Musterlösung F 06 Aufg. 1

a) Grenzbedingung an magnetischer Wand bei $\underline{z=-h}$:

$$H_{tang} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{H}_x = 0 \; ; \; H_y = 0} \qquad (1)$$

$$\vec{\underline{H}} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \; ; \; \vec{\underline{A}} = \vec{e}_z \left(\underline{p}_1 \underline{f}(r) + p_2 f(r_2) \right)$$

$$\underline{H}_x = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\underline{p}_1 \underline{f}(r) + \underline{p}_2 f(r_2) \right) \qquad (2)$$

$$\underline{H}_y = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(p_1 f(r) + p_2 f(r_2) \right) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \underline{f}(r)}{\partial x} = \frac{d \underline{f}(r)}{d r} \frac{\partial r}{\partial x} = \underline{f}'(r) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = f'(r) \frac{x}{r} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \underline{f}(r)}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = f'(r) \frac{y}{r} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \underline{f}(r_2)}{\partial x} = f'(r_2) \frac{x}{r_2} \; ; \; \frac{\partial \underline{f}(r_2)}{\partial y} = f'(r_2) \frac{y}{r_2} \; \text{(analog)} \qquad (6)$$

Ferner gilt für $z = -h$

$r = \sqrt{x^2+y^2+(-h)^2}$; $r_2 = \sqrt{x^2+y^2+(2h-h)^2}$ also

$$\boxed{r = r_2 = \sqrt{x^2+y^2+h^2} \quad \text{für } z = -h} \qquad (7)$$

Damit aus (2), (3), (1)

$$(\underline{p}_1 + \underline{p}_2) f'(r) \frac{y}{r} = 0 \quad \text{für } z = -h \; \forall x, y \qquad (8)$$

$$(\underline{p}_1 + \underline{p}_2) f'(r) \frac{x}{r} = 0 \quad \text{für } z = -h \; \forall x, y \qquad (9)$$

Dies ist nur ~~be~~ erfüllbar für $\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{p}_2 = -\underline{p}_1 \Rightarrow \vec{\underline{p}}_2 = -\vec{\underline{p}}_1 = -\underline{p}_1 \vec{e}_z} \qquad (10)$$

b) $$\boxed{\underline{\vec{A}} = \vec{e}_z \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} p_1 \left(\frac{1}{r} e^{-jkr} - \frac{1}{r_2} e^{-jkr_2}\right)} \quad (11)$$

c) $$\frac{1}{r_2} e^{-jkr_2} \approx \frac{1}{r+\Delta r} e^{-jkr} e^{-jk\Delta r} = \frac{1}{r} e^{-jkr} \cdot \frac{1}{1+\frac{\Delta r}{r}} e^{-jk\Delta r}$$

$$\Delta r = 2h \cos\vartheta_2 \approx 2h\cos\vartheta \quad (12)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_2} e^{-jkr_2} \approx \frac{1}{r} e^{-jkr} \frac{1}{1+\frac{2h}{r}\cos\vartheta} e^{-jk2h\cos\vartheta} \quad (13)$$

Wegen $r \gg h$ ist $\frac{h}{r} \ll 1$ also $\frac{1}{1+\frac{2h}{r}\cos\vartheta} \approx 1 - \frac{2h}{r}\cos\vartheta$

Wegen $kh \ll 1$ ist $e^{-jk2h\cos\vartheta} \approx 1 - jk2h\cos\vartheta$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_2} e^{-jkr_2} \approx \frac{1}{r} e^{-jkr} \left(1 - \frac{2h}{r}\cos\vartheta\right)(1 - jk2h\cos\vartheta) \quad (14)$$

Da nur lineare Terme in h berücksichtigt werden sollen, folgt $\frac{1}{r_2} e^{-jkr_2} \approx \frac{1}{r} e^{-jkr} \left(1 - 2h\cos\vartheta\left[\frac{1}{r} + jk\right]\right)$

$$= \frac{1}{r} e^{-jkr} - \frac{1}{r} e^{-jkr} \frac{2h}{r}(1 + jkr)\cos\vartheta \quad (15)$$

Damit aus (11)

$$\underline{\vec{A}} = \vec{e}_z \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} p_1 \frac{2h}{r^2} e^{-jkr}(1+jkr)\cos\vartheta \quad (16)$$

$$\boxed{\underline{\vec{A}} = \vec{e}_z \frac{j\omega\mu_0 h p_1}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r^2}(1+jkr)\cos\vartheta} \text{ q.e.d.}$$

d) Fernfeld: $kr \gg 1 \Rightarrow 1 + jkr \approx jkr$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta \quad (17)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{A}} = -\frac{\omega\mu_0 h k}{2\pi} p_1 \frac{1}{r} e^{-jkr}\left(\vec{e}_r \cos^2\vartheta - \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta\right)}$$

3)

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{\vec{A}} = \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{A}_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\underline{A}_r)\right)\frac{1}{\mu_0} \quad (18)$$

$$\underline{\vec{H}} = \vec{e}_\varphi \frac{\omega h k}{2\pi} \underline{p}_1 \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(e^{-jkr}\sin\vartheta\cos\vartheta) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{1}{r}e^{-jkr}\cos^2\vartheta\right)\right)$$

$$\underline{H} = \vec{e}_\varphi \frac{\omega h k}{2\pi} p_1 \frac{1}{r}\left(-jke^{-jkr}\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{1}{r}e^{-jkr} \cdot 2\sin\vartheta\cos\vartheta\right)$$

$$\underline{\vec{H}} = -\vec{e}_\varphi \frac{\omega h k}{2\pi} p_1 \frac{1}{r^2} e^{-jkr}(jkr + 2)\sin\vartheta\cos\vartheta \quad (19)$$

