

Alg. 1

$$a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\stackrel{\text{S.A.}}{=} P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

b) 3-motoriges Flugzeug

"H" Hauptmotor (Thrustoll)

S_i Seitenmotor mit $i=1,2$ (Thrustoll)

A Ereignis für Absinken

$$P(A | 3\text{-motor}) = P(H \cup (S_1 \cap S_2))$$

$$= P(H) + P(S_1 \cap S_2) - P(H \cap (S_1 \cap S_2))$$

$$\stackrel{\text{S.A.}}{=} p + p^2 - p^3$$

4-motorig

" S_i " Thrustoll von Motor S_i mit $i=1, \dots, 4$

$$P(A | 4\text{-motor}) = P((S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4))$$

$$= P(S_1 \cap S_2) + P(S_3 \cap S_4) - P((S_1 \cap S_2) \cap (S_3 \cap S_4))$$

$$\stackrel{\text{S.A.}}{=} p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4$$

c) $0 < p < 1$, Kurven überschneiden sich nicht laut Grafik

$\rightarrow$ wähle z.B. $p = 1/2$

$$\Rightarrow P(A | 3\text{-motor})_{p=1/2} = \frac{5}{8}$$

$$P(A | 4\text{-motor})_{p=1/2} = \frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow P(A | 3\text{-motor})_{p=1/2} > P(A | 4\text{-motor})_{p=1/2}$$

$\Rightarrow$ obere Kurve korrespondiert zur 3-motorigen Maschine

$$d) P(4\text{-motor} | A) = \frac{P(A | 4\text{-motor}) \cdot P(4\text{-motor})}{P(A)}$$

$$d) P(4\text{-motor} | A) = \frac{P(A | 4\text{-motor}) \cdot P(4\text{-motor})}{P(A)}$$

$$P(4\text{-motor}) = 0,7$$

$$P(A) = P(A | 4\text{-motor}) \cdot P(4\text{-motor}) + P(A | 3\text{-motor}) \cdot P(3\text{-motor}) \\ \approx 3 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow P(4\text{-motor} | A) = 4,667 \cdot 10^{-5}$$

Th. 2

$$a) Y = b \cdot X, \quad X \sim \text{Exp}(1)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = 1 \cdot e^{-1x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$$

$$x = \frac{1}{b} \cdot y$$

$$\Rightarrow \text{Transformationssatz: } f_Y(y) = \left| \frac{1}{b} \right| \cdot f_X\left(x = \frac{y}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{b} \cdot 1 \cdot e^{-1 \cdot \frac{y}{b}} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$\mu = \frac{1}{b} \quad \rightarrow \quad = \mu \cdot e^{-\mu y} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(y)$$

$$\Rightarrow Y \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$b) Z = b \cdot X + N, \quad b = 1/2, \quad X \sim \text{Exp}(1), \quad N \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$1, \mu > 0$$

$$Z = \frac{1}{2}X + N = Y + N \quad \text{mit } Y \sim \text{Exp}(2)$$

Da Y, N s.u.,

mit Faltung

$$f_Z(z) = \int f_Y(y) \cdot f_N(z-y) dy \\ = \int 2 \cdot 1 \cdot e^{-2y} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(y) \cdot \mu \cdot e^{-\mu(z-y)} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(z-y) dy \\ = 2 \cdot \mu \cdot e^{-\mu z} \int_0^{\infty} e^{-(2-\mu)y} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(z-y) dy$$

$$= 2\lambda \mu \cdot e^{-\mu z} \left| e^{-(\lambda z - \mu) y} \pi_{[0, \infty)}(z - y) dy \right|_0$$

$$z - \mu \geq 0 \quad \Leftrightarrow y \leq z$$

$$\Rightarrow f_z(z) = 2\lambda \mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{-(\lambda z - \mu) y} dy$$

$$= \begin{cases} 2\lambda \mu e^{-\mu z} \cdot z & , \text{ für } \lambda z = \mu \\ \frac{2\lambda \mu \cdot e^{-\mu z}}{\mu - \lambda z} \cdot e^{-(\lambda z - \mu) y} \Big|_0^z & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu^2 \cdot z \cdot e^{-\mu z} & , \text{ für } \lambda z = \mu \\ \frac{2\lambda e^{-\mu z}}{\mu - \lambda z} [e^{-(\lambda z - \mu) \cdot z} - 1] & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$c) \underline{y} = H \cdot \underline{x} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = H^{-1} \cdot \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{\det(H)} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - (-\frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow H^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Transformationsatz

