

Klausur zur Höheren Mathematik I

11. März 2011

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Beweisen Sie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Aufgabe 2 [2+9 Punkte]

(a) Geben Sie eine Definition für die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an.

(b) Sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + \frac{1}{2}a_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergent ist, indem Sie zeigen, dass

- $0 < a_n < \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bestimmen Sie außerdem den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 3 [2+8+4 Punkte]

(a) Formulieren Sie

- ein notwendiges Kriterium und
- ein hinreichendes Kriterium

für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n^2 + 1}\right)^* (x + 1)^n$$

Hinweis: Beachten Sie auch die Randpunkte!

(c) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}$$

Aufgabe 4 [1+6 Punkte]

(a) Definieren Sie: "Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$."

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des $(\varepsilon - \delta) - \text{Kriteriums}$ der Stetigkeit, dass die Funktion $f: [-9,9] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{1}{6 + x^2}$$

stetig im Intervall $[-9,9]$ ist.

Aufgabe 5 [3+1 Punkte]

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_λ invertierbar?

Aufgabe 6 [1+7 Punkte]

(a) Geben Sie eine Definition für den Kern der linearen Abbildung $L: V \rightarrow W$ an.

(b) Für welche $\mu \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x & -y & +z = 3 \\ x & & -z = -1 \\ 2\mu^2 x & -4y & = 4\mu \end{array}$$

eindeutig / mehrdeutig / nicht lösbar? Geben sie für $\mu = 2$ die Lösungsgesamtheit an.