Wegen $kr \gg 1$ folgt wieder $jkr + 2 \approx jkr$

Somit
$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\vec{H}} &= -\vec{e}_\varphi \frac{j\omega h k^2}{2\pi} p_1 \frac{1}{r} e^{-jkr}\sin\vartheta\cos\vartheta \\ &= -\vec{e}_\varphi \frac{j\omega h k^2}{4\pi} p_1 \frac{1}{r} e^{-jkr}\sin(2\vartheta)\end{aligned}} \quad (20)$$

e) Fernfeld = TEM-Welle $(\vec{u} = \vec{e}_r)$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = -Z_F \vec{e}_r \times \underline{\vec{H}}$$

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}; \quad k Z_F = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \omega\mu_0$$

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\vartheta$$

23

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\underline{\vec{E}} &= -\vec{e}_\vartheta \frac{j\omega h k^2 Z_F}{2\pi} \underline{p}_1 \frac{1}{r} e^{-jkr}\sin\vartheta\cos\vartheta \\ &= -\vec{e}_\vartheta \frac{j\omega h k^2 Z_F}{4\pi} \underline{p}_1 \frac{1}{r} e^{-jkr}\sin(2\vartheta) \\ &= -\vec{e}_\vartheta \frac{j\omega^3 h \mu_0\sqrt{\mu_0\varepsilon}}{4\pi} \underline{p}_1 \frac{1}{r} e^{-jkr}\sin(2\vartheta)\end{aligned}}$$

f) $\overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{2} \,\mathrm{Re}\,\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$

$\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r$

(24)

$\overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{2} \vec{e}_r \,\mathrm{Re}\,\{ \frac{j\omega a k^2}{2\pi} \frac{p_1}{r} Z_F (-\frac{j\omega a k^2}{2\pi} \frac{p_1^*}{r} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta) \}$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\vec{S}(t)} &= \frac{1}{2}\vec{e}_r \frac{\omega^2 a^2 k^4 Z_F}{4\pi^2} |p_1|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \\ &= \vec{e}_r \frac{\omega^2 a^2 k^4 Z_F}{8\pi^2} |p_1|^2 \frac{\sin^2\vartheta \cos^2\vartheta}{r^2} \\ &= \vec{e}_r \frac{\omega^2 a^2 k^4 Z_F}{32\pi^2} |\underline{p}_1|^2 \frac{\sin^2(2\vartheta)}{r^2}\end{aligned}}$$

(25)

$\frac{\omega^2 a^2 k^4 Z_F}{4\pi^2} = \frac{\omega^6 a^2 \varepsilon \mu_0^2 \sqrt{\varepsilon\mu_0}}{4\pi^2}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Minima: } \sin^2(2\vartheta) = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \tfrac{\pi}{2}, \pi \\ &\text{Maxima: } \sin^2(2\vartheta) = 1 \Rightarrow \vartheta = \tfrac{\pi}{4}; \tfrac{3\pi}{4}\end{aligned}}$$

$(0 \leq \vartheta \leq \pi!)$

FOG

Aufg. 2

a) TEM$_z$ - Welle $\Rightarrow$ $\underline{E}_z = 0$

$$\Rightarrow \underline{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\underline{g} = 0$$

$$\Rightarrow \left[k^2 + (-j\beta)^2\right]\underline{g} = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - \beta^2 = 0$$

$$\underline{\underline{\beta = k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

$$\nabla^2 \underline{g} + k^2 \underline{g} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{tr}^2 \underline{g} + \left(\frac{\partial}{\partial z^2} + k^2\right)\underline{g} = \nabla_{tr}^2 \underline{g} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{tr}^2 \underline{g} = e^{-j\beta z} \cdot \nabla_{tr}^2 \tilde{\underline{g}} = 0$$

muß für alle z gelten $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla_{tr}^2 \tilde{\underline{g}} = 0}$

b) <u>magn. Wände Γ_1, Γ_2:</u>

$$\Rightarrow E_{norm} = 0 \Rightarrow E_\varrho = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\underline{g}}}{\partial u}(\text{Rand}) = \frac{\partial \tilde{\underline{g}}}{\partial \varrho}\Big|_{\varrho=a} = \frac{\partial \tilde{\underline{g}}}{\partial \varrho}\Big|_{\varrho=b} = 0$$

mit Hinweis nur 1 Komponente $\Rightarrow$ $E_\varrho = 0$ für alle ϱ

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = E_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \tilde{\underline{g}} = \tilde{\underline{g}}(\varphi)$$

$$\Rightarrow \nabla_{tr}^2 \tilde{\underline{g}} = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \tilde{\underline{g}}}{\partial \varphi^2} = 0$$

mit Lösung: $\tilde{\underline{g}}(\varphi) = A\varphi + B$; A, B Konstanten

$$\underline{\tilde{g}}(\varphi = 0) = B = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B = 0}}$$

$$\underline{\tilde{g}}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = A\,\frac{\pi}{2} = A_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A = \frac{A_0 \cdot 2}{\pi}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{g}}(\varphi) = \frac{A_0 \cdot 2}{\pi}\,\varphi$$

c) $$\vec{\underline{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon\rho}\,\frac{\partial g}{\partial\varphi\,\partial z}\,\vec{e}_\varphi = \frac{1}{j\omega\varepsilon\rho}\,(-j\beta)\,\frac{2A_0}{\pi}\,e^{-j\beta z}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\underline{\underline{\vec{\underline{E}} = -\frac{2A_0}{\rho\,\pi}\cdot\underbrace{Z_F}_{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}}\cdot e^{-j\beta z}\,\vec{e}_\varphi}}$$

d $$\underline{\underline{\vec{\underline{H}} = \frac{1}{Z_F}\,\vec{e}_z \times \vec{\underline{E}} = \frac{2A_0}{\rho\,\pi}\,e^{-j\beta z}\,\vec{e}_\rho}}$$

d) $$\underline{u}(z) = \int_{\text{Leiter }1}^{\text{Leiter }2} \vec{\underline{E}}\,d\vec{r} = -\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{Z_F\cdot 2\cdot A_0}{\pi\,\rho}\,e^{-j\beta z}\,\rho\,d\varphi$$

$$\underline{u}(z) = -\frac{Z_F\cdot A_0\cdot 2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\,e^{-j\beta z}$$

$$\underline{\underline{\underline{u}(z) = -Z_F\,A_0\,e^{-j\beta z}}}$$

$$\underline{i}(z) = \oint_C \vec{\underline{H}}\,d\vec{r} = \int_{\rho=b}^{a} \frac{2A_0}{\rho\cdot\pi}\,e^{-j\beta z}\,d\rho$$

$$\underline{\underline{\underline{i}(z) = \frac{2A_0}{\pi}\,e^{-j\beta z}\cdot\ln\left(\frac{a}{b}\right)}}$$

$$\underline{\underline{\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}(z)}{\underline{i}(z)} = Z_F\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}}$$

e) $-\frac{\partial \underline{i}}{\partial z} = (G' + j\omega C')\cdot \underline{u}$

einsetzen:

$\Rightarrow \; -\frac{2A_0}{\pi}(-j\beta)\, e^{-j\beta z}\cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) = (G' + j\omega C')(-Z_F A_0)e^{-j\beta z}$

$\Rightarrow G' + j\omega C' = -\frac{2j\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\pi\sqrt{\mu_0/\varepsilon}} = \frac{2j\omega\varepsilon}{\pi}\ln\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \underline{\underline{G' = 0}} \quad ; \quad \underline{\underline{C' = \frac{2\varepsilon}{\pi}\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$

$-\frac{\partial \underline{u}}{\partial z} = (R' + j\omega L')\cdot \underline{i}$

$\Rightarrow Z_F A_0\cdot(-j\beta) = (R' + j\omega L')\cdot\frac{2A_0}{\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$\Rightarrow R' + j\omega L' = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\cdot\pi\cdot j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}}{2\ln(b/a)} = \frac{j\omega\mu_0\pi}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

$\Rightarrow \underline{\underline{R' = 0}} \quad ; \quad L' = \frac{\mu_0\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)2}$

$\boxed{F06}$ Aufgabe 3 (1)

a) Helmholtz-Gleichung: $\Delta \vec{\underline{E}} + k^2 \underline{E} = 0$ mit $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$

Wegen $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot e^{-j\beta z} = -\beta^2 \cdot e^{-j\beta z}$, vereinfacht sich

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ zu } \Delta = \Delta_{trans} + -\beta^2$$

$$\Rightarrow \Delta_{trans} \tilde{\underline{f}} + (k^2 - \beta^2)\tilde{\underline{f}} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \tilde{\underline{f}}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \tilde{\underline{f}}}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \beta^2)\tilde{\underline{f}} = 0 \qquad (1)$$

b) Separation in zylindrischen Koordinaten: $\tilde{\underline{f}}(\rho,\varphi) = \Psi(\rho)\cdot R(\varphi)$

Gegeben: $R''(\varphi) + m^2 R(\varphi) = 0 \qquad (2)$

Für $m \neq 0$: $\Rightarrow R(\varphi) = A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)$

Für $m = 0$: $\Rightarrow R(\varphi) = A_0 + B_0\varphi$

c) Aus $\tilde{\underline{f}}(\rho,\varphi) = \Psi(\rho)\cdot R(\varphi)$ folgt mit Gleichung [1]:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Psi(\rho)}{\partial \rho}\right) R(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 R(\varphi)}{\partial \varphi^2}\cdot\Psi(\rho) + (k^2-\beta^2) R(\varphi)\cdot\Psi(\rho) = 0 \quad \Big|\cdot\frac{1}{R(\varphi)}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Psi(\rho)}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{1\cdot\partial^2 R(\varphi)}{R(\varphi)\,\partial \varphi^2}}_{=-m^2}\cdot\Psi(\rho) + (k^2-\beta^2)\cdot\Psi(\rho) = 0$$

Mit Gleichung [2] folgt:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Psi(\rho)}{\partial \rho}\right) + \frac{-m^2}{\rho^2}\cdot\Psi(\rho) + (k^2-\beta^2)\Psi(\rho) = 0 \quad \Big|\cdot\frac{1}{\Psi(\rho)}$$

F06 Aufgabe 3 ②

$$\frac{1}{\Psi(\rho)}\frac{\partial^2 \Psi(\rho)}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{\Psi(\rho)}\frac{\partial \Psi(\rho)}{\partial \rho}+\Big(\underbrace{k^2-\beta^2}_{=p^2}-\frac{m^2}{\rho^2}\Big)=0$$

Mit Hinweis aus Unterpunkt c):

Besselsche Differentialgleichung, allgemeine Lösung:

$$\Psi(\rho)=C_p\cdot J_m(p\rho)+D_p\cdot N_m(p\rho)$$

d) Zusammenhang zwischen $\vec{\underline{E}}$ und $\vec{\underline{F}}$ laut Formelsammlung:

$$\vec{\underline{E}}=-\nabla\times\vec{\underline{F}}=\underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}}_{E_\rho}\cdot\vec{e}_\rho+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial \rho}}_{E_\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi \quad \text{mit } \underline{F}=\tilde{\underline{F}}e^{-j\beta z}$$

Gefragt ist die Randbedingung bei G_1 $(\varphi=0,\varphi=\pi)$:

$$\vec{\underline{E}}_{nor}\Big|_{\varphi=0,\varphi=\pi}=0 \Rightarrow E_\varphi(\varphi=0)=E_\varphi(\varphi=\pi)=0 \Rightarrow \frac{\partial\Psi(\rho)}{\partial\rho}R(\varphi)e^{-j\beta z}\Big|_{\varphi=0,\varphi=\pi}=0$$

Randbedingung bei $\varphi=0$:

Für $m\neq 0$: $\Rightarrow R(\varphi)=A_m\cos(m\varphi)+B_m\sin(m\varphi)$

$$A_m\cos(0)+B_m\sin(0)=0 \Rightarrow A_m=0$$

Für $m=0$: $\Rightarrow R(\varphi)=A_0+B_0\cdot 0 \Rightarrow A_0=0$

Randbedingung bei $\varphi=\pi$

Für $m\neq 0$: $\Rightarrow R(\varphi)=B_m\sin(m\pi) \Rightarrow m=1,2,3,4,5,\ldots$

