LÖSUNG ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1
FRÜHJAHR 2002

Dies ist keine offizielle Musterlösung vom ITHE.

Aufgabe 1

a). Aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\underline{\vec{E}} &= -j\omega\mu\underline{\vec{H}} \\
\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} &= (\sigma + j\omega\varepsilon)\underline{\vec{E}} \approx \sigma\underline{\vec{E}} \\
\varepsilon \operatorname{div}\underline{\vec{E}} &= 0 \\
\mu \operatorname{div}\underline{\vec{H}} &= 0
\end{aligned}
$$

folgt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = \sigma(\operatorname{rot}\underline{\vec{E}}) = -j\omega\mu\sigma\underline{\vec{H}}$$

Mit der Identität $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{\vec{H}} - \Delta\underline{\vec{H}}$ und den Materialparametern der beiden Gebiete folgt die Differenzialgleichung

$$\Delta\underline{\vec{H}}_n - j\omega\mu_0\sigma_n\underline{\vec{H}}_n = \vec{0} \qquad n = 1,2$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\underline{\vec{H}}_n + \underline{k}_n^2\underline{\vec{H}}_n = \vec{0} \qquad \text{mit } \underline{k}_n := \frac{1-j}{\delta_n} \qquad \text{und } \delta_n := \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_n}}$$

b). Aufgrund der Quasistationarität hängt $\underline{\vec{H}}_n$ nicht von z ab. Da der Leiter sehr breit ist ($b \gg a+d$), können wir die Abhängigkeit von x vernachlässigen. $\underline{\vec{H}}_n$ hängt also nur von y ab.
Mit dieser Einschränkung ist

$$\underline{\vec{J}}_n = \operatorname{rot}\underline{\vec{H}}_n = \frac{\partial \underline{H}_{nz}}{\partial y}\vec{e}_x - \frac{\partial \underline{H}_{nx}}{\partial y}\vec{e}_z$$

Da $\underline{\vec{J}}_n$ nur eine z-Komponente besitzt, folgt $\underline{H}_{nz} = 0$ und damit der folgende Ansatz für die magnetische Feldstärke:

$$\underline{\vec{H}}_n = \underline{H}_{nx}(y)\,\vec{e}_x$$

c).

$$\Delta\underline{\vec{H}}_n - \underline{k}_n^2\underline{\vec{H}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \underline{H}_{nx}}{\partial y^2} + \underline{k}_n^2\underline{H}_{nx} = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet:

$$
\begin{aligned}
\underline{H}_{1x} &= \underline{A}\cos(\underline{k}_1 y) + \underline{B}\sin(\underline{k}_1 y) \\
\underline{H}_{2x} &= \underline{C}\cos\big(\underline{k}_2(y-a)\big) + \underline{D}\sin\big(\underline{k}_2(y-a)\big)
\end{aligned}
$$

wobei $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ und $\underline{D}$ beliebige komplexe Konstanten sind.

d). Mit $\underline{\vec{E}} = \frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y}\vec{e}_z$ erhalten wir für die elektrische Feldstärke:

$$\underline{\vec{E}}_1 = \frac{\underline{k}_1}{\sigma_1}\Big(\underline{A}\sin(\underline{k}_1 y) - \underline{B}\cos(\underline{k}_1 y)\Big)\vec{e}_z$$

e). An den Grenzflächen bei $y = 0$ und $y = a$ müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke, also $\underline{E}_z$ und $\underline{H}_x$, stetig sein. Da im Bereich 4 wegen $\mu_4 \to \infty$ kein magnetisches Feld vorhanden ist, erhalten wir als erste Gleichung:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{1x}\Big|_{y=0} &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \underline{A} &= 0 \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der magnetischen Feldstärke bei $y = a$ folgt die Gleichung

$$\underline{B}\sin(\underline{k}_1 a) = \underline{C}$$

und aus der Stetigkeit der elektrischen Feldstärke

$$\begin{aligned} -\frac{\underline{k}_1}{\sigma_1}\underline{B}\cos(\underline{k}_1 a) &= -\frac{\underline{k}_2}{\sigma_2}\underline{D} \\ \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}\underline{B}\cos(\underline{k}_1 a) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}\underline{D} \\ \Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}\underline{B}\cos(\underline{k}_1 a) &= \underline{D} \end{aligned}$$

