LÖSUNG ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1
FRÜHJAHR 2001

Dies ist keine offizielle Musterlösung vom ITHE.

Aufgabe 1

a). Aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{\vec{E}} &= -j\omega\mu_0 \underline{\vec{H}} \\ \operatorname{rot} \underline{\vec{H}} &= (\sigma_0 + j\omega\varepsilon_0)\underline{\vec{E}} \approx \sigma_0 \underline{\vec{E}} \\ \varepsilon_0 \operatorname{div} \underline{\vec{E}} &= 0 \\ \mu_0 \operatorname{div} \underline{\vec{H}} &= 0 \end{aligned}$$

folgt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = \sigma(\operatorname{rot} \underline{\vec{E}}) = -j\omega\mu_0\sigma_0 \underline{\vec{H}}$$

Mit der Identität $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \underline{\vec{H}} - \Delta\underline{\vec{H}}$ folgt die Differenzialgleichung

$$\Delta\underline{\vec{H}} - j\omega\mu_0\sigma_0\underline{\vec{H}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\underline{\vec{H}} - \underline{k}^2\underline{\vec{H}} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad \underline{k} := \frac{1-j}{\delta} \quad \text{und} \quad \delta := \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}$$

b). Im Zwischenraum erhalten wir $\underline{H}_\varphi$ am leichtesten durch ein Umlaufintegral:

$$\oint \underline{\vec{H}}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underline{H}_\varphi(\rho)\rho\, d\varphi = I$$

$$\Rightarrow \quad \underline{H}_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}$$

Im Außenraum ist $\underline{\vec{H}} \equiv \vec{0}$, da in der Summe kein Strom umschlossen wird.

c).

$$\begin{aligned} & \Delta\underline{H}_\varphi(\rho) - \underline{k}^2\underline{H}_\varphi(\rho) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\, \underline{H}_\varphi(\rho))\right) + \underline{k}^2\underline{H}_\varphi(\rho) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{d^2\underline{H}_\varphi(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\underline{H}_\varphi(\rho)}{d\rho} + \left(\underline{k}^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\underline{H}_\varphi(\rho) = 0 \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um eine Bessel-DGL 1. Ordnung. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\underline{H}_\varphi(\rho) = \underline{A}J_1(\underline{k}\rho) + \underline{B}N_1(\underline{k}\rho)$$

Dabei sind $\underline{A}$ und $\underline{B}$ beliebige komplexe Konstanten.

d). Im Innenleiter muss $\underline{B} = 0$ sein, da das magnetische Feld für $\rho \to 0$ nicht singulär wird.
Die andere Konstante können wir über die Randbedingung bei $\rho = R$ bestimmen.
Hier muss $\underline{H}_\varphi(\rho)$ stetig sein.
Mit dem Ergebnis aus b) folgt die Gleichung

$$\underline{A} J_1(\underline{k}R) = \frac{I}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{A} = \frac{I}{2\pi R\, J_1(\underline{k}R)}$$

Die Komponente $\underline{H}_\varphi(\rho)$ im Innenleiter ist also

$$\underline{H}_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi R\, J_1(\underline{k}R)}\, J_1(\underline{k}\rho)$$

e).

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{J}} &= \text{rot}\, \underline{\vec{H}} \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{d\rho}(\rho \underline{H}_\varphi(\rho))\right) \vec{e}_z \\
&= \frac{I\,\underline{k}}{2\pi R\, J_1(\underline{k}R)}\, J_0(\underline{k}\rho)\, \vec{e}_z \qquad ?
\end{aligned}$$

f). Mit $\omega \to 0$ geht auch $\underline{k} \to 0$.
Außerdem gilt $J_1(\underline{k}R) \to \frac{\underline{k}R}{2}$ für $\underline{k} \to 0$. ?
Damit gilt für den Gleichstromfall:

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{J}} &= \frac{I\,\underline{k}}{2\pi R\, J_1(\underline{k}R)}\, J_0(\underline{k}\rho)\, \vec{e}_z \\
&\xrightarrow{\omega \to 0} \frac{2\,I\,\underline{k}}{2\pi R \underline{k} R} = \frac{I}{\pi R^2}
\end{aligned}$$

Der Strom verteilt sich also gleichmäßig über den Leiterquerschnitt.

