GGET II Großübung

Heide Meiwes und Stefan Engel
Mitschrift: Marius Geis

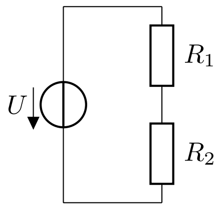
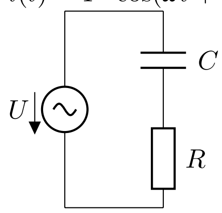
9. August 2011

Inhaltsverzeichnis

5 Übungsaufgaben

5.1 Wechselgrößen

Analyse von elektrischen Schaltungen und Netzwerken

<table>
<tr><th>GET I</th><th>GET II</th></tr>
<tr><td colspan="2">Elektrische Größen</td></tr>
<tr><td>DC:
$U = \text{const}$
$I = \text{const}$

</td><td>DC+A
$u = u(t)$
$i = i(t)$
$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$
$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kirchhoff'sche Gleichungen (Maschengleichung, Knotengleichung)</td></tr>
<tr><td>z.B. $U = U_1 + U_2$

$\rightarrow$ algebraische Summe</td><td>z.B. $u = u_R + u_C$
$= \hat{U}_R \cdot \cos(\omega t + \varphi_R) + \hat{U}_C \cdot \cos(\omega t + \varphi_C)$
$\rightarrow$ trigometrische Summe, Additionstheoreme</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bauteilgleichungen</td></tr>
<tr><td>Widerstand
$U_R = R \cdot I_R$
z.B. $U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I$

$\rightarrow$ lineare algebraische Gleichungen (Polynome)</td><td>Kapazität
$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$
Induktivität:
$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$
$u(t) = R \cdot \underbrace{C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}}_{i_c(t)} + U_c(t)$
$\rightarrow$ lineare DGL</td></tr>
</table>

Zwei Fälle von zu lösenden Problemen bzgl. Schaltungsanalyse in GGET II:

a) allgemeine zeitabhängige Größen $y(t)$:
Lösen von DGL

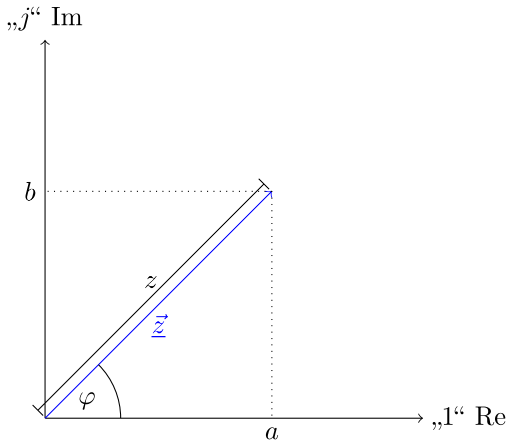
b) sin-förmige (harmonische) Größen:
$y(t) = \hat{Y} \cdot \sin(\omega t + \varphi_y)$
Hilfsmittel: Komplexe Zahlen

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$\ominus$ Additionstheoreme	$\oplus$ Vektoraddition
$\ominus$ DGL	$\oplus$ Algebraische Gleichungen

Komplexe Zahlen

$x^2 + 1 = 0$

- Imaginäre Einheit
- Mathematik/Physik $i := \sqrt{-1}$
- Elektrotechnik $j := \sqrt{-1}$
  (um Verwechslung mit Strom $i(t)$ zu vermeiden)
- Darstellung komplexer Zahlen in der Zahlenebene



- Kartesische Koordinaten

  $$\underline{z} = (a, b)$$

  - Algebraische Form $\underline{z} = a + jb, a, b \in \mathbb{R}$
    mit Realteil $\mathrm{Re}\{\underline{z}\} = a$
    und Imaginärteil $\mathrm{Im}\{\underline{z}\} = b$

- Polarkoordinaten

  $$\underline{z} = (z, \varphi)$$

  - Absolutbetrag: $z = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
  - Phase/Argument:

  $$\varphi = \arg(\underline{z}) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & , a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi & , a < 0 \\ \mathrm{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2} & , a = 0 \end{cases}$$

  mit $-\pi < \varphi < \pi$

- Trigonometrische Form

  $$\underline{z} = z \cdot (\cos\varphi + j \sin\varphi)$$

- Exponentionalform

  $$\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi}$$

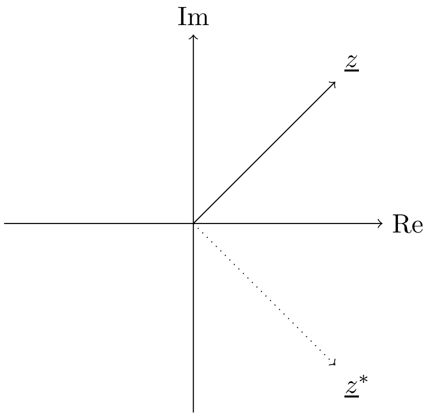
  Exponentielle und trigonometrische Form sind über die Eulersche Formel miteinander verknüpft:

  $$z \cdot e^{j\varphi} = z(\cos\varphi + j \sin\varphi)$$

- Konjugiert komplexe Zahlen
  Unterscheiden sich zwei komplexe Zahlen nur im Vorzeichen ihres Imaginärteils, so bezeichnet man sie als konjugiert komplex:

  $$\mathrm{Re}\{\underline{z}^*\} = \mathrm{Re}\{\underline{z}\}$$
  $$\mathrm{Im}\{\underline{z}^*\} = -\mathrm{Im}\{\underline{z}\}$$

  Geometrisch: Spiegelung an reeller Achse:



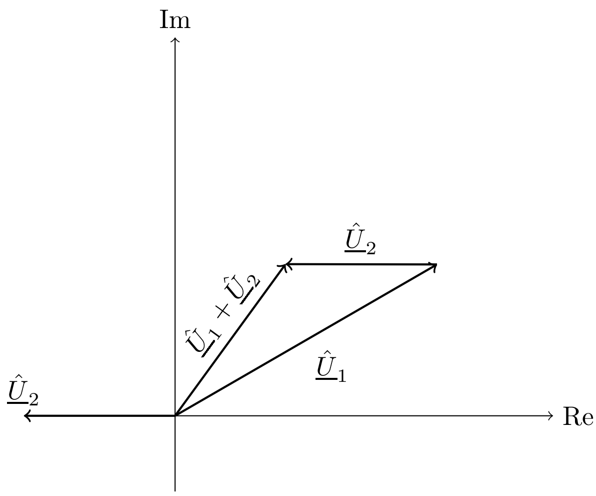
- Rechnen mit komplexen Zahlen
  - Addition/Subtraktion
    Durchführung Komponentenweise (nach Real- und Imaginärteil) in algebraischer Form (ausschließlich)

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\underline{\hat{U}}_1 &= 4U \cdot e^{j30^\circ} = 3{,}46\,\mathrm{V} + j2\,\mathrm{V}\\ \underline{\hat{U}}_2 &= 2U \cdot e^{j180^\circ} = -2\,\mathrm{V}\\ \underline{\hat{U}}_1 + \underline{\hat{U}}_2 &= 3{,}46\,\mathrm{V} + j2\,\mathrm{V} - 2\,\mathrm{V}\\ &= 1{,}46\,\mathrm{V} + j2\,\mathrm{V}\\ &= \sqrt{1{,}46^2 + 2^2}\mathrm{V} \cdot e^{j\arctan\frac{2\,\mathrm{V}}{1{,}46\,\mathrm{V}}}\\ &= 2{,}48\,\mathrm{V} \cdot e^{j53.9^\circ}\end{aligned}$$

geometrisch: Vektoraddition



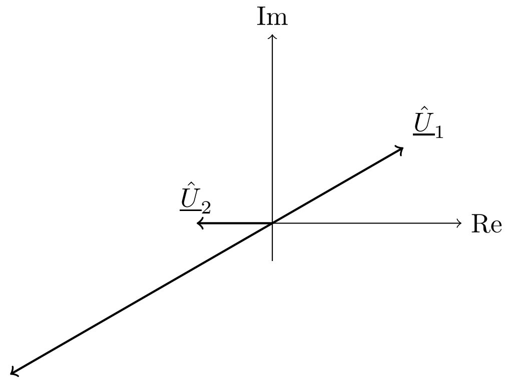
  - Multiplikation/Division
    Durchführung am einfachsten in Exponentialform (Potenzgesetze)

$$\begin{aligned}\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 &= z_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot z_2 \cdot e^{j\varphi_2}\\ &= z_1 \cdot z_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}\end{aligned}$$

Beispiel:

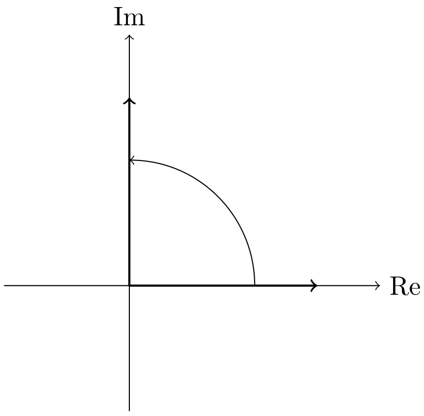
$$\begin{aligned}\underline{\hat{U}}_1 \cdot \underline{\hat{U}}_2 &= 4\,\mathrm{V} \cdot e^{j30^\circ} \cdot 2\,\mathrm{V} \cdot e^{j180^\circ}\\ &= 8\,\mathrm{V}^2 \cdot e^{j210^\circ}\\ &= 8\,\mathrm{V}^2 \cdot e^{-j150^\circ}\end{aligned}$$

geometrisch: Dreh-Streckung



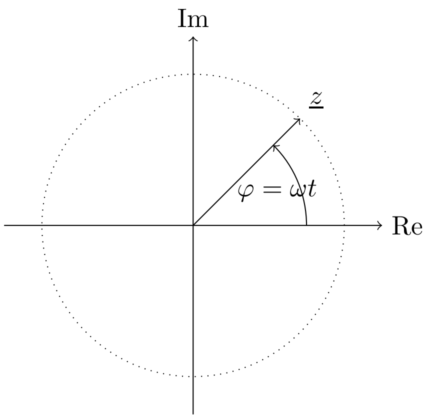
Multiplikation mit j entspricht Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv)

$$j = e^{j90^\circ} = \underbrace{\cos(90^\circ)}_{0} + j\underbrace{\sin(90^\circ)}_{1}$$



- Rotierender Vektor (Sinor, Drehzeiger)

  $$\underline{z}(t) = z \cdot e^{j\varphi(t)} = z \cdot e^{j\omega t}$$



  - Differenzieren

    $$\frac{d\underline{z}(t)}{dt} = j\omega\underline{z}(t)$$

    Zurückgeführt auf Multiplikation
    → entspricht Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) und Streckung um ω.
  - Integrieren

    $$\int \underline{z}(t)\, dt = \frac{1}{j\omega}\underline{z}(t) = -j\frac{1}{\omega}\underline{z}(t)$$

Zurückgeführt auf Division. Entspricht Drehung um 90° im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) und Streckung um $\frac{1}{\omega}$ (Stauchung)

- Komplexe Zahlen - 2 wesentliche Vorteile
  1. Vektoraddition anstatt Additionstheoreme
  2. Multiplikation/Division anstatt Differenzieren/ Integrieren
- zu (1):

  gegeben:

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \hat{U}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) = 4\,\mathrm{V} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\
u_2(t) &= \hat{U}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = 2\,\mathrm{V} \cdot \cos(\omega t + \pi) \\
&= -2\,\mathrm{V} \cdot \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

  gesucht:

$$u_1(t) + u_2(t) = ?$$

  Reelle Größen wie komplexe Größen? Reelle Größen als Realteil einer komplexen Zahl auffassen (und Imaginärteil entsprechend ergäzen):

$$\begin{aligned}
u_1(t) &:= \mathrm{Re}\{\underline{\hat{U}}_1(t)\} = \mathrm{Re}\{\hat{U}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + j\hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)\} \\
u_2(t) &:= \mathrm{Re}\{\underline{\hat{U}}_2(t)\} = \mathrm{Re}\{\hat{U}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) + j\hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)\} \\
\underline{\hat{U}}_1(t) &= \hat{U}_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} = 4\,\mathrm{V} \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{6})} \\
\underline{\hat{U}}_2(t) &= \hat{U}_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)} = 2\,\mathrm{V} \cdot e^{j(\omega t + \pi)}
\end{aligned}$$

  (Vektor-)Addition in Komponenten

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{U}}_1(t) + \underline{\hat{U}}_2(t) &= \underbrace{\hat{U}_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)}}_{\text{Sinor}} + \hat{U}_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)} \\
&= \underbrace{\hat{U}_1 \cdot e^{j\varphi_1}}_{\text{Phasor } \underline{\hat{U}}_1} \cdot e^{j\omega t} + \underbrace{\hat{U}_2 \cdot e^{j\varphi_2}}_{\underline{\hat{U}}_2} \cdot e^{\omega t} \\
&= \underbrace{\left(\underline{\hat{U}}_1 + \underline{\hat{U}}_2\right)}_{\text{Zeiger für } t=0} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{„Drehterm“}}
\end{aligned}$$

  Phasoren Addieren. Realteil liefert gesuchtes reelles Ergebnis

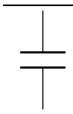
$$u_1(t) + u_2(t) = \mathrm{Re}\{\underline{\hat{U}}_1(t) + \underline{\hat{U}}_2(t)\}$$

  und für $\hat{U}_3 \cdot \sin(\omega t + \varphi_3)$:

$$\sin(\omega t + \varphi_3) = \cos(\omega t + \varphi_3 - \frac{\pi}{2})$$

- zu (2)

  Für harmonische Größen (sin, cos) d.h, Drehzeiger in $\mathbb{C}$ gilt:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
	$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$	$\underline{\hat{I}}_C(t) = \underbrace{j\omega C}_{=:Y_C} \cdot \underline{\hat{U}}_C(t)$
	$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t)\,dt$	$\underline{\hat{U}}_C(t) = \underbrace{\frac{1}{j\omega C}}_{=:\underline{Z}_C} \cdot \underline{\hat{I}}_C(t)$
	$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	$\underline{\hat{U}}_L(t) = \underbrace{j\omega L}_{=:Y_L} \cdot \underline{\hat{I}}_L(t)$
	$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t)\,dt$	$\underline{\hat{I}}_L(t) = \underbrace{\frac{1}{j\omega L}}_{=:\underline{Z}_L} \cdot \underline{\hat{U}}_L(t)$

  $\Rightarrow$ DGLs $\rightarrow$ Polynome

Analogie zum Ohm'schen Gesetz:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \qquad \text{Impedanz } \underline{Z} (\hat{=} R)$$
$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \qquad \text{Admittanz } \underline{Y} (\hat{=} G)$$

mit $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

$\Rightarrow$ mit AC rechnen, wie von DC bekannt

- Gegenüberstellung von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	
Harmonische Wechselgr.	$y(t)$	$\underline{\hat{Y}}(t)$	Drehzeiger (Sinor)
Scheitelwert	$\hat{Y}$	$\underline{\hat{Y}}$	Phasor mit Scheitelwert
Effektivwert	Y	$\underline{Y}$	Phasor mit Effektivwert

Korrektur:

Darstellung von reellen und komplexen Größen
$\rightarrow$ Vorlesungsskript S.1

$$u_1(t) + u_2(t) = \cancel{\mathrm{Re}\{\underline{\mathrm{u}}_1(t) + \underline{\mathrm{u}}_2(t)\}} = \mathrm{Re}\{\underline{\hat{\mathrm{U}}}_1(t) + \underline{\hat{\mathrm{U}}}_2(t)\}$$

5.1.1 Aufgabe 1: Mittel- und Effektivwert

Definition einer zeitlich periodischen Funktion:

$$f(t+T) = f(t) \text{ für } t \text{ mit } T > 0$$
$$T: \text{ Periode, Periodendauer}$$

Momentanwert: $y = y(t)$

Mittelwert: $\overline{Y} = \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} y(t')\, dt$

Effektivwert: $Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} y^2(t')\, dt}$

engl: RMS (root mean square)

Betrachtung einer beliebigen Periode, z.B. Beginn bei $t = 0$.

1.

$$i(t) = \begin{cases} \frac{\hat{I}}{aT} \cdot t & \text{für} \quad 0 \leq t < aT \\ 0 & \text{für} \quad aT \leq t < T \end{cases}$$

Mittelwert:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{1}{T} \int\limits_0^T i(t)\, dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int\limits_0^{aT} \frac{\hat{I}}{aT} \cdot t\, dt + 0 \right) \\ &= \frac{\hat{I}}{aT^2} \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{aT} \\ &= \frac{a}{2} \hat{I} \end{aligned}$$

Alternativ: Flächeninhalt des Dreiecks, dann durch T teilen.

$$A_A = a \cdot T \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{2}$$
$$\bar{I} = \frac{A_A}{T} = \frac{a}{2} \hat{I}$$

Effektivwert:

$$I = \frac{1}{T}\sqrt{\int_0^T i^2(t)\,dt}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{aT}\left(\frac{\hat{I}}{aT}\right)^2 dt + 0\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{a^2\cdot T^3}\cdot\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{aT}}$$
$$= \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{3}\cdot a} = \hat{I}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

2. Mittelwert: positive und negative Halbwelle von $i(t)$ sind gleich.

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{1}{T}\underbrace{\int_0^T i(t)\,dt}_{0} = 0 = 0$$

wegen gleicher Fläche mit gegensätzlichen Vorzeichen. Effektivwert:
abschnittsweise Definition:

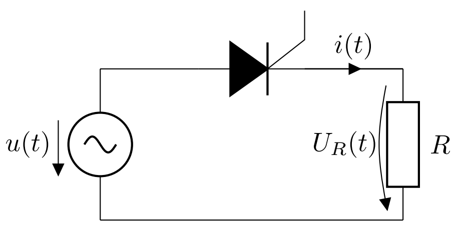
$$i(t) = \begin{cases} \frac{\hat{I}}{T/6}\cdot t & \text{für} \quad 0 \le t < \frac{T}{6} \\ \hat{I} & \text{für} \quad \frac{T}{6} \le t < \frac{T}{3} \\ \vdots & \end{cases}$$

Ausnutzen der Symmetrie: Gleiche Flächen zusammenfassen.

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}$$
$$= \sqrt{\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{6}}\left(\frac{\hat{I}}{T/6}\cdot t\right)^2 dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{6}}^{\frac{T}{3}}\hat{I}^2\,dt}$$
$$= \sqrt{\frac{4\cdot\hat{I}^2\cdot 6^2}{T^3}\cdot\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{\frac{T}{6}} + \frac{2}{T}\hat{I}^2\cdot t\Big|_{\frac{T}{6}}^{\frac{T}{3}}}$$
$$= \sqrt{\frac{4\cdot\hat{I}^2\cdot 6^2}{T^3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{T^3}{6^3} + \frac{2}{T}\hat{I}^2\left(\frac{T}{3}-\frac{T}{6}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{9}\hat{I}^2 + \frac{1}{3}\hat{I}^2}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{3}\hat{I}$$

$\Rightarrow$ Effektivwert I sagt etwas über die Leistung aus, da z.B. der Wirkwiderstand R bei einem Strom $i(t)$ die Leistung $p(t) = i^2(t)\cdot R$ umsetzt.

5.1.2 Aufgabe 2: Thyristorgleichrichter



Praxisbeispiel: „Phasenanschnittsdimmer“ z.B. in dimmbaren Lampen. Dort allerdings Anschnitt beider Halbwellen mit einem Triac (entspricht zwei anti-parallel geschalteten Thyristoren).

Momentanleistung:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- Bei periodisch zeitabhänigen Größen gilt für die mittlere Wirkleistung:

$$\begin{aligned} P = \bar{p}(t) &= \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt \\ &= \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot i(t)\,dt \end{aligned}$$

Am ohmschen Widerstand gilt:

$$\begin{aligned} u_R(T) &= R \cdot i_R(t) \\ \Rightarrow P = P_R &= \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} u_R(t) \cdot i_R(t)\,dt \\ &= R \cdot \underbrace{\frac{1}{T} \cdot \int\limits_{t_0}^{t_0+T} i_R^2(t)\,dt}_{\text{Quadrat des Effektivwertes}} = R \cdot I^2 \end{aligned}$$

- Berechnung des Effektivwertes $I = I(\alpha)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_0^T i^2(t)\,dt}$$

Substitution, um von der Zeitachse auf die Winkelachse (in rad) zu kommen:

$$\varphi := \omega \cdot t = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow dt = \frac{T}{2\pi} \cdot d\varphi$$

Alle Zeitgrößen (t und T) mit ω multiplizieren.

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} i^2 \underbrace{(\omega t)}_{=\varphi}\, d(\omega t)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_\alpha^\pi \hat{I}^2 \underbrace{\sin^2(\varphi)}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)}\, d\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{4\pi} \cdot t \int\limits_\alpha^\pi (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{4\pi} \left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_\alpha^\pi} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{4\pi} \left(\pi - \alpha - 0 + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)} \\ &= \frac{\hat{I}}{2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\sin 2\alpha} \end{aligned}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R} = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{R} = \frac{\sqrt{2} \cdot 220\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 3{,}11\,\mathrm{A}$$

- In der Formel wird α im Bogenmaß benötigt (rad), nicht in Grad (deg).

$$\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha_{deg}$$

ACHTUNG: auch Kreisfrequenz ist stets in $\frac{rad}{s}$ anzugeben. $\Rightarrow$ Taschenrechner richtig einstellen!

- größte Leistungsabgabe bei $\alpha_1 = 0$ (entspricht dem Schaltverhalten einer Diode)

$$\begin{aligned} I(\alpha_1 = 0) &= \frac{\hat{I}}{2}\sqrt{1 - \frac{0}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \cdot \sin 0} \\ &= \frac{\hat{I}}{2} = \frac{3{,}11\,\text{A}}{2} = 1{,}56\,\text{A} \\ P(\alpha_1 = 0) &= R \cdot I^2(\alpha_1) = 100\,\Omega \cdot (1{,}56\,\text{A})^2 \\ &= 243{,}4\,\text{W} \end{aligned}$$

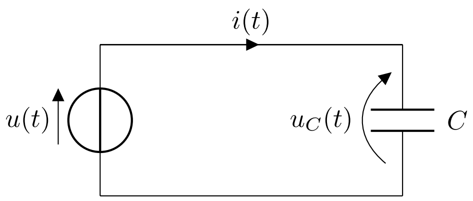
- minimale Leistungabgabe für $\alpha_2 = \frac{5}{6}\pi(\hat{=}\ 150°)$, da hier die Fläche am kleinsten:

$$\begin{aligned} I\left(\alpha_2 = \frac{5}{6}\pi\right) &= \frac{\hat{I}}{2}\sqrt{1 - \frac{5}{6} + \frac{1}{2\pi}\sin\frac{5}{3}\pi} = 0{,}264\,\text{A} \\ P(\alpha_2) &= R \cdot I^2(\alpha_2) = 100\,\Omega \cdot (0{,}264\,\text{A})^2 \\ &= 6{,}97\,\text{W} \end{aligned}$$

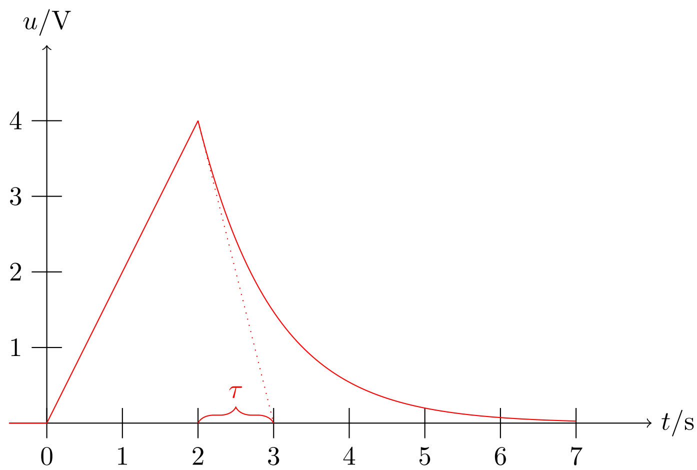
5.2 Konzentrierte Elemente

5.2.1 Aufgabe 3: Kondensator als Energiespeicher

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \\ 2\,\text{V} \cdot \frac{t}{\tau} & \text{für} \quad 0 < t \leq 2\,\text{s} \\ 4\,\text{V} \cdot e^{-\left(\frac{t-2\,\text{s}}{\tau}\right)} & \text{für} \quad t > 2\,\text{s} \end{cases}$$



Zeitlicher Verlauf der Spannung $u(t)$:



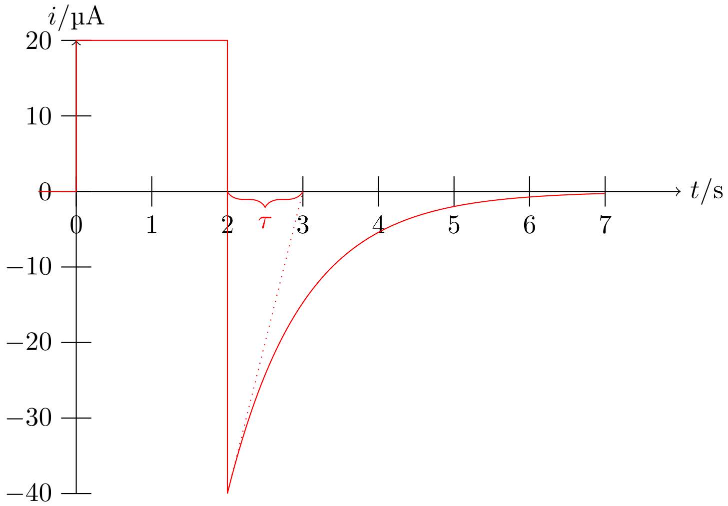
Anfangssteigung:

$$\begin{aligned}\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=2\,\mathrm{s}} &= \left(4\,\mathrm{V}\cdot e^{-\left(\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)}\right)\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=2\,\mathrm{s}}\\ &= -\frac{4\,\mathrm{V}}{\tau}\cdot \left.\underbrace{e^{-\left(\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)}}_{1}\right|_{t=2\,\mathrm{s}}\\ &= -\frac{4\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{s}}\end{aligned}$$

- Strom $i(t)$
  Bauteilgleichung Kondensator:

$$i_c(T) = C\cdot\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$i(t) = \begin{cases} C\cdot 0 = 0 & \text{für} \quad t \le 0\\ C\cdot\frac{2\,\mathrm{V}}{\tau} = 10\,\mathrm{\mu F}\cdot\frac{2\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{\mu A} & \text{für} \quad 0 < t \le 2\,\mathrm{s}\\ C\cdot\frac{-4\,\mathrm{V}}{\tau}e^{-\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}} = -40\,\mathrm{\mu A}\cdot e^{-\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}} & \text{für} \quad t > 2\,\mathrm{s}\end{cases}$$

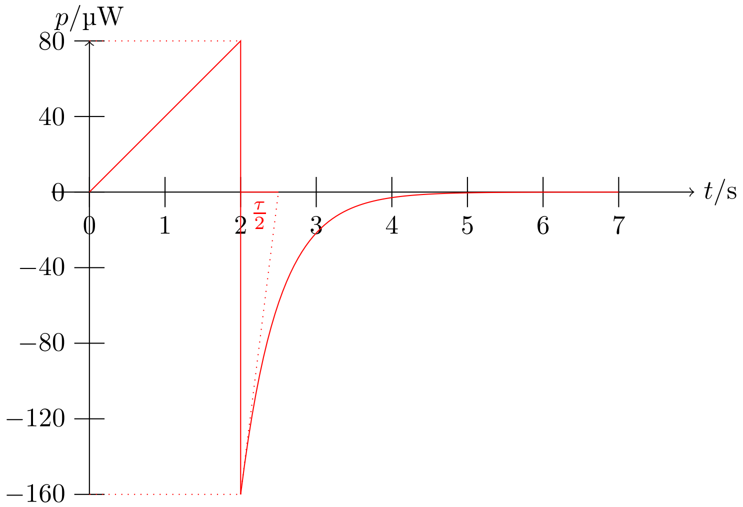


- Leistung $p(t)$:

$$p(t) = u(t)\cdot i(t)$$

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \le 0\,\mathrm{s}\\ \left(2\,\mathrm{V}\cdot\frac{t}{\tau}\right)\cdot 20\,\mathrm{\mu A} = 40\,\mathrm{\mu W}\frac{t}{\tau} & \text{für} \quad 0 < t \le 2\,\mathrm{s}\\ \left(4\,\mathrm{V}\cdot e^{-\left(\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)}\right)\cdot\left(-40\,\mathrm{\mu A}\cdot e^{-\left(\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)}\right) = -160\,\mathrm{\mu W}\cdot e^{-2\left(\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)} & \text{für} \quad t > 2\,\mathrm{s}\end{cases}$$

Zeitlicher Verlauf der Leistung



- Energie $w(t)$:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tilde{t})\, d\tilde{t}$$

Für $t \leq 0$

$$w(t=0) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt = 0$$

Für $0 < t \leq 2\,\mathrm{s}$:

$$\begin{aligned} w(t) &= w(t=0) + \int_{0}^{t} 40\,\mu\mathrm{W} \cdot \frac{\tilde{t}}{\tau}\, d\tilde{t} \\ &= 0 + 40\,\mu\mathrm{W} \cdot \frac{1}{\tau}\left(\frac{\tilde{t}}{2}\right)^2\Bigg|_0^t \\ &= 20\,\mu\mathrm{W} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot t^2 \cdot \frac{\tau}{\tau} \\ &= 20\,\mu\mathrm{J}\frac{t^2}{\tau^2} \end{aligned}$$

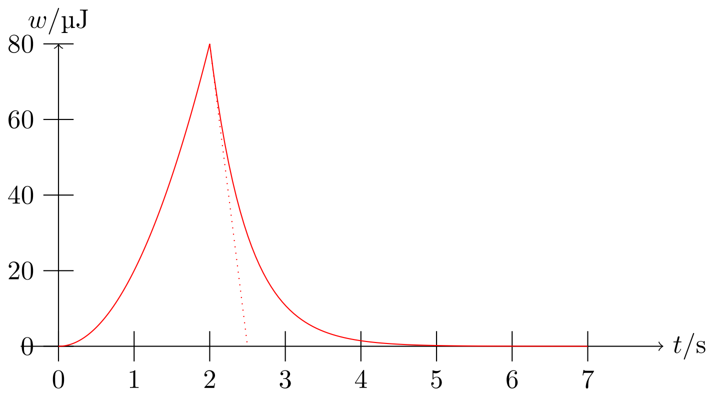
Für $t > 2s$:

$$\begin{aligned} w(t) &= w(t=2s) + \int_{2s}^{t} (-160\,\mu\mathrm{W}) \cdot e^{-2\left(\frac{\tilde{t}-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)}\, d\tilde{t} \\ &= 80\,\mu\mathrm{J} - 160\,\mu\mathrm{W}\left(-\frac{\tau}{2}e^{-2\left(\frac{\tilde{t}-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)}\right)\Bigg|_{2\,\mathrm{s}}^{t} \\ &= 80\,\mu\mathrm{J} + 160\,\mu\mathrm{W} \cdot \frac{\tau}{2}\left(e^{-2\left(\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)} - 1\right) \\ &= 80\,\mu\mathrm{J} + 80\,\mu\mathrm{J} \cdot e^{-2\left(\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)} - 80\,\mu\mathrm{J} \\ &= 80\,\mu\mathrm{J} \cdot e^{-2\left(\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)} \end{aligned}$$

Zusammengefasst

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0\,\mathrm{s} \\ 20\,\mu\mathrm{J} \cdot \frac{t^2}{\tau^2} & \text{für } 0 \leq t < 2\,\mathrm{s} \\ 80\,\mu\mathrm{J} \cdot e^{-2\left(\frac{t-2\,\mathrm{s}}{\tau}\right)} & \text{für } t > 2\,\mathrm{s} \end{cases}$$

Zeitlicher Verlauf der Energie



5.2.2 Aufgabe 4: Verlustbehafteter Kondensator

1. Parallelschaltung: $\rightarrow$ Komplexe Admittanz $\underline{Y}$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} = j\omega C$$

Admittanzdreieck b)

$$\begin{aligned}\tan\delta &= \frac{|1/R|}{|j\omega C|} = \frac{1}{R\omega C}\\ \Rightarrow R &= \frac{1}{\omega C\tan\delta}\\ &= \frac{1}{2\pi\cdot 800\,\mathrm{Hz}\cdot 0{,}8\,\mathrm{\mu F}\cdot 1{,}2\cdot 10^{-2}} = 20{,}7\,\mathrm{k\Omega}\end{aligned}$$

2. a) und c) elektrisch gleichwertig, wenn ihre komplexen Scheinwiderstände übereinstimmen:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \stackrel{!}{=} \underline{Z}'$$

Für $\underline{Z}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R}+j\omega C}\\ &= \frac{R}{1+j\omega RC}\cdot\frac{1-j\omega RC}{1-j\omega RC}\\ &= \frac{R-j\omega R^2C}{1^2+\omega^2R^2C^2}\end{aligned}$$

Für $\underline{Z}'$ folgt:

$$\begin{aligned}\underline{Z}' &= R' - j\frac{1}{\omega C'}\\ &\stackrel{!}{=} \frac{R}{1+\omega^2R^2C^2} - j\frac{\omega R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}\end{aligned}$$

Vergleich nach Real-und Imaginärteil

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Rightarrow R' &= \frac{R}{1+\omega^2R^2C^2} = 3\,\Omega\\ \mathrm{Im}\Rightarrow -\frac{1}{\omega C'} &= -\frac{\omega R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}\\ C' &= \frac{1+\omega^2R^2C^2}{\omega^2R^2C}\cdot\frac{C}{C}\\ &= \frac{1+\frac{1}{\tan^2\delta}}{\frac{1}{\tan^2\delta}}\cdot C\\ &= \left(1+\underbrace{\tan^2\delta}_{\ll 1}\right)\cdot C \approx C = 0{,}8\,\mathrm{\mu F}\end{aligned}$$

3.

$$\underline{S} = P + jQ_c$$

Scheinleistung = Wirk- + Blindleistung

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U}\cdot\underline{I}^*\\ &= \underline{U}\cdot\underline{U}^*\cdot\underline{Y}^*\\ &= U^2\cdot\underline{Y}^*\\ &= (100\,\mathrm{V})^2\cdot\left(\frac{1}{20{,}7\,\mathrm{k\Omega}} + j\cdot 2\pi\cdot 800\,\mathrm{Hz}\cdot 0{,}8\,\mathrm{\mu F}\right)^*\\ &= (100\,\mathrm{V})^2\cdot(48{,}3\,\mathrm{\mu S} - j4{,}02\,\mathrm{mS})\\ &= 0{,}483\,\mathrm{W} - j40{,}2\,\mathrm{VAr}\\ &= P + jQ\\ \mathrm{Re}\Rightarrow P &= 0{,}483\,\mathrm{W}\\ \mathrm{Im}\Rightarrow Q_c &= -40{,}2\,\mathrm{VAr}\end{aligned}$$