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 x_1 - 1/3 x_2 \\ 1/2 x_1 + 1/2 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\det(\dots)| = 1/3$$

$$\begin{aligned} f_{H,K}(g_1, g_2) &= \frac{1}{|\det(J)|} \cdot f_{X,Y}(\underline{x} = H^{-1} \underline{y}) \\ &= 3 f_{X,Y} \left(\frac{2}{3} g_1 + g_2, -\frac{5}{2} g_1 + g_2 \right) \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \exp(-2(\frac{2}{3} g_1 + g_2)) \cdot \pi_{(-\infty, \infty)}(3/2 g_1 + g_2) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{5}{2} g_1 + g_2 \right) \cdot \exp(-(-\frac{5}{2} g_1 + g_2)) \cdot \pi_{[0, \infty)}(-5/2 g_1 + g_2) \\ &= (-9 g_1 + 6 g_2) \cdot \exp(-\frac{4}{3} g_1 - 3 g_2) \cdot \pi_{(-\infty, \infty)}(\frac{2}{3} g_1 + g_2) \cdot \pi_{[0, \infty)}(-\frac{5}{2} g_1 + g_2) \end{aligned}$$

ferner gilt:

$$1) g_1 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \geq 0 \quad \text{da } x_1, x_2 \geq 0$$

$$2) \frac{2}{3} g_1 + g_2 \geq 0 \Leftrightarrow g_2 \geq -\frac{2}{3} g_1$$

$$3) -\frac{5}{2} g_1 + g_2 \geq 0 \Leftrightarrow g_2 \geq \frac{5}{2} g_1$$

$$f_{g_1, g_2}(g_1, g_2) = (-9 g_1 + 6 g_2) \cdot \exp(-\frac{4}{3} g_1 - 3 g_2) \cdot \pi_{(-\infty, \infty)}(g_2) \cdot \pi_{[0, \infty)}(-\frac{5}{2} g_1 + g_2) \cdot \pi_{[0, \infty)}(\frac{2}{3} g_1 + g_2)$$

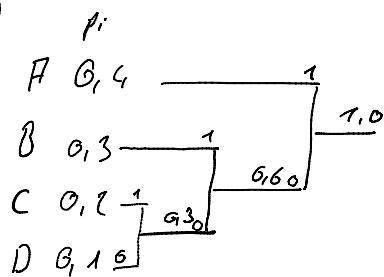
Aufg. 3

$$a) H(x) = - \sum_i p_i \cdot \log(p_i)$$

$$= - 0,1 \cdot \log 0,1 - 0,2 \cdot \log 0,2 - 0,3 \cdot \log 0,3 - 0,4 \cdot \log 0,4$$

$$\approx 1,846$$

5)



X	$g(x)$	i	p_i	n_i	$p_i \cdot n_i$
A	1	1	0,4	1	0,4
B	01	2	0,3	2	0,6
C	001	3	0,2	3	0,6
D	000	4	0,1	3	0,3

mittlere Codewortlänge: $\bar{n}(g) = \sum_{i=1}^4 p_i \cdot n_i = 1,9$

c) Da die Quelle gedächtnislos ist, sind die Symbole s.a.

d.h. $H(x_1, x_2) = H(x_1) + H(x_2)$
 $= 2 \cdot H(x) \approx 3,692$

$\Rightarrow$ ein optimaler Code hat mind.