Der Strom und die magnetische Feldstärke sind verknüpft über die Gleichung

$$\oint \underline{\vec{H}}\,d\vec{s} = \hat{\underline{I}}$$

Da $\underline{\vec{H}}$ nur eine x-Komponente hat, liefern die beiden Schmalseiten des Leiters keinen Beitrag zum Integral, genau wie die Unterseite, da hier $\underline{\vec{H}} = 0$ ist. Es bleibt also:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{I}} &= -\int_0^b \underline{H}_{2x}\Big|_{y=a+d} dx \\ &= -b(\underline{C}\cos(\underline{k}_2 d) + \underline{D}\sin(\underline{k}_2 d)) \end{aligned}$$

Wir erhalten also folgendes Gleichungssystem ($\underline{A} = 0$ weggelassen):

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos(\underline{k}_2 d) & \sin(\underline{k}_2 d) \\ \sin(\underline{k}_1 a) & -1 & 0 \\ \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}\cos(\underline{k}_1 a) & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{B} \\ \underline{C} \\ \underline{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\hat{I}}{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a). Allgemein gilt:

$$
\begin{aligned}
&\left(\Delta + k^2\right)\underline{g} = 0 && \text{mit } k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \\
\Rightarrow\quad &\left(\Delta_t + p^2\right)\underline{g} = 0 && \text{mit } p^2 = \underline{\gamma}^2 + k^2
\end{aligned}
$$

Bei einer TEM-Welle ist $p = 0$:

p bei TEM-Welle = 0

$$
\begin{aligned}
&\Delta_t \underline{g} = 0 \\
\Rightarrow\quad &\frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{da } \underline{g} \text{ nicht von } x \text{ abhängt}
\end{aligned}
$$

Für $\underline{\gamma}$ ergibt sich der Wert

$$\underline{\gamma} = \sqrt{-k^2} = jk$$

b).

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial y^2} = 0 \\
\Rightarrow\quad & G''(y)\,\mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} = G''(y)\,\mathrm{e}^{-jkz} = 0 \\
\Rightarrow\quad & G''(y) = 0 \\
\Rightarrow\quad & G(y) = Ay + B \\
\Rightarrow\quad & \underline{g}(y,z) = (Ay + B)\,\mathrm{e}^{-jkz}
\end{aligned}
$$

Dabei sind A und B beliebige Konstanten.
Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung erhalten wir für die elektrische Feldstärke:

$$
\begin{aligned}
\underline{\vec{E}} &= -\frac{\underline{\gamma}}{j\omega\varepsilon}\nabla_t \underline{g}(y,z) \\
&= -\frac{k}{\omega\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\underline{g}(y,z)\vec{e}_y \\
&= -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\varepsilon} A\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_y \\
&= -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_y
\end{aligned}
$$

Bei einer TEM-Welle können wir die magnetische Feldstärke berechnen über

$$
\begin{aligned}
\underline{\vec{H}} &= \frac{1}{Z}\vec{n} \times \underline{\vec{E}} \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{e}_z \times \left(-\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_y\right) \\
&= A\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_x
\end{aligned}
$$

c).

$$\begin{aligned}
\underline{U}^+(z) &= -\int_0^b \underline{E}_y\, dy \\
&= \int_0^b \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A\, e^{-jkz} \\
&= b\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A\, e^{-jkz} \\
\underline{I}^+(z) &= \int_0^a \underline{H}_x\, dy \\
&= \int_0^a A\, e^{-jkz} \\
&= aA\, e^{-jkz}
\end{aligned}$$

d).

$$\begin{aligned}
Z_L &= \frac{\underline{U}^+(z)}{\underline{I}^+(z)} \\
&= \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\
Z_F &= \frac{\vec{E}}{\vec{H}} \qquad \text{gilt für TEM-Wellen} \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

e). Bei verlustfreien Leitungen ($R' = G' = 0$) gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dz} &= -j\omega L' I \quad \Rightarrow \quad L' = \frac{1}{-j\omega I}\frac{dU}{dz} \\
\frac{dI}{dz} &= -j\omega C' U \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{1}{-j\omega U}\frac{dI}{dz}
\end{aligned}$$

Daraus folgt in unserem Fall

$$\begin{aligned}
L' &= \frac{1}{-j\omega aA\, e^{-jkz}} b\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A(-jk)\, e^{-jkz} \\
&= \frac{kb}{\omega a}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\
&= \mu\frac{b}{a} \\
C' &= \frac{1}{-j\omega b\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A\, e^{-jkz}} aA(-jk)\, e^{-jkz} \\
&= \frac{ka}{\omega b}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \\
&= \varepsilon\frac{a}{b}
\end{aligned}$$

f).

$$Z_L = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Aufgabe 3

a).