Differentialgleichungen (DGL) in GET II

- gewöhnliche lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

  $$y^{(n)}(x) + K_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + K_1 \cdot y'(x) + K_0 \cdot y(x) = g(x)$$

  mit $K_i = \text{const}$

- Ordnung: höchste auftretende Ableitung
  $\hat{=}$ Anzahl der (nicht zusammenfassbaren) gekoppelten Energiespeicher in einer Schaltung
- Anregung/Störung : $g(x)$
  $g(x) = 0 \Rightarrow$ homogene DGL
  $g(x) \neq 0 \Rightarrow$ inhomogene DGL
- Allgemeine Lösung: Funktion (hier $y(x)$) mit n unbestimmten Konstanten

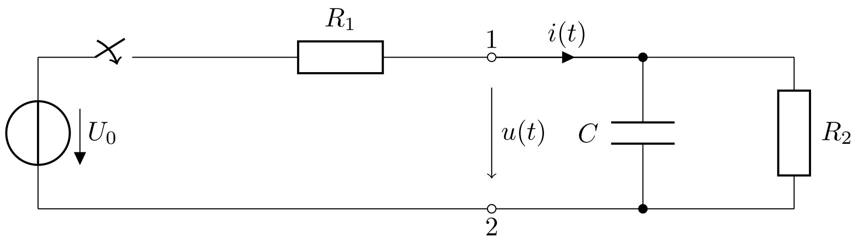
  $$y(x) = K_1 a(x) + K_2 b(x) + \ldots$$

- Partikuläre/spezielle Lösung: Ergibt sich aus der allgemeinen Lösung durch Festlegung der Konstanten

  $$y(x) = 10 \cdot a(x) + 2 \cdot b(x) + \ldots$$

- Anfangswertproblem (AWP): Es werden n Anfangswerte als Nebenbedingung der DGL vorgegeben
  $\Rightarrow$ Bestimmen der speziellen Lösung diese AWPs aus der allgemeinen Lösung der DGL

5.2.3 Aufgabe 5: Kapazitive Last an realer Gleichspannungsquelle



1. Spannung und Ströme nach Kirchhoff:

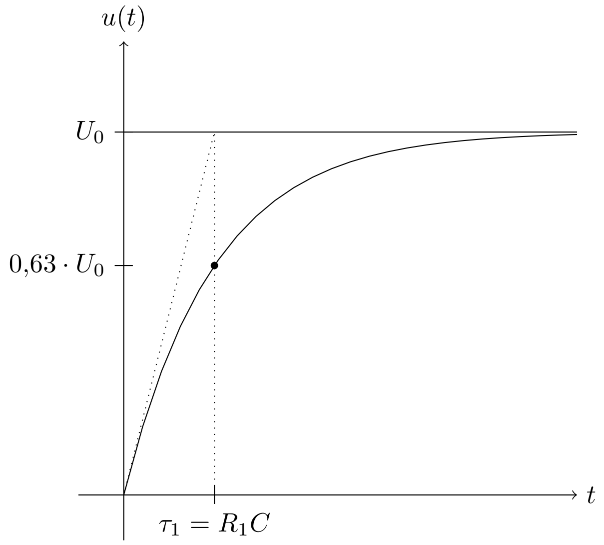
   Maschenumlauf für $t \geq 0$:
   $$u(t) = U_0 - u_{R_1}(t)$$
   Knotengleichung:
   $$i(t) = i_C(t) + i_{R_2}(t)$$
   Spannung gesucht, Spannungsquelle gegeben $\rightarrow$ Ströme in Knotengleichung mit Hilfe der Bauteilgleichung durch Spannungen ersetzen:
   $$\frac{u_{R_1}(t)}{R_1} = C \cdot \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R_2}$$
   $$\Leftrightarrow u_{R_1}(t) = R_1 \cdot C\frac{du(t)}{dt} + \frac{R_1}{R_2} \cdot u(t)$$
   $u_{R_1}(t)$ in Maschengleichung einsetzen
   $$\Rightarrow u(t) = U_0 - R_1 \cdot C \cdot \frac{du(t)}{dt} - \frac{R_1}{R_2} \cdot u(t)$$
   $$\Leftrightarrow R_1 \cdot C \cdot \frac{du(t)}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot u(t) = U_0$$
   $$\Rightarrow \underbrace{R_1 \cdot C \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}_{:=\tau} \cdot \frac{du(t)}{dt} + u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0$$
   $$\boxed{\tau\frac{du(t)}{dt} + u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_0 \text{ mit } \tau = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C}$$

Inhomogene (gewöhnliche lineare) DGL 1. Ordnung (mit konst. Koeffizienten)
Hier zwei Lösungsvarianten (Ü-Skript 4.4.3)

a) Allgemeines Lösungsverfahren: Superposition der homogenen und einer partikulären Lösung
b) Spezielles Lösungsverfahren: Anfangs-Endwert-Methode (AEM)
  - Vorraussetzungen:
    - Schaltung mit nur einem Energiespeicher $\Rightarrow$ DGL 1. Ordnung
    - Nur DC Anregung (Quelle) $\Rightarrow$ Konstante Störfunktion
  - Sind Vorraussetzungen erfüllt, hat die DGL stets die folgende Form:
    $$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K$$
  - Lösung des AWP lässt sich unmittelbar angeben
    $$y(t) = y(t \to \infty) + [y(t=0) - y(t \to \infty)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$
  - inhomogene DGL:
    $$\tau \frac{du(t)}{dt} + u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 \text{ mit } \tau = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C \tag{I}$$
  - Anfangswert
    $$u(t=0) = 0$$
  - Endwert - stationärer Zustand
    $$u(t \to \infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 \tag{II}$$
  - Zeitkonstante τ ist Faktor vor Ableitungsterm bei Normierung auf $u(t)$
  - Lösung des AWP
    $$\begin{aligned} u(t) &= u(t \to \infty) + [u(t=0) - u(t \to \infty)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 + \left[0 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0\right] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \Rightarrow & \boxed{u(t) = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ mit } \tau = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C} \end{aligned}$$
  - Bzw. τ unmittelbar aus „Sicht des Energiespeichers im Netzwerk“ bestimmen
    - Quellen durch Innenwiderstand ersetzen (vgl. Ersatzquellenverfahren GET I)
      Spannungquelle $\to$ Kurzschluss $\hat{=}\ C \to \infty$
      Stromquelle $\to$ Offene Klemmen $\hat{=}\ L \to \infty$
    - Ersatzwiderstand R_E des Netzwerks von den Klemmen des Energiespeichers aus bestimmen
    - Kondensator: $\tau = R_E \cdot C$
      Spule: $\tau = \frac{L}{R_E}$
      Ü-Skript S.86, Kapitel 6
      hier:
      $$\begin{aligned} R_E &= (R_1 \parallel R_2) \\ \tau &= (R_1 \parallel R_2) \cdot C \\ &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C \end{aligned}$$

2. Vereinfachung: Reale Spannungquelle $\approx$ ideale Spannungsquelle, d.h. es gilt $R_1 \ll R_2$ für die Lösung des AWP
   $$u(t) = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ mit } \tau = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C$$
   $$\begin{aligned} R_1 \ll R_2 \Rightarrow U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} &\approx U_0 \\ \text{und } \tau_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot R_1 \cdot C \approx R_1 \cdot C \\ \Rightarrow u(t) &= U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \text{ mit } \tau_1 = R_1 \cdot C \end{aligned}$$

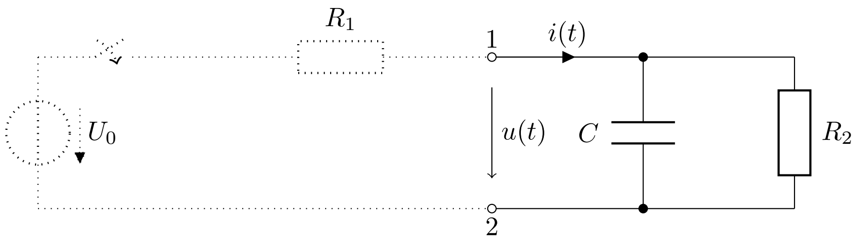
Skizze:



Das Produkt $R \cdot C$ ist eine Zeitkonstante

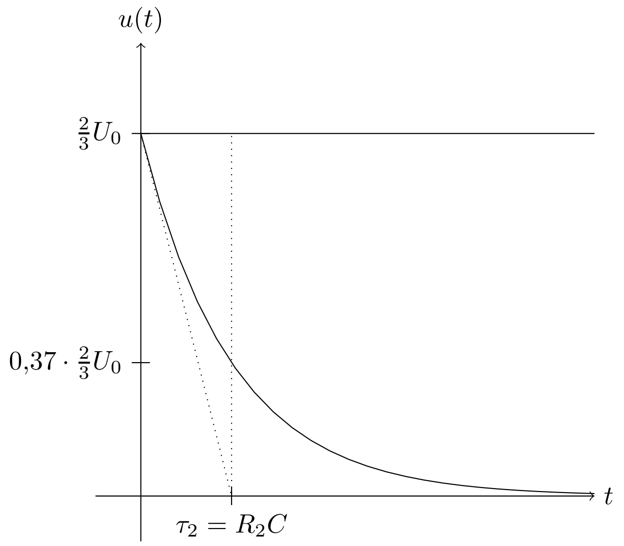
$$[R \cdot C] = \Omega \cdot \mathrm{F} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \cdot \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} = \mathrm{s}$$

3. Ab hier wird t neu definiert (wieder ab $t \geq 0$) Außerdem gilt jetzt $R_2 = 2 \cdot R_1$ für $t < 0$



Anfangs-Endwert-Methode:

- Anfangswert $u(t=0)$ aus Betrachtung des eingeschwungenen/stationären Zustands vor der Schalthandlung ($-\infty < t < 0$) bestimmen.
  Eingeschwungener Zustand für DC-Größen: alle Ableitungen gleich Null.
  $$\Rightarrow i_c(t=0) = C \cdot \frac{du(t=0)}{dt} = 0$$
  D.h. der Strom fließt nur über R_1 und R_2 $\Rightarrow$ Spannungsteiler
  $$\begin{aligned} u(t=0) &= U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U_0 \cdot \frac{2R_1}{3R_1} \\ &= \frac{2}{3} U_0 \end{aligned}$$
- Endwert: Kondensator entlädt sich vollständig
  $$u(t \to \infty) = 0$$
- Der Kondensastor entlädt sich mit der Zeitkonstante
  $$\tau_2 = R_E \cdot C = R_2 \cdot C$$
  (C „sieht“ nur R_2 an seinen Klemmen)
- Lösung des AWP:
  $$\begin{aligned} u(t) &= u(t \to \infty) + [u(t=0) - u(t \to \infty)] \cdot te^{-\frac{t}{\tau_2}} \\ &= 0 + \left[\frac{2}{3} \cdot U_0 - 0\right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \\ \Rightarrow &\boxed{u(t) = \frac{2}{3} \cdot U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R_2 \cdot C}}} \end{aligned}$$
  Lösung der AWP



4. Für die ab dem Zeitpunkt $t = 0$ in Wärme umgesetzte Energie gilt:

$$W = \int_0^\infty u(t) \cdot i(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{u^2(t)}{R^2}\, dt = \dots$$

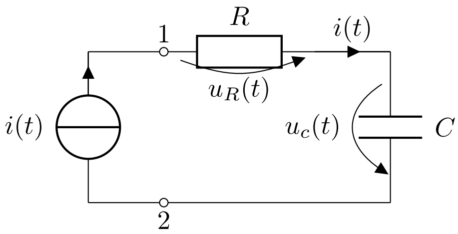
Alternativ:
Energieerhaultungssatz: Die komplette Energie, die zur Zeit $t = 0$ im Kondensator gespeichert ist, wird in Wärme umgewandelt

$$\begin{aligned} W &= W_c(t=0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot C \cdot (U_C(t=0))^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left(\frac{2}{3}U_0\right)^2 \\ &= \frac{2}{9} \cdot C \cdot U_0^2 \end{aligned}$$

Zusammenfassung

<table>
<tr><th>Spule</th><th>Kondensator</th></tr>
<tr><td colspan="2">DC-stationärer Zustand ($t \to \infty$)
$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = 0 \hat{=}$ Kurzschluss</td><td>$\Rightarrow i_c = C \cdot \frac{du_C}{dt} = 0 \hat{=}$ Unterbrechung</td></tr>
<tr><td colspan="2">unmittelbar nach Änderung ($t = 0+$)
$\int_0^{0+} y\, dt = 0$</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow i_L = \overbrace{i_L(0)}^{\int_{-\infty}^{0} i_L\, dt} + \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^0 u_L\, dt}_{=0}$
$= i_L(0)$
$\boxed{\text{Strom kann nicht springen}}$</td><td>$\Rightarrow u_C = U_C(0) + \underbrace{\frac{1}{C}\int_0^0 i_C\, dt}_{=0}$
$= U_C(0)$
$\boxed{\text{Spannung kann nicht springen}}$</td></tr>
</table>

5.2.4 Aufgabe 6: Kondensator an Wechselstromquelle



1. Spannung am Kondensator

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= \frac{1}{C} \cdot \int\limits_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' \\
&= \frac{1}{C} \int\limits_{0}^{t} i(t')\,dt' + \underbrace{u_c(t=0)}_{=0} \\
&= \frac{\hat{I}}{C} \int\limits_{0}^{t} \cos(\omega t' + \varphi_i)\,dt' \\
&= \frac{\hat{I}}{\omega \cdot C} \left[\sin(\omega t + \varphi_i)\right]_0^t \\
&= \underbrace{\frac{\hat{I}}{\omega \cdot C} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)}_{\text{reiner Wechselanteil}} - \underbrace{\frac{\hat{I}}{\omega C} \cdot \sin\varphi_i}_{\text{Gleichanteil}} \\
\Rightarrow \overline{U}_C = \overline{U}_C(\varphi_i) = \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} u_C(t)\,dt \\
&= \underbrace{-\frac{\hat{I}}{\omega C} \cdot \sin(\varphi_i)}_{\text{Gleichanteil}}
\end{aligned}$$

2. Verlauf von Kondensatorspannung und Strom:

   a) $\varphi_i = 0, t \geq 0$

   $$\varphi_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t) \\ u_C(t) = \frac{\hat{I}}{\omega C} \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

   b) $t \geq 0$

   $$\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} i(t) & = \hat{I} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ & = \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \\ u_C(t) & = \frac{\hat{I}}{\omega C} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\hat{I}}{\omega C} \\ & = -\frac{\hat{I}}{\omega C} \cdot \cos(\omega t) + \frac{\hat{I}}{\omega C} \end{cases}$$

   Siehe Hilfsblatt für Skizzen

3. Kurzschluss zwischen 1 und 2 für $t \geq t_1$.

   Maschenumlauf:

   $$u_C(t) = -u_R(t)$$

   Bauteilgleichungen eingesetzt:

   $$\frac{1}{C} \int i(t)\,dt = -R \cdot i$$

Ableiten um von Integralgleichung auf DGL zu kommen:

$$\frac{1}{C}i(t) = -R\frac{di(t)}{dt}$$
$$\Rightarrow \boxed{R \cdot C \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0}$$

DGL 1. Ordnung, homogene Lösung mit AEM.
Achtung: Anfangszeitpunkt $t_1 \neq 0$

- Anfangswert für $\varphi_i = -\frac{\pi}{2}$: Die Spannung am Kondensator kann nicht springen

  $$u(t_{1-}) = 2 \cdot \frac{\hat{I}}{\omega C}$$
  $$\Rightarrow u_C(t_{1+}) = 2\frac{\hat{I}}{\omega C}$$

  Der Kondensator treibt den Strom durch Widerstand

  $$i(t_{1+}) = -\frac{u_C(t_{1+})}{R} = -2\frac{\hat{I}}{\omega RC}$$

- <u>Endwerte:</u>
  Kondensator $\rightarrow$ vollständige Entladung

  $$u_C(t \rightarrow \infty) = 0$$
  $$i(t \rightarrow \infty) = 0$$

- Zeitkonstante

  $$\tau = R \cdot C$$

- Lösung des AWP
  für $t \geq t_1$ gilt:

  $$i(t) = i(t \rightarrow \infty) + [i(t_1) - i(t \rightarrow \infty)] \cdot e - \frac{t - t_1}{\tau}$$
  $$i(t) = -\frac{2\hat{I}}{\omega RC} \cdot e^{\frac{t-t+1}{RC}}$$
  $$u_C(t) = u_C(t \rightarrow \infty) + [u_C(t_1) - u_C(t \rightarrow \infty)]\, e^{0\frac{t-t_1}{\tau}}$$
  $$u_C(t) = +\frac{2\hat{I}}{\omega C} \cdot e^{-\frac{t-t_1}{R \cdot C}}$$

  Diagramm siehe Hilfsblatt.

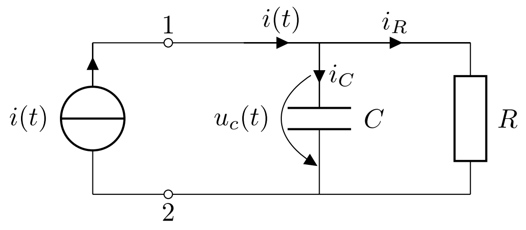
4. für $\varphi_i = 0$ gilt:

   $$u(C(t_1) = 0$$
   $$\Rightarrow i(t_1) = 0$$

   Dies entspricht bereits dem energielosen (End-)Zustand

   $$t \geq t_1 \Rightarrow u_C(t) = 0 \text{ und } i(t) = 0$$

5. Einschwingen einer AC-Anregung:



- DGL aufstellen

$$\begin{aligned} i(t) &= i_C(t) + i_R(t) \\ &= C\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R} \end{aligned}$$

$$\boxed{R \cdot i(t) = \underbrace{R \cdot C}_{\tau} \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)}$$

DGL 1. Ordnung, inhomogen

- Allgemeine Lösung durch Superposition

$$u_C = u_{C,h} + u_{C,p}$$

 - Homogene Lösung: (Separation der Variablen)

$$\tau \cdot \frac{du_{C,h}}{dt} + u_{c,h} = 0$$

 Lösung $\rightarrow$ e-Funktion

$$u_{c,h} = K_h \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

 - Partikuläre Lösung ist stationärer Zustand

$$u_{C,p} \overset{!}{=} \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{U}}_{C,p}(t)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{U}}_{C,p} \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$i(t) \overset{!}{=} \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{I}}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}}_{\underline{\hat{I}}} \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

 Einsetzen in homogene DGL

$$R \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot \cancel{e^{j\omega t}} = j\omega \underbrace{R \cdot C}_{\tau} \cdot \underline{\hat{U}}_{C,p} \cdot \cancel{e^{j\omega t}} + \underline{\hat{U}}_{C,p} \cdot \cancel{e^{j\omega t}}$$

$$\begin{aligned} R \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} &= (1 + j\omega\tau) \cdot \underline{\hat{U}}_{c,P} \\ R \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} &= \sqrt{1^2 + (\omega\tau)^2} \cdot e^{j \arctan\left(\frac{\omega\tau}{1}\right)} \cdot \underline{\hat{U}}_{C,p} \\ \Rightarrow \underline{\hat{U}}_{C,p} &= \underbrace{\frac{R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{-j \arctan(\omega\tau)}}_{\underline{z}} \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} \end{aligned}$$

 Zurück zur reellen Zeitfunktion

$$\mathrm{Re}\underbrace{\left\{\underline{\hat{U}}_{C,p}\right\}}_{\underline{\hat{U}}_{C,p}(t)} = \mathrm{Re}\left\{\frac{R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \hat{I} \cdot e^{j(\varphi_i - \arctan(\omega\tau))} \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{C,p}(t) = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i - \arctan(\omega\tau))}$$

Superposition

$$\begin{aligned} u_C &= u_{C,h} + u_{C,p} \\ &= K_h \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i - \arctan(\omega\tau)) \end{aligned}$$

- AWP lösen $t = 0 : u_C(t = 0) = 0$

$$0 = K_h \cdot e^0 + \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \hat{I} \cdot \cos(0 - \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau))$$

$$\Rightarrow K_h = \frac{-R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \hat{I} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau)\right)$$

Nachtrag:

$$\underline{\hat{U}}_{C,p} = R \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \cdot e^{-j\arctan(\omega\tau)}}_{\underline{z}} \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$\begin{aligned}
\underline{z} &= \frac{1}{j\omega C + R} \\
|\underline{z}| &= \sqrt{a^2+b^2} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \ldots = \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right) \\
\underline{z} &= |\underline{z}| \cdot e^{j\varphi}
\end{aligned}$$

5.2.5 Aufgabe 7: Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\text{Ausgangsgröße}}{\text{Eingangsgröße}} = \underbrace{a(\omega)}_{\text{Verstärkung}} \cdot \underbrace{e^{j\varphi(\omega)}}_{\text{Phase}}$$

1.

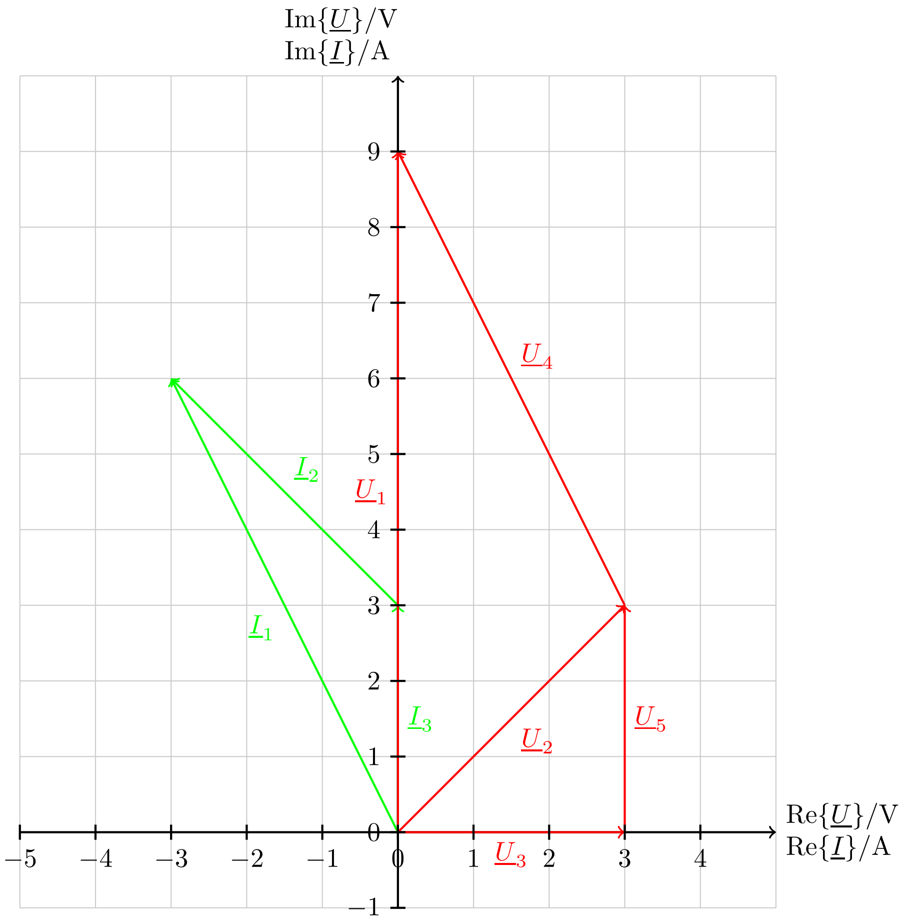
$$\begin{aligned}
\underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = k \cdot e^{-j90^\circ} = -jk = \frac{k}{j} \text{ mit } k = \frac{u_3}{u_1} > 0 \\
\underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega) \\
\underline{H}_1(j\omega) &= \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = \frac{jX}{R+jX} \\
\underline{H}_2(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{jX \parallel (R+jX)}{R + jX \parallel (R+jX)} \\
\underline{H}(j\omega) &= \frac{jX}{R+jX} \cdot \frac{\frac{jX\cdot(R+jX)}{R+j2X}}{R + \frac{jX\cdot(R+jX)}{R+j2X}} \\
&= \frac{jX}{\cancel{R+jX}} \cdot \frac{jX \cdot \cancel{(R+jX)}}{R^2 + j2XR + jX(R+jX)} \\
&= \frac{-X^2}{R^2 + j2XR + jXR - X^2} \\
&= \frac{X^2}{-R^2 - j3XR + X^2} \\
&\overset{!}{=} \frac{k}{j} \\
\underline{H}^{-1}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_3} = \left(1 - \frac{R^2}{X^2}\right) - j\left(3\frac{R}{X}\right) \overset{!}{=} \frac{j}{k} \\
\text{Re} :& 1 - \frac{R^2}{X^2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{R}{X} = 1 \vee \frac{R}{X} = -1, R = |X| \\
\text{Im} :& -j3 \cdot \frac{R}{X} \overset{!}{=} j\frac{1}{k} \Rightarrow X < 0
\end{aligned}$$

Kapazität $X = -\frac{1}{\omega C}$

$$\Rightarrow \frac{R}{X} = -1$$

2.

$$\underline{U}_3 = U_3 = 3\,\mathrm{V}, R = 1\,\Omega, \frac{R}{X} = -1$$
$$\underline{I}_3 = \frac{U_3}{jX} = j \cdot 3\,\mathrm{A}$$
$$\underline{U}_5 = R \cdot \underline{I}_3 = j \cdot 3\,\mathrm{V}$$
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_5 + \underline{U}_3 = j3\,\mathrm{V} + 3\,\mathrm{V}$$
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{jX} = j(3\,\mathrm{A} + j3\,\mathrm{A}) = -3\,\mathrm{A} + j3\,\mathrm{A}$$
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -3\,\mathrm{A} + j6\,\mathrm{A}$$
$$\underline{U}_4 = R \cdot \underline{I}_1 = -3\,\mathrm{V} + j \cdot 6\,\mathrm{V}$$
$$\underline{U}_1 = \underline{U}_4 + \underline{U}_2 = j \cdot 9\,\mathrm{V}$$



5.2.6 Aufgabe 8: Tief-/Hochpass

1.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$
$$|\underline{H}(j\omega)| = \left|\frac{1}{1 + j\omega CR}\right| = \frac{|1|}{|1 + j\omega CR|}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

a) Amplitudengang

$$\frac{a(\omega)}{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$$

Manchmal:

$$\frac{a(\omega)}{\mathrm{dB}(\omega)} : \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}(j\omega)}{1\,\Omega}$$

$$\frac{a(\omega)}{\mathrm{dB}} = 20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \text{ mit } \log x = -\log \frac{1}{x}$$

$$= -20 \log \sqrt{1+(\omega CR)^2}$$

Diskussion

$$\frac{a(\omega)}{\mathrm{dB}} = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega CR \ll 1 (\log 1 = 0) \\ -20 \log(\omega RC) & \text{für } \omega CR \gg 1 \\ -3 & \text{für } \omega CR = 1 (\log \sqrt{2} = 0{,}15) \end{cases}$$

Zeichnen

i) Gerade mit Steigung 0 bis 3 dB-Punkt

ii) Gerade mit Steigung −20 dB ab 3 dB-Punkt.

b) Phasengang

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega CR} \cdot \frac{(1-j\omega CR)}{(1-j\omega CR)}$$

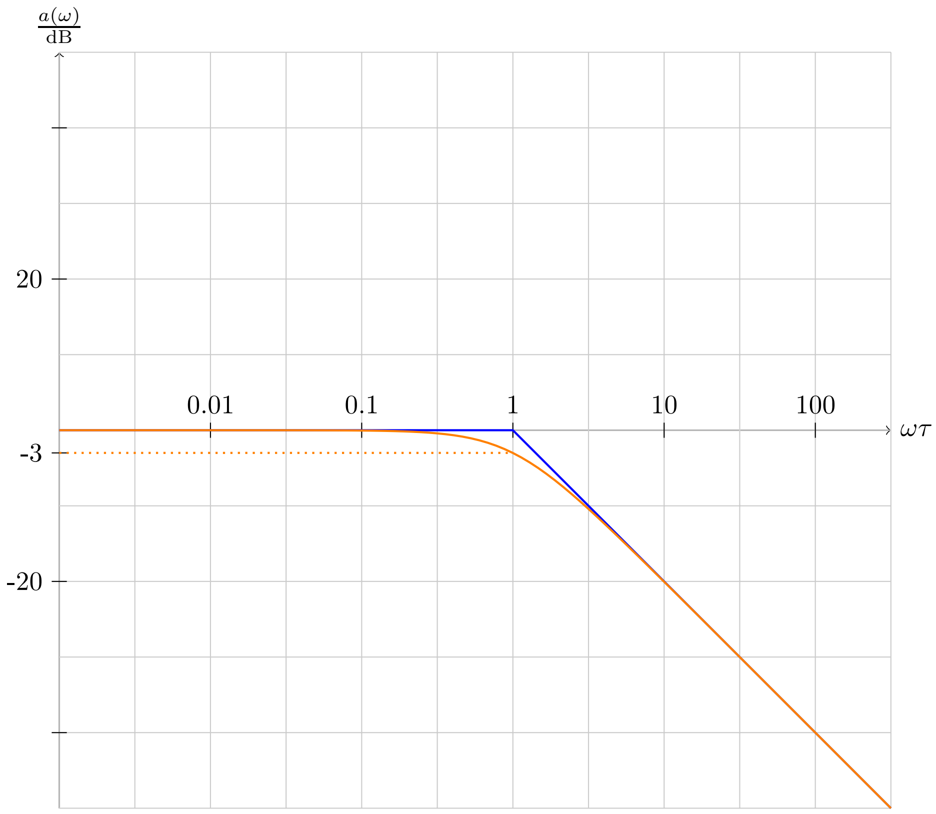
$$= \frac{1}{1+(\omega CR)^2} - j\frac{\omega CR}{1+(\omega CR)^2}$$

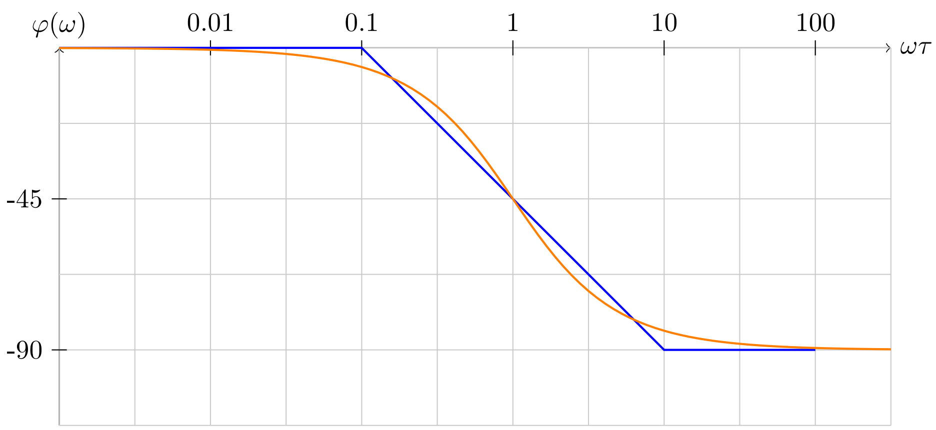
$$\varphi = \arctan\left[\frac{\frac{-\omega CR}{1+(\omega CR)^2}}{\frac{1}{1+(\omega CR)^2}}\right]$$

$$= \arctan(-\omega CR)$$

$$= -\arctan(\omega RC)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega CR = 0 \\ -90 & \omega CR \to \infty \\ -45 & \omega CR = 1 \end{cases}$$





2. $f = 1\,\text{kHz}, R = 1\,\text{k}\Omega, 20\,\text{dB}$ Dämpfung $\hat{=} -20\,\text{dB}$ Verstärkung

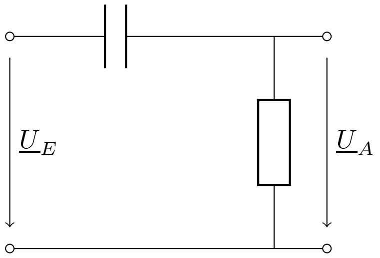
   a) Näherung (Annahme $\omega CR \gg 1$)

$$
\begin{aligned}
-20\ \text{dB} &\stackrel{!}{=} -20\,\text{dB} \log(\omega CR) \\
1 &= \log(\omega CR) \\
10 &= \omega CR \\
\Rightarrow C &= \frac{10}{\omega R} = \frac{10}{2\pi \cdot 1\,\text{kHz} \cdot 1\,\text{k}\Omega} = 1{,}59\,\mu\text{F}
\end{aligned}
$$

b) Exakt

$$
\begin{aligned}
-20\,\mathrm{dB} &\overset{!}{=} -20\,\mathrm{dB}\cdot\log\left(\sqrt{1+(\omega RC)^2}\right)\\
10 &= \sqrt{1+(\omega RC)^2}\\
100 &= 1+(\omega CR)^2\\
\sqrt{99} &= \omega CR\\
\Rightarrow C &= \frac{\sqrt{99}}{\omega R} = 1{,}58\,\mu\mathrm{F}
\end{aligned}
$$

3.



$$
\begin{aligned}
\underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C}+R}\\
&= \frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}\\
|\underline{H}(j\omega)| &= \left|\frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}\right| = \frac{|j\omega CR|}{(1+j\omega CR)}\\
&= \frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}
\end{aligned}
$$