$\frac{3,692}{2} = 1,846$ Zeichen/symbol

$0,95 \cdot 1,9 < 0,95 \cdot 1,91 = 1,8145 < 1,846$

$\Rightarrow$ dies bedeutet, dass gegenüber dem Code von 5) keine Verbesserung um 5% mögl. ist

d) $CD \rightarrow 001000$

e) $000000 \rightarrow DD$

f) $P_h = \sum_{c \in C} P(t=c, x=c)$

$= \sum_{c \in C} P(t=c | x=c) \cdot P(x=c)$

$= (1-\epsilon)^3 \cdot 7 P(x=c) = (1-\epsilon)^3$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$y \setminus x=c$	$(0,0,0)=c_0$	$(0,1,0)=c_1$	$(1,0,1)=c_2$	$(1,1,1)=c_3$	$c = h_{MC}(\delta)$
$(0,0,0)$	27	9	3	1	c_0
$(0,0,1)$	9	3	9	3	$\in \{c_0, c_2\}$
$(0,1,0)$	9	27	1	3	c_1
$(0,1,1)$	3	9	3	9	$\in \{c_1, c_3\}$
$(1,0,0)$	9	3	9	3	$\in \{c_0, c_2\}$
$(1,0,1)$	3	1	27	9	c_2
$(1,1,0)$	3	9	3	9	$\in \{c_1, c_3\}$
$(1,1,1)$	1	3	9	27	c_3

Ergebnisse mit $U^3 \cdot p(y=\delta | x=c)$

Für eine ML-Dekodierung gilt:

$$c = h_{MC}(\delta) \Rightarrow p(y=\delta | x=c) \geq p(y=\delta | x=d) \quad \forall d \in \mathcal{C}$$

→ Wähle eine ML-Dekodierung aus 16 Möglichkeiten aus

b)

$$h = \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{c \in \mathcal{C} \setminus \{c_0\}} P(x=c, y=d)$$

$$= \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{c \in \mathcal{C} \setminus \{c_0\}} P(y=d | x=c) \cdot P(x=c)$$

$$c_4 = (0, 0, 1)$$

$$= P(y=c_0 | x=c_1) \cdot \overbrace{P(x=c_1)}^{p_1} + P(y=c_0 | x=c_2) \cdot \overbrace{P(x=c_2)}^{=1/5} + P(y=c_0 | x=c_3) \cdot P(x=c_3) \\ + P(y=c_4 | x=c_1) \cdot P(x=c_1) + P(y=c_4 | x=c_2) \cdot P(x=c_2) + P(y=c_4 | x=c_3) \cdot P(x=c_3)$$

$$= c(1-c)^2 \cdot p_1 + c^2(1-c) \cdot 1/5 + c^3 \cdot p_3 + c^4(1-c) \cdot p_1 + c(1-c)^2 \cdot 1/5 + c^2(1-c) \cdot p_3$$

$$= c(1-c)(p_1 + 1/5) + c^2 \cdot p_3$$

$$= \frac{3}{16} p_1 + \frac{1}{16} p_3 + \frac{3}{80}$$

zur Minimierung von P

1) $p_1 < p_3$

$\Rightarrow P_0 = P(x=c_0) = 0,4 \quad c_0 \longleftrightarrow A$

$P_1 = P(x=c_1) = 0,1 \quad c_1 \longleftrightarrow D$

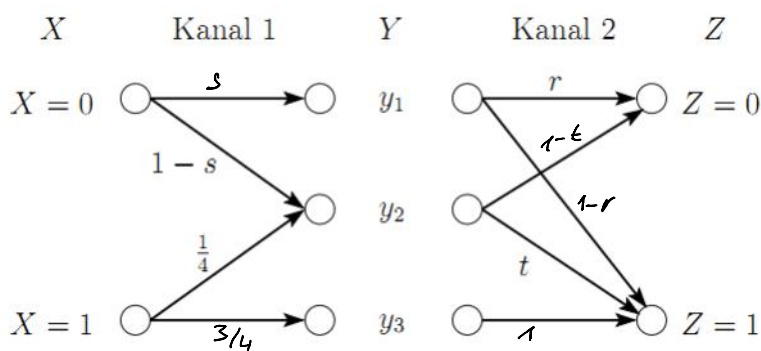
$P_2 = P(x=c_2) = 0,2 \quad c_2 \longleftrightarrow C$

$P_3 = P(x=c_3) = 0,3 \quad c_3 \longleftrightarrow B$

$\Rightarrow P = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{80} = \frac{3}{40} = 7,5\%$

Aufg. 4

a)



