Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Stens

Klausur zur Höheren Mathematik I
30. März 2011

Aufgabe 1 [5 Punkte]✓

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 2^n(n-1)+1\,.$$

Aufgabe 2 [10 Punkte]

(a) Geben Sie die Defintion für eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

(b) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \left(\frac{a_n}{2}\right)^3 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergent ist, indem Sie zeigen, dass

- $0 < a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- (a_n) monoton ist.

Bestimmen Sie außerdem den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 3 [13 Punkte]

(a) Geben Sie das Wurzelkriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ an.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} \cdot x^n.$$

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3+4}{3n^3+2n^2+1}.$$

bitte wenden!

Aufgabe 4 [7 Punkte]

(a) Zeigen Sie mit dem $(\varepsilon - \delta)$ – Kriterium der Stetigkeit, dass $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2$ stetig ist für alle $x \in [-5,5]$.
Ist f im Intervall $[-5,5]$ auch gleichmäßig stetig?

(b) Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen die nachfolgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} |x| + 2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 5 [7 Punkte]

Es sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen $\mathcal{S}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{S}_2 = (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung L bezüglich der Basen $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6 [8 Punkte]

(a) Definieren Sie die lineare Abhängigkeit von Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(b) Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem eindeutig/ mehrdeutig/ nicht lösbar?

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & +\lambda x_3 & = & \mu \\ & \lambda x_2 & +x_3 & = & 2\mu \\ \lambda x_1 & +x_2 & & = & \lambda\mu. \end{array}$$

Geben Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit alle Lösungen an.

Viel Erfolg!