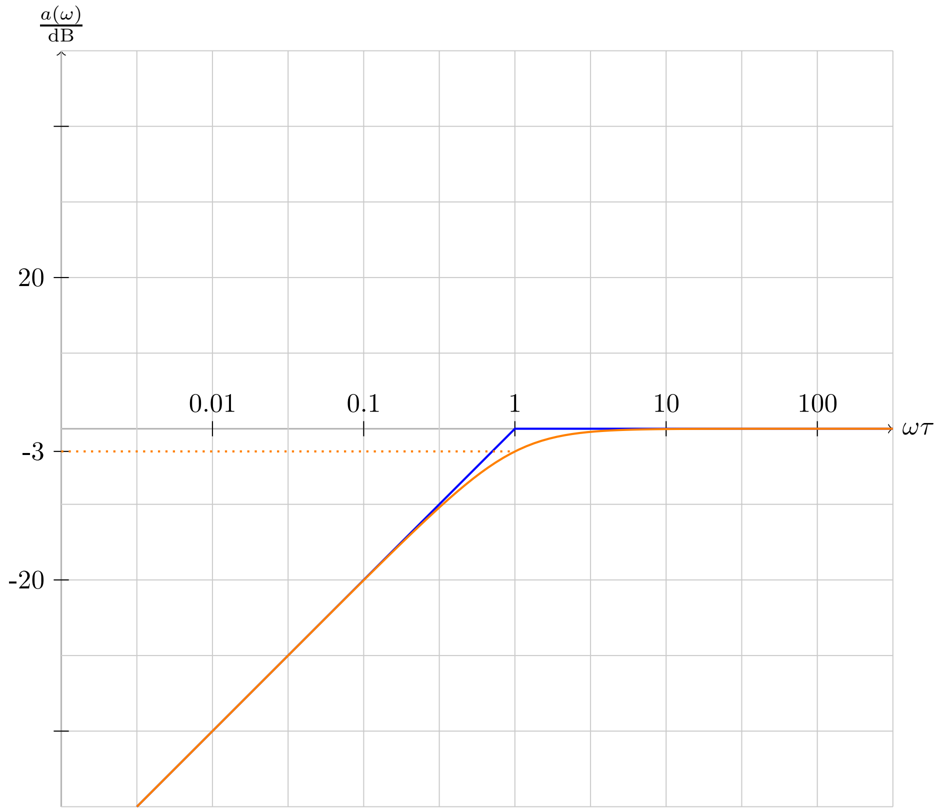
a) Amplitudengang

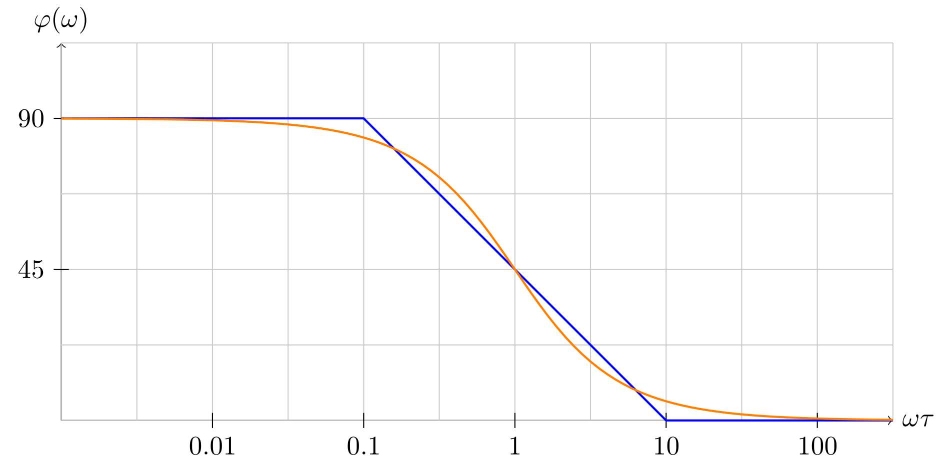
$$
\begin{aligned}
\frac{a(\omega)}{dB} &= 20\log|\underline{H}(j\omega)|\\
&= 20\log\left(\frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{a(\omega)}{dB} = \begin{cases} 20\log(\omega CR) & \text{für } \omega CR \ll 1\\ 0 & \text{für } \omega CR \gg 1\\ -3 & \text{für } \omega CR = 1 \end{cases}
$$

b) Phasengang

$$
\begin{aligned}
\underline{H}(j\omega) &= \frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}\cdot\frac{(1-j\omega CR)}{(1-j\omega CR)}\\
&= \frac{j\omega CR+(\omega CR)^2}{1+(\omega CR)^2}\\
\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) &= \arctan\left[\frac{\frac{\omega CR}{1+(\omega CR)^2}}{\frac{(\omega CR)^2}{1+(\omega CR)^2}}\right]\\
&= \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)
\end{aligned}
$$





i) Näherung (Annahme $\omega CR \ll 1$)

$$-20\,\mathrm{dB} \stackrel{!}{=} 20\,\mathrm{dB}\log(\omega CR)$$

$$10^{-1} = \omega RC$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{0{,}1}{CR} \Rightarrow f = \frac{0{,}1}{2\pi \cdot 1{,}58\,\mathrm{\mu F} \cdot 1\,\mathrm{k\Omega}} = 10{,}073\,\mathrm{Hz}$$

ii) Exakt:

$$
\begin{aligned}
-20\,\mathrm{dB} &\stackrel{!}{=} 20\,\mathrm{dB} \cdot \log\left(\frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\right)\\
10^{-1} &= \frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\\
10^{-1}\sqrt{1+(\omega Cr)^2} &= \omega CR\\
10^{-2}(1+(\omega CR)^2) &= (\omega CR)^2\\
10^{-2} &= (1-10^{-2})(\omega CR)^2\\
\sqrt{\frac{10^{-2}}{1-10^{-2}}} &= \omega CR\\
f &= \frac{\sqrt{\frac{10^{-2}}{1-10^{-2}}}}{2\pi CR} = 10{,}12\,\mathrm{Hz}
\end{aligned}
$$

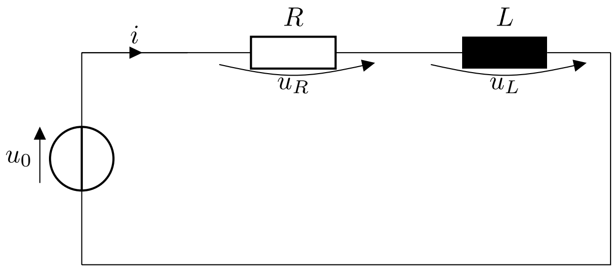
5.2.7 Aufgabe 9: Lastwechsel an RL-Schaltung

AEM

1. Bestimmung Anfganswert „eingeschwungen" $\rightarrow u_L = 0 = L\frac{di_L}{dt} - 0$

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{U_0}{R_1+R_2} = \frac{120\,\mathrm{V}}{36\,\Omega + 40\,\Omega}\\
&= 1{,}58\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

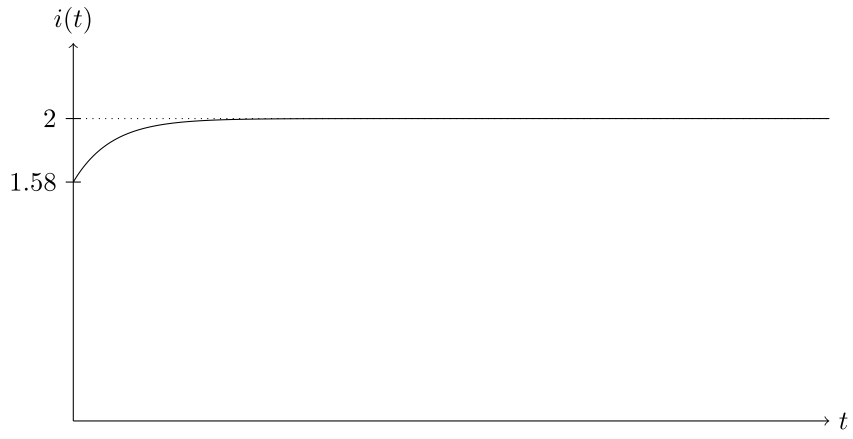
2. Endwert „wohin"



$$
\begin{aligned}
R &= R_1 + (R_2 \parallel R_3)\\
&= R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}\\
&= 36\,\Omega + \frac{40\,\Omega \cdot 60\,\Omega}{100\,\Omega}\\
&= 60\,\Omega\\
i(t\rightarrow\infty) &= \frac{U_0}{R} = \frac{120\,\mathrm{V}}{60\,\Omega} = 2\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

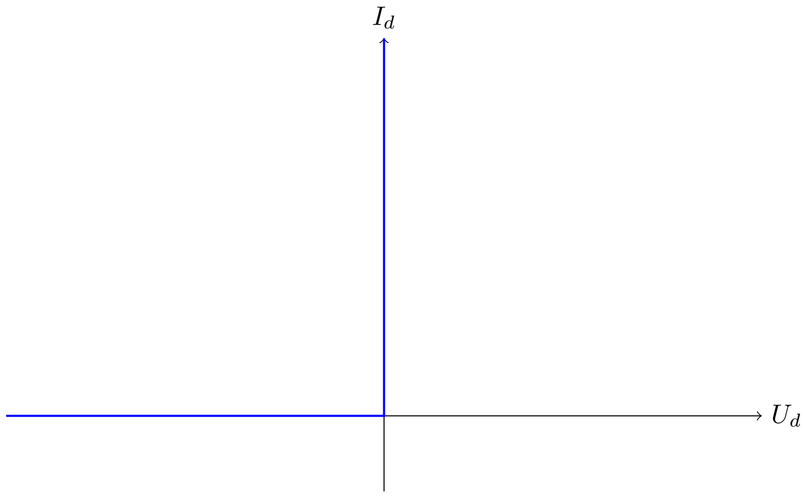
3. Zeitkonstante τ „wie schnell".

$$
\begin{aligned}
\tau &= \frac{L}{R} = \frac{300\,\mathrm{mH}}{60\,\Omega} = 5\,\mathrm{ms}\\
&\boxed{\tau = \frac{L}{R_E}, \tau = R_E \cdot C}\\
i(t) &= i(t\rightarrow\infty) + \left[i(t=0) - i(t\rightarrow\infty)\right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\\
&= 2\,\mathrm{A} + (1{,}58\,\mathrm{A} - 2\,\mathrm{A}) \cdot e^{-\frac{t}{5\,\mathrm{ms}}}\\
&= 2\,\mathrm{A} - 0{,}42\,\mathrm{A} \cdot e^{-\frac{t}{5\,\mathrm{ms}}}
\end{aligned}
$$



5.2.8 Aufgabe 10: Tiefsetzsteller

1. Ideale Diode
„Richtungsabhängiger Schalter“



- $t < 0$: Für $t \ll 0$ wird Spule aufmagnetisiert.
Für $t = 0_-$: $\rightarrow$ stationärer Zustand.

$$\text{DC-Anregung} \Rightarrow \text{alle Ableitungen} = 0$$
$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = 0$$
$\Rightarrow U_0$ fällt vollständig über R_L ab.
$$i_L(0_-) = \frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{0} u_L\,dt = \frac{U_0}{R}$$
$$= I_0 = \frac{220\,\mathrm{V}}{220\,\Omega} = 1\,\mathrm{A}$$
„Anfangswert“
$$u_s(t) = 0, \text{ da Schalter geschlossen}$$
$$u_D = -U_0 \Rightarrow \text{ Diode sperrt}$$

- $t = 0$: Strom kann wegen Spule nicht springen, d.h. Spule hält Strom (in gleicher Richtung) als Stromquelle aufrecht und erzeugt dafür die Spannung $u_L < 0$

$\Rightarrow$ Diode leitet + Strom fließt durch Diode

$$i_L(t=0) = I_0 = 1\,\mathrm{A}$$
$$u_D = 0 \Rightarrow u_s(t=0) = U_0 = 220\,\mathrm{V}$$

- $t > 0$ Spule entmagnetisiert sich vollständig über D und R_L mit der Zeitkonstante τ

$$\tau = \frac{L}{R_L} = \frac{110\,\mathrm{mH}}{220\,\Omega} = 0{,}5\,\mathrm{ms} = 500\,\mathrm{\mu s}$$

Endwert:

$$i_L(t \to \infty) = 0$$

AEM

$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 1A \cdot e^{-\frac{t}{500\,\mathrm{\mu s}}}$$

Da D für $t > 0$ stets leitet gilt $u_D = 0$

$$u_s(t) = U_0 = 220\,\mathrm{V}$$

2. Beim Versuch den Schalter zu öffnen und den Strom schlagartig zu unterbrechen, würde in der Spule die Spannung $u_L(t) = L\frac{di}{dt} \to \infty$ induziert werden.
$\Rightarrow$ der Schalter zieht einen Lichtbogen und leitet weiterhin.

3. „Strom fließt kontinuierlich“ d.h. es gilt $i(t) > 0$ für alle $t > 0$.
$C \to \infty$, d.h. Kondensatorspannung konstant $\Rightarrow$ DC-Spannungsquelle U_A

Für $0 \le t \le aT$: Schalter geschlossen

$$u_L(t) = U_E - U_A$$

d.h. Strom i_L steigt linear an, d.h. Spule wird aufmagnetisiert

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t \underbrace{(U_E - U_A)}_{U_L}\,dt + i_L(t=0)$$

$$\Delta i_{auf} = \frac{U_E - U_A}{L}(aT - 0)$$

Für $aT \le t \le T$: Schalter geöffnet

$$u_L(t) = -U_A$$

d.h. Strom i_L fällt linear ab, Spule wird entmagnetisiert

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{aT}^{T} \underbrace{(-U_A)}_{U_L}\,dt + i_L(t=aT)$$

$$\Delta i_{ab} = \frac{-U_A}{L}(T - aT)$$

„Stationärer Betrieb“ wird hier auf die Gleichanteile der betrachteten Größen bezogen. U_E & U_A sind bereits reine Gleichgrößen (U_A wegen $C \to \infty$). Bei den Strömen i_E & i_A herrschen dementsprechend die (Kurzzeit-)Mittelwerte über einer Periode T betrachtet:

$$\bar{I}_E \& \bar{I}_A$$

Im stationären Betrieb muss $\bar{I}_A = \text{const}$ gelten, da ansonsten noch transiente Vorgänge (Änderungen) vorliegen würden.

$$\bar{I}_A \stackrel{!}{=} \text{const}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_L = \frac{1}{T}\int_0^T u_L(t)\,dt \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T}\int_0^{aT} (U_E - U_A)\,dt + \frac{1}{T}\int_{aT}^{T} (-U_A)\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T} aT(U_E - U_A) - \frac{1}{T} U_A(T - aT) = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot U_e - \cancel{a \cdot U_A} - U_A + \cancel{a \cdot U_A} = 0$$

$$a \cdot U_E - U_A = 0$$

$$\frac{U_A}{U_E} = a$$

Alternativer Ansatz statt Mittelwert:

$$\Delta i_{auf} \stackrel{!}{=} -\Delta i_{ab}$$

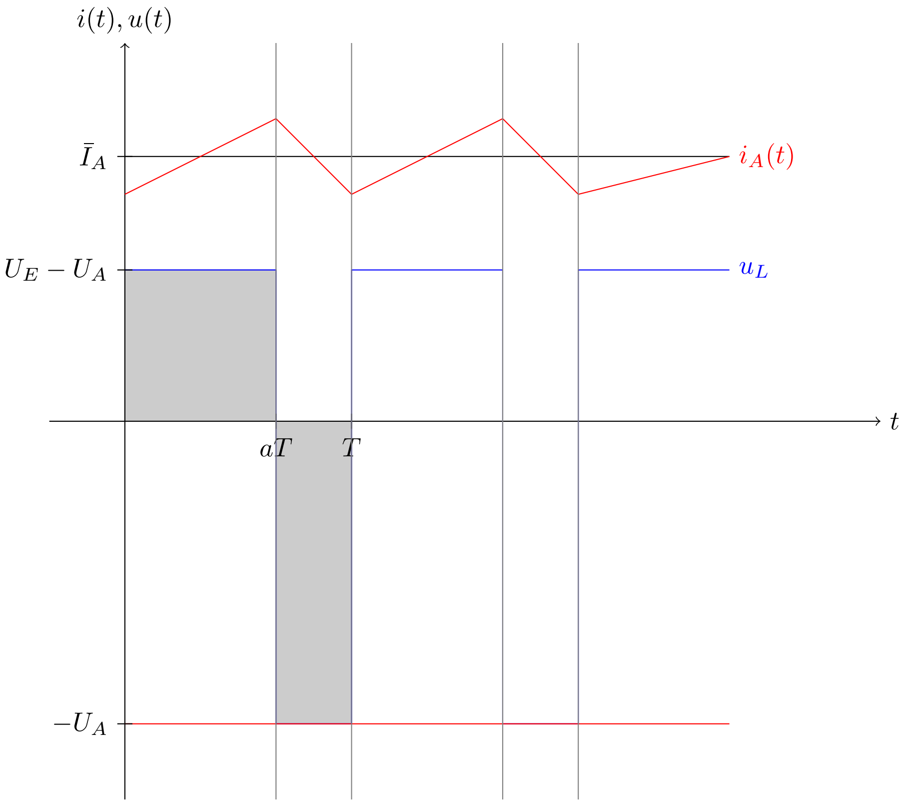
$$0 = \frac{U_E - U_A}{L} \cdot aT - \frac{U_A}{L}(T - aT)$$

Zwischen U_E & U_A liegen keine ohmschen Verbraucher

$$P_A = P_E$$

$$U_A \cdot \bar{I}_A = U_E \cdot \bar{I}_E$$

$$\frac{\bar{I}_A}{\bar{I}_E} = \frac{U_E}{U_A} = \frac{1}{a}$$



Allgemein

System/Anordnung	1. Ordnung	2. Ordnung
	Exponentialansatz	
DC	AEM (Anfangswert, Entwert, τ)	Spezielle Lösung ($\rightarrow$ sinus-förmig) (Resonanzfrequenz, Mittelwert)
AC	AEM $\rightarrow$ homogen + AC $\rightarrow$ partikulär (betrachte keine Anfangsbedingungen, nur eingeschwungenen Zustand)	(+AC $\rightarrow$ partikulär)

5.2.9 Aufgabe 11: LC-Reihenschwingkreis

1. Allgemein (allg.) und speizllen (spez.) ähnlich 4.5.3 im Ü-Skript.
   Schalter auf Stellung 2

   - Allgemeine Lösung: DGL durch Maschenumlauf

     $$U_q = u_L(t) + u_C(t)$$
     $$U_q = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)\,dt$$
     $$\boxed{\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0}$$

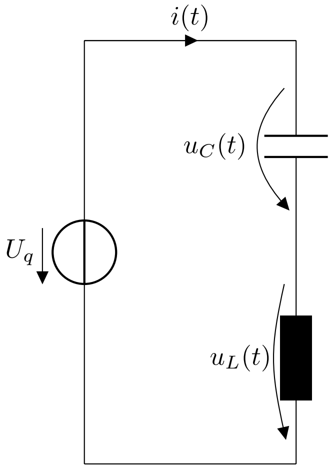
     Homogene DGL 2. Ordnung (ungedämpftes System)
     Einsetzen des komplexen Exponentialansatzes
     $$i(t) = i_h(t) = e^{\underline{\lambda}t}$$
     in die DGL führt auf das charakteristische Polynom
     $$0 = \cancel{e^{\underline{\lambda}t}}\underline{\lambda}^2 + \frac{1}{LC}\cancel{e^{\underline{\lambda}t}}$$
     $$0 = \underline{\lambda}^2 + \frac{1}{LC}$$
     $\Rightarrow$ Eigenwerte
     $$\underline{\lambda}_1 = j\frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ und } \underline{\lambda}_2 = -j\frac{1}{\sqrt{LC}}$$
     Resonanzfrequenz ω_0 - aus Betrag der Eigenwerte (analog zu τ, $\tau = \frac{1}{\lambda}$)
     $$\omega_0 = |\underline{\lambda}_1| = |\underline{\lambda}_2| = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
     Wie τ $\rightarrow$ Möglichkeit die Resonanzfrequenz ω_0 (oder genauer ω_0^2), unmittelbar aus der normierten Darstellung einer DGL 2. Ordnung abzulesen. (Bsp Ü-Skript 4.5.2)
     $$0 = y''(x) + 2\zeta\omega_0 y'(x) + \omega_0^2 y(x)$$
     f_{res} $\rightarrow$ ergibt sich aus ω_0
     $$f_{res} = \frac{\omega_0}{2\cdot\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

   - Speziell: Resonanzfrequenz berechnet sich für alle LC-Schwingkreise gleich und kann daher unmitterbar angegeben werden.

     $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_{res}$$
     $$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

     (DGL nur aufstellen wenn ausdrücklich nach gefragt.)

2.



AW=?

a) $i(t=0_+)=0$ Strom an Spule kann nicht springen

b) $u_L(t=0_+)=U_q$
unmagnetisierte Spule $\hat{=}$ offene Klemmen, ungeladener Kondensator $\hat{=}$ Kurzschluss

c) $u_C(t=0_+)=0$ Spannung an Kondensator kann nicht springen

3. Mittelwert gesucht. Zeitliche Verläufe nötig dafür.

a) Mittelwert des Stromes $\hat{I}$:

- Allgemeine Lösung:
Einsetzen der Real-und Imaginärteile der Eigenwerte in den Exponentialansatz führt auf den Ansatz der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} i(t) &= K_1 \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{\lambda_1 t}\right\} + K_2 \cdot \mathrm{Im}\left\{e^{\lambda_1 t}\right\} \\ &= K_1 \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot t + K_2 \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot t \\ &= K_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + K_2 \cdot \sin(\omega_0 t) \text{ mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

Lösung AWP mit bestimmen AW: Anfangswert in allgemeine Lösung einsetzen

$$\begin{aligned} i(t=0_+) = 0 &\overset{!}{=} K_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0) + K_2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot 0) \\ \Rightarrow K_1 &= 0 \\ \Rightarrow i(t) &= K_2 \cdot \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Diese Lösung in Bauteilgleichung für L einsetzen und 2. AW verwenden

$$u_L(t=0_+) = U_q \overset{!}{=} L\frac{di}{dt}\bigg|_{t=0} = L \cdot K_2 \cdot \omega_0 \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{=\lambda} \text{ bei } t=0$$

$$K_2 = \frac{U_q}{L \cdot \omega_0}$$

Lösung AWP

$$i(t) = \frac{U_q}{L \cdot \omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt = 0$$

- Speziell: (vgl. System 1. Ordnung Kapitel 4.4.2 Ü-Skript)
  - Annahme: gedämpfte Schwingung
    $\Rightarrow$ homogene Lösung, d.h. Schwingung $\rightarrow$ klingt ab
    $\Rightarrow$ Endwert wird durch Anregung, d.h. Quelle bestimmt $\rightarrow$ partikuläre Lösung

$$u(t) = y_h(t) + y_p(t) \rightarrow y_p(t) \text{ für } t \rightarrow \infty$$

- DC-Quelle
  $\Rightarrow$ stationärer Zustand $\rightarrow$ wenn alle Ableitungen $= 0$
  $\Rightarrow$ Kein Strom in $C \mathrel{\hat{=}}$ offene Klemmen
  Keine Spannung über Spule $\mathrel{\hat{=}}$ Kurzschluss

$$\Rightarrow \bar{I} = 0$$

- Auch gültig für ungedämpftes System, da stetiger Grenzwert für Dämpfung

$$\zeta \rightarrow 0$$

b) Mittelwert u_L

- Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L\frac{di}{dt} \\ &= L \cdot \frac{U_q}{L \cdot \omega_0} \cdot \omega_0 \cdot \cos\omega_0 t \\ &= U_q \cdot \cos\omega_0 t \\ \Rightarrow \bar{U}_L &= \frac{1}{T}\int_0^T u_L(t)\,dt = 0 \end{aligned}$$

- Spezielle Lösung
  Umgedämpfte Schwingung um den gleichen Endwert wie für gedämpft angenommene Schwingung (s.o.)

$$\Rightarrow \bar{U}_L = 0 (L \mathrel{\hat{=}} \text{Kurzschluss})$$

c) $\bar{U}_C$

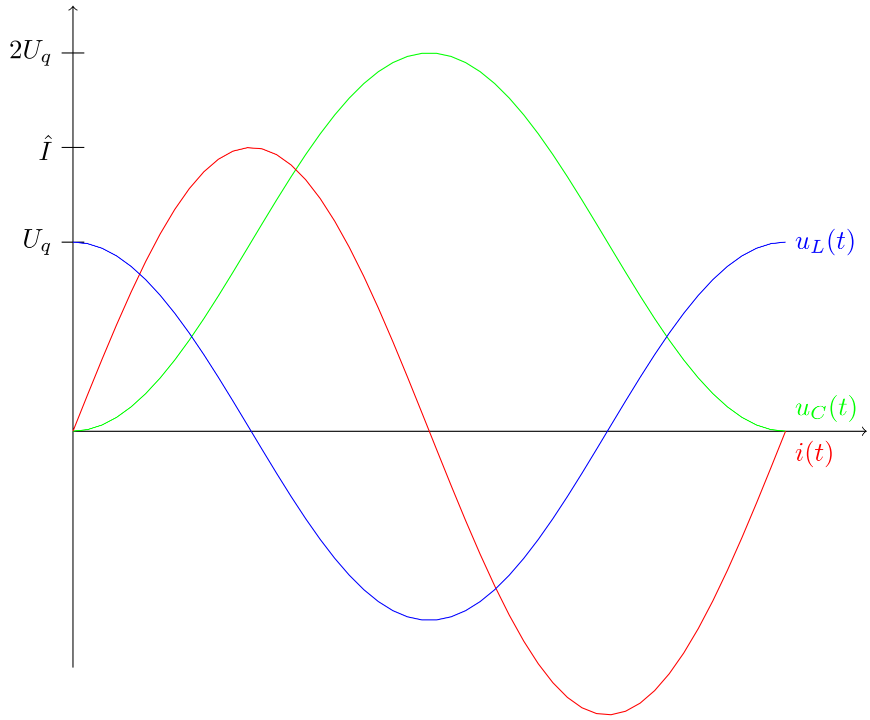
- Allgemein

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' \\ &= \frac{1}{C}\frac{U_q}{L \cdot \omega_0} \cdot \frac{1}{\omega_0}\left[-\cos\omega_0 t\right]_0^t \\ &= U_q \frac{LC}{LC}\left[-\cos\omega_0 t + 1\right] \\ &= \underbrace{U_q}_{\text{Gleichanteil}} \underbrace{-U_q \cdot \cos\omega_0 t}_{\text{Wechselanteil}} \\ \Rightarrow \bar{U}_C &= \frac{1}{T}\int_0^T u_c(t)\,dt = U_q \end{aligned}$$

- Speziell:

$$\bar{U}_c = U_q$$

4.



5. $\hat{I}$

- Allgemein → Ablesen aus AWP

$$i(t) = \frac{U_q}{L \cdot \omega_0} \cdot \sin \omega_0 t$$
$$\hat{I} = \frac{U_q}{\omega_0 L}$$

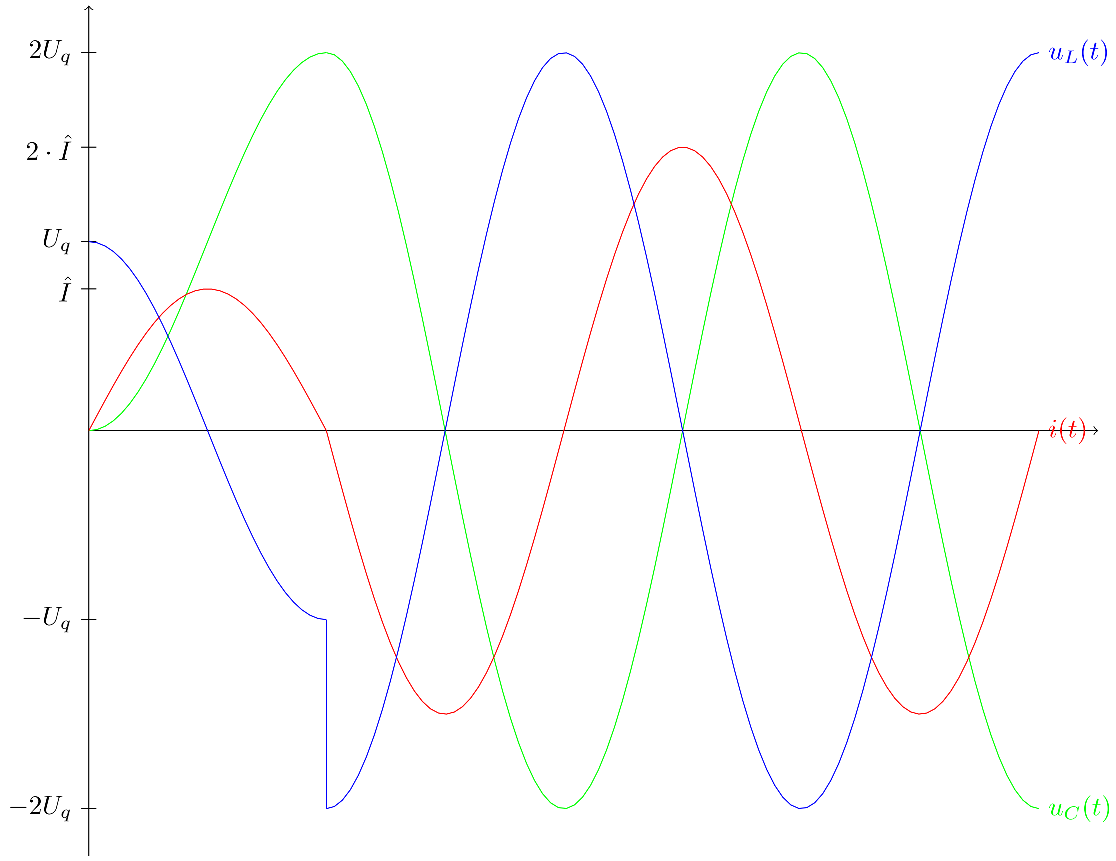
- Speziell

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t')\, dt \text{ mit } u_L(t') = U_q \cdot \cos(\omega_0 t')$$
$$i(t) = \frac{U_q}{\omega_0 L} \cdot \sin(\omega_0 t)$$
$$\hat{I} = \frac{U_q}{\omega_0 L}$$

6. bis Schalten → Schaltung Verhalten wie in Unterpunkt 4. nach Umschalten.

$$u_L = -u_C$$
$$u_C = 2 \cdot U_q$$
U_L muss springen
$$u_L = 2 \cdot U_q$$

$|u_L|$ größer (vorher max U_q) → (i) größer werden (s. U5)



Allgemein

$$\underline{Z} = R + jX$$

$\underline{Z}$ = Scheinwiderstand, Impedanz
R = Wirkwiderstand, Resistanz
X = Blindwiderstand, Reaktanz

Kondensator

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \stackrel{!}{=} jX_C \Rightarrow X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

Spule

$$\underline{Z}_L = j\omega L \stackrel{!}{=} jX_L \Rightarrow X_L = \omega L$$

5.2.11 Aufgabe 13: Blindleistungkompensation

1. Allgemeine Wirkleistung

$$P = I^2 \cdot R$$

hier

$$P_{R_2} = I^2 \cdot R_2$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_{R_2}}{R_2}} = \sqrt{\frac{1000\,\mathrm{W}}{50\,\Omega}} = \sqrt{2}\,\mathrm{A}$$
$$= 1{,}414\,\mathrm{A}$$

hier: für die Lösung wird $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_{R_2}$ als Bezugsgröße gewählt.
Strom & Spannung am ohmschen Widerstand liegen in Phase
Zeiger $\underline{I}_2$ und $\underline{U}_{R_2}$ auf der reelle Achse

$$\underline{I}_2 = I_2 = 1{,}414\,\mathrm{A}$$
$$\Rightarrow \underline{U}_{R_2} = \underline{I}_2 \cdot R_2 = 1{,}414\,\mathrm{A} \cdot 50\,\Omega$$
$$= 70{,}7\,\mathrm{V}$$

- Reaktanzen L_2 & C & L_1

$$\begin{aligned}
X_{L_1} &= \omega L_1 = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot \frac{50}{\pi}\text{mH} \\
&= 5\,\Omega \\
X_{L_2} &= \omega \cdot L_2 = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot \frac{100}{\pi}\,\text{mH} \\
&= 10\,\Omega \\
X_C &= -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot \frac{2}{7\pi}\,\text{mF}} = -35\,\Omega
\end{aligned}$$

- R_1, L_2 & $C \Rightarrow \underline{Z}$

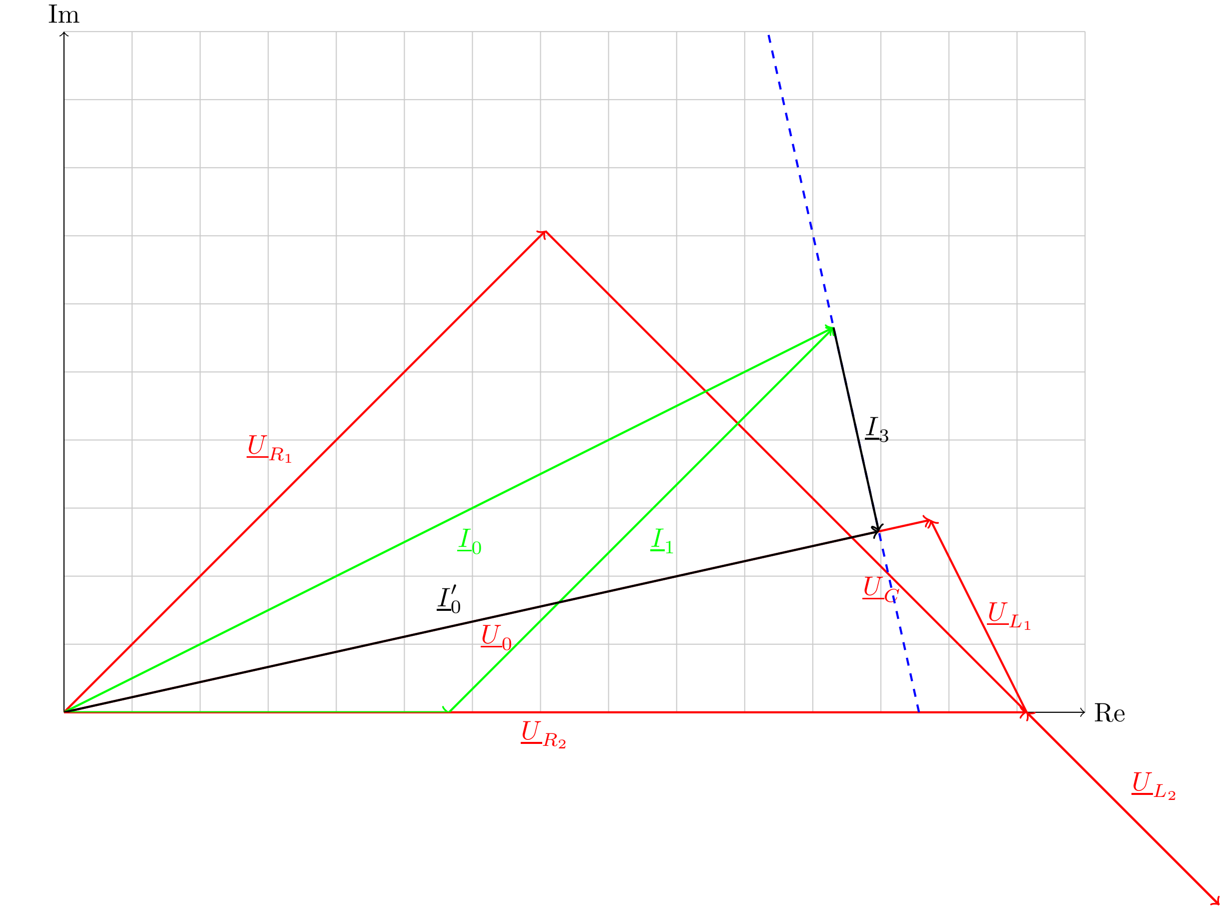
$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= R_1 + j(X_{L2} + X_C) \\
&= 25\,\Omega + j(10\,\Omega - 35\,\Omega) \\
&= 25\,\Omega - j25\,\Omega = 35{,}36\,\Omega e^{-j45^\circ} \\
\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{R_2}}{\underline{Z}} = \frac{70{,}7\,\text{V}}{35{,}36\,\Omega \cdot e^{-j45^\circ}} \\
&= 2\,\text{A} \cdot e^{j45^\circ} = 1{,}414\,\text{A} - j1{,}414\,\text{A} \\
\underline{U}_{R_1} &= R_1 \cdot \underline{I}_1 = 25\,\Omega \cdot 2\,\text{A} \cdot e^{j45^\circ} \\
&= 50\,\text{V} \cdot e^{j45^\circ} \\
&= 35{,}36\,\text{V} + j35{,}36\,\text{V} \\
\underline{U}_C &= jXC \cdot \underline{I}_1 = -j36\,\Omega \cdot 2\,\text{A} \cdot e^{j45^\circ} \\
&= 35\,\Omega \cdot e^{-90^\circ} \cdot 2\,\text{A} \cdot e^{j45^\circ} \\
&= 70\,\text{V} \cdot e^{-j45^\circ} \\
&= 49{,}5\,\text{V} - j49{,}5\,\text{V} \\
\underline{U}_{L2} &= jX_{L2} \cdot \underline{I}_1 = 2\,\text{A} \cdot e^{j45^\circ} \cdot 10\,\Omega \cdot e^{j}90^\circ \\
&= 20\,\text{V} \cdot e^{135^\circ} = -14{,}14\,\text{V} + j14{,}14\,\text{V}
\end{aligned}$$

- Knotengleichung

$$\begin{aligned}
\underline{I}_0 &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2{,}828\,\text{A} + j1{,}414\,\text{A} \\
&= 3{,}16\,\text{A} \cdot e^{j26{,}57^\circ} \\
\underline{U}_{L_1} &= jX_{L_1} \cdot \underline{I}_0 = 5\,\Omega \cdot e^{j90^\circ} \cdot 3{,}16\,\text{A} \cdot e^{j26{,}57^\circ} \\
&= 15{,}8\,\text{V} \cdot e^{j116{,}57^\circ} \\
&= -7{,}07\,\text{V} + j14{,}14\,\text{V}
\end{aligned}$$

- Maschenumlauf

$$\begin{aligned}
\underline{U}_0 &= \underline{U}_{R_2} + \underline{U}_{L_1} \\
&= 70{,}7\,\text{V} - 7{,}07\,\text{V} + j14{,}14\,\text{V} \\
&= 63{,}63\,\text{V} + j14{,}14\,\text{V} \\
&= 65{,}2\,\text{V} \cdot e^{j12{,}52^\circ}
\end{aligned}$$



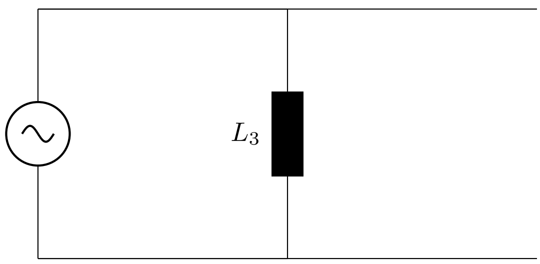
2. Kompensiere Blindleistung

   $\Rightarrow$ Spannungquelle gibt reine Wirkleistung ab wenn $\underline{I}'_0$ und $\underline{U}_0$ in Phase liegen.

