F 03 Musterlösung 1/5

Aufgabe 1 18 Punkte

a) $\vec{H} = \frac{1}{Z} (\vec{n} \times \vec{E})$ $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$$H_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \\ 0 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \\ 0 \\ \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} E_{0e}\, e^{-j \vec{k}_e \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0\, e^{-j \vec{k}_e \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}}\, \vec{e}_y\, E_{0e}\, e^{-j \vec{k}_e \vec{r}}$$

$$H_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \\ 0 \\ -\cos \vartheta_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos \vartheta_1 \\ 0 \\ \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} E_{0r}\, e^{-j \vec{k}_r \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_1 \\ 0 \end{pmatrix} E_{0r}\, e^{-j \vec{k}_r \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}}\, \vec{e}_y\, E_{0r}\, e^{-j \vec{k}_r \vec{r}}$$

$$H_d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0}} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ 0 \\ \cos \vartheta_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \vartheta_2 \\ 0 \\ \sin \vartheta_2 \end{pmatrix} E_{0d}\, e^{-j \vec{k}_d \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2 \vartheta_2 + \sin^2 \vartheta_2 \\ 0 \end{pmatrix} E_{0d}\, e^{-j \vec{k}_d \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0}}\, \vec{e}_y\, E_{0d}\, e^{-j \vec{k}_d \vec{r}}$$

b) $(\vec{E}_e + \vec{E}_r) \times \vec{e}_z = \vec{E}_d \times \vec{e}_z$

$(\vec{H}_e + \vec{H}_r) \times \vec{e}_z = \vec{H}_d \times \vec{e}_z$

c) $[\vec{H}_e + \vec{H}_r - \vec{H}_d] \times \vec{e}_z = 0$

mit $\vec{H}_i = \frac{1}{Z_i}\, n_i \times E_i$ $i = e, r, d$

FO] Musterlösung 2/5

also

$$* \quad \left\{ \sqrt{\varepsilon_1} \left(\vec{n}_e \times \vec{E}_e + \vec{n}_r \times \vec{E}_r \right) - \sqrt{\varepsilon_2} \left(\vec{n}_d \times \vec{E}_d \right) \right\} \times \vec{e}_z = 0$$

mit $E_i = E_{0i}\, e^{-j \vec{\beta}_i \vec{r}} \cdot n_i$

$*$ nur dann gültig $\forall \vec{r}$ in der $z=0$ Ebene, falls die Phasen aller 3 Summenterme gleich sind, d.h.

$$|\vec{k}_e|\, \vec{n}_e \vec{r} = |\vec{k}_r|\, n_r \vec{r} = |\vec{k}_d|\, \vec{n}_d \vec{r} \qquad \forall\ \vec{e}_z \vec{r} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &(\vec{n}_e - n_r)\vec{r} = 0 \\ &\left[|\vec{k}_e|\, \vec{n}_e - |\vec{k}_d|\, \vec{n}_d \right] \vec{r} = 0 \end{aligned}\right\} \text{für } z=0,\ r_z = 0 \quad r_x, r_y \text{ beliebig}$$

$$|\vec{k}_e| \left[\begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \\ 0 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} - |\vec{k}_d| \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ 0 \\ \cos \vartheta_2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

d.h. $|\vec{k}_e| \sin \vartheta_1 = |\vec{k}_d| \sin \vartheta_2$

$$\omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0 \varepsilon_0}\, \sin \vartheta_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_0 \varepsilon_0}\, \sin \vartheta_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_1} \sin \vartheta_1 = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \vartheta_2$$

oder

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Verhältnis $\frac{E_{0r}}{E_{0e}} = f(\vartheta_1, \vartheta_2)$

Ansatz: Stetigkeit vom $\vec{E}$-Feld und $\vec{H}$-Feld in der $z=0$ Ebene:

$$\text{I)} \quad (\vec{E}_e + \vec{E}_r) \times \vec{e}_z - \vec{E}_d \times \vec{e}_z = 0$$

$$\text{II)} \quad \sqrt{\varepsilon_1} \left\{ \vec{n}_e \times \vec{E}_e \times \vec{n}_r \times \vec{E}_r \right\} \times \vec{e}_z - \sqrt{\varepsilon_2} \left\{ \vec{n}_d \times \vec{E}_d \right\} \times \vec{e}_z$$

Mit I und gleichen Phasenfaktoren in der $z=0$ Ebene

$$\Rightarrow \left\{ E_{0e} \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \\ 0 \\ \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} + E_{0r} \begin{pmatrix} -\cos \vartheta_1 \\ 0 \\ \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} \right\} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - E_{0d} \begin{pmatrix} \cos \vartheta_2 \\ 0 \\ \sin \vartheta_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

FO3 Musterlösung 3 / 5

$-\cos\vartheta_1 E_{0e}\vec{e}_y + \cos\vartheta_1 E_{0r}\vec{e}_y - (-\cos\vartheta_2) E_{0d}\vec{e}_y = 0$