Für $m=0$: $\Rightarrow R(\varphi)=B_0\cdot\pi \quad \Rightarrow B_0=0$

Für $\underline{F}$ ergibt sich: $\underline{F}=B_m\sin(m\varphi)\cdot\big(C_p\cdot J_m(p\rho)+D_p\cdot N_m(p\rho)\big)\cdot e^{-j\beta z}$

FOG

Aufg. 3 3

e) $\underline{E}$ muss für $\rho \to 0$ nicht-singulär bleiben. $N_m(p\rho)$ weist aber eine Singularität bei $\rho = 0$ auf

$\Rightarrow D_{pm} = 0$

Randbedingung bei $\rho = a$:

$\vec{\underline{E}}_{tan}|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow E_\varphi(\rho = a) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \underline{E}}{\partial \rho}|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Psi(\rho)}{\partial \rho}|_{\rho=a} = 0$

$\frac{\partial \Psi(\rho)}{\partial \rho}|_{\rho=a} = C_p \cdot J_m'(p\rho) \cdot p \Rightarrow C_p \cdot J_m'(p\rho)|_{\rho=a} = 0,$

$\frac{\partial J_m(pa)}{\partial \rho} = 0$

$\Rightarrow p \cdot a = x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \ldots$, wobei x_{mn} die n'te Nullstelle von $J_m' = \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$ ist

$p_{mn} \cdot a = x_{mn}$ mit $p_{mn} = p_{m1}, p_{m2}, p_{m3}, \ldots$ und p_{mn} reell

Für $\underline{E}$ ergibt sich jetzt: $\underline{E} = B_m \sin(m\varphi) \cdot C_n \cdot J_m(p_{mn}\rho) e^{-j\beta_{mn}t}$

mit $\tilde{B}_{mn} = B_m C_{mn}$ ergibt sich $\underline{E}$ zu: $\underline{E} = \tilde{B}_{mn} \sin(m\varphi) J_m(p_{mn}\rho) e^{-j\beta_{mn}z}$

Seperationsbed.: $p_{mn}^2 = k^2 - \beta_{mn}^2$

$\beta_{mn}^2 = k^2 - p_{mn}^2$

$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu_0 - p_{mn}^2}$

β_{mn} positiv reell aus Aufg.

F06 Aufg 3 (4)

f) $\underline{\vec{E}} = -\nabla \times \underline{\vec{F}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{e}_\rho + \frac{\partial F}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi$

$$E_\varphi = \frac{\partial F}{\partial \rho} = \tilde{B}_{mn}\sin(m\varphi)\cdot\frac{\partial J_m(p_{mn}\rho)}{\partial \rho}\, e^{-j\beta_{mn}z}$$

$$E_\rho = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\frac{\tilde{B}_{mn} m}{\rho}\cos(m\varphi)\cdot J_m(p_{mn}\rho)\cdot e^{-j\beta_{mn}z}$$

g) Durch die Seperationsbed. ist $\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu_0 - p_{mn}^2}$ bekannt und muss positiv reell sein.

Für Grenzfreq. ω_{min} ist der Fall $\beta_{mn} = 0$ gefragt

$$0 = \sqrt{\omega_{mn}^2\varepsilon\mu_0 - p_{mn}^2} \Rightarrow \omega_{mn}^2\varepsilon\mu_0 = p_{mn}^2$$

$$\Rightarrow \omega_{mn} = \sqrt{\frac{p_{mn}^2}{\varepsilon\mu_0}}$$

Aus Tabelle: x_{mn} ($= p_{mn}a$) für $m=1, n=1$ (d.h. $\omega_{min} = \omega_{11}$) deutet auf kleinste Nst.

$$x_{11}' = 1{,}8412 \quad \text{und} \quad a = 2\,\text{cm} \Rightarrow p_{11} = \frac{1{,}8412}{2\,\text{cm}}$$

für ω_{min} ergibt sich: $\omega_{min} = \sqrt{\frac{1.8412^2}{(2\,\text{cm})^2\varepsilon\mu_0}}$

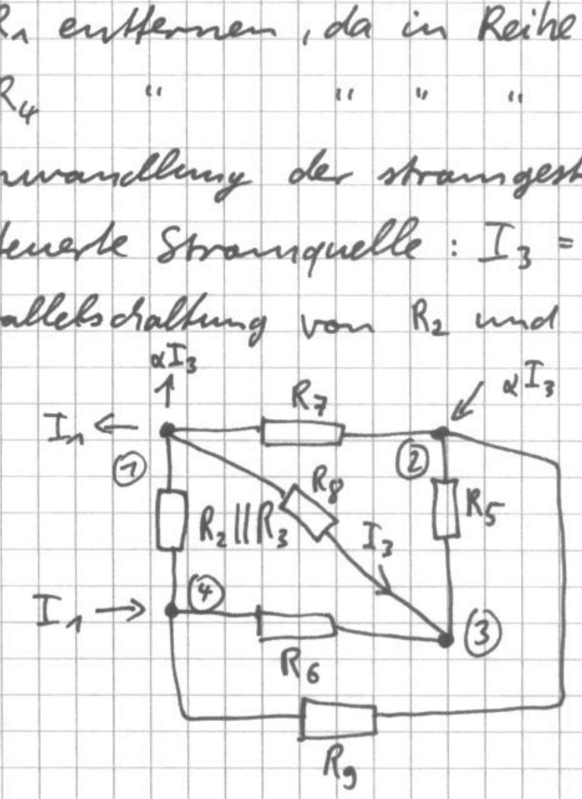
$$= \frac{1{,}8412}{2\,\text{cm}}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu_0}} = \frac{0{,}9206}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}\,\text{cm}}$$

EMF Abschrift Lösung F06 A4

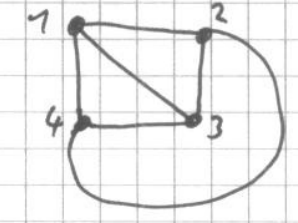
a) - J_2 entfernen, da in jedem Zweig eines Maschenumlaufs vorhanden.