Aufgabe 2

a).

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}} &= -\frac{1}{j\omega\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}} \\
&= -\frac{1}{j\omega\mu_0}\,\frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\underline{E}_\varphi\sin\vartheta)\,\vec{e}_r \\
&\quad + \frac{1}{j\omega\mu_0}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{E}_\varphi)\,\vec{e}_\vartheta \\
&= \frac{1}{j\omega\mu_0}\,\frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{A_0\omega\mu_0}{\underline{k}r}\,\mathrm{e}^{-j\underline{k}r}\,2\sin\vartheta\,\underbrace{\cos\vartheta}_{\approx 0}\,\vec{e}_r \\
&\quad - \frac{1}{j\omega\mu_0}\,\frac{1}{r}(-j\underline{k})A_0\omega\mu_0\frac{1}{\underline{k}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-j\underline{k}r}\,\vec{e}_\vartheta \\
&= \frac{A_0}{r}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-j\underline{k}r}\,\vec{e}_\vartheta \qquad \text{unter Vernachlässigung von } \underline{H}_r
\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}
\vec{H}(r,\vartheta,t) &= \frac{A_0}{r}\sin\vartheta\,\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{-j\underline{k}r+j\omega t}\}\,\vec{e}_\vartheta \\
&= \frac{A_0}{r}\sin\vartheta\,\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{-k''r+j(\omega t-k'r)}\}\,\vec{e}_\vartheta \\
&= \frac{A_0}{r}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-k''r}\cos(\omega t-k'r)\,\vec{e}_\vartheta
\end{aligned}$$

Phase: $\omega t - k'r$
Phasenflächen: $r = \mathrm{const} \rightarrow$ Kugeln
Ausbreitungsrichtung: $\vec{n} = \vec{e}_r$
Wegen $\vec{E} \perp \vec{n}$ und $\vec{H} \perp \vec{n}$ handelt es sich um eine TEM-Welle.

c).

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}} &= \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}} \\
&= \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{H}_\vartheta)\,\vec{e}_\varphi \\
&= \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon}\,\frac{-j\underline{k}}{r}A_0\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-j\underline{k}r}\,\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Formel für $\underline{\vec{E}}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega\mu_0}{\underline{k}} &= \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon}\,j\underline{k} \\
\rightarrow\quad \underline{k}^2 &= -j(\sigma + j\omega\varepsilon)\omega\mu_0 \\
&= \omega^2\varepsilon\mu_0 - j\sigma\omega\mu_0 \\
&= \omega^2\varepsilon\mu_0\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \\
&= \frac{\omega^2}{v_0^2}\left(1 - \frac{j}{\omega\tau}\right)
\end{aligned}$$

d).

$$\underline{k} = \frac{\omega}{v_0}\sqrt{1 - \frac{j}{\omega\tau}} \approx \frac{\omega}{v_0}\left(1 - \frac{j}{2\omega\tau}\right)$$

1) $k' = \frac{\omega}{v_0} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\omega}{k'} = v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\mathrm{Ph}}}{v_0} = 1$

2) $v_{\mathrm{Gr}} = \left(\frac{dk'}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{v_0}\right)^{-1} = v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\mathrm{Gr}}}{v_0} = 1$

3) $k''\Delta r = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta r = \frac{1}{k''} = 2\tau v_0$?

