:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu'_r \varepsilon'_r}}$$



Diese Gleichungen gelten auch bei schwach verlustbehafteten Koaxialleitungen!

Koaxialleitung 5

Gesucht: Kabel mit minimaler Dämpfung: Minimum von $\alpha(r_a/r_i) = \alpha_R + \alpha_G$

$$\alpha_G = \frac{1}{2} G' \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{1}{2} Z_L \omega C' \tan \delta_\varepsilon = \text{const.}$$

$$\alpha_R = \frac{1}{2} \frac{R'}{Z_L} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi \kappa \delta} \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right) \frac{2\pi}{Z_0} \sqrt{\frac{\varepsilon'_r}{\mu'_r}} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon'_r}{\mu'_r}} \frac{1}{Z_0 \kappa \delta r_a} \cdot \frac{1+x}{\ln x} \quad \text{mit } x = \frac{r_a}{r_i}$$

$$\frac{d\alpha_R}{dx} = \alpha'_R = 0 \Rightarrow \ln x - \frac{1}{x}(1+x) = \ln x - 1 - \frac{1}{x} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3,1$$

Koaxialleitung 6

Daraus folgt für den Wellenwiderstand:

$$Z_L = \sqrt{\frac{\mu_r'}{\epsilon_r'}} \cdot 77\Omega$$

Bei Verwendung von Zell-PE ($\epsilon_r = 1,1 \dots 1,4$) ergibt sich:

$$Z_L \approx 75\Omega$$

➔ Guter Kompromiss zur Speisung eines $\lambda/2$ -Dipols ($Z_D = 73\Omega$)

51

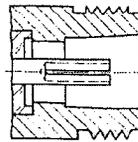
53

Beispiele Koaxialleitung

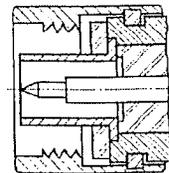
Koaxialer Steckverbinder



Flexible Koaxialkabel (RG213)



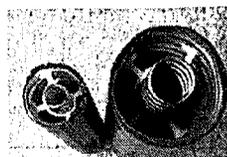
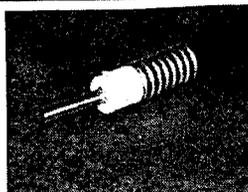
female



male



Semiflexibles
Koaxialkabel

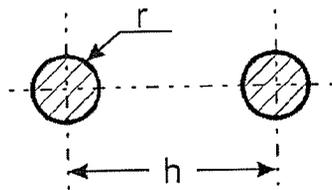


Koaxialkabel
für Fernseh-
sendeanlagen

6

52

54



Paralleldrahtleitung

für $h \gg r$ und $\delta \ll r$ ergibt sich:

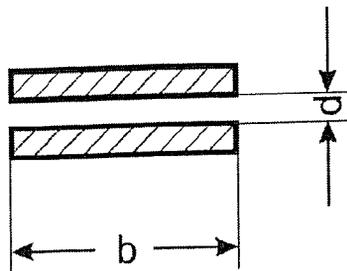
Induktivitätsbelag: $L' \approx \frac{\mu_0 \mu_r'}{\pi} \ln\left(\frac{h}{r}\right)$

Kapazitätsbelag: $C' \approx \pi \varepsilon_0 \varepsilon_r' \frac{1}{\ln(h/r)}$

Widerstandsbelag: $R' \approx \frac{1}{\kappa \delta} \frac{1}{\pi r}$

Ableitungsbelag: $G' \approx \omega C' \tan \delta_\varepsilon$

Leitungswellenwiderstand: $Z_L \approx \frac{1}{\pi} Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r'}{\varepsilon_r'}} \ln\left(\frac{h}{r}\right)$



Bandleitung

für $b \gg d$ ergibt sich:

Induktivitätsbelag: $L' \approx \mu_0 \mu_r' \frac{d}{b}$

Kapazitätsbelag: $C' \approx \varepsilon_0 \varepsilon_r' \frac{b}{d}$

Widerstandsbelag: $R' \approx \frac{1}{\kappa \delta} \frac{2}{b}$

Ableitungsbelag: $G' \approx \omega C' \tan \delta_\varepsilon$

Leitungswellenwiderstand: $Z_L \approx Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r'}{\varepsilon_r'}} \frac{d}{b}$

Quasi-TEM-Wellenleitungen

Quasi-TEM-Leitungen weisen ein quer-inhomogenes Dielektrikum auf.