   Spuli $\Rightarrow$ Kapazitive Blindleistung

   $\Rightarrow$ Kompensation durch Induktivität

   $\Rightarrow$ $\underline{I}_3$ zeichnerich ermitteln.



   $\underline{I}_0 = I\underline{3} + \underline{I}_0$

   $\underline{I}_3$ ablesen.

$$|\underline{I}_3| = 0{,}775\,\mathrm{A} \mathrel{\hat{=}} 3{,}1\,\mathrm{cm}$$

$$X_{L_3} = \frac{U_0}{I_3} = \frac{65{,}2\,\mathrm{V}}{0{,}775\,\mathrm{A}}$$
$$= 84{,}1\,\Omega$$
$$L_3 = \frac{X_{L_3}}{\omega} = \frac{84{,}1\,\Omega}{2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz}}$$
$$= 268\,\mathrm{mH}$$

Hinweise zu Übungsklausur und Klausur

- Lösungsweg muss nachvollziehbar sein

- Zwischenschritte aufschreiben

- Nur eindeutige Lösung
  - Klar kenntlich machen, was bewertet werden soll
  - Ergebnisse klar kenntlich machen, z.B. durch Unterstreichen
- Leserlich schreiben
  - möglichst saubere Darstellung
- Aufgabennummer oben auf jedes Blatt
  - Wenn eine Aufgabe hinten weitergerechnet wird, dann vorne darauf hinweisen
- keine kopierte Formelsammlung verwenden

5.2.10 Aufgabe 12: Zeigerdiagramm

1. gegeben: f
   es gilt: $\omega = 2\pi f$

   - Einzelreaktanzen

$$\begin{aligned} X_{L_1} &= \omega L_1 = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 100\,\text{mH} \\ &= 31{,}42\,\Omega \\ X_{L_2} &= \omega L_2 = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 500\,\text{mH} \\ &= 157{,}08\,\Omega \\ X_C &= -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 47\,\mu\text{F}} \\ &= -67{,}73\,\Omega \end{aligned}$$

   - Gesamtimpedanz $\underline{Z}_{ges}$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ges} &= jX_{L_1} + [(R + jX_{L_2}) \parallel jX_C] \\ &= jX_{L_1} + \frac{(R + jX_{L_2}) \cdot jX_C}{R + j(X_{L_2} + X_C)} \\ &= j31{,}42\,\Omega + \frac{(270\,\Omega + j157{,}08\,\Omega) \cdot (-j \cdot 67{,}73\,\Omega)}{270\,\Omega + j83{,}35\,\Omega} \\ &= 15{,}31\,\Omega - j41{,}38\,\Omega \\ &= 44{,}12\,\Omega \cdot e^{-j63{,}69^\circ} \end{aligned}$$

   - $\underline{I}_0$ bestimmen. Annahme / Festlegung

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= U_0 = 220\,\text{V} \cdot e^{j0^\circ} \\ \underline{I}_0 &= \frac{U_0}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{220\,\text{V}}{44{,}12\,\Omega \cdot e^{-j69{,}69^\circ}} \\ &= 4{,}99\,\text{A} \cdot e^{j69{,}69^\circ} \end{aligned}$$

   -

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L_1} &= \underline{Z}_{L_1} \cdot \underline{I}_0 = jX_{L_1} \cdot \underline{I}_0 \\ &= 31{,}42\,\Omega \cdot e^{90^\circ} - 4{,}00\,\text{A} \cdot e^{j69{,}69^\circ} \\ &= 156{,}79\,\text{V} \cdot e^{j149{,}69^\circ} \end{aligned}$$

   - Maschengleichung

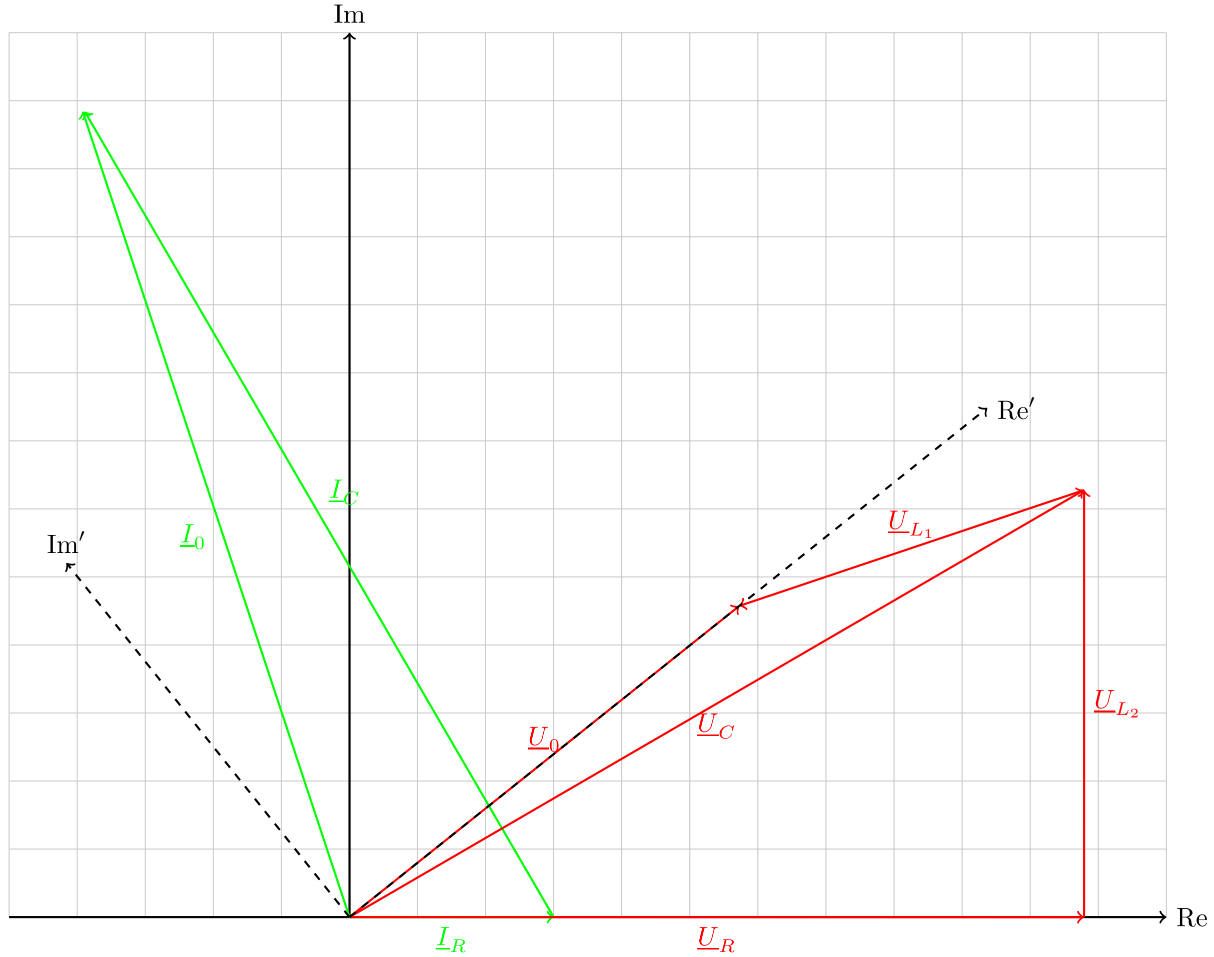
$$\begin{aligned} \underline{U}_C &= \underline{U}_0 - \underline{U}_{L_1} \\ &= 220\,\text{V} - 156{,}79\,\text{V} \cdot e^{j159{,}69^\circ} \\ &= 220\,\text{V} + 147{,}04\,\text{V} - j54{,}42\,\text{V} \\ &= 367{,}04\,\text{V} - j54{,}42\,\text{V} \\ &= 371{,}05\,\text{V} \cdot e^{-j8{,}43^\circ} \end{aligned}$$

- $$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{jX_C} = \frac{371{,}05\,\mathrm{V} \cdot e^{-j8{,}43^\circ}}{-j67{,}73\,\Omega}$$
  $$= \frac{371{,}05\,\mathrm{V} \cdot e^{-j8{,}43^\circ}}{67{,}73\,\Omega \cdot e^{-j90^\circ}}$$
  $$= 5{,}48\,\mathrm{A} \cdot e^{j81{,}57^\circ}$$

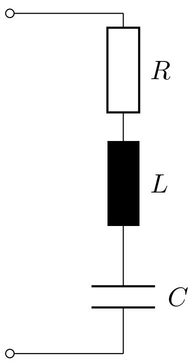
- Knotengleichung
  $$\underline{I}_R = \underline{I}_0 - \underline{I}_C = 4{,}99\,\mathrm{A} \cdot e^{j63{,}69^\circ} - 5{,}48\,\mathrm{A} \cdot e^{j81{,}57}$$
  $$= 1{,}2\,\mathrm{A} \cdot e^{-j38{,}62^\circ}$$

- $\underline{U}_R$ & $\underline{U}_{LC}$
  $$\underline{U}_R = \underline{I}_R \cdot R = 1{,}2\,\mathrm{A} \cdot e^{-j38{,}62^\circ} \cdot 270\,\Omega$$
  $$= 324\,\mathrm{V} \cdot e^{-j38{,}62^\circ}$$
  $$\underline{U}_{L_2} = \underline{I}_R \cdot jX_{L_2} = 1{,}2\,\mathrm{A} \cdot e^{-j38{,}62^\circ} \cdot j157{,}88\,\Omega$$
  $$= 188{,}5\,\mathrm{V} \cdot e^{j51{,}38^\circ}$$

2. - $\underline{I}_R$ & $\underline{U}_R$ für Konstruktion Zeigerdiaramm als Bezugsgrößen, d.h. Phase wählen zu 0°.
     $\Rightarrow$ bei R sind Strom & Spannung in Phase
     $\Rightarrow$ im Gegensatz zu 1.
   - Bezugsgrößen
     $$|\underline{U}_R| = 325\,\mathrm{V} \mathrel{\hat{=}} 10{,}8\,\mathrm{cm}$$
     $$|\underline{I}_R| = 1{,}2\,\mathrm{A} \mathrel{\hat{=}} 2{,}4\,\mathrm{cm}$$
     $$|\underline{U}_{L_2}| = 189\,\mathrm{V} \mathrel{\hat{=}} 6{,}3\,\mathrm{cm}$$
     $$\underline{U}_C = \underline{U}_R + \underline{U}_{L_2}$$
     $$|\underline{U}_C| = 12{,}4\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 375\,\mathrm{V} \equiv 371{,}95\,\mathrm{V}$$
     $$|\underline{I}_C| = 5{,}5\,\mathrm{A} \mathrel{\hat{=}} 11\,\mathrm{cm}$$
     $$\underline{U}_{L_2} \perp \underline{U}_R$$
     $$I_0 = I_R + I_C$$
     $$I_0 \mathrel{\hat{=}} 10\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 5\,\mathrm{A}$$
     $$|U_{L_1}| = 157\,\mathrm{V} \mathrel{\hat{=}} 5{,}2\,\mathrm{cm}$$
     $\underline{U}_{L1} \perp \underline{I}_0$ voreilend
     $$\underline{U}_0 = \underline{U}_C + \underline{U}_{L1}$$



5.2.12 Aufgabe 14: RLC-Reihenschwingkreis



$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$
$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Im Resonanzfall gilt:

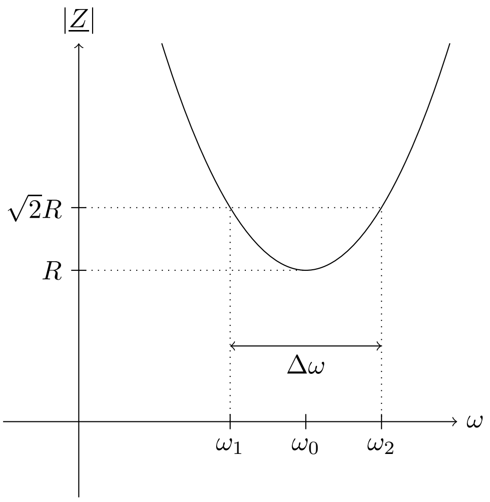
$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \underline{Z} = R$$
$$\Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Damit folgt für die Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1}$$

Betrachte $|\underline{Z}(\omega)|$ für

$$\omega \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega C} \to \infty \Rightarrow |\underline{Z}(\omega \to 0)| \to \infty$$
$$\omega \to \infty \Rightarrow \omega L \to \infty \Rightarrow |\underline{Z}(\omega \to \infty)| \to \infty$$



Bandbreite:

$$\Delta\omega := \omega_2 - \omega_1 \tag{2}$$

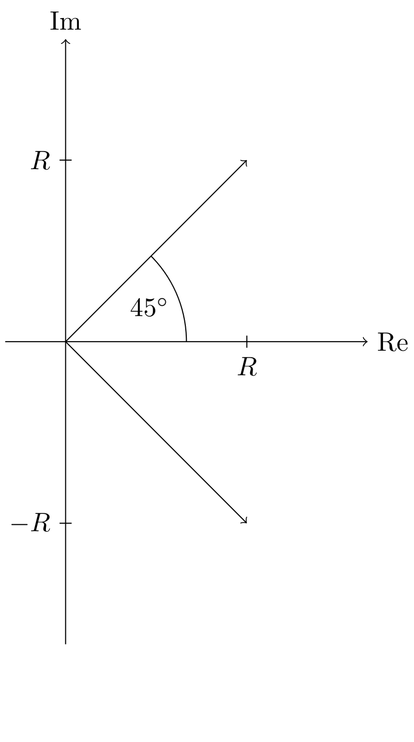
Der Scheinwiderstand des Schwingkreises bei der Kreisfrequenz ω_2 und ω_1 beträgt das $\sqrt{2}$-fache des Scheinwiderstandes im Resonanzfall (s. Vorlesungsskript S.93f).

Bei der Grenzfrequenz ω_1 gilt:

$$|\underline{Z}(\omega_1)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} \stackrel{!}{=} \sqrt{2}R$$
$$R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = 2R^2$$
$$\Leftrightarrow \left|\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right| = R$$

Anmerkung: D.h. bei der Grenzfrequenz gilt

$$|\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}| = \mathrm{Re}\{\underline{Z}(\omega)\}$$



bzw. $|\arg(\underline{Z})| = 45°$
(äquivalente Möglichkeiten der Definition der Grenzfrequenz)

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{\omega_1 C}\left(\omega_1^2 LC - 1\right)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\omega_1 C}\Big(\underbrace{\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}_{<1 \text{ da } \omega_1<\omega_0} -1\Big)}_{<0} < 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R \qquad \Big| + R\Big| \cdot \frac{1}{\omega_1 L}$$
$$\Leftrightarrow \omega_1^2 + \frac{R}{L}\omega_1 - \frac{1}{LC} = 0 \qquad \Big| p\text{-}q\text{-Formel andwenden}$$
$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \tag{3}$$

hier nur „+“ sinnvoll, da ω_1 sonst negativ
Bei der Grenzfrequenz ω_2 gilt analog

$$\Rightarrow \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \qquad \Big| - R\Big| \cdot \frac{\omega_2}{L}$$
$$\Leftrightarrow \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \qquad \Big| p\text{-}q\text{-Formel andwenden} \tag{4}$$

auch hier nur „+“ sinnvoll, da ω_2 sonst negativ
ω_1 und ω_2 aus Gl (3) und (4) in Gl (2) einsetzen:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

Daraus folgt für L

$$\Rightarrow L = \frac{R}{\Delta\omega} = \frac{50\,\Omega}{2\pi 100\,\text{Hz}} = 79{,}58\,\text{mH}$$

Gl. (1) umformen und einsetzen ergibt C:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi 800\,\text{Hz})^2 \cdot 79{,}58\,\text{mH}}$$
$$= 497{,}4\,\text{nF}$$

Anmerkung: ω_0 liegt zwar zwischen ω_1 und ω_2, jedoch nicht genau mittig, d.h.

$$\omega_0 \neq \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}$$
$$\omega_0 \neq \omega_2 - \frac{\Delta\omega}{2}$$

Nachtrag zu Aufgabe 14

- Bandbreite eines LC-Schwingkreises:
  Bandbreite ist definiert als $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ mit $|\underline{Z}(\omega_1)| = |\underline{Z}(\omega 2)| = \sqrt{2}|\underline{Z}(\omega_0)|$.
  Bei reinen LC-Schwingkreisen ist $|\underline{Z}(\omega_0)| = 0$, d.h. $|\underline{Z}(\omega_1)| = |\underline{Z}(\omega_2)| = 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, d.h. $\Delta\omega = 0 = \frac{R}{L}$. Die Andwendung der Bandbreite beim LC-Schwingkreis (ohne R) macht deshalb wenig Sinn.

5.2.13 Aufgabe 15: Frequenzweiche (Frequenzsperre)

- Sperren der Frequenz f_1: Parallelschwingkreis aus L_1 und C_1

$$\underbrace{\underline{Z}}_{\text{Impedenz}} = \underbrace{R}_{\text{Wirkwiderstand}} + j \underbrace{X}_{\text{Blindwiderstasnd}}$$

$$\underbrace{\underline{Y}}_{\substack{\text{Admittanz}\\ \text{(kompl. Leitwert)}}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \underbrace{G}_{\substack{\text{Wirkleitwerk}\\ \text{(Konduktanz)}}} + j \underbrace{B}_{\substack{\text{Blindleitwert}\\ \text{(Suszeptanz)}}}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_1(\omega_1) &= \frac{1}{j\omega_1 L} + j\omega_1 C \\
j &= \left(\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L}\right) \\
&\overset{!}{=} 0 \\
\omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \\
\Rightarrow C_1 &= \frac{1}{\omega_1^2 L_1} = \frac{1}{(2\pi 120\,\mathrm{kHz})^2 \cdot 0{,}15\,\mathrm{mH}} \\
&= 11{,}73\,\mathrm{nF}
\end{aligned}$$

Parallelschwingkreis aus L_2 und C_2

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C_2 &= \frac{1}{\omega_1^2 L_2} = \frac{1}{(2\pi 120\,\mathrm{kHz})^2 \cdot 0{,}13\,\mathrm{mH}} \\
&= 13{,}53\,\mathrm{nF}
\end{aligned}$$

Der Gesamtwiderstand der Schaltung ist für die Frequenz $f_1 = 120\,\mathrm{kHz}$ nun unendlich groß

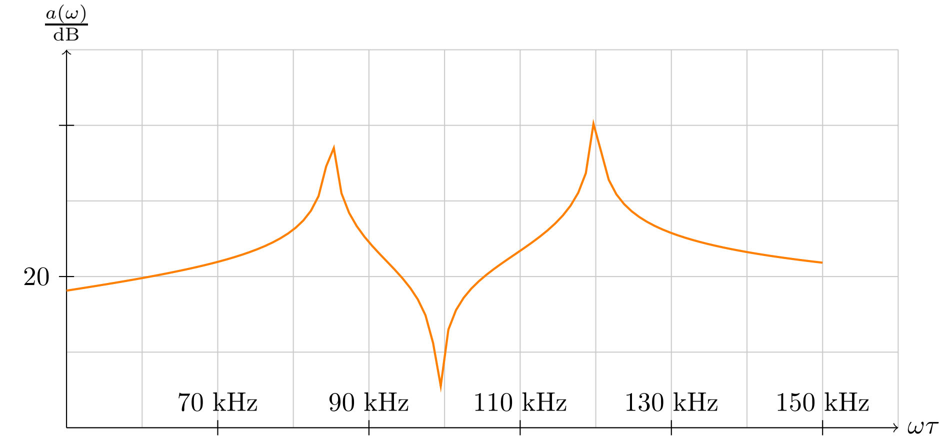
- Sperren der Frequenz f_2:

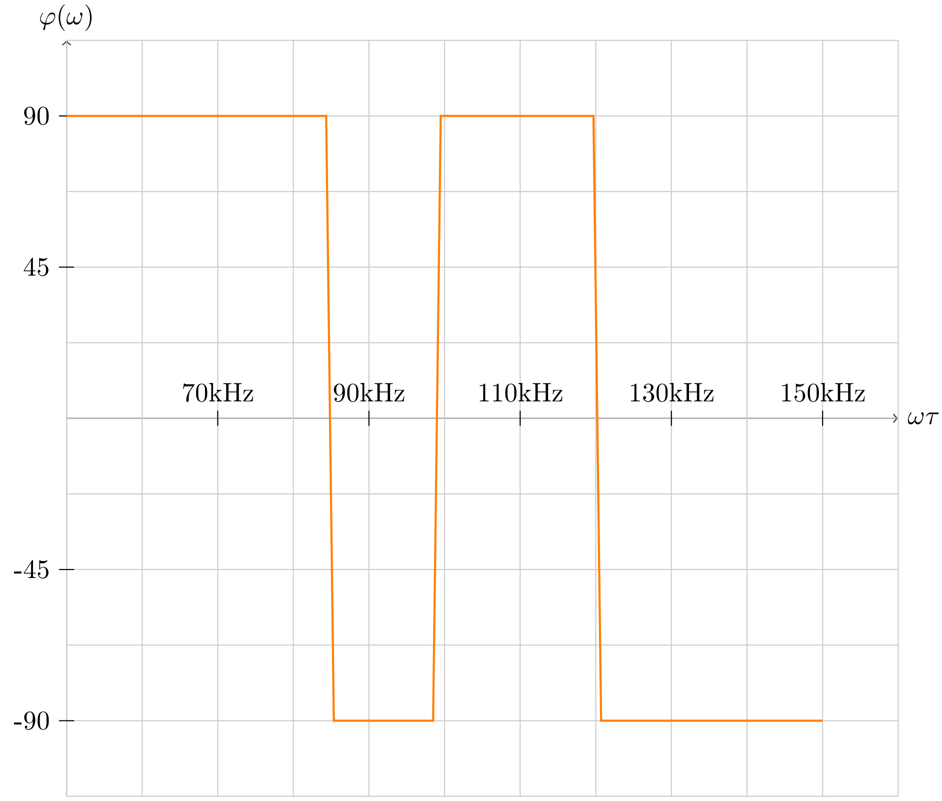
Wähle C_3 so, dass $\underline{Y}_{ges}(f_2) = 0$, damit der Gesamtwiderstand der Schaltung $\to \infty$ geht.

$$\underline{Y}_{ges} = \frac{1}{j\omega_2 L_1} + j\omega_2 C_1 + \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{j\omega_2 L_2} + j\omega_2 C_2}}_{\underline{Z}_2} + \frac{1}{j\omega_2 C_3}} \overset{!}{=} 0$$

Auflösen nach C_3

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\omega_2^2 L_1} - C_1} + \frac{1}{\frac{1}{\omega_2^2 L_2} - C_2}} \\
&= 6{,}24\,\mathrm{nF}
\end{aligned}$$





5.2.14 Aufgabe 16: Leistunganpassung

1.)

$$\underline{Z} = j\omega L + \left[\left(R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \Big\| \left(\frac{1}{j\omega C_2}\right)\right]$$

$$= j\omega L + \frac{\left(R - j\frac{1}{\omega C_1}\right) \cdot \left(\frac{-j}{\omega C_2}\right)}{\left(R - j\frac{1}{\omega C_1}\right) + \left(-j\frac{1}{\omega C_2}\right)}$$

Doppelbruch weitestgehend eliminieren...

$$= j\omega L + \frac{-j\frac{R}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}}{R - j\left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}\right)} \cdot \frac{\omega \cdot C_1 \cdot C_2}{\omega \cdot C_1 \cdot C_2}$$

konjugiert komplex erweitern

$$
\begin{aligned}
&= j\omega L + \frac{-jRC_1 - \frac{1}{\omega}}{R\omega C_1C_2 - j(C_2+C_1)} \cdot \frac{R\omega C_1C_2 + j(C_2+C_1)}{R\omega C_1C_2 + j(C_2+C_1)} \\
&= j\omega L + \frac{[RC_1\cdot(C_2+C_1) - RC_1C_2] - j\cdot\left[\omega R^2C_1^2C_2 + \frac{1}{\omega}(C_2+C_1)\right]}{(R\omega C_1C_2)^2 + (C_2+C_1)^2} \\
&= j\omega L + \frac{RC_1^2 - j\left(\omega R^2C_1^2C_2 + \frac{1}{\omega}(C_2+C_1)\right)}{R^2\omega^2C_1^2C_2^2 + (C_2+C_1)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = \omega L - \frac{\omega R^2C_1^2C_2 + \frac{1}{\omega}(C_2+C_1)}{R^2\omega^2C_1^2C_2^2 + (C_2+C_1)^2}
$$

$$
\mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = \frac{RC_1^2}{R^2\omega^2C_1^2C_2^2 + (C_2+C_1)^2}
$$

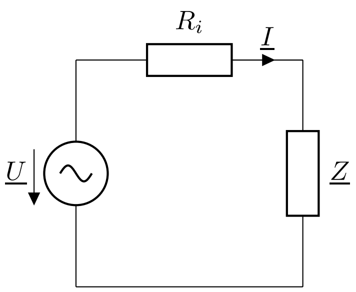
2.) Rein reell bei $\omega = \omega_0$ heißt:

$$
\mathrm{Im}\{\underline{Z}(\omega_0)\} = 0
$$

$$
\Leftrightarrow \omega_0 L - \frac{\omega_0 R^2C_1^2C_2 + \frac{1}{\omega_0}(C_2+C_1)}{R^2\omega_0^2C_1^2C_2^2 + (C_2+C_1)^2} = 0 \qquad \Big| + \text{Bruchterm}, \cdot\frac{1}{\omega_0}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow L &= \frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{\omega_0 R^2C_1^2C_2 + \frac{1}{\omega_0}(C_2+C_1)}{R^2\omega_0^2C_1^2C_2^2 + (C_2+C_1)^2} \\
&= 19{,}49\,\mathrm{mH}
\end{aligned}
$$

3.) Vereinfachtes Schaltbild



$$
\begin{aligned}
\underline{Z} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} &= \frac{RC_1^2}{R^2\omega^2C_1^2C_2^2 + (C_2+C_1)^2} \\
&= \frac{50\,\Omega\cdot(200\,\mu\mathrm{F})^2}{(50\,\Omega)^2\cdot(1000\,\mathrm{s}^{-1})^2\cdot(200\,\mu\mathrm{F})^2\cdot(40\,\mu\mathrm{F})^2 + (40\,\mu\mathrm{F} + 200\,\mu\mathrm{F})^2} \\
&= 9{,}19\,\Omega \\
\underline{I} &= \frac{\underline{U}}{R_i + \underline{Z}} = \frac{20\,\mathrm{V}}{50\,\Omega + 9{,}19\,\Omega} = 337{,}9\,\mathrm{mA} \\
P &= I^2\cdot\mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = (337{,}9\,\mathrm{mA})^2\cdot 9{,}19\,\Omega \\
&= 1{,}05\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

Die maximale Leistung kann abgegeen werden, wenn Leistunganpassung vorliegt. Allgemein: Leistunganpassung bei komplexem Innenwiderstand $\underline{Z}_i$:

$$\Rightarrow \underline{Z} = \underline{Z}_i^*$$

Hier: Da $\underline{Z}_i = R_i = \underline{Z}_i^*$ rein reell ist (häufiger Fall)

$$\Rightarrow \underline{Z} = R_i$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow I_{max} &= \frac{U}{2R_i} \\
P_{max} &= I_{max}^2\cdot\underline{Z} = \frac{U^2}{4\cdot R_i^2}\cdot R_i \\
&= \frac{U^2}{4R_i} = \frac{(20\,\mathrm{V})^2}{4\cdot 50\,\Omega} = 2\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

Für das Verhältnis der aufgenommenen zur maximal abgebbaren leistung folgt:

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{1{,}05\,\mathrm{W}}{2\,\mathrm{W}} = 0{,}525 = 52{,}5\%$$

Nachtrag zu Aufgabe 16

- Anmerkung:
  bei Unterpunkt 2 wird die Schaltung in Resonanz betrieben, dort <u>keine</u> Leistunganpassung.
- Unterpunkt 3:
  P_{max} ist die maximale Leistung, die über 1 und 1′ an $\underline{Z}$ abgegeben werden kann. Das ist der Fall bei Leistungsanpassung ($\underline{Z} = R_i$).

Zweitsemesterführung 2010

Zeit: Do, 01.07.2010, 14:30 Uhr, nach Einsicht der Übungsklausur

Ort: Bibliothek des ISEA, Jägerstr. 17-19

5.2.15 Aufgabe 17: Leistungsfaktoren

Problem: U_0 nicht gegeben.

1. Scheinleistung $\underline{S}_1$, die die Reihenschaltung aus R_1 und L_1 aufnimmt:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_1 &= \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_1^* = \frac{\underline{\hat{U}}_0 \cdot \underline{\hat{I}}_1^*}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \underline{\hat{U}}_0 \cdot \left(\frac{\underline{\hat{U}}_0}{\underline{Z}_1}\right)^* \text{ mit} \\
\underline{Z}_1 &= R_1 + jX_1 \\
X_1 &= \omega L_1 \\
&= 2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz} \cdot 127{,}2\,\mathrm{mH} \\
&= 40\,\Omega \\
\Rightarrow \underline{S}_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\underline{\hat{U}}_0 \cdot \underline{\hat{U}}_0^*}{R_1 - jX_1} \cdot \frac{R_1 + jX_1}{R_1 + jX_1} \text{ konjugiert komplex erweitern} \\
&= \frac{1}{1} \frac{\hat{U}_0^2 \cdot (R_1 + jX_1)}{R_1^2 + X_1^2}
\end{aligned}$$

Anmerkung: $\underline{\hat{U}}_0 \cdot \underline{\hat{U}}_0^* = \left|\underline{\hat{U}}_0\right|^2 = \hat{U}_0^2$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{\hat{U}_0^2 \cdot R_1}{2 \cdot (R_1^2 + X_1^2)}}_{P_1} + j \underbrace{\frac{\hat{U}_0^2 \cdot X_1}{2 \cdot (R_1^2 + X_1^2)}}_{Q_1} \\
&= P_1 + jQ_1
\end{aligned}$$

Scheinleistung die R_2 aufnimmt

$$\begin{aligned}
\underline{S}_2 &= \frac{\underline{\hat{U}}_0 \cdot \underline{\hat{I}}_2^*}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \underline{\hat{U}}_0 \cdot \left(\frac{\underline{\hat{U}}_0}{R_2}\right)^* \\
&= \underbrace{\frac{\hat{U}_0^2}{2R_2}}_{P_2} = P_2 + \underbrace{jQ_2}_{=0}
\end{aligned}$$

Für die gesamte Wirkleisutng gilt:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{\hat{U}_0^2 \cdot R_1}{2 \cdot (R_1^2 + X_1^2)} + \frac{\hat{U}_0^2}{2R_2}$$
$$= \frac{\hat{U}_0^2}{2} \left(\frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Auflösen nach $\hat{U}_0$

$$\Leftrightarrow \hat{U}_0 = \sqrt{\frac{2P}{\frac{R_1}{R_1^2+X_1^2} + \frac{1}{R_2}}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1100\,\mathrm{W}}{\frac{30\,\Omega}{(30\,\Omega)^2+(40\,\Omega)^2}} + \frac{1}{100\,\Omega}} = 316{,}2\,\mathrm{V}$$

Damit folgt für die in R_2 umgesetze Wirkleistung P_2

$$P_2 = \frac{\hat{U}_0^2}{2R_2} = \frac{(316{,}2\,\mathrm{V})^2}{2 \cdot 100\,\Omega} = 500\,\mathrm{W}$$
$$P_1 = P - P_2 = 1100\,\mathrm{W} - 500\,\mathrm{W}$$
$$= 600\,\mathrm{W}$$

Anmerkung

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$$
$$= \underbrace{P}_{P_1+P_2} + jQ$$

2. Festlegung:

$$\underline{\hat{U}}_0 = \hat{U}_0 \cdot e^{j0^\circ}$$
$$\Rightarrow \underline{\hat{I}}_1 = \frac{\hat{U}_0}{R_1 + jX_1} = \frac{316{,}2\,\mathrm{V}}{30\,\Omega + j40\,\Omega}$$
$$= \frac{316{,}2\,\mathrm{V}}{50\,\Omega \cdot e^{j53{,}13^\circ}} = 6{,}32\,\mathrm{A} \cdot e^{-j53{,}13^\circ}$$
$$= 3{,}79\,\mathrm{A} - j5{,}06\,\mathrm{A}$$
$$\underline{\hat{I}}_2 = \frac{\hat{U}_0}{R_2} = \frac{316{,}2\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 3{,}16\,\mathrm{A}$$

Knotenregel:

$$\underline{\hat{I}}_0 = \underline{\hat{I}}_1 + \underline{\hat{I}}_2 = 3{,}79\,\mathrm{A} - j5{,}06\,\mathrm{A} + 3{,}16\,\mathrm{A}$$
$$= 6{,}95\,\mathrm{A} - j5{,}06\,\mathrm{A}$$
$$= 8{,}6\,\mathrm{A} \cdot e^{-j36{,}06^\circ}$$

3.

$$\underline{S} = \underline{\hat{U}}_0 \cdot \underline{\hat{I}}_0^*$$
$$= \frac{\underline{\hat{U}}_0 \cdot \underline{\hat{I}}_0^*}{2} = \frac{316{,}2\,\mathrm{V} \cdot 8{,}6\,\mathrm{A} \cdot e^{-j36{,}06^\circ}}{2}$$
$$Z = 1360\,\mathrm{VA} \cdot e^{j36{,}06^\circ} = 1100\,\mathrm{W} + j\,\underbrace{800\,\mathrm{VAr}}_{Q}$$

$$\Rightarrow Q = 800\,\mathrm{VAr}$$

hier kein Unterstrich wie in der Lösung fälschlicherweise angegeben.