- R_1 entfernen, da in Reihe mit idealer Stromquelle
- R_4 " " " " " Stromquelle

- Umwandlung der stromgesteuerten in eine spannungsgesteuerte Stromquelle: $I_3 = \frac{U_{R8}}{R_8}$
- Parallelschaltung von R_2 und R_3



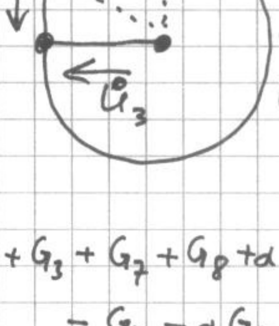
b) Graph:



$p = 3$

$m = 3$

Baum mit Baumzweigspannungen



c)

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 + G_3 + G_7 + G_8 + \alpha G_8 & -G_7 & -G_8 - \alpha G_8 \\ -G_7 - \alpha G_8 & G_5 + G_7 + G_9 & -G_5 + \alpha G_8 \\ -G_8 & -G_5 & G_5 + G_6 + G_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\otimes}{U}_1 \\ \overset{\otimes}{U}_2 \\ \overset{\otimes}{U}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\otimes}{U}_1 \\ \overset{\otimes}{U}_2 \\ \overset{\otimes}{U}_3 \end{bmatrix}$$

~~d) $\overset{\otimes}{Y}(G_i = G) = \begin{bmatrix} 4G+\alpha G & -G & -G-\alpha G \end{bmatrix}$~~

d) $$\overset{\otimes}{Y}(G_i = G) = \begin{bmatrix} 4G + \alpha G & -G & -G - \alpha G \\ -G - \alpha G & 3G & -G + \alpha G \\ -G & -G & 3G \end{bmatrix}$$

Über R_3 fällt nur die Spannung $\overset{\otimes}{U}_2$ ab. Diese muss 0 werden.

Cramersche Regel: $$\overset{\otimes}{U}_2 = \frac{J_1(-4G^2 - 2\alpha G^2)}{\det \overset{\otimes}{Y}(G_i = G)} = 0$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow \alpha = -2}}$$

F06

Aufgabe 5 ①

a) Reziprozität: $\underline{S}^{(L)} = \underline{S}^{(L)T} \Rightarrow \underline{S}_{12}^{(L)} = \underline{S}_{21}^{(L)}$, $\underline{S}_{13}^{(L)} = \underline{S}_{31}^{(L)}$,

$\underline{S}_{14}^{(L)} = \underline{S}_{41}^{(L)}$, $\underline{S}_{32}^{(L)} = \underline{S}_{23}^{(L)}$, $\underline{S}_{42}^{(L)} = \underline{S}_{24}^{(L)}$, $\underline{S}_{43}^{(L)} = \underline{S}_{34}^{(L)}$

Symmetrie: $\underline{S}_{11}^{(L)} = \underline{S}_{22}^{(L)} = \underline{S}_{33}^{(L)} = \underline{S}_{44}^{(L)}$ und $\underline{S}_{23}^{(L)} = \underline{S}_{14}^{(L)}$, $\underline{S}_{24}^{(L)} = \underline{S}_{13}^{(L)}$,

$\underline{S}_{34}^{(L)} = \underline{S}_{12}^{(L)}$

b) $\varphi_E = \varphi_0 \Rightarrow \beta_E l = \beta_0 l \Rightarrow \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_{effE}}}{c_0} l = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_{eff0}}}{c_0} l$

$\Rightarrow \varepsilon_{effE} = \varepsilon_{eff0} \Rightarrow \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$

Für $\varphi_E = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ist $\underline{A} = \frac{1}{1 - j z_{LE}}$, $\underline{B} = \frac{1}{1 + j z_{LE}}$,

$\underline{C} = \frac{1}{1 - j z_{L0}}$, $\underline{D} = \frac{1}{1 + j z_{L0}}$

Reflexionsfreiheit an allen 4 Toren: $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} = \underline{S}_{33} = \underline{S}_{44} = 0.$

Zusammenhang zwischen z_{LE} und z_{L0}:

$$\underline{S}_{11}^{(L)} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-jz_{LE}} + \frac{1}{1+jz_{LE}} + \frac{1}{1-jz_{L0}} + \frac{1}{1+jz_{L0}}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 + jz_{LE} + 1 - jz_{LE}}{1 + z_{LE}^2} + \frac{1 - jz_{L0} + 1 + jz_{L0}}{1 + z_{L0}^2}\right)$$

$$1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1 + z_{LE}^2} + \frac{2}{1 + z_{L0}^2}\right)$$

$$1 + z_{LE}^2 + z_{L0}^2 + z_{LE}^2 z_{L0}^2 = 1 + z_{L0}^2 + 1 + z_{LE}^2$$

$$z_{LE}^2 z_{L0}^2 = 1$$

$\underline{S}_{21}^{(L)}$, $\underline{S}_{31}^{(L)}$ und $\underline{S}_{41}^{(L)}$ lassen sich dann vereinfachen zu:

$$\underline{S}_{21}^{(L)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+z_{LE}^2} - \frac{2}{1+z_{L0}^2}\right) = -\left(\frac{1}{1+z_{LE}^2} - \frac{z_{LE}^2}{z_{LE}^2+1}\right) = \frac{z_{LE}^2 - 1}{1 + z_{LE}^2}$$

F06

Aufgabe 5 (2)

$$\underline{S}_{31}^{(L)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2j z_{LE}}{1+z_{LE}^2} - \frac{2j z_{LO}}{1+z_{LO}^2}\right) = -\left(\frac{j z_{LE}}{1+z_{LE}^2} - \frac{j z_{LE}}{z_{LE}^2+1}\right) = 0$$

$$\underline{S}_{41}^{(L)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2j z_{LE}}{1+z_{LE}^2} + \frac{2j z_{LO}}{1+z_{LO}^2}\right) = -\left(\frac{j z_{LE}}{1+z_{LE}^2} + \frac{j z_{LE}}{z_{LE}^2+1}\right) = \frac{-2j z_{LE}}{1+z_{LE}^2}$$