Es treten longitudinale Feldkomponenten auf, diese sind aber klein im Vergleich zu den transversalen Komponenten.

Beispiele für Quasi-TEM-Wellenleitungen:



Streifenleitung



gekoppelte
Streifenleitung



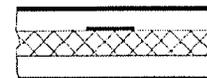
Koplanar-Leitung



unsymmetrische
Streifenleitung



symmetrische
Streifenleitung



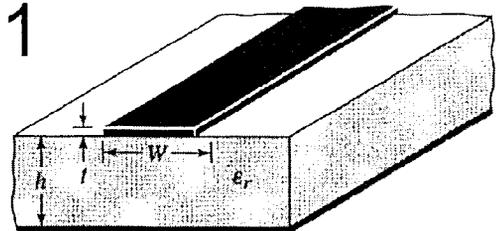
Suspended-substrate-line

Einsatzfelder:

- HF-Schaltungen über 100MHz
- hybride oder monolithische Integration



Mikrostreifenleitung 1



Microstrip-Leitung

Quasi-statische Näherung
für tiefe Frequenzen!

Einführung einer effektiven Permittivitätszahl:

$$\epsilon_{\text{reff}} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{c_0}{v_{\text{ph}}} \right)^2 = \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

typisch: $1 \leq \epsilon_{\text{reff}} \leq \epsilon_r$

Hierdurch Rückführung auf
TEM-Leitung mit $\epsilon_r' = \epsilon_{\text{reff}}$:

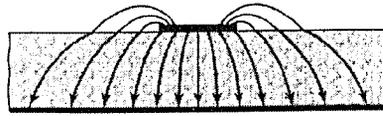
$$Z_L = \frac{Z_{L0}}{\sqrt{\epsilon_{\text{reff}}}}$$

Z_{L0} Wellenwiderstand der
TEM-Leitung für $\epsilon_{\text{reff}} = 1$

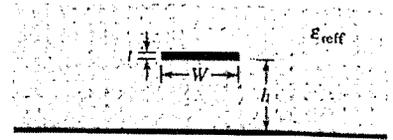
$$\rightarrow L' = \frac{Z_{L0}}{c_0} = \frac{Z_L}{v_{\text{ph}}}; \quad C' = \frac{\epsilon_{\text{reff}}}{c_0 Z_{L0}} = \frac{1}{v_{\text{ph}} Z_L}$$



Mikrostreifenleitung 2



Elektrische Feldlinien im Querschnitt einer Mikrostreifenleitung



Effektive Dielektrizitätskonstante ϵ_{reff}

Näherung für ϵ_{reff} :

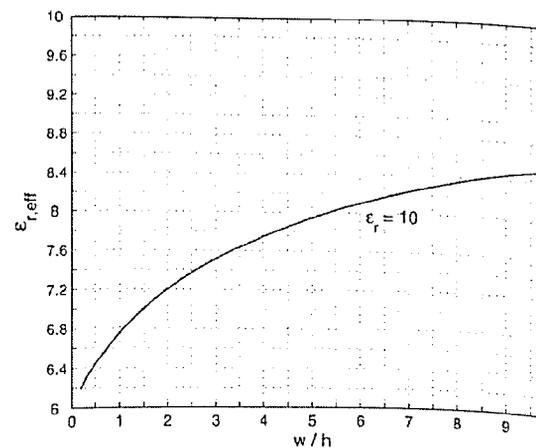
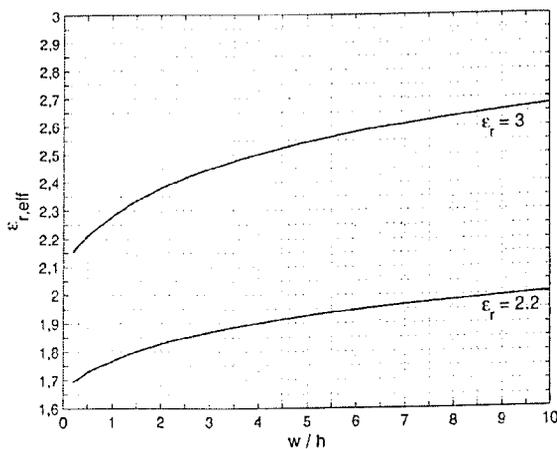
$$\epsilon_{\text{reff}} = \frac{\epsilon'_r + 1}{2} + \frac{\epsilon'_r - 1}{2} F(w/h)$$

mit $F(w/h) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+12h/w}} + 0,04(1-w/h)^2 & w/h \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1+12h/w}} & w/h \geq 1 \end{cases}$