4. (Wirk-) Leistungsfaktor

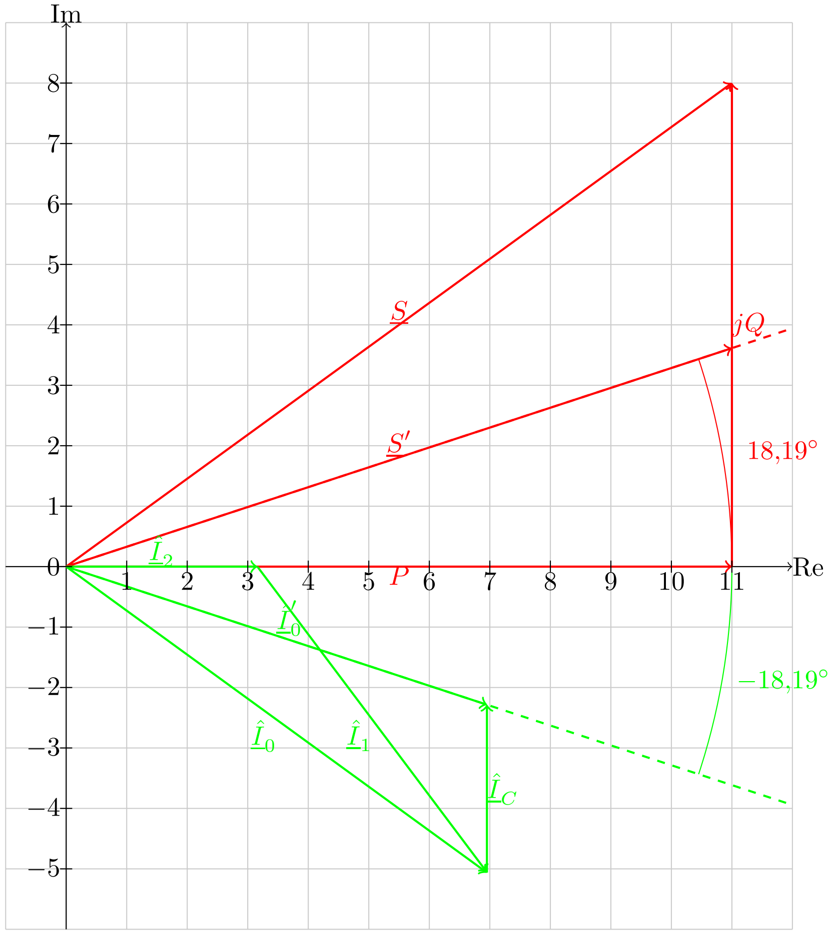
$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{|S|} = \frac{1100\,\mathrm{W}}{1360\,\mathrm{VA}} = 0{,}81$$
$$\cos\varphi = \cos 36{,}06^\circ = 0{,}81$$

Blindleistungsfaktor:

$$\sin\varphi = \frac{Q}{|\underline{S}|} = \frac{800\,\mathrm{VAr}}{1360\,\mathrm{VA}} = 0{,}57$$

$$\sin\varphi = \sin 36{,}06^\circ = 0{,}59$$

5.



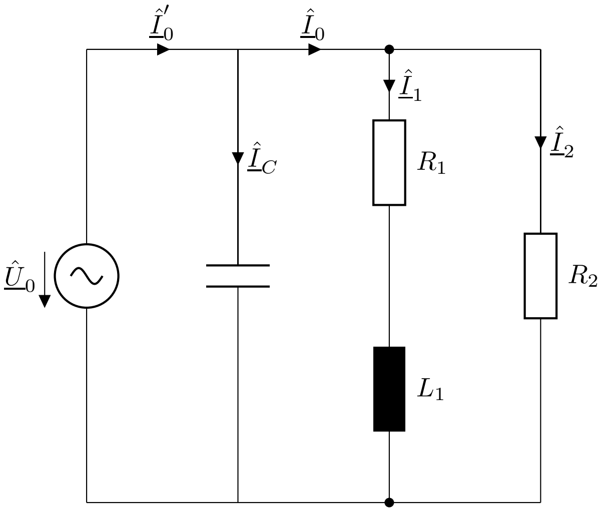
6.

$$\cos\varphi = 0{,}95$$

$$\Rightarrow \varphi = 18{,}19^\circ$$

Teilkompensation der Blindleistung. Schaltung nimmt positive Blindleistung auf (wegen der Induktivität L_1). Zur Kompensation wird ein Bauteil benötigt, das negative Blindleistung aufnimmt und damit die positive Blindleistung (teilweise) kompensiert.

$\Rightarrow$ Kapazität parallel



Warum parallel?
⇒ Dadurch ändert sich nichts an den Spannungen der einzelnen Bauelemente.

7. Lösunsweg durch Ablesen aus Zeigerdiagramm. Aus dem Zeigerdiagramm lässt sich die Blindleistung $Q_{Komp} = 440\,\text{VAr}$ ermitteln.

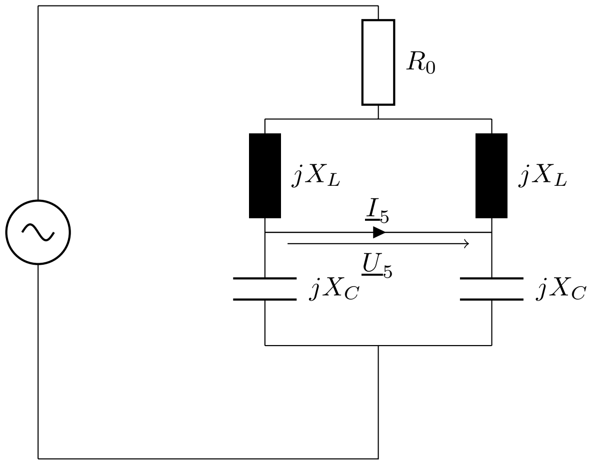
$$\begin{aligned}
\underline{S}_{Komp} &= \frac{\underline{\hat{U}}_0 \cdot \underline{\hat{I}}_C^*}{2} = \frac{\underline{\hat{U}}_0 \cdot \left(\underline{\hat{U}}_0 \cdot j\omega C\right)^*}{2} \\
&= j \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cdot \hat{U}_0^2 \cdot \omega C\right)}_{Q_{Komp}} \\
\Rightarrow C &= \frac{2 \cdot Q_{Komp}}{\hat{U}_0^2 \cdot \omega} = \frac{2 \cdot 440\,\text{VAr}}{(316{,}2\,\text{V})^2 \cdot 2\pi 50\,\text{Hz}} \\
&= 28\,\mu\text{F} \\
\Rightarrow \underline{\hat{I}}_C &= j\omega C \cdot \underline{\hat{U}}_0 = j \cdot 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 28\,\mu\text{F} \cdot 316{,}2\,\text{V} \\
&= j2{,}78\,\text{A}
\end{aligned}$$

5.2.16 Aufgabe 18: Brückenschaltung

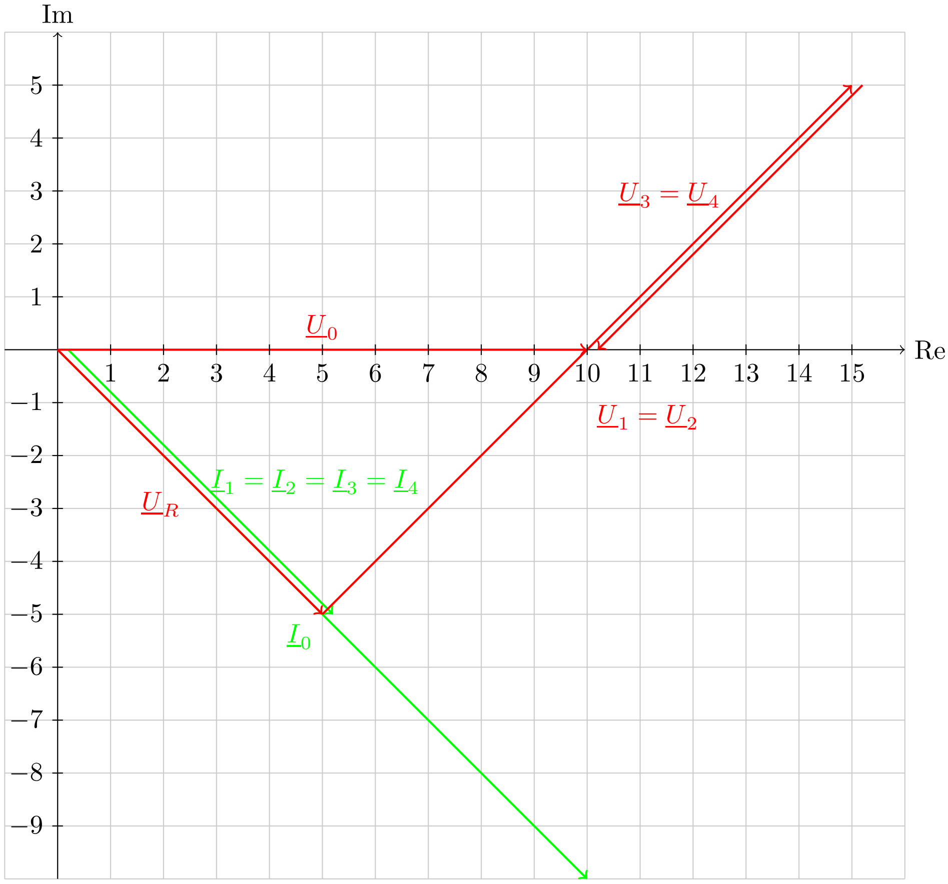
1.

$$\begin{aligned}
\underline{U}_5 &= \underline{U}_4 - \underline{U}_3 \\
&= (\underline{U}_0 - \underline{U}_R) \cdot \overbrace{\left(\frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} - \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}\right)}^{\Rightarrow \overset{!}{=} 0} \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} &= \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \\
\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4} &= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} \\
\Rightarrow \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4} \cdot \underline{Z}_3 \\
&= \frac{jX_L}{jX_C} \cdot jX_C = jX_L = j20\,\Omega
\end{aligned}$$

2.



$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_{ges} &= R_0 + j\left(\frac{X_L}{2} + \frac{X_C}{2}\right) \\
&= 5\,\Omega + j\left(\frac{20\,\Omega}{2} - \frac{10\,\Omega}{2}\right) \\
&= 5\,\Omega + j5\,\Omega \\
\underline{I}_0 &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{50\,\mathrm{V}}{5\,\Omega + j5\,\Omega} \\
&= 5\,\mathrm{A} - j5\,\mathrm{A} \\
\Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_2 &= \frac{\underline{I}_0}{2} = 2{,}5\,\mathrm{A} - j2{,}5\,\mathrm{A} \\
&= \underline{I}_3 = \underline{I}_4 \\
\underline{U}_R &= R \cdot \underline{I}_0 = 5\,\Omega \cdot (5\,\mathrm{A} - j5\,\mathrm{A}) \\
&= 2{,}5\,\mathrm{V} - j2{,}5\,\mathrm{V} \\
\underline{U}_1 = \underline{U}_2 &= \underline{I}_1 \cdot jX_L \\
&= (2{,}5\,\mathrm{A} - j2{,}5\,\mathrm{A}) \cdot j20\,\Omega \\
&= 50\,\mathrm{V} + j50\,\mathrm{V} \\
\underline{U}_3 = \underline{U}_4 &= \underline{I}_4 \cdot jX_C \\
&= (2{,}5\,\mathrm{A} - j2{,}5\,\mathrm{A}) \cdot j(-10\,\Omega) \\
&= -25\,\mathrm{V} - j25\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$



3.

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* \\ &= 50\,\mathrm{V} \cdot (5\,\mathrm{A} - j5\,\mathrm{A})^* \\ &= 50\,\mathrm{V} \cdot (5\,\mathrm{A} + j5\,\mathrm{A}) \\ &= 250\,\mathrm{W} + j\,\underbrace{250\,\mathrm{VAr}}_{Q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= 250\,\mathrm{W} \\ Q &= 250\,\mathrm{VAr} \end{aligned}$$

5.2.18 Aufgabe 20: Flackernde Glühlampe (Zusatzaufgabe)

1. allgmein:

$$\begin{aligned} P &= U \cdot I = \frac{1}{2}\hat{U} \cdot \hat{I} \\ \Rightarrow |\underline{\hat{I}}_1| &= \frac{2 \cdot P_L}{|\underline{\hat{U}}_1|} = \frac{2 \cdot 75\,\mathrm{W}}{100\,\mathrm{V}} = 1{,}5\,\mathrm{A} \\ &= |\underline{\hat{I}}_2|| \end{aligned}$$

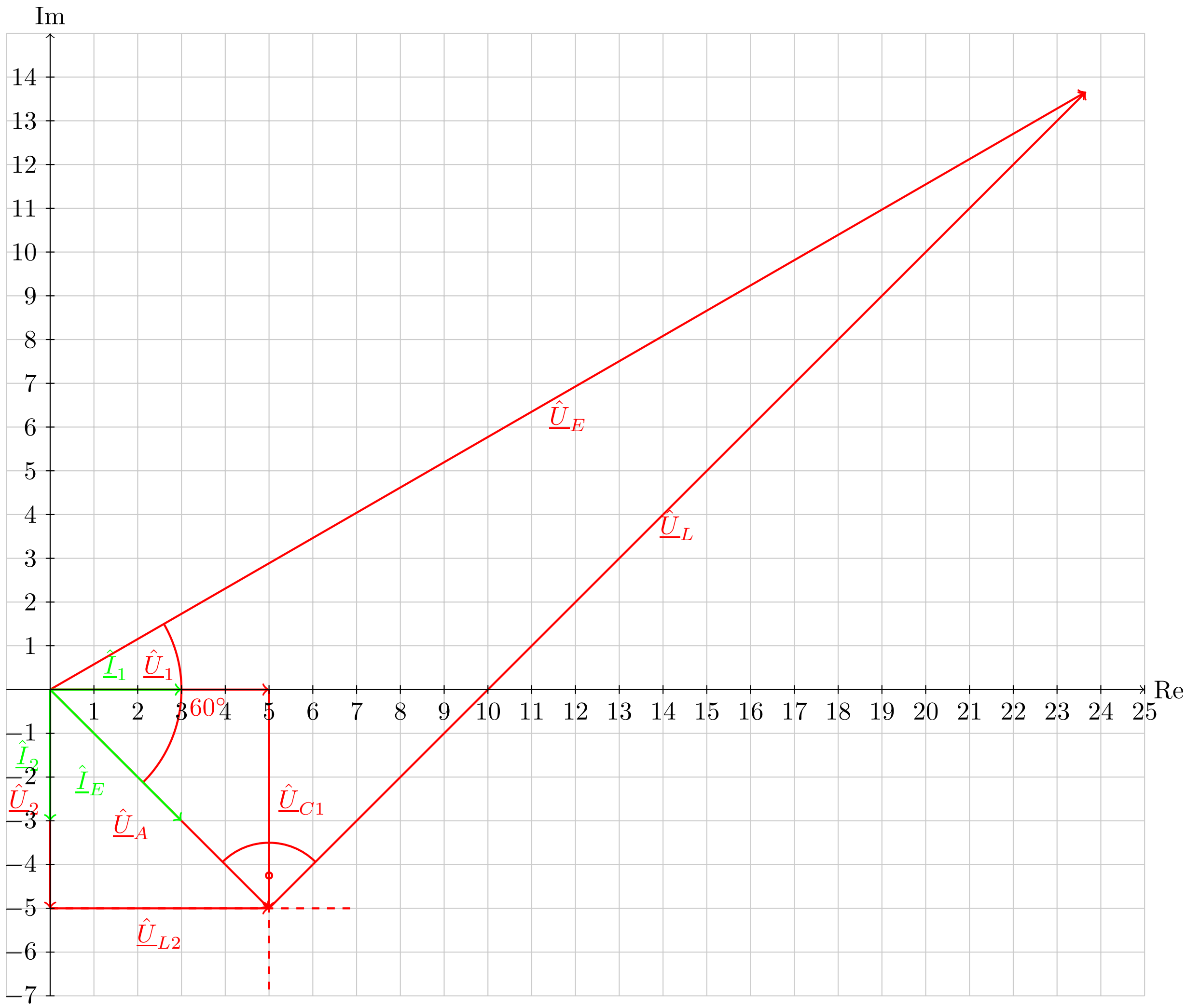
Festlegung der Phase von $\underline{\hat{U}}_1$:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{U}}_1 &= U_1 \cdot e^{j0^\circ} = 100\,\mathrm{V} \cdot e^{j0^\circ} \mathrel{\hat{=}} 5\,\mathrm{cm} \\ \Rightarrow \underline{\hat{I}}_1 &= 1{,}5\,\mathrm{A} \mathrel{\hat{=}} 3\,\mathrm{cm} \\ \underline{\hat{I}}_2 &= 1{,}5\,\mathrm{A} \cdot e^{-j90^\circ} \mathrel{\hat{=}} 3\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

nacheilend, da Zweig durch L_2 induktiv

$\Rightarrow \underline{\hat{U}}_2 = 100\,\mathrm{V}e^{-j90^\circ} \mathrel{\hat{=}} 5\,\mathrm{cm}$

$$\underline{\hat{I}}_E = \underline{\hat{I}}_1 + \underline{\hat{I}}_2$$
$$\underline{\hat{U}}_{C1} \perp \underline{\hat{I}}_1,\ \text{nacheilend}$$
$$\underline{\hat{U}}_{L2} \perp \underline{\hat{I}}_2,\ \text{voreilend}$$
$$\underline{\hat{U}}_A = \underline{\hat{U}}_{C1} = \underline{\hat{U}}_2 + \underline{\hat{U}}_{L2}$$
$$\underline{\hat{U}}_L \perp \underline{\hat{I}}_E,\ \text{voreilend}$$
$$\underline{\hat{U}}_E\ 60^\circ \text{ voreilend zu } \underline{\hat{I}}_E$$
$$\underline{\hat{U}}_E = \underline{\hat{U}}_L + \underline{\hat{U}}_A$$



2.

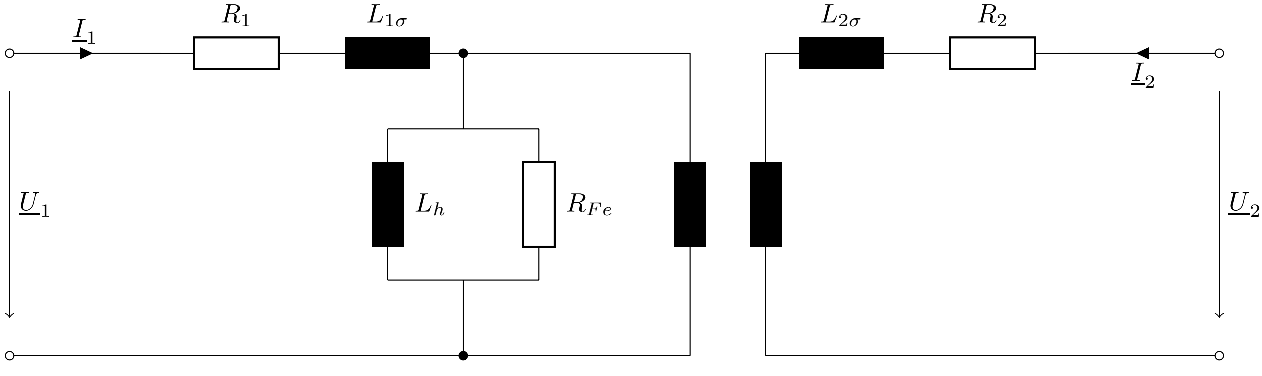
$$
\begin{aligned}
5\,\mathrm{cm} &\mathrel{\hat{=}} \hat{U}_{C1} = 100\,\mathrm{V}\\
5\,\mathrm{cm} &\mathrel{\hat{=}} \hat{U}_{L2} = 100\,\mathrm{V}\\
12{,}2\,\mathrm{cm} &\mathrel{\hat{=}} \hat{U}_{L} = 244\,\mathrm{V}(= \sqrt{2}\cdot 100\,\mathrm{V}\tan 60^\circ)\\
4{,}2\,\mathrm{cm} &\mathrel{\hat{=}} \hat{I}_{e} = 2{,}1\,\mathrm{A}(= \sqrt{2}\cdot 1{,}5\,\mathrm{A})\\
\frac{\hat{U}_{C1}}{\hat{I}_1} &= \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{\hat{I}_1}{2\pi f\cdot \hat{U}_{C1}}\\
&= \frac{1{,}5\,\mathrm{A}}{2\pi 20\,\mathrm{Hz}\cdot 100\,\mathrm{V}}\\
&= 119\,\mathrm{\mu F}\\
\frac{\hat{U}_{L2}}{\hat{I}_2} &= \omega L_2\\
\Rightarrow L_2 &= \frac{\hat{U}_{L2}}{2\pi f\cdot \hat{I}_2} = \frac{100\,\mathrm{V}}{2\pi 20\,\mathrm{Hz}\cdot 1{,}5\,\mathrm{A}}\\
&= 0{,}53\,\mathrm{H}\\
\frac{\hat{U}_{L}}{\hat{I}_E} &= \omega L\\
\Rightarrow L &= \frac{\hat{U}_{L}}{2\pi f\cdot \hat{I}_E} - \frac{244\,\mathrm{V}}{2\pi 20\,\mathrm{Hz}\cdot 2{,}1\,\mathrm{A}}\\
&= 0{,}925\,\mathrm{H}
\end{aligned}
$$

5.3 Transformator

Einführung: Transformator

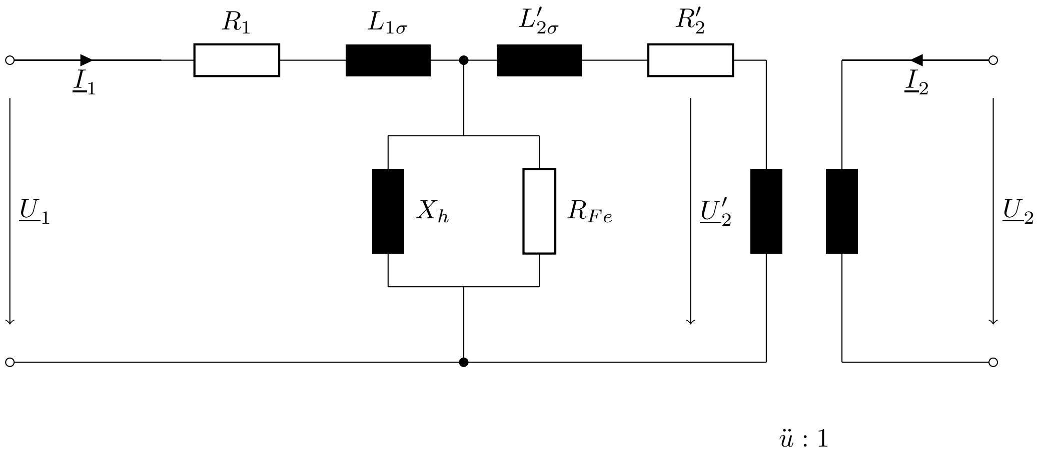
Physikalischer Aufbau mit den an den Klemmen messbaren Größen

Elektrisches Ersatschaltbild (ESB):



$ü : 1$

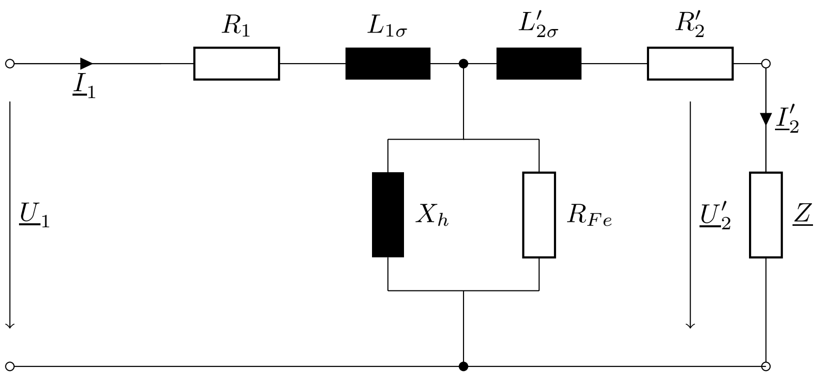
ESB bezogen auf die Primärseite
Beschreibt direkt das elektrische Verhalten an den primärseitigen Klemmen.



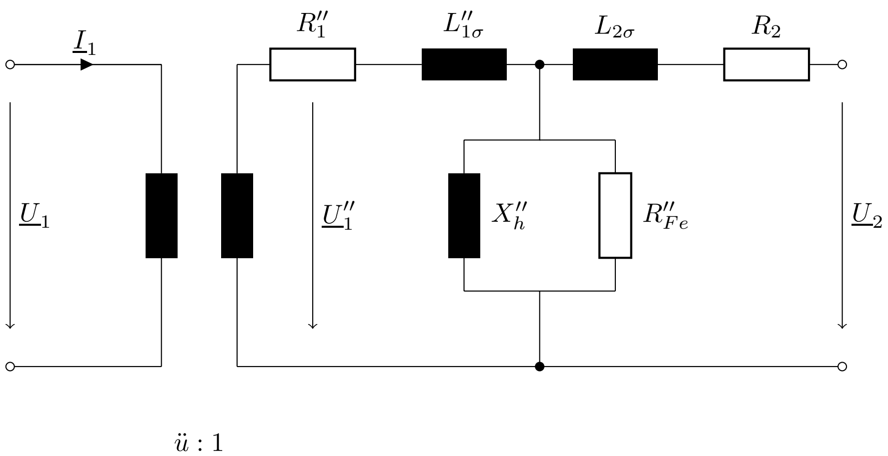
$$\underline{U}'_2 = \ddot{u} \cdot \underline{U}_2$$
$$\underline{I}'_2 = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2$$

Plausibilität: Leistungen gleich:

$$\underline{U}'_2 \cdot \underline{I}'_2 = \ddot{u} \cdot \underline{U}_2 \cdot \frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2$$
$$\underline{Z}' = \frac{\underline{U}'_2}{-\underline{I}'_2} = \frac{\ddot{u} \cdot \underline{U}_2}{-\frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2 z} = \ddot{u}^2 \cdot \underline{Z}$$



ESB bezogen auf die Sekundärseite:
Beschreibt das Verhalten an den sekundärseitigen Klemmen



$$\underline{U}_1'' = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{U}_1 \qquad \underline{I}_1'' = \ddot{u} \cdot \underline{I}_1$$

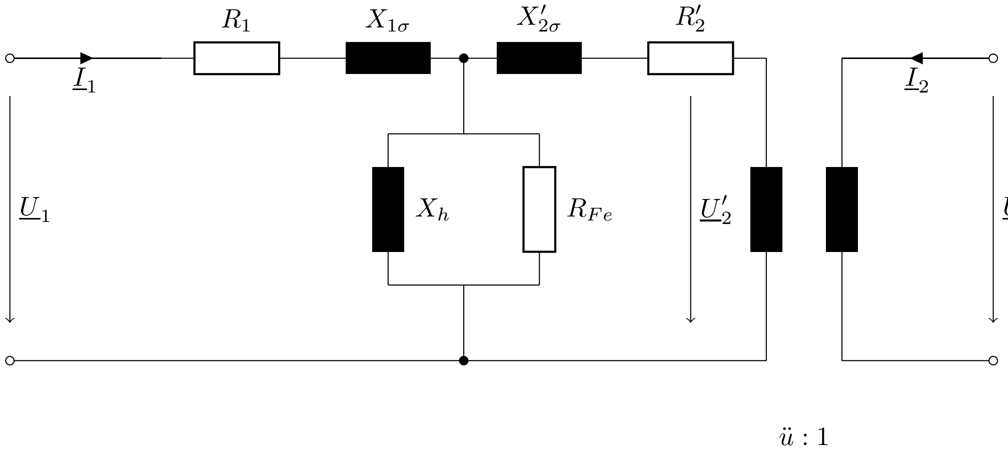
$$R_1'' = \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot R1 \qquad L_{1\sigma}'' = \frac{1}{\ddot{u}^2} L_{1\sigma}$$

$$R_{Fe}'' = \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot R_{Fe} \qquad L_h'' = \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot L_h$$

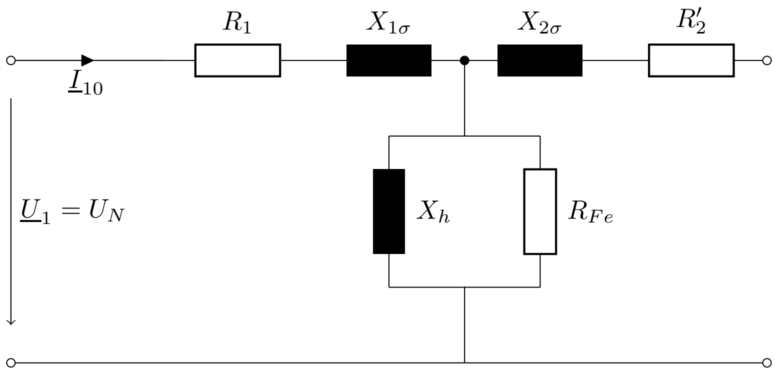
Bezeichnungen:

- **Primärseite:** normalerweise diejenige Seite, von der die elektrische Leistung kommt.
- **Sekundärseite:** normalerweise die Seite, in deren Richtung die elektrische Energie fließt.
- **Oberspannungsseite:** Seite mit der höheren Spannung = Seite mit der höheren Windungszahl.
- **Unterspannungsseite:** niedrigere Spannung / Windugszahl

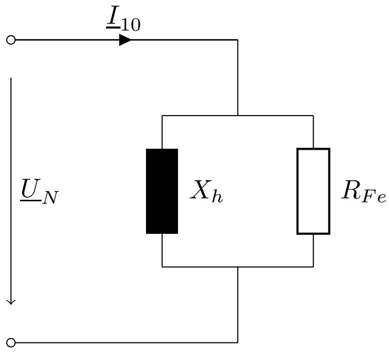
5.3.1 Aufgabe 21: T-ESB



1. a) Leerlauf $\Rightarrow$
   - Sekundärseite offene Klemmen
   - Nennspannung an Primärseite



mit $R_1, X_{1\sigma} \ll R_{Fe}, X_h \Rightarrow$ Leerlauf-ESB



X_h und R_{Fe} bestimmen:

- 1. Möglichkeit

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= U_N \cdot I_{10} \\
\Rightarrow I_{10} &= \frac{S_{10}}{U_N} = \frac{100\,\text{kVA}}{220\,\text{kV}} = 455\,\text{mA} \\
\cos\varphi_0 &= 0{,}1
\end{aligned}
$$

Entweder $\underline{Z}_0$ berechnen:

$$
Z_0 = \frac{jX_h \cdot R_{Fe}}{jX_h + R_{Fe}}
$$

besser $\underline{Y}_0$ bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\underline{Y}_0 &= \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_h} \\
\underline{Y}_0 &= \frac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_N} = \frac{I_{10} \cdot e^{-j\varphi_0}}{U_N} \\
&= \underbrace{\frac{I_{10}}{U_N} \cos\varphi_0}_{\frac{1}{R_{Fe}}} \underbrace{-j \frac{I_{10}}{U_N} \cdot \sin\varphi_0}_{\frac{1}{jX_h}} \\
\Rightarrow R_{Fe} &= \frac{U_N}{I_{10} \cdot \cos\varphi_0} = \frac{220\,\text{kV}}{455\,\text{mA} \cdot 0{,}1} \\
&= 4{,}84\,\text{M}\Omega \\
X_h &= \frac{U_N}{I_{10} \cdot \sin\varphi_0} = \frac{U_N}{I_{10}\sqrt{1-\cos^2\varphi_0}} \\
&= \frac{220\,\text{kV}}{455\,\text{mA} \cdot \sqrt{1-0{,}1^2}} = 486{,}43\,\text{k}\Omega
\end{aligned}
$$

- Möglichkeit 2: über die Komponenten der Scheinleistung:

$$
\underline{S}_{10} = P_{10} + jQ_{10}
$$

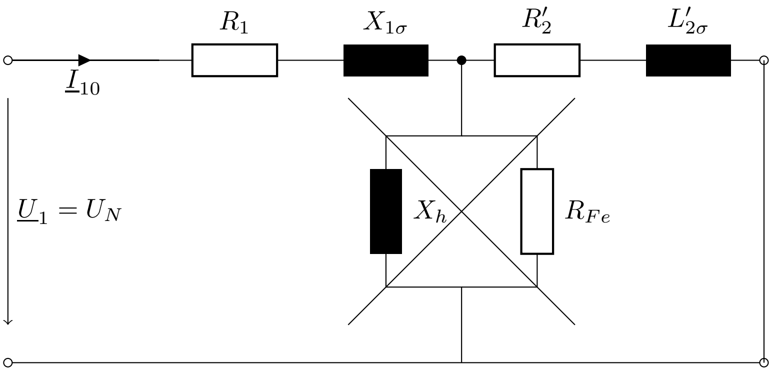
bzw. einfacher:

$$
\begin{aligned}
\underline{S}_0 &= P_0 + jQ_0 \\
\Rightarrow P_0 &= S_0 \cdot \cos\varphi_0 \\
&= \frac{U_N^2}{R_{Fe}} \\
\Rightarrow R_{Fe} &= \frac{U_N^2}{S_0 \cdot \cos\varphi_0} = 4{,}84\,\text{M}\Omega \\
Q_0 &= -S \cdot \sin\varphi_0 = \frac{U_N^2}{X_h} \\
\Rightarrow X_h &= \frac{U_N^2}{S \cdot \sin\varphi_0} = \frac{U_N^2}{S \cdot \sqrt{1-\cos^2\varphi_0}} \\
&= 486{,}44\,\text{k}\Omega
\end{aligned}
$$

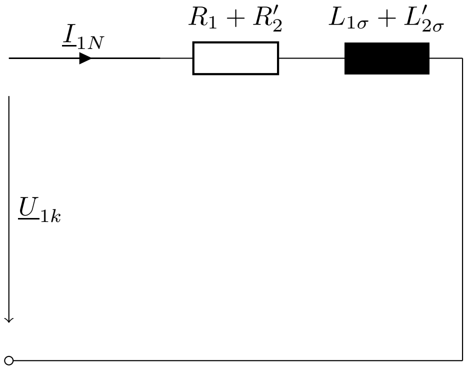
b) Kurzschlussversuch:

- Sekundärseite kurzgeschlossen
- Vorgehen (im Labor): U_1 wird solange erhöht, bis $I_1 = I_{1N}$. Die dann anliegende Spannun U_1 wird Kurzschlussspannung U_{1k} genannt
- relative Kurzschlussspannung

$$
u_k = \frac{U_{1k}}{U_{1N}}
$$



mit $R_1, X_{1\sigma}, X_{2\sigma}', R_2' \ll X_h, R_{Fe} \Rightarrow$ Kurzschluss-ESB



$$U_{1k} = u_k \cdot U_{1N} = 3{,}14\% \cdot 220\,\mathrm{kV} = 6{,}91\,\mathrm{kV}$$
$$I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} = \frac{10\,\mathrm{MVA}}{220\,\mathrm{kV}} = 45{,}45\,\mathrm{A}$$
$$\cos\varphi_k = 0{,}3$$

Bestimme R_1 und $X_{1\sigma}$

- Möglichkeit 1: über $\underline{Z}_k$

$$\underline{Z}_k = \frac{\underline{U}_{1k}}{\underline{I}_{1N}} \Rightarrow Z_k = \frac{U_{1k}}{I_{1N}}$$
$$\underline{Z}_k = (R_1 + R_2') + j(X_{1\sigma} + X_{2\sigma}')$$
$$= 2R_1 + j2X_{1\sigma}$$

da $R_1 = R_2'$, $X_{1\sigma} = X_{2\sigma}$

$$\mathrm{Re}\{\underline{Z}_k\} = |\underline{Z}_k| \cdot \cos\varphi_k$$
$$\Leftrightarrow 2R_1 = \frac{U_{1k}}{I_{1N}} \cdot \cos\varphi_k$$
$$\Leftrightarrow R_1 = R_2' = \frac{1}{2}\frac{U_{1k}}{I_{1N}} \cdot \cos\varphi_k$$
$$= \frac{1}{2}\frac{6{,}91\,\mathrm{kV}}{45{,}45\,\mathrm{A}} \cdot 0{,}3$$
$$= 22{,}8\,\Omega$$
$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}_k\} = |\underline{Z}_k| \cdot \sin\varphi_k$$
$$\Leftrightarrow 2X_{1\sigma} = \frac{U_{1k}}{I_{1N}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2\varphi_k}$$
$$\Rightarrow X_{1\sigma} = X_{2\sigma}' = \frac{1}{2}\frac{U_{1k}}{I_{1N}}\sqrt{1 - \cos^2\varphi_k}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}91\,\mathrm{kV}}{45{,}45\,\mathrm{A}} \cdot \sqrt{1 - 0{,}3^2}$$
$$= 72{,}5\,\Omega$$

- Möglichkeit 2: über die Komponenten der Scheinleistung:

$$\begin{aligned}
S_k &= U_{1k} \cdot I_{1N} = u_k \cdot U_{1N} \cdot I_{1N} \\
&= u_k \cdot S_N \\
\underline{S}_k &= P_k + jQ_k \\
P_k &= S_k \cdot \cos\varphi_k = I_{1N}^2 \cdot \overbrace{(R_1 + R_2')}^{2R_1} \\
\Rightarrow R_1 &= \frac{S_k \cdot \cos\varphi_k}{2 \cdot I_{1N}^2} = u_k \cdot \frac{S_N \cdot \cos\varphi_k}{2 \cdot I_{1N}^2} \\
&= 3{,}14\% \cdot \frac{10\,\mathrm{MVA} \cdot 0{,}3}{2 \cdot (45{,}45\,\mathrm{A})^2} = 22{,}8\,\Omega \\
Q_k &= S_k \cdot \sin\varphi_k = I_{1N}^2 \cdot \underbrace{(X_{1\sigma} + X_{2\sigma}')}_{2X_{1\sigma}} \\
\Rightarrow X_{1\sigma} &= u_k \cdot \frac{S_n \cdot \sqrt{1 - \cos^2\varphi_k}}{2 \cdot I_{1N}^2} \\
&= 0{,}0314 \cdot \frac{10\,\mathrm{MVA} \cdot \sqrt{1 - 0{,}3^2}}{2 \cdot (45{,}45\,\mathrm{A})^2} \\
&= 72{,}5\,\Omega
\end{aligned}$$

2. Es fließt Nennstrom
   $\Rightarrow$ Näherungen wie im Kurzschlussfall

   $$\underline{I}_1 \approx -\underline{I}_2'$$

   Festlegung:

   $$\begin{aligned}
   \underline{U}_1 &= U_1 = 220\,\mathrm{kV} \\
   \cos\varphi &= 0{,}9 \text{ ind.} \Rightarrow \varphi = 25{,}84^\circ \\
   \underline{I}_1 &\approx -\underline{I}_2' = I_{1N} \cdot e^{-j\varphi} \\
   &= 45{,}45\,\mathrm{A} \cdot e^{-j25{,}84^\circ}
   \end{aligned}$$

   Masche:

   $$\begin{aligned}
   \underline{U}_{1h} &= \underline{U}_1 - \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 \\
   &= \underline{U}_1 - (R_1 + jX_{1\sigma}) \cdot \underline{I}_1 \\
   &= 220\,\mathrm{kV} - (22{,}8\,\Omega + j72{,}5\,\Omega) \cdot 45{,}45\,\mathrm{A} \cdot e^{-j25{,}84^\circ} \\
   &= 217{,}6\,\mathrm{kV} \cdot e^{-j0{,}662^\circ} \\
   \underline{Z}_0 &= R_{Fe} \parallel jX_{1h} \\
   &= \frac{R_{Fe} \cdot jX_{1h}}{R_{Fe} + jX_{1h}} = \frac{4{,}84\,\mathrm{M\Omega} \cdot j486{,}4\,\mathrm{k\Omega}}{4{,}84\,\mathrm{M\Omega} + j486\,\mathrm{k\Omega}} \\
   &= 484\,\mathrm{k\Omega} \cdot e^{84{,}26^\circ} \\
   \underline{I}_0 &= \frac{\underline{U}_{1k}}{\underline{Z}_0} = \frac{217{,}6\,\mathrm{kV} \cdot e^{-j0{,}662^\circ}}{484\,\mathrm{k\Omega} \cdot e^{j84{,}26^\circ}} \\
   &= 449{,}6\,\mathrm{mA} \cdot e^{-j84{,}9^\circ}
   \end{aligned}$$

Nachtrag Aufgabe 21

Bestimmung von X_h und R_{Fe} über die Komponenten der Scheinleistung.

$$Q_0 = +S_0 \sin\varphi_0 = \frac{U_N^2}{X_h}$$

denn:

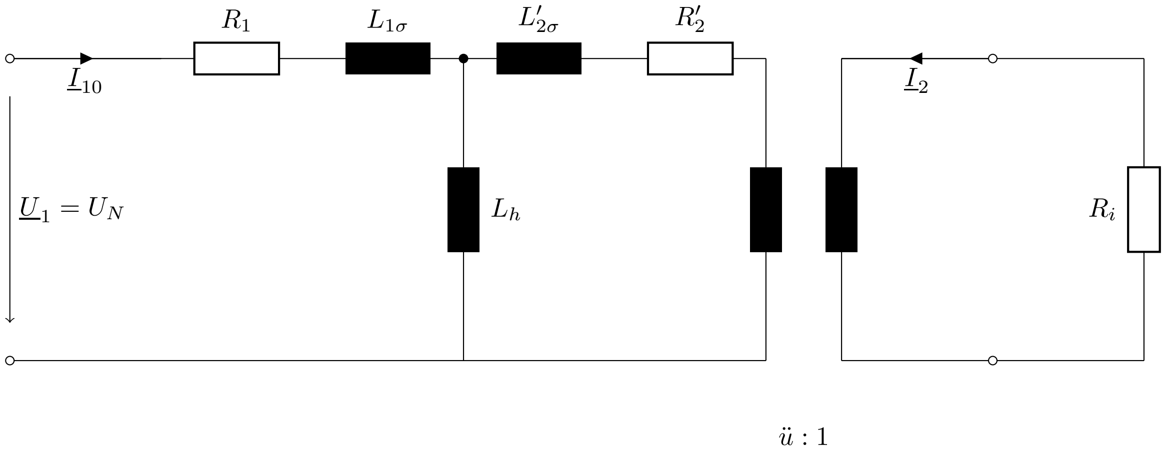
$$\begin{aligned}
Q_0 &= \mathrm{Im}\{\underline{S}_0\} = \mathrm{Im}\{\underline{U}_N \cdot \underline{I}_{10}^*\} \\
\Rightarrow Q_0 &= \mathrm{Im}\{U_N \cdot I_{10} e^{+j\varphi_0}\} \\
&= U_N \cdot I_{10} \cdot \sin\varphi_0 = S_0 \sin\varphi_0
\end{aligned}$$

und:

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= \operatorname{Im}\left\{\underline{U}_N \cdot \underline{U}_N^* \cdot \left(\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_h}\right)^*\right\} \\
&= \frac{U_N^2}{X_h z}
\end{aligned}
$$

5.3.2 Aufgabe 22: Stromwandler

Es gilt allgemeines folgendes ESB für den Stromwandler



R_{Fe} vernachlässigt, R_i: Strommessgerät

1. Für einen idealen Stromwandler gilt:

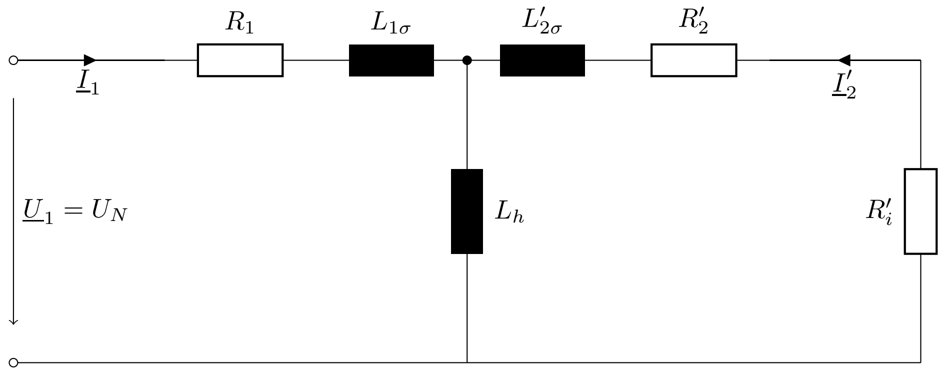
$$
\left.\begin{array}{lcl} R_1 = R_2 = L_{1\sigma} = L_{2\sigma} & = & 0 \\ L_h & = & \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{I}_1 = -\underline{I}'_2
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= ü \cdot \underline{I}'_2 = \frac{w_1}{w_2}(-\underline{I}_1) \\
\Rightarrow w_2 &= w_1 \cdot \frac{I_{1,max}}{I_{2,max}} = 1 \cdot \frac{3000\,\mathrm{A}}{10\,\mathrm{A}} \\
&= 300
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Aufgabe 22

2.)

$$
\begin{aligned}
L_{w=1} &= L_{1\sigma} + L_h = 0{,}002 L_h + L_h \\
&= 1{,}002 L_h \\
\Rightarrow L_h &= \frac{L_{w=1}}{1{,}002} = \frac{10\,\mu\mathrm{H}}{1{,}002} = 9{,}98\,\mu\mathrm{H}
\end{aligned}
$$



$$\frac{\underline{I}'_2}{\underline{I}_1} = \frac{-j\omega L_h}{j\omega \underbrace{(L_h + L'_{2\sigma})}_{=L_{w=1}} + R'_2 = R'_i}$$
$$= k \cdot e^{j\varphi_k}$$
$$k = \frac{|j\omega L_h|}{|j\omega L_{w=1} + R'_2 + R'_i|}$$
$$= \frac{\omega L_h}{\sqrt{\omega^2 L_{w=1}^2 + (R'_2 + R'_i)^2}} > 0{,}997$$
$$\Leftrightarrow \frac{\omega L_h}{0{,}997} > \sqrt{\omega^2 L_{w=1}^2 + (R'_2 + R'_i)^2}$$
$$\left(\frac{\omega L_h}{0{,}997}\right)^2 > \omega^2 L_{w=1}^2 + (R'_2 + R'_i)^2$$
$$R'_i = \pm\sqrt{\left(\frac{\omega L_h}{0{,}997}\right)^2 - \omega^2 L_{w=1}^2} - R'_1$$

keine negative Widerstände $\rightarrow$ nur + sinnvoll

mit $R'_i = \ddot{u}^2 R + i$ und $R'_2 = \ddot{u}^2 R_2$ folgt:

$$R_i < \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot \omega \sqrt{\left(\frac{L_h}{0{,}997}\right)^2 - L_{w=1}^2} - R_2$$
$$R_i < \frac{1}{\left(\frac{1}{300}\right)^2} \cdot 2\pi 50\,\mathrm{Hz} \cdot \sqrt{\left(\frac{9{,}98\,\mu\mathrm{H}}{0{,}9997}\right)^2 - (10\,\mu\mathrm{H})^2} - 2\,\Omega$$
$$= 10{,}7\,\Omega$$

3.)

$$\underline{k} = k \cdot e^{j\varphi_k} = \frac{\underline{I}'_2}{\underline{I}_1}$$
$$= \frac{-j\omega L_h}{j\omega \underbrace{(L_h + L'_{2\sigma})}_{L_{w=1}} + R'_2 + R_1}$$
$$= \frac{-j\omega L_h}{j\omega L_{w=1} + \ddot{u}^2 \cdot (R_2 + R_i)}$$
$$= \frac{-j2\pi 50\,\mathrm{Hz} \cdot 9{,}98\,\mu\mathrm{H}}{j2\pi 50\,\mathrm{Hz} \cdot 1 - \mu H + \frac{1}{300^2} \cdot (2\,\Omega + 1\,\Omega)}$$
$$= 0{,}997\,94 \cdot e^{-j179{,}39^\circ}$$
$$\Rightarrow \text{Fehler} = 1 - 0{,}997\,94 = 2{,}1‰$$

Phasenverschiebung: $\varphi_k = -179{,}39^\circ$

Bemerkung: k hat hier nichts mit Kurzschluss zu tun.

4.) Bei Leerlauf auf der Primärseite kann man sekundärseitig folgende Induktivität messen:

$$\begin{aligned}
L_{\text{Leerlauf}} &= L_{2\sigma} + L_h'' \\
&= \frac{L_{2\sigma}'}{\ddot{u}^2} + \frac{L_h}{\ddot{u}^2} \\
&= \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot L_{w=1} = 300^2 \cdot 10\,\mu\text{H} = 0{,}9\,\text{H}
\end{aligned}$$

Beim Kurzschluss der Primärseite kann man sekundärseitig folgende Induktivität messen:

$$\begin{aligned}
L_{\text{Kurzschluss}} &= L_{1\sigma}'' \parallel L_h'' + L_{2\sigma} \\
&\overset{L_{1\sigma} \ll L_h}{=} L_{1\sigma}'' + L_{2\sigma} = \frac{1}{\ddot{u}^2}(L_{1\sigma} + L_{2\sigma}') \\
&= \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot 2 \cdot 0{,}002 L_h \\
&= 300^2 \cdot 2 \cdot 0{,}002 \cdot 9{,}98\,\mu\text{H} \\
&= 3{,}59\,\text{mH}
\end{aligned}$$

5.)

$$\begin{aligned}
|k| &= \frac{L_h}{\left| L_{w=1} - j\frac{\ddot{u}^2(R_2+R_i)}{\omega} \right|} \\
&= \frac{L_h}{\sqrt{(L_{w=1})^2 + \frac{\ddot{u}^4(R_2+R_i)^2}{\omega^2}}} \\
&f \uparrow \Rightarrow \omega \uparrow \Rightarrow k \uparrow \\
\varphi_k &= \underbrace{\arctan\left(\frac{-\ddot{u}^2(R_2+R_i)}{\omega \cdot L_{w=1}}\right)}_{\text{Phase des Nenners}} - 180^\circ \\
\underline{k} &= \frac{-j\omega L_h}{j\omega L_{w=1} + \ddot{u}^2(R_2+R_i)} \\
&= \frac{-L_h}{L_{w=1} - j\frac{\ddot{u}^2(R_2+R_i)}{\omega}} \qquad (1) \\
&f \uparrow \Rightarrow \omega \uparrow \Rightarrow \varphi_k \to -180^\circ
\end{aligned}$$

Für gleichbleibende Bedingungen muss gelten:

$$\begin{aligned}
X_{w=1} &= \omega L_{w=1} = \text{const} \\
\omega_{\text{neu}} \cdot L_{w=1,\text{neu}} &= \omega \cdot L_{w=1} \\
L_{w=1,\text{neu}} &= \frac{\omega}{\omega_{\text{neu}}} \cdot L_{w=1} = \frac{50\,\text{Hz}}{1\,\text{kHz}} \cdot 10\,\mu\text{H} \\
&= 0{,}5\,\mu\text{H}
\end{aligned}$$

6.) Der gesamte Fluss im Kern ist Hauptfluss.

$$\begin{aligned}
\underline{\Phi}_h &= L_h \cdot \underline{I}_h \Rightarrow \Phi_{h,max} = L_h \cdot I_{h,max} \\
\underline{I}_{h,max} &= \underline{I}_{1,max} + \underline{I}_{2,max}' \\
&= 3000\,\text{A} \cdot \left(1 + k e^{j\varphi_k}\right) \\
&= 3000\,\text{A} \cdot \left(1 + 0{,}997\,94 \cdot e^{-j179{,}39^\circ}\right) \\
&= 32{,}5\,\text{A} \cdot e^{-j78{,}73^\circ} \\
I_{h,max} &= 32{,}5\,\text{A} \\
\Phi_{h,max} &= 9{,}97\,\mu\text{H} \cdot 32{,}5\,\text{A} \\
&= 0{,}33\,\text{mWb} \\
\hat{\Phi}_{h,max} &= \sqrt{2}\Phi_{h,max} = 0{,}47\,\text{mWb}
\end{aligned}$$

Für einen idealen Stromwandler gilt:

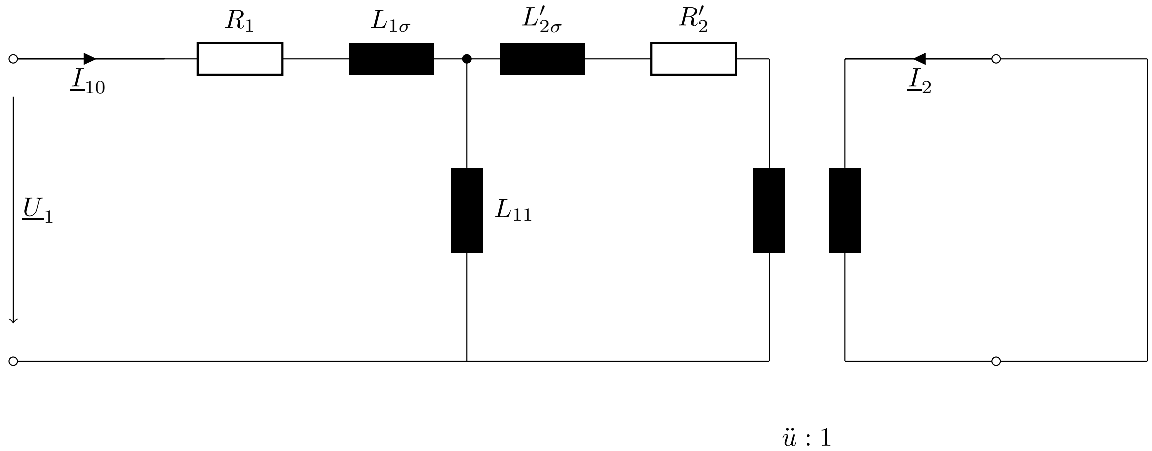
$$\begin{aligned}
&R_2 \to 0, R_i \to 0, L_{2\sigma} \to 0 \\
\Rightarrow &I_h \to 0 \Rightarrow \Phi_h \to 0
\end{aligned}$$

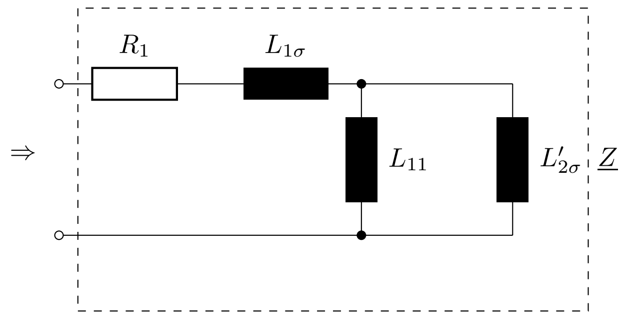
Der Strom I_2 in Wicklung 2 erzeugt einen Fluss, der den durch $\underline{I}_1$ erzeugten Fluss komplett kompensiert.

5.3.3 Aufgabe 23: Kurzgeschlossener Übertrager

1.) gegeben:

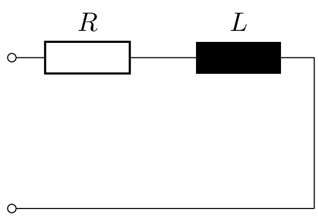
$$\ddot{u} = \frac{w_1}{w_2}, L_{22}, L_{1\sigma}, L_{2\sigma}, R_1, R_2, R_2 = 0$$





es gilt:

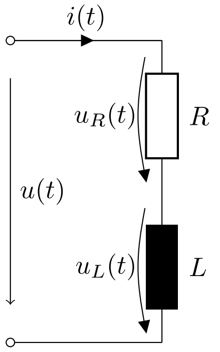
$$L'_{2\sigma} = \ddot{u}^2 L_{2\sigma}$$
$$L_{11} = \ddot{u}^2 \cdot L_{22}$$
$$\underline{Z} = R_1 + j\omega L_{1\sigma} + j_\omega L'_{2\sigma} \parallel j\omega L_{11}$$
$$= R_1 + j\omega L_{1\sigma} + \frac{j\omega L'_{2\sigma} \cdot \cancel{j\omega} L_{11}}{\cancel{j\omega} L'_{2\sigma} + \cancel{j\omega} L_{11}}$$
$$= \underbrace{R_1}_{R} + j\omega \underbrace{\left(l_{1\sigma} \ddot{u}^2 \frac{L_{2\sigma} \cdot L_{22}}{L_{2\sigma} + L_{22}} \right)}_{L} \Rightarrow$$



2.)

$$R = R_1 = 20\,\Omega$$
$$L = 20{,}5\,\mathrm{mH} + 2^2 \cdot \frac{5 \cdot 195}{5 + 195}\mathrm{mH}$$
$$= 40\,\mathrm{mH}$$

3.)



$$
\begin{aligned}
u(t) &= u_R(t) + u_L(t) \\
&= R \cdot it(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \\
t < 0 : & i(t) = 0 \Rightarrow U(t) = 0 \\
t \geq 0 : & i(t) = I_0 \cdot \sin^2(\omega t) \\
\Rightarrow u(t) &= R \cdot I_0 \cdot \sin^2(\omega t) + L \frac{d(I_0 \cdot \sin^2(\omega t))}{dt} \\
&= R \cdot I_0 \cdot \sin^2(\omega t) + L \cdot I_0 \cdot 2 \sin(\omega t \cdot \cos(\omega t) \cdot \omega \\
&= I_0 \cdot \sin(\omega t) \left[R \sin(\omega t) + 2\omega L \cos(\omega t)\right]
\end{aligned}
$$

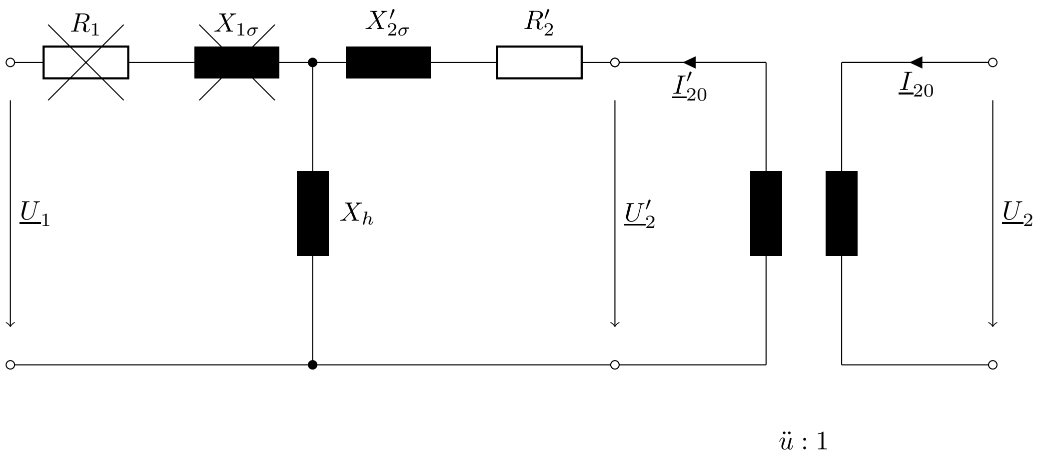
5.3.4 Aufgabe 24: Bestimmung der Primärspannung

1.)

$$
\begin{aligned}
X_{1\sigma} &= \omega L_{1\sigma} = 2\pi 50\,\mathrm{Hz} \cdot 6{,}4\,\mathrm{mH} = 2\,\Omega \\
X'_{2\sigma} &= \omega \cdot L'_{2\sigma} = 2\pi 50\,\mathrm{Hz} \cdot 9{,}52\,\mathrm{mH} = 3\,\Omega \\
X_h &= \omega L_h = 2\pi 50\,\mathrm{Hz} \cdot 53{,}6\,\mathrm{mH} = 16{,}84\,\Omega \\
R'_2 &= \ddot{u}^2 \cdot R_2 = 2^2 \cdot 0{,}65\,\Omega = 2{,}6\,\Omega
\end{aligned}
$$

Man sieht: $X_{1\sigma}, X'_{2\sigma}$ hier nicht $\ll X_h$

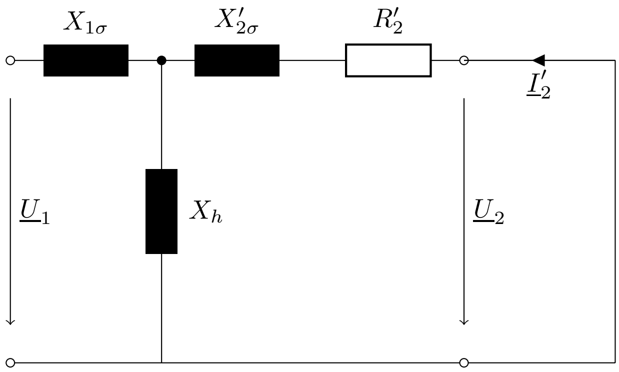
2.)



Rechnung bezogen auf die Primärseite.

$$\underline{U}_2' = ü \cdot \underline{U}_2$$
$$\underline{I}_{20}' + \frac{1}{ü} \cdot \underline{I}_{20}$$
$$\Rightarrow \underline{I}_{20} = ü \cdot \underline{I}_{20}'$$
$$\underline{I}_{20}' = \frac{\underline{U}_2'}{R_2' + j(X_{2\sigma}' + X_h)}$$
$$= \frac{2 \cdot 10\,\mathrm{V}}{2{,}6\,\Omega + j(3\,\Omega + 16{,}84\,\Omega)}$$
$$= 1A \cdot e^{-j82{,}53^\circ}$$
$$\Rightarrow \underline{I}_{20} = ü \cdot \underline{I}_{20}' = 2\,\mathrm{A} \cdot e^{-j82{,}53^\circ}$$
$$\underline{U}_1 = jX_h \cdot \underline{I}_{20}' = j16{,}84\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{A} \cdot e^{-j82{,}53^\circ}$$
$$= 16{,}84\,\mathrm{V} \cdot e^{j7{,}47^\circ}$$

3.) Rechnung bezogen auf Primärseite



$$\underline{I}_2' = \frac{1}{ü}\underline{I}_2 = \frac{1}{2} \cdot 8\,\mathrm{A} \cdot e^{j130^\circ}$$
$$= 4\,\mathrm{A} \cdot e^{j130^\circ} \mathrel{\hat{=}} 4\,\mathrm{cm}$$
$$U_{R2}' = R_2' \cdot I_2' = 2{,}6\,\Omega \cdot 4\,\mathrm{A}$$
$$= 10{,}4\,\mathrm{V} \mathrel{\hat{=}} 5{,}2\,\mathrm{cm} \parallel I_2'$$
$$U_{L2\sigma}' = X_{2\sigma}' \cdot I_2' 3\,\Omega \cdot 4\,\mathrm{A}$$
$$= 12\,\mathrm{V} \mathrel{\hat{=}} 6\,\mathrm{cm} \perp \underline{I}_2',\ 90^\circ \text{ voreilend}$$

Masche M_1:

$$0 = \underline{U}_{R2}' + \underline{U}_{L2\sigma}' + \underline{U}_h$$

ablesen:

$$7{,}9\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 15{,}8\,\mathrm{V} = U_h$$
$$I_H = \frac{U_h}{X_h} = \frac{15{,}8\,\mathrm{V}}{16{,}84\,\mathrm{A}} = 0{,}94\,\mathrm{A}$$
$$\mathrel{\hat{=}} 0{,}94\,\mathrm{cm} \perp U_h,\ 90^\circ \text{ nacheilend}$$

Knotengleichung

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2' = \underline{I}_h$$
$$\Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_h - \underline{I}_2'$$

ablesen:

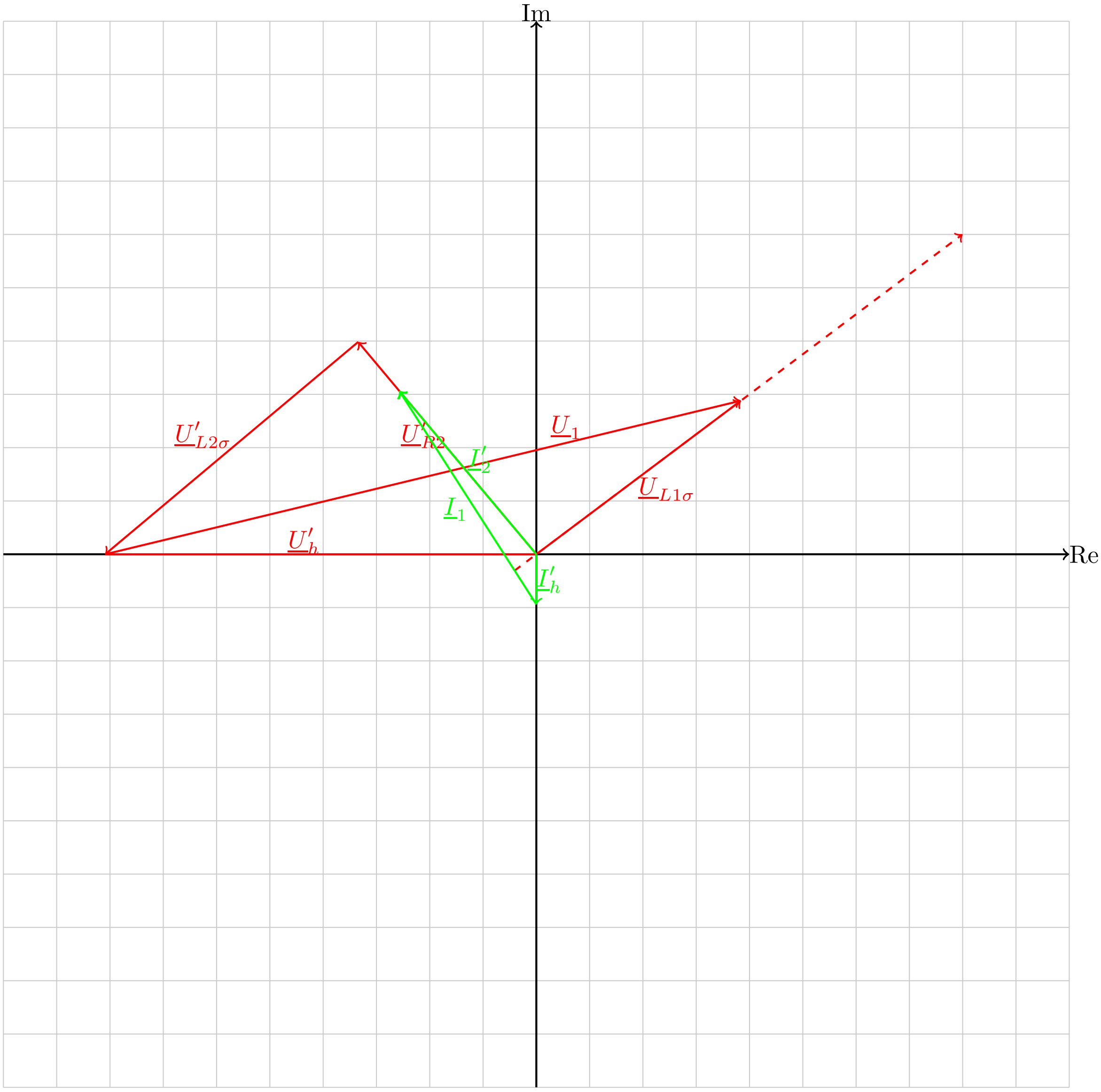
$$4{,}8\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 4{,}8\,\mathrm{A} = I_1$$
$$U_{L1\sigma} = X_{1\sigma} \cdot U_1 = 2\,\Omega \cdot 4{,}8\,\mathrm{A}$$
$$= 9{,}6\,\mathrm{V} \mathrel{\hat{=}} 4{,}8\,\mathrm{cm} \perp I_1,\ 90^\circ \text{ voreilend}$$

Masche M_2:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_h + \underline{U}_{L1\sigma}$$

Ablesen:

$12{,}3\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 24{,}6\,\text{V} = U_1$



5.4 Mehrphasensysteme

5.4.1 Aufgabe 26: Symmetrisches Drehstromsystem

1. Wegen Symmetrie: $\underline{I}_0 = 0$
   kurzer Beweis:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1M}}{\underline{Z}} = \frac{U}{\underline{Z}}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2M}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{a}^2 U}{\underline{Z}}$$

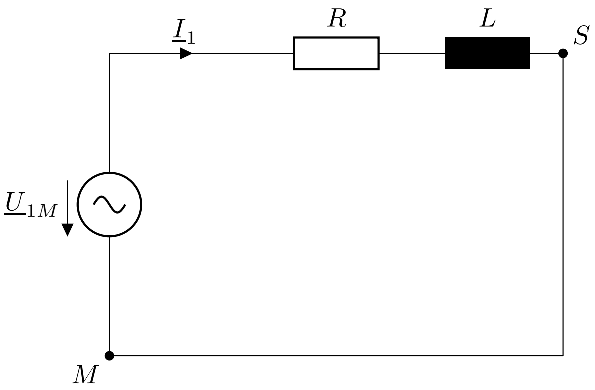
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3M}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{a} U}{\underline{Z}}$$

$$\Rightarrow I_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$= (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) \cdot \frac{1}{\underline{Z}}$$

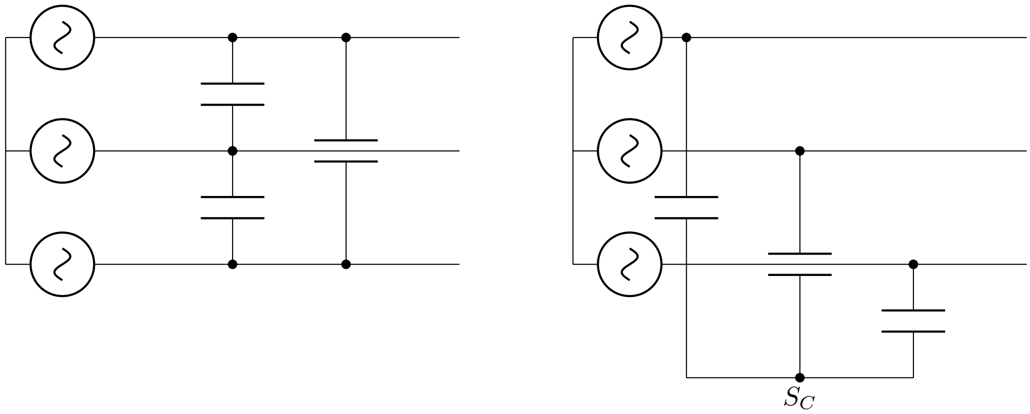
2. Da $\underline{I}_0 = 0$ ist, ändert sich nach Auftrennen des Sternpunktleiters nichts!