Mit den Abkürzungen $\underline{p} = \frac{z_{LE}^2 - 1}{z_{LE}^2 + 1}$ und $\underline{q} = \frac{-2j z_{LE}}{z_{LE}^2+1}$ gilt

$$\underline{S}^{(L)} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{p} & 0 & \underline{q} \\ \underline{p} & 0 & \underline{q} & 0 \\ 0 & \underline{q} & 0 & \underline{p} \\ \underline{q} & 0 & \underline{p} & 0 \end{bmatrix}$$

c) Reflexionsfaktor eines Kurzschlusses: $\underline{\Gamma} = -1$. Also ist

$$\underline{b} = \underline{S}^{(L)} \cdot \underline{a}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ -\underline{a}_2 \\ \underline{b}_3 \\ -\underline{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{p} & 0 & \underline{q} \\ \underline{p} & 0 & \underline{q} & 0 \\ 0 & \underline{q} & 0 & \underline{p} \\ \underline{q} & 0 & \underline{p} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 \\ \underline{a}_4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{a}_2 = -\underline{p}\,\underline{a}_1 - \underline{q}\,\underline{a}_3$ und $\underline{a}_4 = -\underline{q}\,\underline{a}_1 - \underline{p}\,\underline{a}_3$.

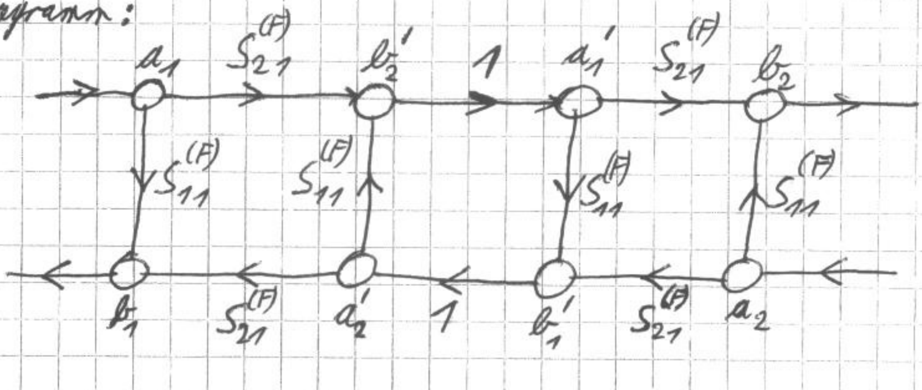
Damit folgt $\underline{b}_1 = -\underline{p}^2\underline{a}_1 - \underline{p}\,\underline{q}\,\underline{a}_3 - \underline{q}^2\underline{a}_1 - \underline{q}\,\underline{p}\,\underline{a}_3$ und aus Symmetrie- und Reziprozitätsgründen

$$\underline{S}^{(F)} = \begin{bmatrix} -\underline{p}^2 - \underline{q}^2 & -2\underline{p}\,\underline{q} \\ -2\underline{p}\,\underline{q} & -\underline{p}^2 - \underline{q}^2 \end{bmatrix}$$

F06

Aufgabe 5 (3)

d) Signalflussdiagramm:



ablesen:

$$\underline{b}_2' = \underline{S}_{21}^{(F)} \underline{a}_1 + \underline{S}_{11}^{(F)} \left(\underline{S}_{21}^{(F)} \underline{a}_2 + \underline{S}_{11}^{(F)} \underline{b}_2' \right)$$

$$= \frac{\underline{S}_{21}^{(F)}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{11}^{(F)} \underline{S}_{21}^{(F)}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \underline{a}_2$$

$$\underline{b}_1 = \underline{S}_{11}^{(F)} \underline{a}_1 + \underline{S}_{21}^{(F)} \left(\underline{S}_{21}^{(F)} \underline{a}_2 + \underline{S}_{11}^{(F)} \underline{b}_2' \right)$$

$$= \underline{S}_{11}^{(F)} \underline{a}_1 + \underline{S}_{21}^{(F)2} \underline{a}_2 + \underline{S}_{11}^{(F)} \underline{S}_{21} \left(\frac{\underline{S}_{21}^{(F)}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{11}^{(F)} \underline{S}_{21}^{(F)}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \underline{a}_2 \right)$$

$$= \underline{S}_{11}^{(F)} \underline{a}_1 + \underline{S}_{21}^{(F)2} \underline{a}_2 + \frac{\underline{S}_{11}^{(F)} \underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{11}^{(F)2} \underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \underline{a}_2$$

$$= \underline{S}_{11}^{(F)} \frac{1-\underline{S}_{11}^{(F)2} + \underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{21}^{(F)2} - \underline{S}_{21}^{(F)2} \underline{S}_{11}^{(F)2} + \underline{S}_{11}^{(F)2} \underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \underline{a}_2$$

Damit ist die erste Zeile von $\underline{S}^{(K)}$ bekannt, und aus Symmetrie und Reziprozitätsgründen folgt

$$\underline{S}^{(K)} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}^{(F)} \dfrac{1-\underline{S}_{11}^{(F)2} + \underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} & \dfrac{\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \\ \dfrac{\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} & \underline{S}_{11}^{(F)} \dfrac{1-\underline{S}_{11}^{(F)2} + \underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \end{bmatrix}$$

e) Für verlustlose N-Tore gilt $\underline{S} \cdot \underline{S}^{*T} = E$.

