

①

Stat. (Disk.) ⑥

08.06.09

$$X \sim U[a, b], \text{ d.h.}$$

$$\begin{matrix} \text{(Skalard. \uparrow S. 107)} \\ f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases} \end{matrix}$$

$$\& \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \\ \frac{x-a}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 1 & , x > b \end{cases}$$

P 16 $X \sim U(-7, 5], \text{ d.h.}$ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin (-7, 5] \\ \frac{1}{5+7} & , x \in (-7, 5] \end{cases}$

$\Rightarrow$ Verteilungsfunktion $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq -7 \\ \frac{x+7}{12} & , x \in (-7, 5] \\ 1 & , x > 5 \end{cases}$

(i) $P(X \leq 3) = F_X(3) = \frac{5}{6}$

(ii) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = \frac{1}{4}$

(iii) $P(-4 < X \leq 1,8) = P(X \leq 1,8) - P(X \leq -4)$
 $= F_X(1,8) - F_X(-4) = \frac{29}{60}$

(iv) $P(X \leq 1 | X \leq 2) = \frac{P(X \leq 1, X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X \leq 1)}{P(X \leq 2)}$
 $= \frac{F_X(1)}{F_X(2)} = \frac{8}{9}$

kontingenz tabelle

(2)

X, Y stoch. unabh. $\Rightarrow P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$

$P(X=i, Y=j), i=1,2 \text{ ; } j=1,2,3$

P_{17}		$Y=j$			$P(X=i)$
(a)	$X=i$	1	2	3	
	1	0,2	0,12	0,08	0,4
	2	0,3	0,18	0,12	0,6
	$P(Y=j)$	0,5	0,3	0,2	1

$0,2 \stackrel{\text{vor}}{=} P(X=1, Y=1)$
 Stoch. unabh.
 $= P(X=1) \cdot P(Y=1)$
 $= 0,4$

$\Rightarrow P(Y=1) = 0,5$

$P(X=1, Y=2) \stackrel{\text{st.un.}}{=} P(X=1) \cdot P(Y=2)$
 $0,4 \quad 0,3$

(b) allg. $P(Y=j | X=2) = \frac{P(Y=j, X=2)}{P(X=2)} \quad j \in \{1, 2, 3\}$

$P(X=1 | X=2) = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2}$

$P(X=2 | X=2) = \frac{0,18}{0,6} = \frac{3}{10}$

$P(X=3 | X=2) = \frac{0,12}{0,6} = \frac{1}{5}$

$E(X) = \sum_{i=1}^2 i \cdot P(X=i) = 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2)$
 $= \dots = 1,6$

$E(Y) = \sum_{j=1}^3 j \cdot P(Y=j) = \dots = 1,7$

geg.: diskrete Zufallsvariable X mit zugehöriger Zähl(dichte):

$$P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2}$$

ges.: Erwartungswert, Varianz von X

$$E(X) = \sum_{k=1}^3 k \cdot P(X=k) = 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) = 2,25$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in X} \overbrace{g(x)}^{=x^2} \cdot P_X(x)$$

$$= \sum_{k=1}^3 g(x_k) \cdot P_X(x_k) \quad \text{mit } g(x) = x^2$$

$$= 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) + 3^2 \cdot P(X=3)$$

$$= \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{2} = 5,75$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5,75 - 2,25^2 = 0,6875$$

Bsp. stetige Faltung: X, Y stetige stoch. unabh. ZV mit $X, Y \sim \exp(\lambda)$

d.h. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$ $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}, y > 0$

$z = X + Y$ $\Rightarrow$ Faltung $f_z(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y) dy = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy, z > 0$

$$= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z + \lambda y - \lambda y} dy = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z} dy = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, z > 0$$

$0 < z-y < \infty$ $0 < y < \infty$
 $\Rightarrow 0 < y < z < \infty$

$X \sim \Gamma(a, \lambda)$ d.h. $\Gamma(a)$
 Gammaverteilung a
 $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, x > 0$
 (S. 109) d.h. $Z \sim \Gamma(2, \lambda)$

P18

Poisson-Verh. d.

(4)

$X, Y \sim \text{po}(\lambda)$ stoch. unabh., d.h.

$$P(X=i) = P(Y=j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

a) $P(Z=z) \stackrel{\text{Def}}{=} P(X+Y=z) \stackrel{\text{diskr. Faltung}}{=} \sum_{i=0}^z P(X=i) \cdot P(Y=z-i)$

$$0 \leq i < \infty$$

$$1 \quad 0 \leq z-i < \infty$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 \leq i \leq z} < \infty$$

Faltung

$$X, Y \sim \text{po}(\lambda) \quad \sum_{i=0}^z e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{z-i}}{(z-i)!}$$

$$= e^{-2\lambda} \lambda^z \sum_{i=0}^z \frac{1}{i! (z-i)!} \cdot \boxed{\frac{z!}{z!}} = e^{-2\lambda} \lambda^z \frac{1}{z!} \sum_{i=0}^z \binom{z}{i} \cdot \boxed{1^i \cdot 1^{z-i}}$$

Hinweis $\Rightarrow e^{-2\lambda} \lambda^z \frac{1}{z!} \cdot z^z = e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^z}{z!}$

$$\Rightarrow Z = X+Y \sim \text{po}(2\lambda)$$

b) $Z \sim \text{po}(2\lambda) \stackrel{\text{Vorlesung VL}}{\Rightarrow} E(Z) = 2\lambda$

hier $\lambda=10 \Rightarrow E(Z) = 20$