3. Einphasiges ESB gilt für symmetrische Dreiphasensysteme!



$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{U}{R + j\omega L} = \frac{230\,\mathrm{V}}{20\,\Omega + j2\pi 50\,\mathrm{Hz} \cdot 31{,}83\,\mathrm{mH}} \\
&= 9{,}2\,\mathrm{A} - j4{,}6\,\mathrm{A} \\
\underline{S} &= 3 \cdot \underline{U}_{1M} \cdot \underline{I}_1^* \\
&= 3 \cdot 230\,\mathrm{V} \cdot (9{,}2\,\mathrm{A} - j4{,}6\,\mathrm{A})^* \\
&= 3 \cdot 230\,\mathrm{V} \cdot (9{,}2\,\mathrm{A} + j4{,}6\,\mathrm{A}) \\
&= \underbrace{6{,}348\,\mathrm{W}}_{\text{Wirkleistung } P} + j \underbrace{3{,}174\,\mathrm{kVAr}}_{\text{Blindleistung } Q}
\end{aligned}$$

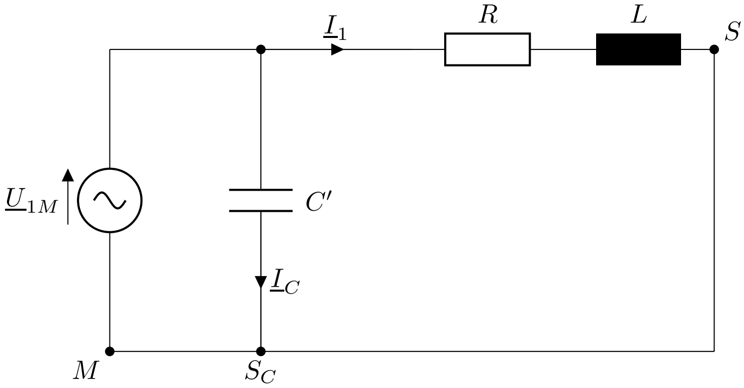
4. $\Rightarrow$ Blindleistungkompensation



Δ Stern

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{1}{3}\underline{Z} \\
\frac{1}{j\omega C} &= \frac{1}{3}\frac{1}{j\omega C} \\
C &\rightarrow 3C
\end{aligned}$$

1-Phasiges ESB:



Blindleistung, die von C' aufgenommen werden muss:

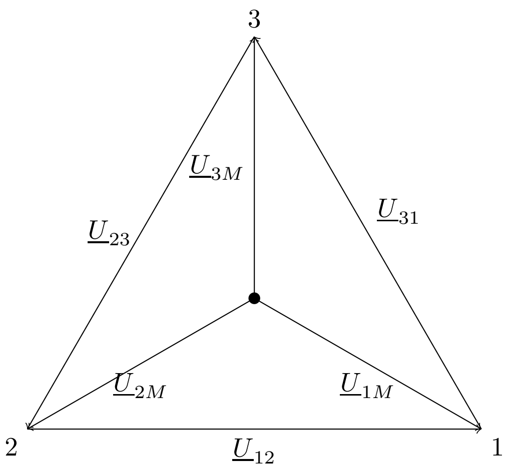
$$\begin{aligned}
Q_C &= -Q_{RL}\\
Q_C &= 3\cdot \mathrm{Im}\left\{\underline{U}_{1M}\cdot \underline{I}_C^*\right\}\\
&= 3\cdot \mathrm{Im}\left\{\frac{\underline{U}_{1M}\cdot \underline{U}_{1M}^*}{\left(\frac{1}{j\omega C'}\right)^*}\right\}\\
&= -3\cdot U^2\cdot \omega C' = -3U^2\cdot\omega\cdot 3\cdot C\\
&\overset{!}{=} -Q_{RL}\\
C &= \frac{Q_{RL}}{9U^2\cdot\omega} = \frac{3{,}174\,\mathrm{kVAr}}{9\cdot(230\,\mathrm{V})^2\cdot 2\pi 50\,\mathrm{Hz}}\\
&= 21{,}22\,\mu\mathrm{F}
\end{aligned}$$

5.4.2 Aufgabe 27: Unsymmetrische Last im Dreieck

Rechnerische Lösung:

gegeben: $\underline{U}_{12} = U; \underline{U}_{23} = \underline{a}^2 U; \underline{U}_{31} = \underline{a}U$

zugehörige Phasenspannungen:



$$\Rightarrow \underline{U}_{1M} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot U \cdot e^{-j30^\circ}$$

$$\underline{U}_{2M} = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{1M} = \frac{1}{\sqrt{3}} U \cdot e^{-j150^\circ}$$

$$\underline{U}_{3M} = \underline{a} \cdot \underline{U}_{1M} = \frac{1}{\sqrt{3}} U \cdot e^{j90^\circ}$$

$$\text{mit } \underline{a} = e^{j120^\circ}, \underline{a}^2 = e^{-j120^\circ}$$

$$\boxed{\underline{U}_{Ph} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{U} \cdot e^{-j30^\circ}}$$

$$\underline{I}_a = 10\,\mathrm{A} \text{ (in Phase mit } \underline{U}_{12})$$

$$\underline{I}_1 = \boxed{\underline{I}_a - \underline{I}_c = I_1 \cdot e^{-j30^\circ}}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_a - \frac{\underline{U}_{31}}{jX_L} = I_1 \cdot e^{-j30^\circ}$$

$$\underline{I}_1 = 10\,\mathrm{A} - \frac{1}{X_L} \cdot 500\,\mathrm{V} \cdot e^{j30^\circ} = I_1 \cdot e^{-j30^\circ}$$

$$\mathrm{Re}\{\underline{I}_1\} = 10\,\mathrm{A} - \frac{500\,\mathrm{V}}{X_L} \cdot \cos 30^\circ = I_1 \cdot \cos 30^\circ$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{I}_1\} = -\frac{500\,\mathrm{V}}{X_L} \cdot \sin 30^\circ = -I_1 \cdot \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{500\,\mathrm{V}}{X_L}$$

$$\Rightarrow 10\,\mathrm{A} - I_1 \cos 30^\circ = I_1 \cos 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{10\,\mathrm{A}}{2 \cdot \cos 30^\circ} = 5{,}774\,\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_c = \underline{I}_a - I_1 e^{-j30^\circ}$$

$$= 10\,\mathrm{A} - 5{,}774\,\mathrm{A} e^{-j30^\circ}$$

$$\underline{I}_c = 5{,}774\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_2 = \boxed{\underline{I}_b - \underline{I}_a = I_2 \cdot e^{-j150^\circ}} \text{ (in Phase mit } \underline{U}_{23})$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{jX_C} - \underline{I}_a = I_2 \cdot e^{-j150^\circ}$$

$$\mathrm{Re}\{\underline{I}_2\} = \frac{500\,\mathrm{V}}{X_C} e^{j150^\circ} - 10\,\mathrm{A} = I_2 \cdot e^{-j150^\circ}$$

$$\mathrm{Re}\{\underline{I}_2\} = \frac{500\,\mathrm{V}}{X_C} \cos 150^\circ - 10\,\mathrm{A} = I_2 \cos 150^\circ$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{I}_2\} = \frac{500\,\mathrm{V}}{X_C} \cdot \sin 150^\circ = -I_2 \sin 150^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{500\,\mathrm{V}}{X_C} = -I_2$$

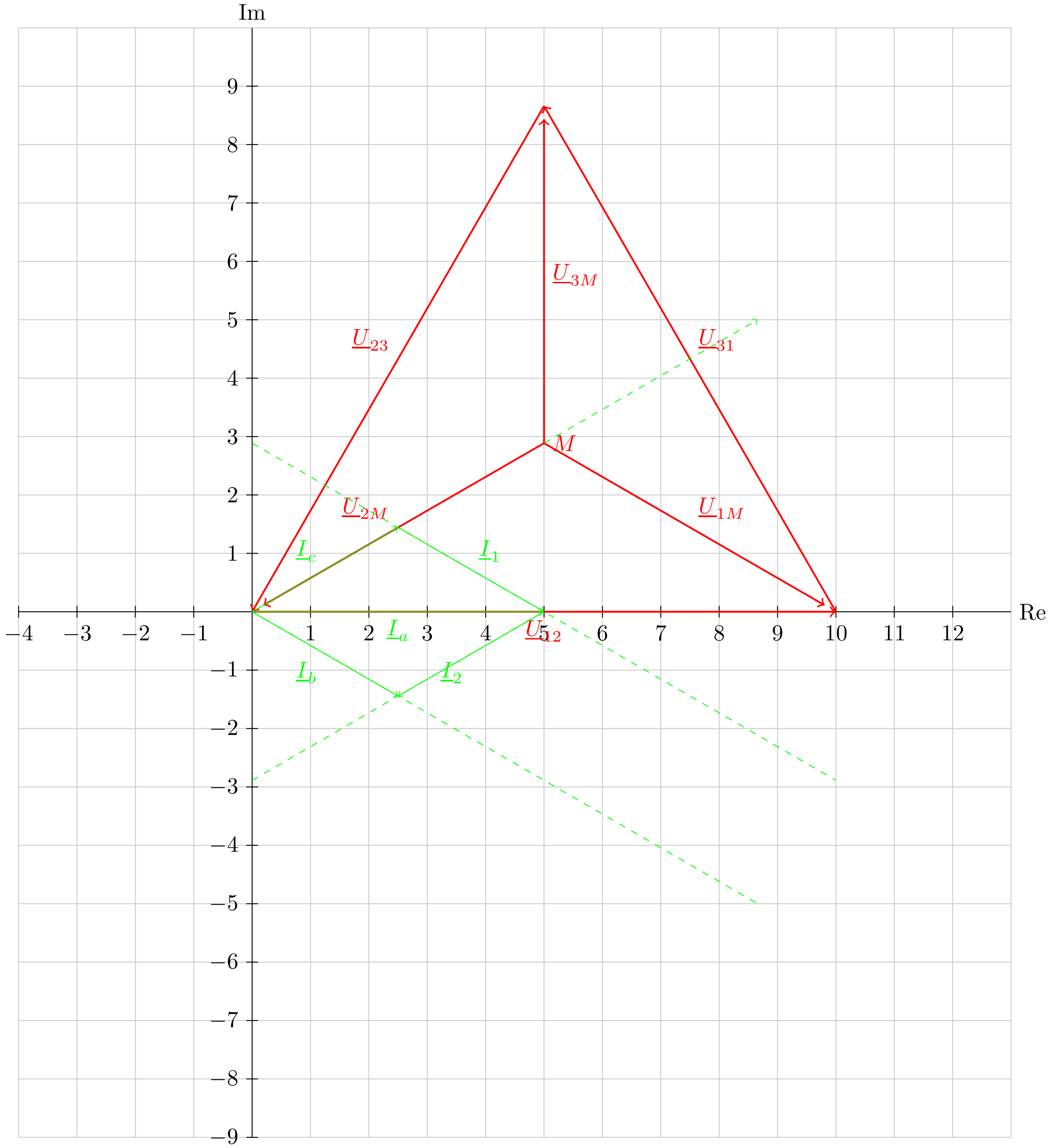
$$\Rightarrow -I_2 \cdot \cos 150^\circ - 10\,\mathrm{A} = I_2 \cos 150^\circ$$

$$\Leftrightarrow I_2 = -\frac{10\,\mathrm{A}}{2 \cos 150^\circ} = 5{,}774\,\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_b = I_2 e^{-j150^\circ} + \underline{I}_a$$

$$= 5{,}774\,\mathrm{A} \cdot e^{-j150^\circ} + 10\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_b = 5{,}774\,\mathrm{A} \cdot e^{-j30^\circ}$$



Zeichnerische Lösung:

Knotengleichungen:

$\underline{I}_a = \underline{I}_c + \underline{I}_1$ $\qquad$ $\underline{I}_c \perp \underline{U}_{31}$ nacheilend „Spuli“

$\underline{I}_1 \parallel \underline{U}_{1M}$

$\underline{I}_b = \underline{I}_a + \underline{I}_2$ $\qquad$ $\underline{I}_b \perp \underline{U}_{23}$, voreilend

$\underline{I}_2 \perp \underline{U}_{2M}$

ablesen:

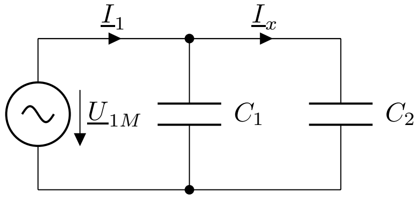
$2{,}9\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} \underline{I}_c = 5{,}8\,\mathrm{A}e^{j30^\circ}$

$2{,}9\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} \underline{I}_b = 5{,}8\,\mathrm{A}e^{-j30^\circ}$

5.4.3 Aufgabe 28: Unsymmetrische Last mit Sternpunktleiter

1. $C_1 \parallel C_2 = C_1 + C_2 = C$
   $\Rightarrow$ Symmetrie liegt vor!

$\Rightarrow \underline{U}_m = 0, \underline{I}_m = 0$
1-Phasiges ESB:



$$\underline{I}_x = j\omega C_2 \cdot \underline{U}_{1M} = j\omega \frac{C}{3} \cdot U$$

2. Knotenregel

$$\underline{0} = I_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_m$$
$$0 = (\underline{U}_{1M} + \underline{U}_m) \cdot j\omega \underbrace{\frac{2}{3}C}_{C_1} + (\underline{U}_{2M} + \underline{U}_m) j\omega C + (\underline{U}_{3M} + \underline{U}_m) j\omega C \frac{\underline{U}_m}{j\omega L}$$

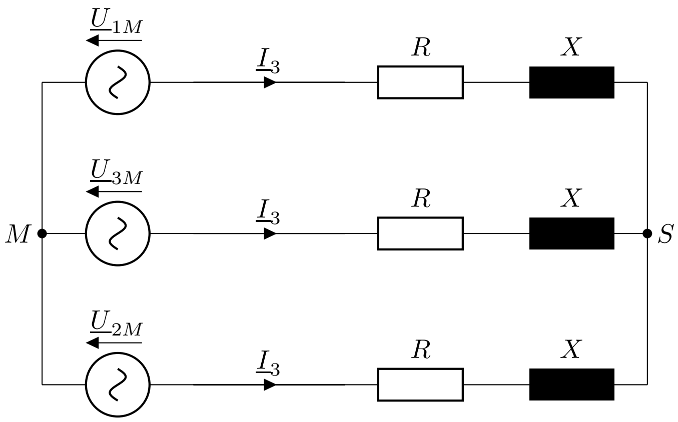
mit $\underline{a} = e^{j120^\circ}$ foglt:

$$0 = (U + \underline{U}_m) j\omega \frac{2}{3} C + (U\underline{a}^2 + \underline{U}_m) j\omega C + (U\underline{a} + \underline{U}_m) j\omega C + \frac{\underline{U}_m}{j\omega L}$$
$$\Rightarrow \underline{U}_m \left(j\omega \frac{8}{3} C + \frac{1}{j\omega L} \right) = -j\omega C U \underbrace{\left(\frac{2}{3} + \underline{a}^2 + \underline{a} \right)}_{= -\frac{1}{3} \underbrace{1 + \underline{a}^2 + \underline{a}}_{=0} = -\frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow \underline{U}_m = -\frac{\frac{1}{3}\omega^2 LC \cdot U}{1 - \omega^2 \frac{8}{3} LC}$$
$$= -U \cdot \frac{\omega^2 \cdot LC}{3\left(1 - \omega^2 \frac{8}{3} LC\right)}$$

3. $\underline{U}_m \to \infty$
   $\Rightarrow$ Nenner $\to 0$
   $\Rightarrow 3\left(1 - \omega^2 \frac{8}{3} LC\right) \overset{!}{=} 0$
   $\Leftrightarrow 3 = 8\omega^2 LC$
   $\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{8LC}}$

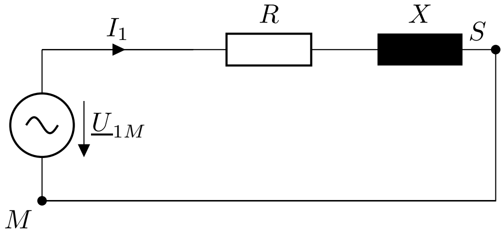
5.4.4 Aufgabe 29: Drehstromofen

1. 3-phasige ESB wie Aufgabe 26:



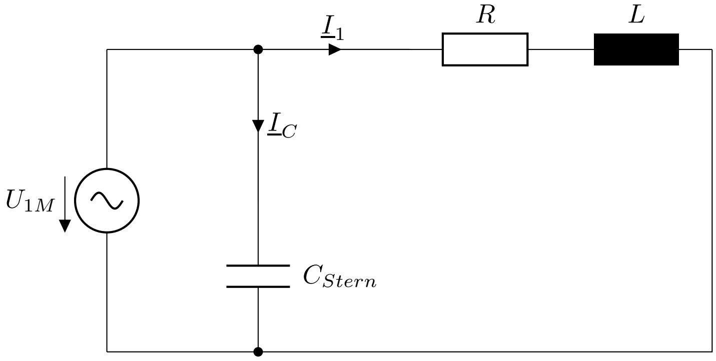
$$\underline{U}_{1M} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_v$$
$$\underline{U}_{2M} = \underline{a}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} U_v$$
$$\underline{U}_{3M} = \underline{a} \frac{1}{\sqrt{3}} U_v$$

1-Phasiges ESB:



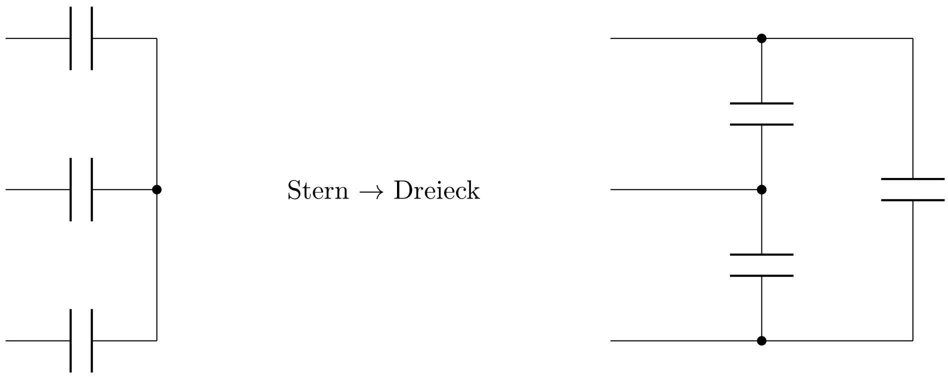
a)

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= 3 \cdot \underline{U}_{1M} \cdot \underline{I}_1^* \\
&= 3 \cdot \frac{\underline{U}_{1M} \cdot \underline{U}_{1M}^*}{\underline{Z}^*} \\
&= 3 \frac{|\underline{U}_{1M}|^2}{(R + jX)^*} \\
&= 3 \frac{\frac{1}{3} U_v^2}{R - jX} = \frac{U_v^2}{R - jX} \\
&= \frac{(380\,\mathrm{V})^2}{20\,\Omega - j15\,\Omega} \\
&= 4{,}621\,\mathrm{kW} + j3{,}466\,\mathrm{kVAr} \\
&= 5{,}776\,\mathrm{kVa} \cdot e^{j36{,}87^\circ} \\
\Rightarrow P &= 4{,}621\,\mathrm{kW} \\
\cos\varphi &= \cos 36{,}87^\circ \\
&= \frac{P}{|S|} = \frac{4{,}621\,\mathrm{kW}}{5{,}776\,\mathrm{kVA}} = 0{,}8 \\
Q &= 3{,}466\,\mathrm{kVAr}
\end{aligned}$$



Höchster Leistungfaktor bei Blindleistungkompensation:

$$\begin{aligned}
Q_C &= \operatorname{Im}\{3 \cdot \underline{U}_{1M} \cdot \underline{I}_C^*\} \\
&= \operatorname{Im}\left\{3 \cdot \frac{\underline{U}_{1M} \cdot \underline{U}_{1M}^*}{\left(\frac{1}{j\omega C_{Stern}}\right)^*}\right\} \\
&= \operatorname{Im}\left\{3 \cdot \left(\frac{U_v}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (-j\omega C_{Stern})\right\} \\
&= -U_v^2 \cdot \omega C_{Stern} \overset{!}{=} -Q_L \\
C_{Stern} &= \frac{Q_L}{U_v^2 \cdot \omega} = \frac{3{,}466\,\mathrm{kVAr}}{\left(\frac{380\,\mathrm{V}}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 2\pi 50\,\mathrm{Hz}} = 76{,}4\,\mathrm{\mu F}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& & \underline{Z}_{\text{Stern}} &= \frac{1}{3}\underline{Z}_{\text{Dreieck}} \\
&\Rightarrow & C_{\text{Stern}} &= 3C_{\text{Dreieck}} \\
&\Rightarrow & C_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{3}C_{\text{Stern}} \\
& & &= 25{,}47\,\mathrm{\mu F}
\end{aligned}$$

Dreieckschaltung der Kompensationskapazitäten günstiger, da

$$C_{\text{Dreieck}} < C_{\text{Stern}}$$

(Allerdings: Spannungsfestigkeit von C_{Dreieck} muss um $\sqrt{3}$ größer sein, da $U_v = \sqrt{3} \cdot U_{1M}$)

2. Die $\underline{Z}$ sehen eine Spannung die um $\sqrt{3}$ größer ist. D.h. die Leistungen sind um den Faktor $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ größer. Entsprechend größer müssen die Kapazitäten dimensioniert werden. $\cos\varphi$ bleibt gleich.

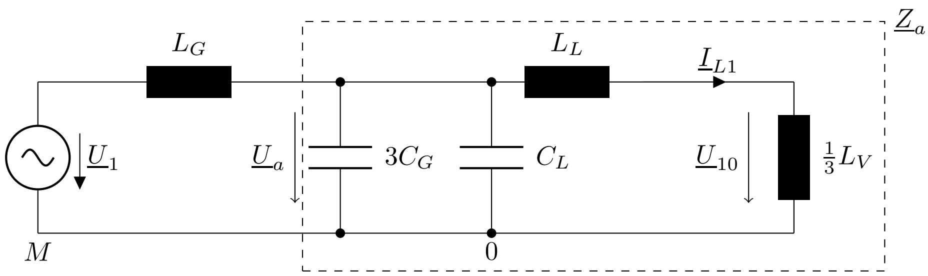
$$\begin{aligned}
\Rightarrow P_2 &= 3 \cdot 4{,}621\,\mathrm{kW} = 13{,}863\,\mathrm{kW} \\
Q_2 &= 3 \cdot 3{,}466\,\mathrm{kVAr} = 10{,}4\,\mathrm{kVAr} \\
\cos\varphi_2 &= 0{,}8 \\
C_{\text{Dreieck},2} &= 3 \cdot 25{,}47\,\mathrm{\mu F} \\
&= 76{,}41\,\mathrm{\mu F}
\end{aligned}$$

5.4.5 Aufgabe 30: Drehstromgenerator

- Spannungen symmetrisch
- Beschaltung symmetrisch

$\Rightarrow L_0$ kann eliminiert werden mit

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\text{Stern}} &= \frac{1}{3}\underline{Z}_{\text{Dreieck}} \\
\Rightarrow C_{G,\text{Stern}} &= 3 \cdot C_{G,\text{Dreieck}} \\
L_{V,\text{Stern}} &= \frac{1}{3} L_{V,\text{Dreieck}}
\end{aligned}$$

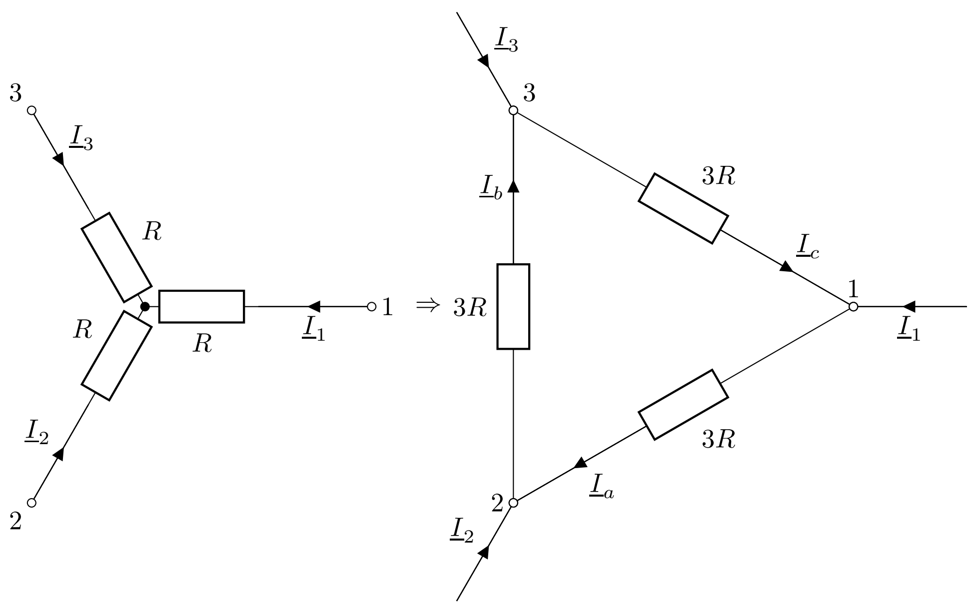


$$\begin{aligned}
\underline{Z}_a &= \underbrace{\frac{1}{j\omega(3C_G + C_L)}}_{=-j539{,}51\,\Omega} \Big\| \underbrace{j\omega(L_L + \frac{1}{3}L_V)}_{=j219{,}91\,\Omega} \\
&= \frac{(-j539{,}51\,\Omega) \cdot (j219{,}91\,\Omega)}{j(-539{,}51\,\Omega + 219{,}91\,\Omega)} \\
&= j371{,}2\,\Omega
\end{aligned}$$

Spannungsteiler

$$\begin{aligned}
\underline{U}_a &= \frac{\underline{Z}_a}{j\omega L_G + \underline{Z}_a} \cdot U = \frac{j371{,}2\,\Omega}{j2\pi 50\,\text{Hz} \cdot 0{,}08\,\text{H} + j371{,}2\,\Omega} \cdot \frac{20}{\sqrt{3}}\text{kV} \\
&= 10{,}81\,\text{kV} \\
\Rightarrow \underline{I}_{L1} &= \frac{\underline{U}_a}{j\omega(L_L + \frac{1}{3}L_V)} = \frac{10{,}81\,\text{kV}}{j219{,}91\,\Omega} \\
&= 49{,}16\,\text{A} \cdot e^{-j90^\circ}
\end{aligned}$$

Umrechnen des Leiterstromes $\underline{I}_{L1}$ in den Strangstrom $\underline{I}_{Vb}$:
Zunächt beispielhaft allgemeine Betrachtung an Widerständen



$\underline{U}_{1M}$: Sternspannung
$\underline{U}_{12}$: Leiterspannung

Bezeichung s. Skript S. 178.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\underline{U}_{12} &= \sqrt{3}e^{j30°} \cdot \underline{U}_{1M} \\
\text{allg: } \underline{U} &= \sqrt{3} \cdot e^{j30°} \cdot \underline{U}_{Ph} \\
\underline{I}_a &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30°} \cdot \underline{I}_1 \\
\text{allg: } \underline{I}_{Str} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30°} \cdot \underline{I} \\
\Rightarrow \underline{I}_{Vb} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30°} \cdot \underline{I}_{L2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30°} \cdot \underline{a}^2 \\
&= 28{,}38\,\mathrm{A} \cdot e^{j180°}
\end{aligned}
$$

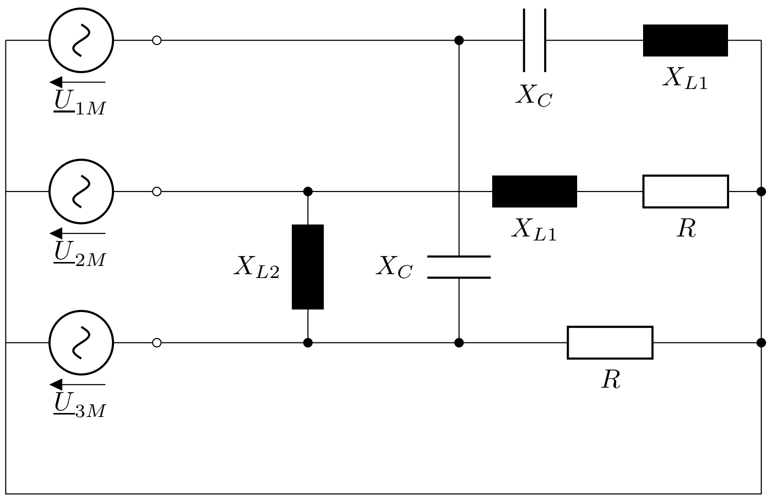
Alternative Rechnung:
Sternspannung an den Klemmen 1, 2 und 3:

$$
\begin{aligned}
\underline{U}_{10} &= j\omega \cdot \frac{1}{3} L_V \cdot \underline{I}_{L1} \\
&= j2\pi 50\,\mathrm{H}z \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}9\,\mathrm{H} \cdot 49{,}16\,\mathrm{A}e^{-j90°} \\
&= 4{,}633\,\mathrm{kV} \\
\underline{U}_{20} &= \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{10} \text{ (wegen Symmetrie)} \\
\underline{U}_{30} &= \underline{a} \cdot \underline{U}_{10}
\end{aligned}
$$

Daraus Außenleiterspannung:

$$
\begin{aligned}
\underline{U}_{23} &= \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30} \\
\Rightarrow \underline{I}_{Vb} &= \frac{\underline{U}_{23}}{j\omega L_V} = \frac{\underline{U}_{20} - \underline{U}_{30}}{j\omega L_V} \\
&= \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a}) \cdot \underline{U}_{10}}{j\omega L_V} \\
&= \frac{-j\sqrt{3} \cdot \underline{U}_{10}}{j\omega L_V} \\
&= -\frac{\sqrt{3} \cdot 4{,}633\,\mathrm{kV}}{2\pi 50\,\mathrm{Hz} \cdot 0{,}9\,\mathrm{H}} \\
&= -28{,}38\,\mathrm{A} = 28{,}38\,\mathrm{A} \cdot e^{j180°}
\end{aligned}
$$

5.4.6 Aufgabe 31: Blindleistungskompensation einer Phase

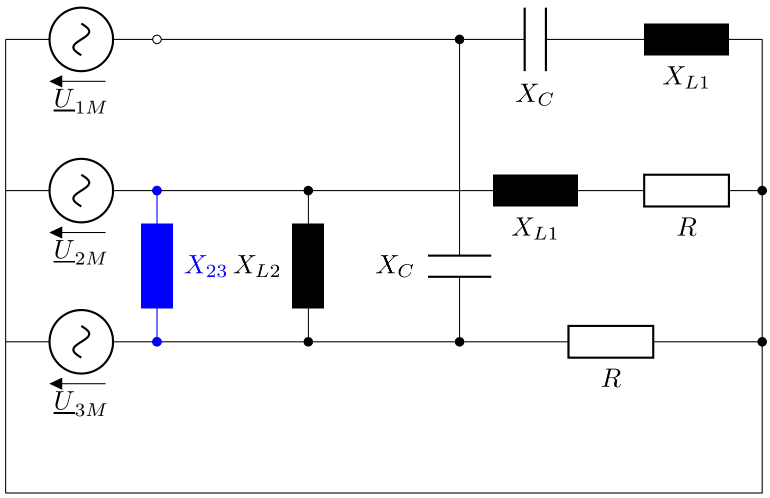


1. Zum Glück Sternpunkt verbunden!

   Wirkleistung wird nur in den Widerständen umgesetzt.

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 0 \text{ (1. Phase, kein } R \text{ vorhanden)}\\
\text{Masche } M_1: \underline{I}_2' &= \frac{\underline{U}_{2M}}{jX_{L1}+R} = \frac{290\,\mathrm{V}e^{-j120^\circ}}{j10\,\Omega+20\,\Omega}\\
&= 12{,}97\,\mathrm{A}\cdot e^{-j146{,}6^\circ}\\
\Rightarrow P_2 = I_2'^2\cdot R &= (12{,}97\,\mathrm{A})^2\cdot 20\,\Omega\\
&= 3364\,\mathrm{W}\\
\text{Masche } M_2: P_3 &= \frac{|\underline{U}_{3M}|^2}{R} = \frac{(290\,\mathrm{V})^2}{20\,\Omega} = 4205\,\mathrm{W}\\
\Rightarrow P &= P_1+P_2+P_3\\
&= 7569\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

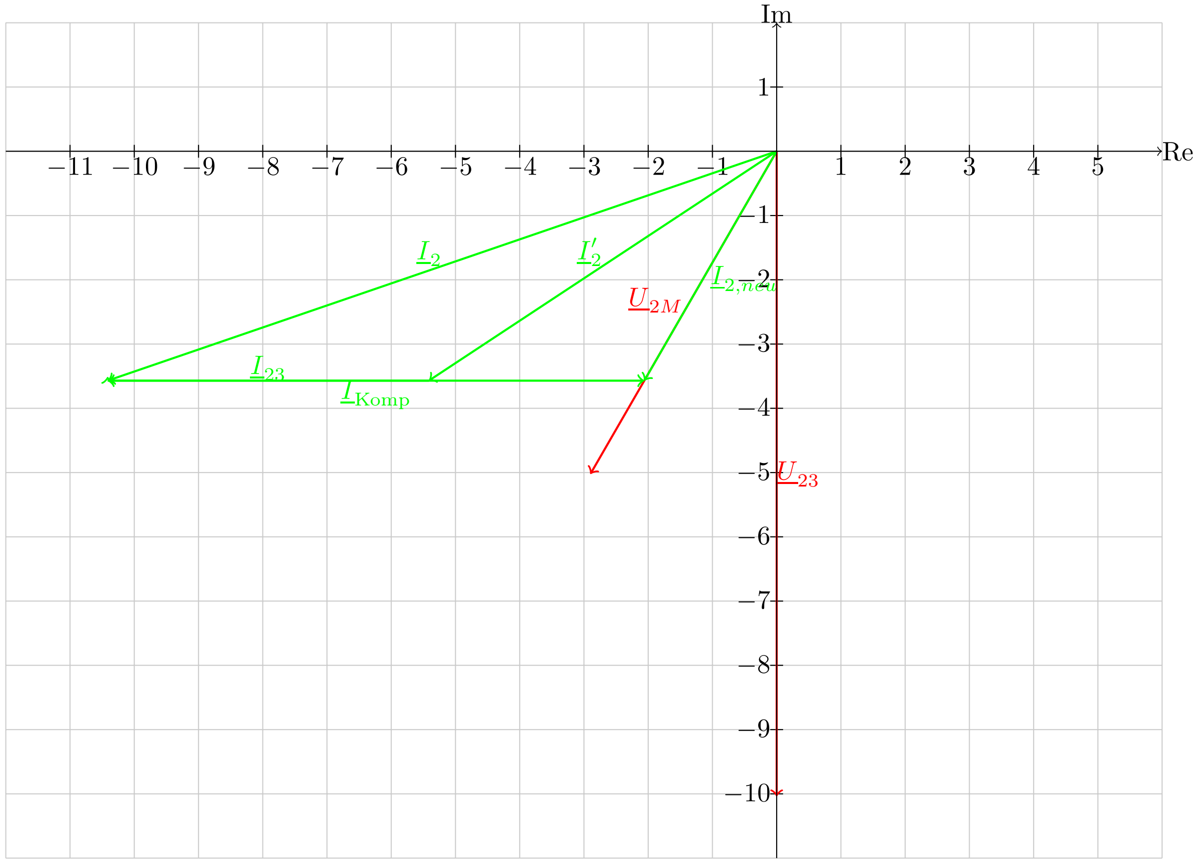
2.