$\frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{\Delta r k'}{2\pi} = \frac{2\tau v_0 k'}{2\pi} = \frac{\tau\omega}{\pi} \gg 1$ (schwache Dämpfung)

Aufgabe 3

a).

$$\Delta \underline{H}_{1x} + \varepsilon_1 \mu_0 \omega^2 \underline{H}_{1x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon_1 \mu_0 \omega^2 \right) \underline{H}_{1x} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\alpha_1^2 - \frac{2}{5} k_1^2 + \varepsilon_1 \mu_0 \omega^2 \right) \underline{A} \cos(\alpha_1 y)\, \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1^2 = k_1^2 - \frac{2}{5} k_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 \qquad \text{da } \alpha_1 \text{ positiv nach Aufgabenstellung}$$

$$\Delta \underline{H}_{2x} + \varepsilon_2 \mu_0 \omega^2 \underline{H}_{2x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon_2 \mu_0 \omega^2 \right) \underline{H}_{2x} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\alpha_2^2 - \frac{6}{5} k_2^2 + \varepsilon_2 \mu_0 \omega^2 \right) \underline{B}\, \mathrm{e}^{\alpha_2 y}\, \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}} k_2 z} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2^2 = \frac{6}{5} k_2^2 - k_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{5}}\, k_2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = -\sqrt{\frac{1}{5}}\, k_2 \qquad \text{da } \underline{H}_2 \to 0 \text{ für } y \to \infty$$

b).

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}}_1 &= \frac{1}{j\omega\varepsilon_1} \operatorname{rot} \underline{\vec{H}}_1 \\
&= \frac{1}{j\omega\varepsilon_1} \left(\frac{\partial \underline{H}_{1x}}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial \underline{H}_{1x}}{\partial y} \vec{e}_z \right) \\
&= \frac{1}{j\omega\varepsilon_1} \left(-j\sqrt{\frac{2}{5}}\, k_1 \underline{A} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 y \right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z}\, \vec{e}_y \right. \\
&\qquad \left. + \sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 \underline{A} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 y \right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z}\, \vec{e}_z \right) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\, \underline{A} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 y \right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z}\, \vec{e}_y \\
&\quad - j\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\, \underline{A} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 y \right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z}\, \vec{e}_z
\end{aligned}$$

analog:

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}}_2 &= -\sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\, \underline{B}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}} k_2 y}\, \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}} k_2 z}\, \vec{e}_y \\
&\quad - j\sqrt{\frac{1}{5}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\, \underline{B}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}} k_2 y}\, \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}} k_2 z}\, \vec{e}_z
\end{aligned}$$

c). Die Grenzbedingungen auf einem idealen Leiter lauten: $\underline{\vec{E}}_{\text{tang}} = \vec{0}$ und $\underline{H}_{\text{norm}} = 0$, im vorliegenden Fall also:

$$\underline{E}_x\big|_{y=0} = 0$$
$$\underline{E}_z\big|_{y=0} = 0$$
$$\underline{H}_y\big|_{y=0} = 0$$

Diese drei Bedingungen sind offensichtlich erfüllt.

d). Bei $y = d$ müssen die Tangentialkomponenten von $\underline{\vec{E}}$ und $\underline{\vec{H}}$ stetig sein, also:

(1) $$\underline{E}_{1z}\big|_{y=d} = \underline{E}_{2z}\big|_{y=d}$$

(2) $$\underline{H}_{1x}\big|_{y=d} = \underline{H}_{2x}\big|_{y=d}$$

Aus (2) folgt:

(3) $$\underline{A}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}}k_1 z} = \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}}k_2 d}\,\mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}}k_2 z}$$

Da diese Gleichung für alle z gelten muss, müssen die beiden Phasenterme gleich sein:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}\,k_1 = \sqrt{\frac{6}{5}}\,k_2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2}{5}\varepsilon_1 = \frac{6}{5}\varepsilon_2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{3}$$

Nun können wir in (3) die Exponentialfunktionen kürzen und erhalten:

(4) $$\underline{A}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right) = \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}}k_2 d}$$

Aus (1) folgt

$$-j\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,\underline{A}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right)\mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}}k_1 z} = -j\sqrt{\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\,\underline{B}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}}k_2 d}\,\mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}}k_2 z}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right) = \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}}k_2 d}$$

Division dieser Gleichung durch (4) ergibt:

$$\tan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d = \frac{\pi}{4} + n\pi \qquad \text{n} = 0, 1, 2\ldots$$

$$\Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{5}{3}}\,\frac{1}{k_1}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$$

e).

$$\underline{\vec{H}}_{2'} = \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 y}\,\mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}}k_2 z}\,\vec{e}_x$$