Mikrostreifenleitung 3

ϵ_{reff} als Funktion von w/h mit dem Parameter ϵ_r

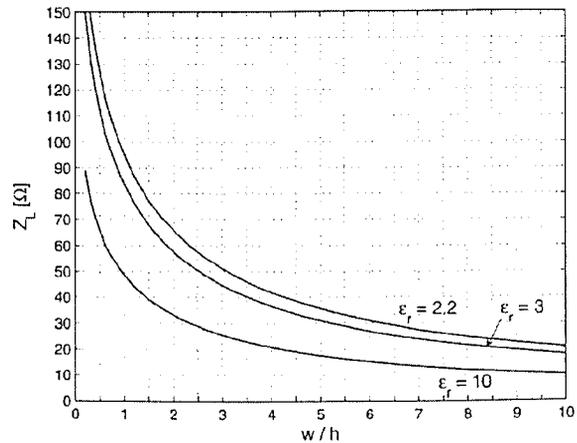


Mikrostreifenleitung 4

Näherung für den Leitungswellenwiderstand Z_{L0} :

$$Z_{L0} = \begin{cases} \frac{Z_0}{2\pi} \ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right) & \frac{w}{h} \leq 1 \\ \frac{Z_0}{\frac{w}{h} + 2.46 - 0.49\frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6} & \frac{w}{h} \geq 1 \end{cases}$$

mit $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$



Wellenwiderstand Z_L als Funktion von w/h mit dem Parameter ϵ_r



Mikrostreifenleitung 5

Die Wellenlänge λ ergibt sich zu:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{\text{reff}}}} \quad \text{mit} \quad \lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

Die Wellenzahl β ergibt sich zu:

$$\beta = k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{reff}}} \quad \text{mit} \quad k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

Die Dämpfungskonstanten ergeben sich näherungsweise zu:

$$\alpha_R \approx \frac{1}{\kappa \delta w Z_L}$$

$$\alpha_G \approx \frac{k_0}{2} \sqrt{\epsilon_{\text{reff}}} \frac{1/\epsilon_{\text{reff}} - 1}{1/\epsilon_r' - 1} \tan \delta_\epsilon$$



Mikrostreifenleitung 6

Umgekehrt lässt sich bei gegebenem Z_L und ϵ_{reff} das Verhältnis w/h ermitteln durch:

$$w/h = \begin{cases} 4 \left(\frac{1}{2} e^A - e^{-A} \right)^{-1} & w/h \leq 2 \\ \frac{\epsilon_r' - 1}{\pi \epsilon_r'} \left(\ln(B-1) + 0,293 - \frac{0,517}{\epsilon_r'} \right) + \frac{2}{\pi} (B-1 - \ln(2B-1)) & w/h \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{mit } A = \frac{\pi}{Z_0} \sqrt{2(\epsilon_r' + 1)} Z_L + \frac{\epsilon_r' - 1}{\epsilon_r' + 1} \left(0,226 + \frac{0,121}{\epsilon_r'} \right)$$

$$B = \frac{\pi Z_0}{2 Z_L \sqrt{\epsilon_r'}}$$



Mikrostreifenleitung 7

Bei höheren Frequenzen konzentriert sich das Feld weiter innerhalb des Dielektrikums.

➔ ϵ_{reff} steigt mit der Frequenz

➔ Phasengeschwindigkeit und Wellenwiderstand sind frequenzabhängig

↳ Dispersion auf der Mikrostreifenleitung!