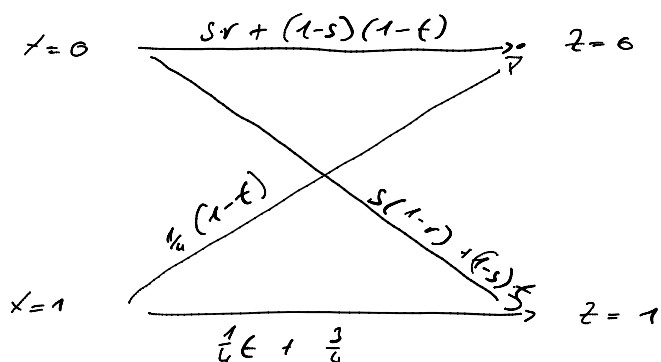
b) $P(z=j | x=i) = \sum_{y_k} P(z=j | y=y_k) P(y_k | x=i)$

$\Rightarrow P(z=0 | x=0) = s \cdot r + (1-s)(1-t)$

$P(z=0 | x=1) = \frac{1}{4}(1-t)$

$P(z=1 | x=0) = s(1-r) + (1-s)t = 1 - P(z=0 | x=0)$

$P(z=1 | x=1) = \frac{1}{4}t + \frac{3}{4} = 1 - P(z=0 | x=1)$



Für eine fehlerfreie Detektion muß gelten

$$P(Z=0 | X=1) = 0 = \frac{1}{4}(1-\epsilon) \Rightarrow \epsilon = 1$$

Ferner muss gelten

$$P(Z=0 | X=0) = s \cdot r + (1-s)(1-\epsilon) = s \cdot r = 1$$

$\xrightarrow{r \neq 0} r = s = 1$

$\Rightarrow$ für $s = r = 1$ und $\epsilon = 1$ ist eine fehlerfreie Übertragung möglich

c) Für BSC mit $\epsilon = 1/8$ muss gelten

$$P(Z=0 | X=1) = \frac{1}{4}(1-\epsilon) = \epsilon = 1/8$$

$$\Rightarrow \epsilon = 1/2$$

Ferner

$$P(Z=1 | X=0) = s(1-r) + (1-s) \cdot \epsilon = \epsilon = 1/8$$

$$\text{mit } \epsilon = 1/2 \text{ und } s \neq 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{3+4s}{8s} > 0 \quad \forall s \in (0,1)$$

Zudem

$$r \leq 1 \Leftrightarrow 3+4s \leq 8s \Leftrightarrow s \geq 3/4$$

$$\Rightarrow \{(r,s,\epsilon) \mid \epsilon = 1/2, s \in [3/4, 1], r = \frac{1}{8s}(3+4s)\}$$

$$= \{(\frac{1}{8s}(3+4s), s, 1/2) \mid s \in [3/4, 1]\}$$

$$d) I(X;Z) = H(X) - H(X|Z)$$

$$= H(Z) - H(Z|X)$$

für $H(Z)$ wird Verteilung von Z benötigt

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= \sum_x P(Z=0 | X=x) \cdot P(X=x) \\ &= (1-\epsilon)p_0 + \epsilon \cdot (1-p_0) \\ &= \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

$$P(Z=1) = 1 - P(Z=0) = \frac{11}{16}$$

$$P(Z=1, X=1) = P(Z=1 | X=1) \cdot P(X=1)$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{32}$$

$$\begin{aligned} P(z=1, r=0) &= P(z=1 | r=0) \cdot P(r=0) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(z=0, r=1) &= P(z=0 | r=1) \cdot P(r=1) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32} \end{aligned}$$

$$P(z=1, r=0) = \frac{7}{32}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= - \sum_i P(r=i) \log_2(P(r=i)) \\ &= 0,8960 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(z|x) &= - \sum_{i,j} P(z=z_i, x=x_j) \cdot \log_2 P(z=z_i, x=x_j) \\ &= 0,5436 \end{aligned}$$

$$= I(x, z) = H(z) - H(z|x) = 0,3524$$

e) die Kapazitätserreichende Eingangsverteilung
 $(p_0^*, 1-p_0^*) = (1/2, 1/2)$ Gleichverteilung

Kapazität des BSC

$$C = 1 + (1-\epsilon) \log_2(1-\epsilon) + \epsilon \log_2 \epsilon = 0,566 \frac{\text{Bit}}{\text{Kanalnutzung}}$$