Reine Wirkleistungsabgabe von $\underline{U}_{2M}$ heißt: $\underline{I}_2$ in Phase mit $\underline{U}_{2M}$

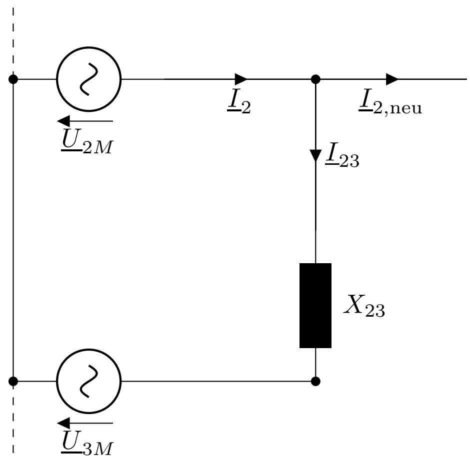
$$
\begin{aligned}
\underline{U}_{2M} &= 290\,\mathrm{V}\cdot e^{-j120^\circ}\\
\underline{I}_2 &= \underline{I}_2' + \underline{I}_{23}\\
\underline{U}_{23} &= \underline{U}_{2M} - \underline{U}_{3M} = 290\,\mathrm{V}(e^{-j120^\circ} - e^{j120^\circ})\\
&= 502\,\mathrm{V}e^{-j90^\circ} \mathrel{\hat{=}} 10\,\mathrm{cm}\\
I_{23} &= \frac{U_{23}}{X_{L2}} = \frac{502\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} = 10\,\mathrm{A} \mathrel{\hat{=}} 5\,\mathrm{cm}\\
\underline{I}_{23} &\perp \underline{U}_{23} \text{ nacheilend (Sp}\underline{\text{uli}}\text{)}\\
\underline{I}_{\mathrm{Komp}} &\perp \underline{U}_{23}\\
\underline{I}_{2,\mathrm{neu}} &= \underline{I}_2 + \underline{I}_{\mathrm{Komp}}\\
\text{ablesen: } 8{,}2\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} I_{\mathrm{Komp}} &= 16{,}4\,\mathrm{A}\\
\Rightarrow X_{23} &= -\frac{U_{23}}{I_{\mathrm{Komp}}} = -\frac{502\,\mathrm{V}}{16{,}4\,\mathrm{A}} = -30{,}6\,\Omega
\end{aligned}
$$

da kapazitiv, $\underline{I}_{\mathrm{Komp}}$ voreilend zu $\underline{U}_{23}$.



Rechnerische Lösung:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} + \underline{I}_2' \\
&= \frac{\underline{U}_{2M} - \underline{U}_{3M}}{jX_{L2}} + \underline{I}_2' \\
&= \frac{290\,\mathrm{V}\left(e^{-j120^\circ} - e^{j120^\circ}\right)}{j50\,\Omega} + 12{,}97\,\mathrm{A} \cdot e^{-j146{,}6\,\Omega} \\
&= 22{,}06\,\mathrm{A} \cdot e^{-j161{,}1^\circ}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\underline{I}_{2,\mathrm{neu}} &= \underline{I}_2 + \underline{I}_{23} \\
&= \underline{I}_2 + \frac{\underline{U}_{2M} - \underline{U}_{3M}}{jX_{23}} \\
&= \underline{I}_2 + \frac{290\,\mathrm{V}\left(e^{-j120^\circ} - e^{j120^\circ}\right)}{jX_{23}} \\
&= \boxed{22{,}06\,\mathrm{A}e^{-j161{,}1^\circ} - 502\,\mathrm{V}\cdot\frac{1}{X_{23}}} \\
&\overset{!}{=} \boxed{I_{2,\mathrm{neu}}\cdot e^{-j120^\circ}} \\
\mathrm{Im}\left\{\underline{I}_{2,\mathrm{neu}}\right\} &= 22{,}06\,\mathrm{A}\sin(-161{,}1^\circ) \\
&= I_{2,\mathrm{neu}}\cdot\sin(-120^\circ) \\
\Rightarrow I_{2,\mathrm{neu}} &= 22{,}06\,\mathrm{A}\cdot\frac{\sin(-161{,}1^\circ)}{\sin(-120^\circ)} \\
&= 8{,}25\,\mathrm{A} \\
\mathrm{Re}\left\{\underline{I}_{2,\mathrm{neu}}\right\} &= 22{,}06\,\mathrm{A}\cdot\cos(-161{,}1^\circ) - \frac{502\,\mathrm{V}}{X_{23}} \\
&= I_{2,\mathrm{neu}}\cdot\cos(-120^\circ) \\
\Rightarrow X_{23} &= \frac{502\,\mathrm{V}}{22{,}06\,\mathrm{A}\cos(-161{,}1^\circ) - 8{,}25\,\mathrm{A}\cdot\cos(-120^\circ)} \\
&= -29{,}9\,\Omega
\end{aligned}$$

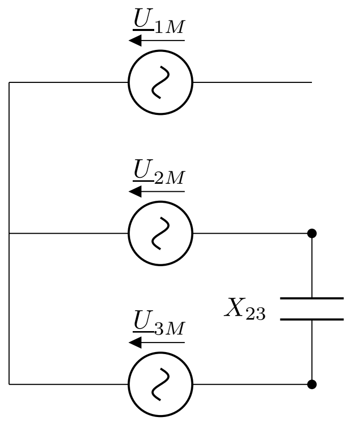
$\Rightarrow$ für X_{23} wird also eine Kapazität benötigt.

Alternativ: Getrickste rechnerische Lösung:

Blindleistung, die $\underline{U}_{2M}$ abgiebt:

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \mathrm{Im}\left\{\underline{U}_{2M}\cdot\underline{I}_2^*\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{290\,\mathrm{V}\cdot e^{-j120^\circ}\cdot 22{,}06\,\mathrm{A}\cdot e^{j161{,}1^\circ}\right\} \\
&= 4{,}21\,\mathrm{kVAr}
\end{aligned}$$

Kompensation:



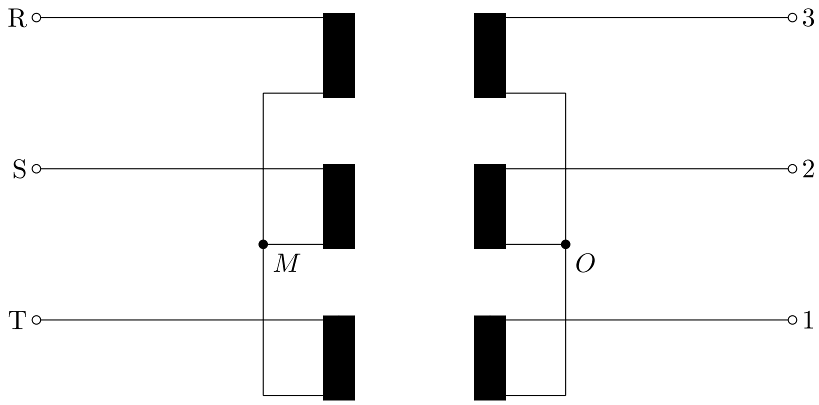
Die Hälfte der Blindleistung, die in X_{23} umgesetzt wird, wird aus $\underline{U}_{2M}$ bezogen (wegen Symmetrie von $\underline{U}_{2M}$ und $\underline{U}_{3M}$).

$$
\begin{aligned}
Q_{\text{Komp}} &= \frac{1}{2}\frac{U_{23}^2}{X_{23}} \overset{!}{=} -Q_2 \\
\Rightarrow X_{23} &= -\frac{U_{23}^2}{2Q_2} = -\frac{(502\,\text{V})^2}{2 \cdot 4{,}21\,\text{kVAr}} \\
&= -29{,}9\,\Omega
\end{aligned}
$$

5.5 Dreiphasige Komponenten

Allgemeines zum Dreiphasentranformator

- 3 über einen gemeinsamen Kern gekoppelte Trnaformatoren
- Bei symmetrischer Belastung: Kopplung ohne Auswirkung
  $\Rightarrow$ 3 Phasen beeinflussen sich nicht gegenseitig
- Zurückführung auf 3 im Stern verkettete Einphasentransformatoren

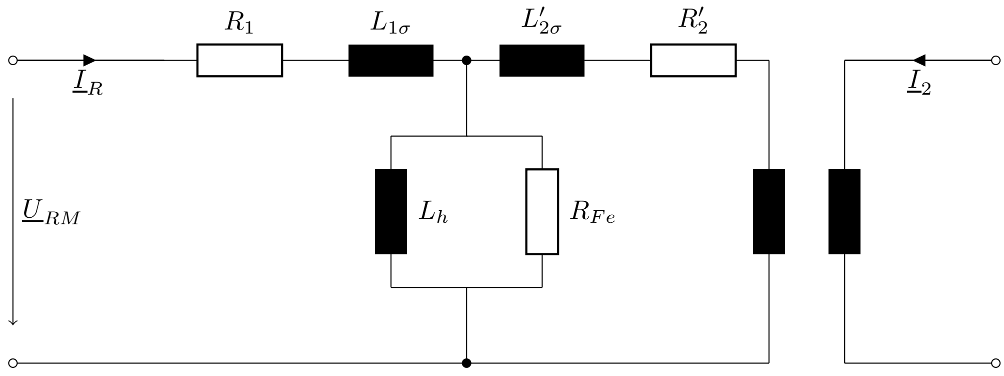


- Bei Speisung mit einem symmetrischen 3-Phasensystem gilt:

$$|\underline{U}_{RM}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |\underline{U}_{RS}|$$

Bei Spannungsangaben (z.B. 420 kV/27 kV) ist immer die Außenleiterspannung ($\underline{U}_{RS}$) angegeben!

- Einphasiges ESB:



ü : 1

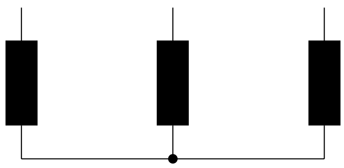
- Leistungsangaben beziehen sich **immer** auf das gesamte System. z.B.

$$S_N = 3 \cdot \underbrace{\underline{U}_{RM,N} \cdot \underline{I}_{R,N}}_{\text{Scheinleistung des 1-Phasentransformators}}$$

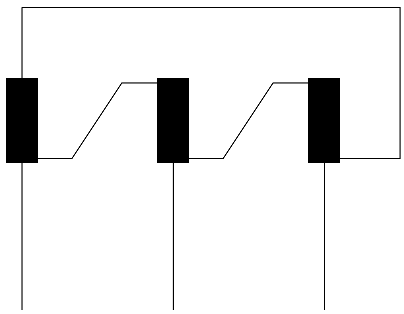
  mit

$$\underbrace{\underline{U}_{RM}}_{\text{Phasenspannung}} = \frac{\overbrace{\underline{U}_{RS,N}}^{\text{Außenleiterspannung}}}{\sqrt{3}}$$

- Schaltungsgruppen
  - ü bezieht sich auf die Außenleiterspannung (unabhängig von der Verschaltung)
  - Bezeichnung: z.B. Yd5



Y

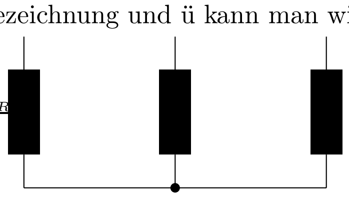


d

    $5 \cdot 30° = 150°$ Phasenverschiebung der Primärspannng gegenüber der Sekundärspannung. Primär: Stern, Sekundär: Dreieck.

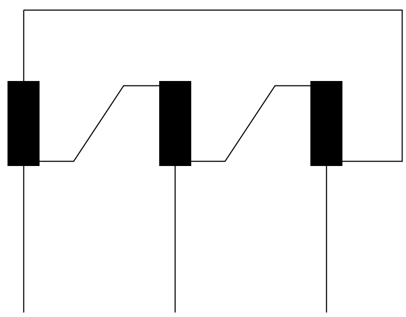
  - Schaltgruppenbezeichnung und ü kann man wie folgt bestimmen:

$\underline{U}_{RM} = w_1 \cdot \frac{d\Phi_R}{dt}$

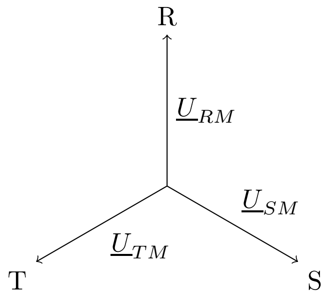


$w_2 \cdot \frac{d\Phi_R}{dt}$

Y



d

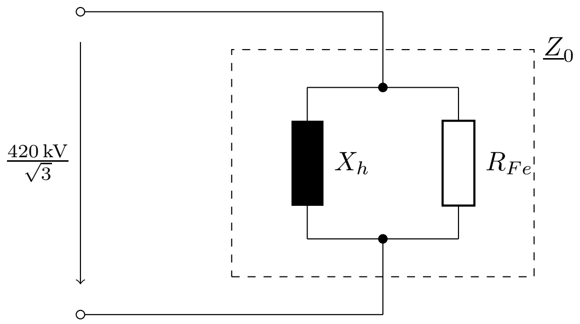


$$\underline{U}_{RM} = \sqrt{3} \cdot e^{j150^\circ} \cdot \frac{w_1}{w_2} \cdot \underline{U}_{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{U}_{RM}}{\underline{U}_{10}} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}w_1}{w_2}}_{\ddot{u}} \cdot e^{j150^\circ}$$

5.5.1 Aufgabe 33: Einphasiges Ersatzschaltbild

1. **Leerlauf:**



$$S_0 = \sqrt{P_0^2 + Q_0^2}$$

$$|\underline{Z}_0| = \frac{(420\,\text{kV}/\sqrt{3})^2}{S_0/3} \qquad (*)$$

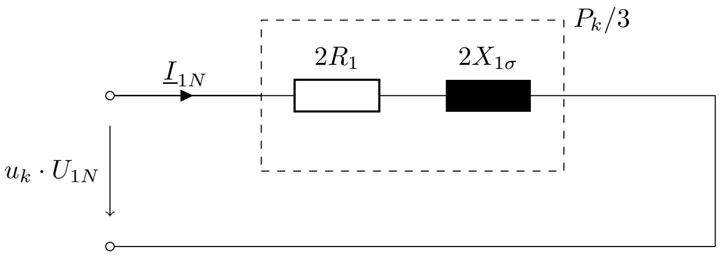
$$= \frac{(420\,\text{kV})^2}{\sqrt{(200\,\text{kW})^2 + (1{,}3\,\text{MVAr})^2}} = 134{,}11\,\text{k}\Omega$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\frac{Q_0}{P_0} = \tan^{-1}\frac{1{,}3\,\text{MVAr}}{200\,\text{kW}} = 81{,}25^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_0 = 134{,}11\,\text{k}\Omega \cdot e^{j81{,}25^\circ}$$

$(*)$: Im 1-phasigen ESB nur $\frac{1}{3}$ der gesamten Leistung umgesetzt.

Kurzschluss:



$$
\begin{aligned}
S_N &= 3 \cdot I_{1N} \cdot U_{1N} \\
\Rightarrow I_{1N} &= \frac{S_N/3}{U_{1N}} = \frac{\frac{750\,\text{MVA}}{3}}{\frac{420\,\text{kV}}{\sqrt{3}}} \\
&= 1{,}031\,\text{kA} \\
2 \cdot |\underline{Z}_1| &= \frac{u_K \cdot U_{1N}}{I_{1N}} \\
\Rightarrow Z_1 = Z_2' &= \frac{u_K \cdot U_{1N}}{2I_{1N}} \\
&= \frac{0{,}165 \cdot \frac{420\,\text{kV}}{\sqrt{3}}}{2 \cdot 1{,}031\,\text{kA}} = 91{,}404\,\Omega \\
S_k &= 3 \cdot I_{1N} \cdot u_k \cdot U_{1N} \\
&= u_k \cdot S_N \\
\Rightarrow \varphi_k &= \cos^{-1} \frac{P_k}{u_k \cdot S_N} \\
&= \cos^{-1} \frac{1{,}5\,\text{MW}|}{0{,}165 \cdot 750\,\text{MVA}} \\
&= 89{,}31^\circ \\
\Rightarrow \underline{Z}_1 = Z_2' &= 19{,}404\,\Omega \cdot e^{j89{,}31^\circ}
\end{aligned}
$$

2. **Längszweig:** $(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2')$: Bei Nennscheinleistung fließt Nennstrom $\Rightarrow$ Gleiche Bedingungen wie im KS-Fall (Querstrom (durch $\underline{Z}_0$) kann vernachlässigt werden).

$$P_{V,\text{Längs}} = P_{Cu} \approx P_k = 1{,}5\,\text{MW}$$

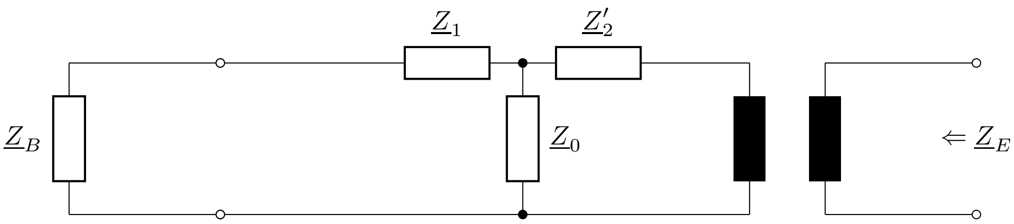
Querzweig: Betrieb bei Nenn-spannung. Wegen $|\underline{Z}_1|, |\underline{Z}_2'| \ll |\underline{Z}_0|$ fällt selbst bei Betrieb mit Nennstrom nur eine vernachlässigbar kleine Spannung über $\underline{Z}_1$ ab.
$\Rightarrow$ Spannung über $\underline{Z}_0$ ist ungefähr $\frac{420\,\text{kV}}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow$ gleiche Bedingungen wie beim Leerlauf.

$$P_{V,\text{Quer}} = P_{Fe} \approx P_0 = 200\,\text{kW}$$

3.

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{P_\text{aus}}{P_\text{ein}} = \frac{P_\text{aus}}{P_\text{aus} + P_V} \\
P_\text{aus} &= S_N \cdot \cos\varphi = 750\,\text{MVA} \cdot 0{,}8 \\
&= 600\,\text{MW} \\
P_V &= P_{V,\text{Längs}} + P_{V,\text{Quer}} = 1{,}5\,\text{MW} + 200\,\text{kW} = 1{,}7\,\text{MW} \\
\Rightarrow \eta &= \frac{600\,\text{MW}}{600\,\text{MW} + 1{,}7\,\text{MW}} = 99{,}72\%
\end{aligned}
$$

4.



$$
\begin{aligned}
|\underline{Z}_B| &= \frac{(U_{1N})^2}{S_N/3} = \frac{\left(420\,\mathrm{kV}/\sqrt{3}\right)^2}{\frac{1}{3}\cdot 750\,\mathrm{MVA}} \\
&= 235{,}2\,\Omega \\
\cos\varphi &= 0{,}8 \Rightarrow \varphi = \cos^{-1} 0{,}8 = 36{,}87^\circ \\
\Rightarrow \underline{Z}_B &= 235{,}2\,\Omega \cdot e^{j36{,}87^\circ} \\
\underline{Z}'_E &= (\underline{Z}_B + \underline{Z}_1) \parallel \underline{Z}_0 + \underline{Z}'_2 \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_B+\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_0}} + \underline{Z}'_2 \\
&= \ldots \\
&= 260{,}35\,\Omega e^{j43{,}71^\circ} \\
\underline{Z}_E &= \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot \underline{Z}'_E \\
&= \frac{1}{\left(\frac{420\,\mathrm{kV}}{27\,\mathrm{kV}}\right)^2} \cdot 260{,}35\,\Omega \cdot e^{43{,}71^\circ} \\
&= 1{,}076\,\Omega \cdot e^{j43{,}71^\circ} \\
(&= 0{,}778\,\Omega + j0{,}744\,\Omega \\
&= 0{,}778\,\Omega + j2\pi f 2{,}37\,\mathrm{mH})
\end{aligned}
$$

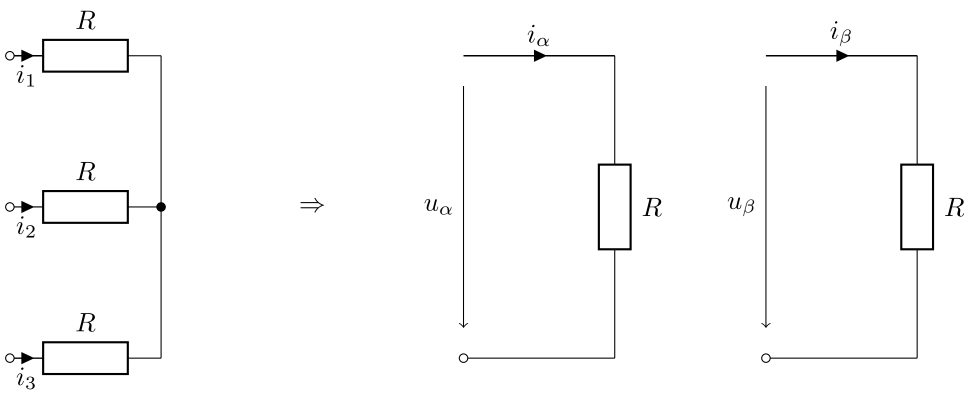
5.5.2 Aufgabe 34: Dual Active Bridge Converter und Dretransformator

Schaltzustände

vgl. Skript S. 202 ff. (hier $1{,}1 \cdot U_{DC}$ statt U_{DC})

Nr.	Symbol	$\frac{U_1}{U_{DC}}$	$\frac{U_2}{U_{DC}}$	$\frac{U_3}{U_{DC}}$
1		0	0	0
2		$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
3		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
4		$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
5		$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
6		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
7		$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
8		0	0	0

Transformation von symmetrischer Sternschaltung in $\alpha\beta$-Koordinaten.



$$
\begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}
$$

Transformationsgleichungen

- $\underline{123 \to \alpha\beta}$

$$\begin{pmatrix} U_\alpha \\ U_\beta \\ U_N \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}^{\underline{T}} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

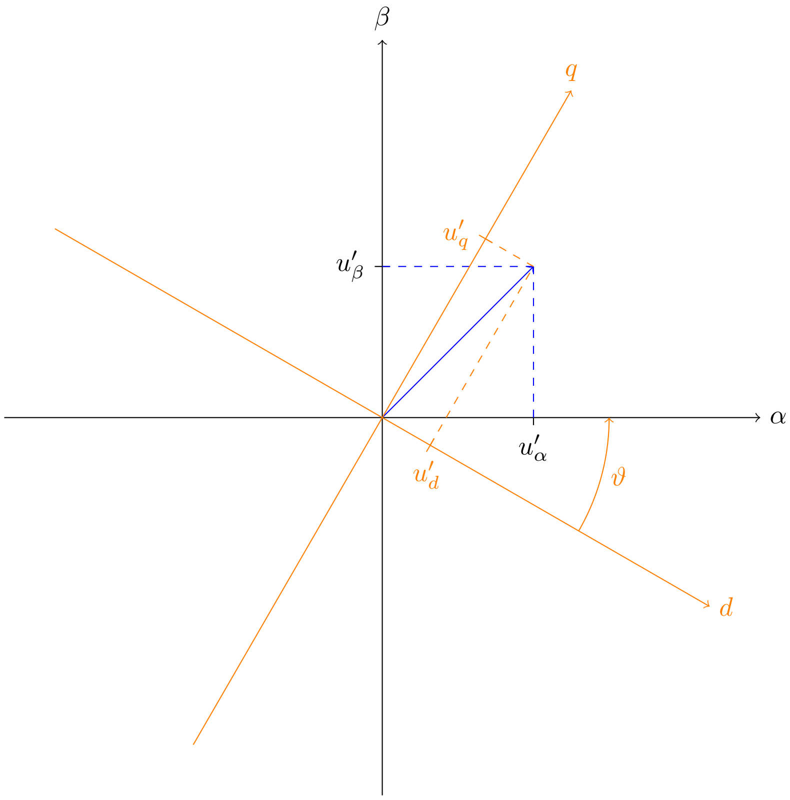
- $\underline{\alpha\beta \to 123}$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{T}^{-1}} \begin{pmatrix} U_\alpha \\ U_\beta \\ U_N \end{pmatrix}$$

$123 \to \alpha\beta$ ohne den roten Teil gilt für $U_N = \frac{1}{3}(U_1 + U_2 + U_3) = 0$

- $\alpha\beta \to dq$

$$\begin{pmatrix} u'_d \\ u'_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_\alpha \\ u'_\beta \end{pmatrix}$$



- $dq \to \alpha\beta$

$$\begin{pmatrix} u'_\alpha \\ u'_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_d \\ u_q \end{pmatrix}$$

1 2 3	R S T
$u_1 = \frac{2}{3} \cdot 1{,}1 U_{DC}$	$u_R = \frac{1}{3} U_{DC}$
$u_2 = -\frac{1}{3} \cdot 1{,}1 U_{DC}$	$u_S = -\frac{2}{3} U_{DC}$
$u_3 = -\frac{1}{3} \cdot 1{,}1 U_{DC}$	$u_T = \frac{1}{3} U_{DC}$

Transformation in $\alpha\beta$-Koordinaten

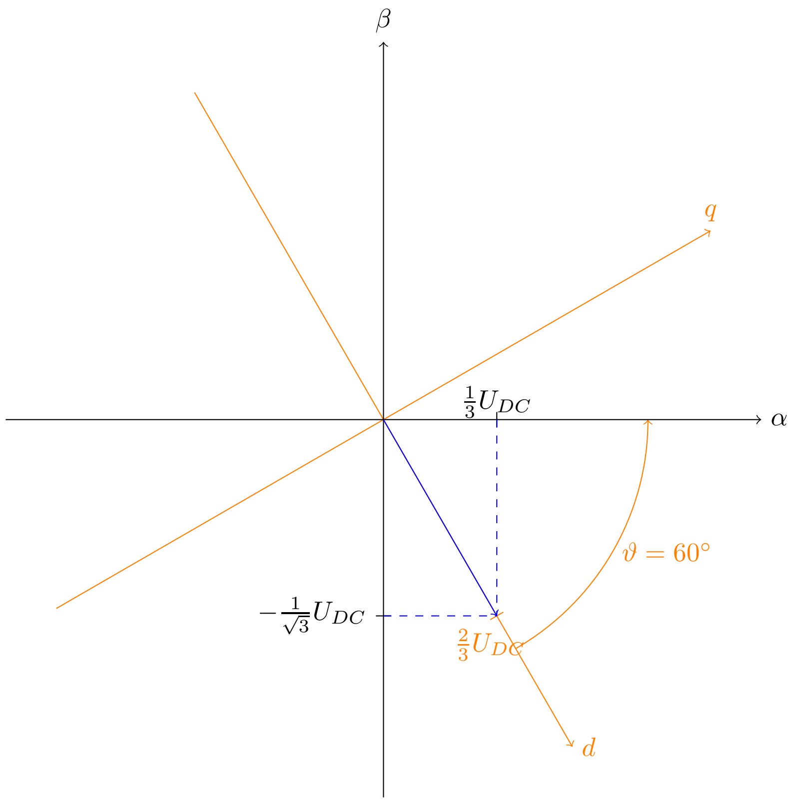
$$\begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$u_\alpha = \frac{2}{3} u_1 - \frac{1}{3} u_2 - \frac{1}{3} u_3$	$u'_\alpha = \frac{2}{3} u_R - \frac{1}{3} u_S - \frac{1}{3} u_T$
$= \frac{2}{3} \cdot 1{,}1 U_{DC}$	$= \frac{1}{3} U_{DC}$
$u_\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot u_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot u_3$	$u'_\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} u_S - \frac{1}{\sqrt{3}} u_T$
$= 0$	$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot U_{DC}$

Tranformation der Sekundärseite (Rotor) ins Koordinatensystem der Primärseite (Stator)

$$\begin{pmatrix} u'_d \\ u'_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_\alpha \\ u'_\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u'_d &= u'_\alpha \cos\vartheta - u'_\beta \sin\vartheta \\ &= \frac{1}{3} U_{DC} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} U_{DC} \\ &= \frac{2}{3} U_{DC} \\ u'_q &= u'_\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{3} + u'_\beta \cdot \cos\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{3} U_{DC} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} U_{DC} \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$



Gekoppelte Spannungsgleichungen in $\alpha\beta$-Koordinaten (Gl 7.9.7, 7.9.8)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix} &= R_p \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + L_p \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + L_m \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i'_\alpha \\ i'_\beta \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u'_\alpha \\ u'_\beta \end{pmatrix} &= R'_s \begin{pmatrix} i'_\alpha \\ i'_\beta \end{pmatrix} + L'_s \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i'_\alpha \\ i'_\beta \end{pmatrix} + L_m \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} \qquad (*)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
L_m &= \frac{3}{2} L_h, L_p = L_{p\sigma} + L_m \\
Ls' &= L'_{s\sigma} + L_m
\end{aligned}$$

dq-Transformation:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u'_d \\ u'_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_\alpha \\ u'_\beta \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} i'_d \\ i'_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i'_\alpha \\ i'_\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Entkoppelte Spannungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix} = R_p \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + L_p \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + L_m \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i'_d \\ i'_q \end{pmatrix}$$

Multiplikation von $(*)$ von links mit $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$

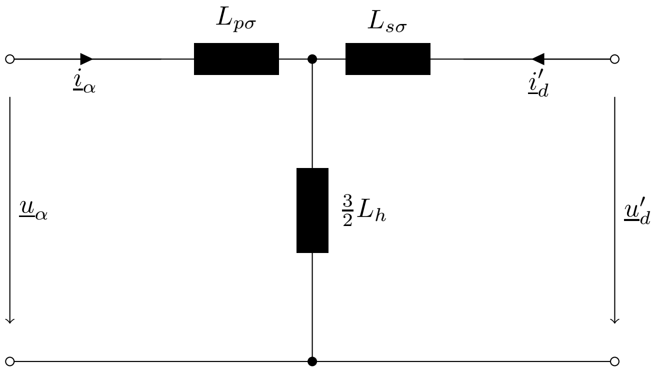
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u'_d \\ u'_q \end{pmatrix} = R'_s \cdot \begin{pmatrix} i'_d \\ i'_q \end{pmatrix} + L'_s \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i'_d \\ i'_q \end{pmatrix} + L_m \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix}$$

wegen $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

mit $R_p = R_s = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
u_\alpha &= L_p \frac{di_\alpha}{dt} + L_m \frac{di'_d}{dt} \\
&= \boxed{L_{p\sigma} \frac{di_\alpha}{dt} + L_m \frac{d(i_\alpha + i'_d)}{dt}} \qquad (1) \\
u'_d &= L'_s \frac{di'_d}{dt} + L_m \frac{di_\alpha}{dt} \\
&= \boxed{L'_{s\sigma} \frac{di'_d}{dt} + L_m \frac{d(i_\alpha + i'_d)}{dt}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

T-ESB:



gilt entsprechend für β und q'.

Für $L_m = \frac{3}{2}L_h \gg L_{p\sigma}, L'_{s\sigma}$ folgt: $i_\alpha \approx -i'_d$

$$\begin{aligned}
(1)-(2) \Rightarrow: u_\alpha - u'_d &= L_{p\sigma}\frac{di_\alpha}{dt} - L'_{s\sigma}\frac{di'_d}{dt}\\
&= \underbrace{(L_{p\sigma} + L'_{s\sigma})}_{:=L_\sigma}\frac{di_\alpha}{dt}\\
\Rightarrow i_\alpha(t) &= \int_0^t \frac{u_\alpha - u'_d}{L_\sigma}\,dt'\\
&= \frac{0{,}1\cdot\frac{2}{3}\cdot U_{DC}}{L_\sigma}\cdot t \text{ (linearer Stromanstieg)}\\
i_\beta(t) &= 0, \text{ da } u_\beta = u'_q = 0\\
i'_d &= -i_\alpha\\
i'_q &= -i_\beta = 0
\end{aligned}$$

Transformation zurück ins Koordinatensystem der Sekundärseite (Rotor)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} i'_\alpha \\ i'_\beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i'_d \\ i'_q \end{pmatrix}\\
i'_\alpha &= i'_d\cos\vartheta + i'_q\sin\vartheta\\
&= -i_\alpha\cos\frac{\pi}{3}\\
&= -\frac{1}{2}i_\alpha\\
i'_\beta &= i'_d\sin\vartheta + i'_q\cos\vartheta\\
&= i_\alpha\sin\frac{\pi}{3}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}i_\alpha
\end{aligned}$$

Rücktransformation ins 3-phasige System

$\alpha\beta \to 123$	$\alpha'\beta' \to RST$
$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ I_3 \end{pmatrix} =$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix}$
$i_1 = i_\alpha = 0,1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{U_{DC}}{L_\sigma}\cdot t$ $i_2 = -\frac{1}{2}i_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\underbrace{i_\beta}_{0}$ $= -\frac{0,1}{3}\cdot\frac{U_{DC}}{L_\sigma}\cdot t$ $i_3 = -\frac{1}{2}i_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\underbrace{i_\beta}_{0}$ $= i_2$	$i_R = i'_\alpha = -\frac{1}{2}i_\alpha$ $= -\frac{0,1}{3}\frac{U_{DC}}{L_\sigma}\cdot t$ $i_S = -\frac{1}{2}i'_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}i'_\beta$ $= \left(-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i_\alpha$ $= i_\alpha = i_1$ $i_T = \frac{1}{2}\cdot i'_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}i'_\beta$ $= \left(-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i_\alpha$ $= -\frac{1}{2}i_\alpha$

Sprechstunden: 16. + 17. 08.2010 10.00 bis 12.00 in der ISEA Biblio