Näherungsweise gilt:

$$\epsilon_{\text{reff}}(f) \cong \epsilon_r' + \frac{\epsilon_{\text{reff}}(f=0) - \epsilon_r'}{1+p}$$

$$\text{mit } p \cong \left(\frac{h/\text{mm}}{Z_L(0)/\text{Ohm}} \right)^{4/3} \left(0,43(f/\text{GHz})^2 - 0,009(f/\text{GHz})^3 \right)$$

Näherung für Z_L :

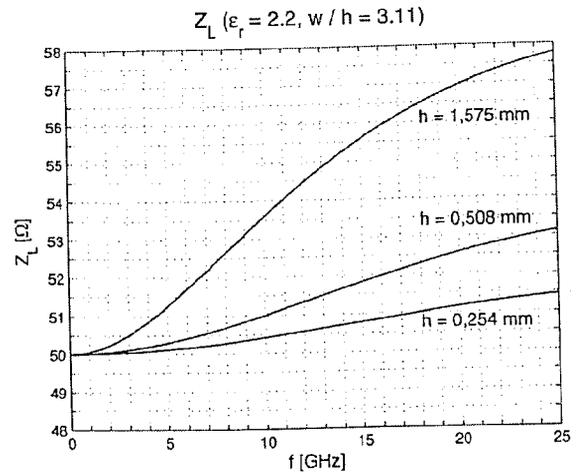
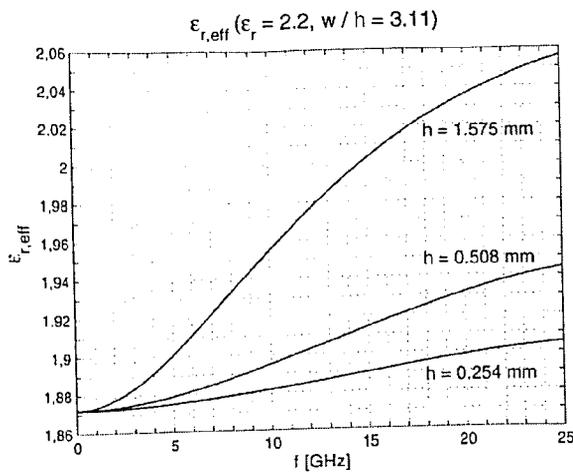
$$Z_L(f) \approx Z_L(f=0) \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{reff}}(f=0)}{\epsilon_{\text{reff}}(f)} \frac{\epsilon_{\text{reff}}(f) - 1}{\epsilon_{\text{reff}}(f=0) - 1}}$$



Mikrostreifenleitung 8

Frequenzabhängigkeit von $\epsilon_{r,eff}$ und Z_L

2
2



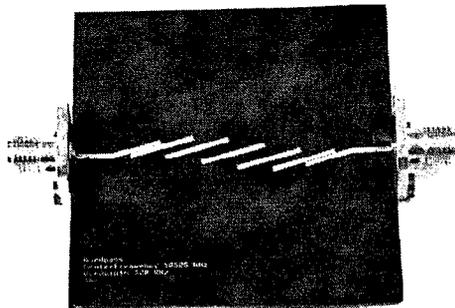
63



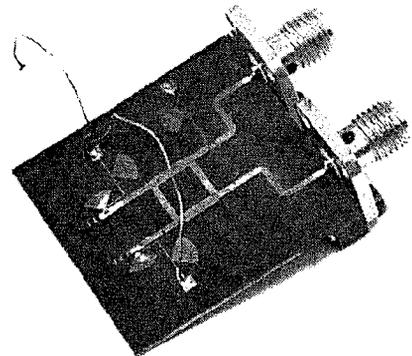
65

Mikrostreifenleitung 9

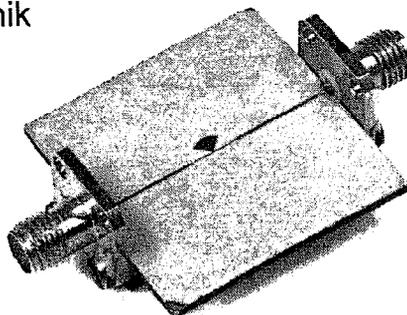
ig



Filter in Microstrip-Leitungstechnik



Phasenschieber mit Branch-Line-Koppler



Bandstoppe durch Stub

64



66