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_n &= \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\,\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}_n\,, \qquad n = 1,2\\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\,\mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}}\left(j\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}\,h_n(x)\vec{e}_x + h_n'(x)\vec{e}_z\right)\\ &= \mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}}\left(\sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{eff}}}{\varepsilon_0}}\,h_n(x)\vec{e}_x + \frac{h_n'(x)}{j\omega\varepsilon_0}\vec{e}_z\right)\end{aligned}$$

b). Da das elektrische Feld auf idealen Leitern senkrecht steht, muss $\underline{E}_{1z}\big|_{x=0} = \underline{E}_{2z}\big|_{x=2d} = 0$ sein. Daraus folgt als Grenzbedingung für $h_n(x)$:

$$h_1'(0) = h_2'(2d) = 0$$

c).

$$\begin{aligned} & & \Delta\underline{\vec{H}}_n + k_n^2\underline{\vec{H}}_n &= \vec{0} \qquad \text{mit } k_n = \omega\sqrt{\mu_n\varepsilon_0}\\ \Rightarrow & & \Delta\underline{H}_{ny} + k_n^2\underline{H}_{ny} &= 0\\ \Rightarrow & & h_n''(x)\,\mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}} - \omega^2\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0 h_n(x)\,\mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}} + \omega^2\mu_n\varepsilon_0 h_n(x)\,\mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}} &= 0\\ \Rightarrow & & h_n''(x) + \omega^2\varepsilon_0(\mu_n - \mu_{\mathrm{eff}})h_n(x) &= 0\\ \Rightarrow & & h_n''(x) + p_n^2 h_n(x) &= 0\end{aligned}$$

Unter der Bedingung $k_n \neq 0$ lautet also die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}h_1(x) &= \underline{A}\cos(p_1 x) + \underline{B}\sin(p_1 x)\\ h_2(x) &= \underline{C}\cos\big(p_2(2d - x)\big) + \underline{D}\sin\big(p_2(2d - x)\big)\end{aligned}$$

Dabei sind $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ und $\underline{D}$ beliebige komplexe Konstanten.
Aus der Grenzbedingung von Punkt b) folgt

$$\underline{B} = \underline{D} = 0$$

und somit das Ergebnis

$$\begin{aligned}h_1(x) &= \underline{A}\cos(p_1 x)\\ h_2(x) &= \underline{C}\cos\big(p_2(2d - x)\big)\end{aligned}$$

d). An Grenzflächen sind die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke stetig, also

$$\begin{aligned} & & \underline{H}_{1y}\big|_{x=d} &= \underline{H}_{2y}\big|_{x=d}\\ \Rightarrow & & h_1(d) &= h_2(d)\\ \Rightarrow & & \underline{A}\cos(p_1 d) &= \underline{C}\cos(p_s d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & & \underline{E}_{1z}\big|_{x=d} &= \underline{E}_{2z}\big|_{x=d}\\ \Rightarrow & & h_1'(d) &= h_2'(d)\\ \Rightarrow & & -\underline{A}\,p_1\cos(p_1 d) &= \underline{C}\,p_2\cos(p_2 d)\end{aligned}$$

Division dieser beiden Gleichungen liefert die gesuchte Eigenwertgleichung für μ_{eff}:

$$-p_1\tan(p_1 d) = p_2\tan(p_2 d)$$

$$\Rightarrow \quad -\sqrt{\mu_1 - \mu_{\mathrm{eff}}}\,\tan\left(\omega\sqrt{\varepsilon_0(\mu_1 - \mu_{\mathrm{eff}})}\,d\right) = \sqrt{\mu_2 - \mu_{\mathrm{eff}}}\,\tan\left(\omega\sqrt{\varepsilon_0(\mu_2 - \mu_{\mathrm{eff}})}\,d\right)$$

e). Für $\omega \to 0$ geht die Eigenwertgleichung über in

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{\mu_1 - \mu_{\text{eff}}}\,\left(\omega\sqrt{\varepsilon_0(\mu_1 - \mu_{\text{eff}})}\,d\right) &= \sqrt{\mu_2 - \mu_{\text{eff}}}\,\left(\omega\sqrt{\varepsilon_0(\mu_2 - \mu_{\text{eff}})}\,d\right) \\
\Rightarrow \qquad -(\mu_1 - \mu_{\text{eff}}) &= \mu_2 - \mu_{\text{eff}} \\
\Rightarrow \qquad \mu_{\text{eff}} &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}
\end{aligned}
$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist

$$
\begin{aligned}
v_{\text{ph}} &= \frac{\omega}{\beta} \\
&= \frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_{\text{eff}}}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0(\mu_1 + \mu_2)}}
\end{aligned}
$$