F06

Aufgabe 5 (4)

Das Filter ist reziprok, daher vereinfacht sich dies zu

$$\underline{S}^{(F)} \cdot \underline{S}^{(F)*} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}^{(F)} & \underline{S}_{21}^{(F)} \\ \underline{S}_{21}^{(F)} & \underline{S}_{22}^{(F)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}^{(F)*} & \underline{S}_{21}^{(F)*} \\ \underline{S}_{21}^{(F)*} & \underline{S}_{22}^{(F)*} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left|\underline{S}_{11}^{(F)}\right|^2 + \left|\underline{S}_{21}^{(F)}\right|^2 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Also ist $\left|\underline{S}_{11}^{(F)}\right|^2 + \left|\underline{S}_{21}^{(F)}\right|^2 = 1.$

f) Da $\underline{S}_{11}^{(F)}$ rein reell und $\underline{S}_{21}^{(F)}$ rein imaginär ist, gilt:

$$\underline{S}_{11}^{(K)} = \underline{S}_{11}^{(F)} \frac{1 - \underline{S}_{11}^{(F)2} + \underline{S}_{21}^{(F)2}}{1 - \underline{S}_{11}^{(F)2}}$$

$$= \underline{S}_{11}^{(F)} \frac{1 - \left|\underline{S}_{11}^{(F)}\right|^2 - \left|\underline{S}_{21}\right|^2}{1 - \underline{S}_{11}^{(F)2}}$$

$$= 0$$

$$\underline{S}_{21}^{(K)} = \frac{\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1 - \underline{S}_{11}^{(F)2}}$$

$$= \frac{-\left|\underline{S}_{21}^{(F)}\right|^2}{1 - \left|\underline{S}_{11}^{(F)}\right|^2}$$

$$= -1$$

und damit $\underline{S}^{(K)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

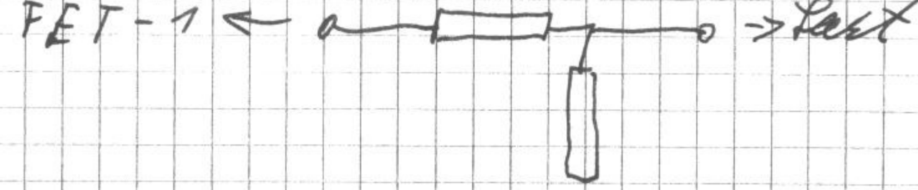
F 06 / A6 Musterlösung

a) Stichleitung wirkt wie paralleler ~~Kondensa~~ Kondensator -> Abschluss = open

$l_p = 0,164\,\lambda$

$l_s = 0,134\,\lambda$

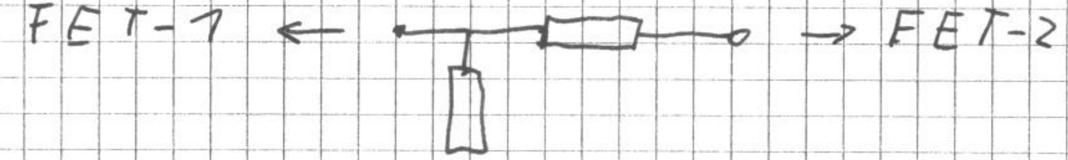
Topologie :



b) Bestimmen von S_{22} aus S_{22}^* => $S_{22} = 0,64 \measuredangle -134°$

$\measuredangle -134°$

c) Neue Topologie:



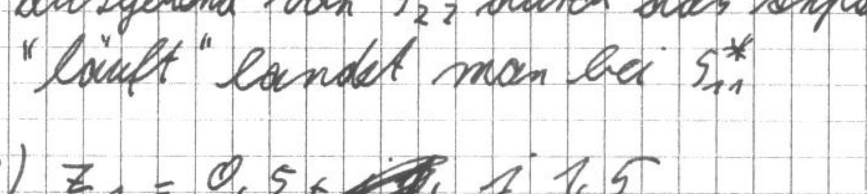
Abschluss: open

$l_s = 0,088\,\lambda$

$l_p = 0,06\,\lambda$

d) Am Eingang von FET-2 liegt ebenfalls Leitungsanpassung vor. Wenn man ausgehend von S_{22} durch das Anpassungsnetzwerk "läuft" landet man bei S_{11}^*

e) $Z_A = 0,5 + j\,1,5$



$Z_c = 1,06$

$Y_c = 0,75$

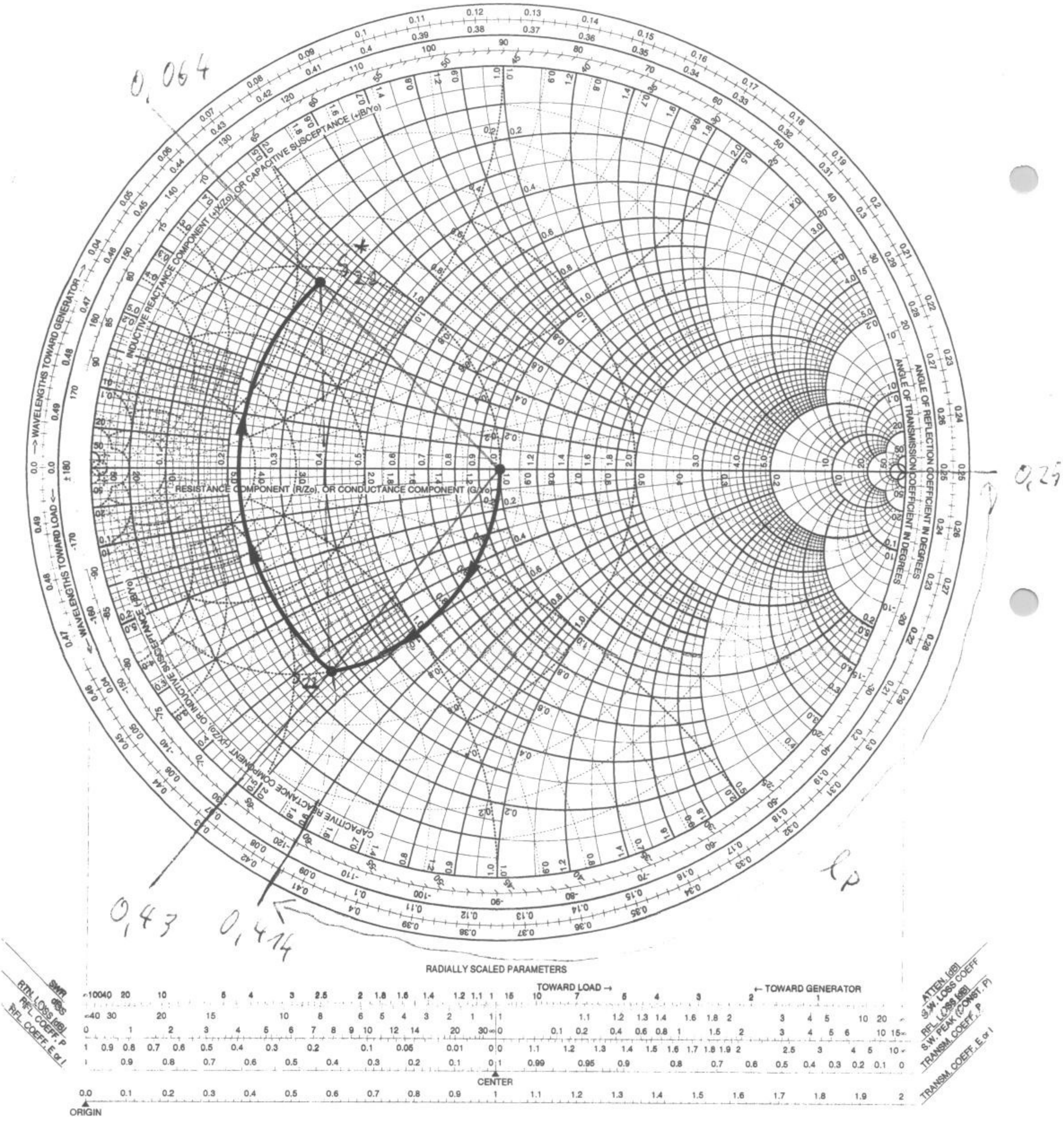
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.–Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2006

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt a), b)

Name: ______________________ **Matr.Nr.:** ____________



Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

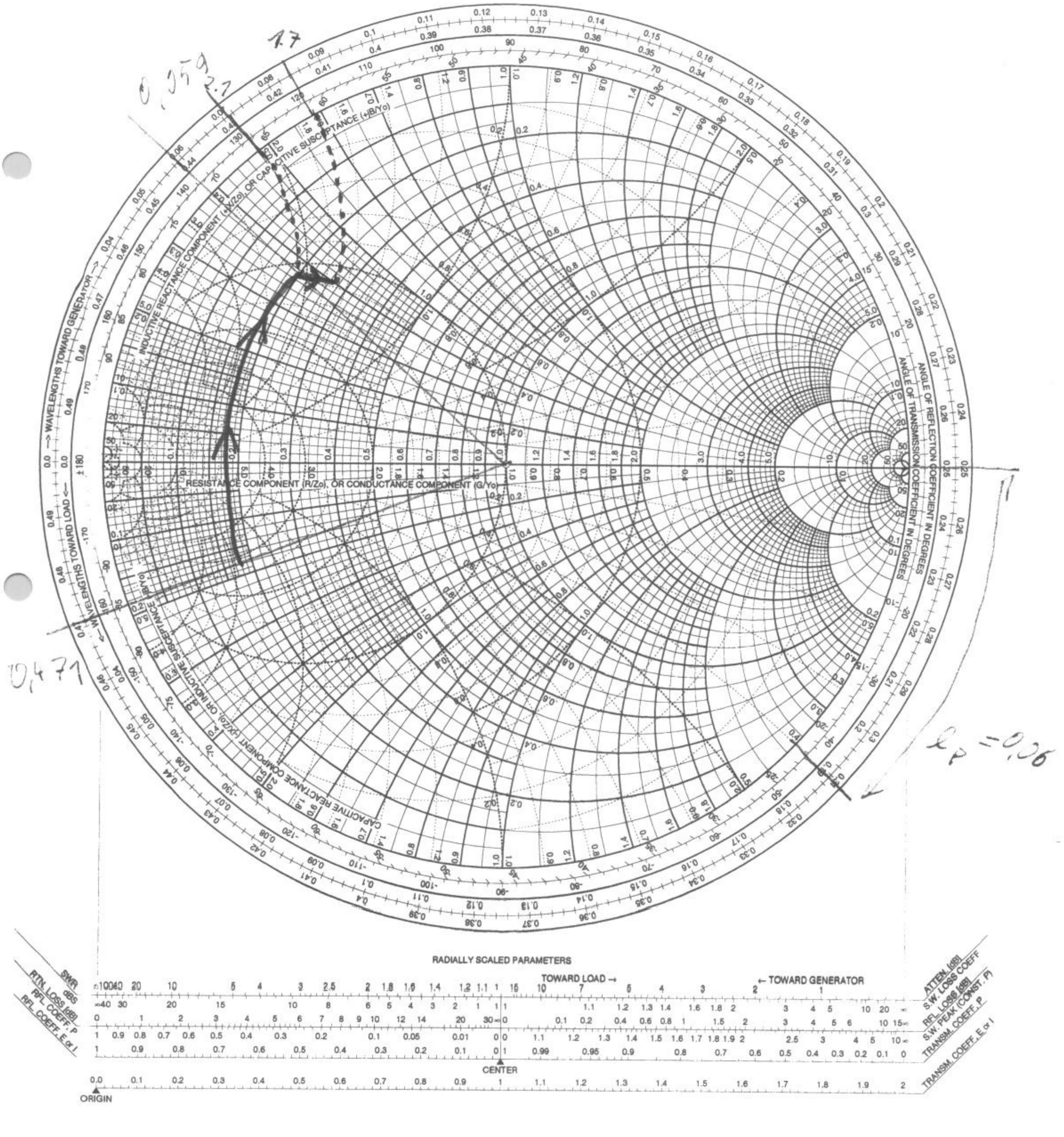
Frühjahr 2006

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt c)

Name: ______________________ **Matr.Nr.:** ___________

2.1 − 1.7 = 0,4



Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2006

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt e)

Name: ____________________ **Matr.Nr.:** __________