III) $-E_{0e}\cos\vartheta_1 + E_{0r}\cos\vartheta_1 + E_{0d}\cos\vartheta_2 = 0$

mit II und gleichen Phasenfaktoren in der $z=0$ Ebene

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_1}\left[E_{0e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + E_{0r}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \sqrt{\varepsilon_2}\,E_{0d}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\left[E_{0e}\vec{e}_x + E_{0r}\vec{e}_x\right] - \sqrt{\varepsilon_2}\,E_{0d}\vec{e}_x = 0$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}E_{0e} + \sqrt{\varepsilon_1}E_{0r} - \sqrt{\varepsilon_2}E_{0d} = 0$$

bzw $$E_{0d} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}E_{0e} + \sqrt{\varepsilon_1}E_{0r}}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

Einsetzen in III):

$$-E_{0e}\cos\vartheta_1 + E_{0e}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\cos\vartheta_2 + E_{0r}\cos\vartheta_1 + E_{0r}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\cos\vartheta_2 = 0$$

$$E_{0r}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) = E_{0e}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)$$

$$\frac{E_{0r}}{E_{0e}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_2}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_2} \qquad (\mathrm{IV})$$

d) Brewster-Winkel: $E_{0r} = 0$

$$\frac{E_{0r}}{E_{0e}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_2}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_2} \qquad (\text{vgl. IV})$$

mit $E_{0r} = 0 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_2}\cos\vartheta_1 = \sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_2$

$$\overset{\cos\vartheta_1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Brechungsgesetz: $$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Mit Hinweis $$\tan\vartheta_1 \overset{E_{0r}=0}{=} \tan\vartheta_{10} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

FO 3 Musterlösung 4/5

Aufgabe 2 20 Punkte

a) Maxwell und Materialgl.:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D} + \vec{J} = (j\omega\varepsilon + \sigma)\vec{E}$$

$$E = \frac{1}{j\omega\varepsilon + \sigma} \nabla \times \vec{H}$$

Ansatz einsetzen:

$$\vec{E} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon + \sigma} h(\varrho) \exp(-\gamma z) \vec{e}_\varrho +$$

$$\frac{1}{j\omega\varepsilon + \sigma} \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho}\left[\varrho h(\varrho)\right] \exp(-\gamma z) \vec{e}_z$$

Da ein TEM-Feld bzgl. der z-Achse gesucht ist, muß die z-Komponente von $\vec{E}$ verschwinden. Hieraus folgt die DGL:

$$\frac{d}{d\varrho}(\varrho h(\varrho)) = 0$$

Also ist $\varrho h(\varrho)$ eine Konstante, und damit ist die allg. Lö.

$$h(\varrho) = \frac{A}{\varrho}$$

b) Maxwell mit Materialgl.:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D} + \vec{J} = (j\omega\varepsilon + \sigma)\vec{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = (j\omega\varepsilon + \sigma)\nabla \times \vec{E}$$

Mit $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$

und $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$:

$$\operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\vec{H}}_{=0} - \Delta\vec{H} = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)\vec{H}$$

$$\Delta\vec{H} - j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)\vec{H} = \vec{0}$$

Dies ist die geforderte Helmholtzgl. für $k^2 = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)$.

Einsetzen von $\vec{H}$ (aufgrund des Ansatzes ist nur die ϱ-Komponente der Helmholtzgl. relevant):

$$\left[\frac{d}{d\varrho}\underbrace{\left[\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho h(\varrho))\right]}_{} + \gamma^2 h(\varrho) + k^2 h(\varrho)\right]\exp(-\gamma z) = 0$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt für $\underline{\gamma}^2 = -\underline{k}^2$

c) Grenzbed. bei $\varrho = a$: $E_{tang} = \vec{0}$ (idealer Leiter)

Dies ist durch den Ansatz erfüllt, da $\vec{\underline{E}}$ nur eine ϱ-Komponente hat. Aus Symmetriegründen ist die Stromdichte gleichmäßig über die Leiteroberfläche verteilt:

$$\vec{\underline{J}}_{Fa} = \frac{I_0}{2\pi a} \exp(-\underline{\gamma} z)\, \vec{e}_z$$

Grenzbed. für $\vec{\underline{H}}$ bei $\varrho = a$

$$\vec{\underline{H}}_{tang} = \vec{n} \times \vec{\underline{J}}_{Fa} = \frac{I_0}{2\pi a} \exp(-\underline{\gamma} z)\, \vec{e}_\varrho$$

Einsetzen von $\underline{H}$ ergibt $\quad \underline{A} = \frac{I_0}{2\pi}$

Analog folgt aus der Grenzbedingung für $\vec{\underline{H}}$ bei $\varrho = b$

$$\vec{\underline{J}}_{Fb} = -\frac{I_0}{2\pi b} \exp(-\underline{\gamma} z)\, \vec{e}_z$$

d) Feldwellenwiderstand:

$$\underline{H} = \frac{1}{\underline{Z}_F} (\vec{e}_z \times \vec{\underline{E}})$$

Einsetzen von Eq. H:

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}_\varrho}{\underline{H}_\varphi} = \frac{\sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}}{j\omega\varepsilon + \sigma}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}}$$

Pointingvektor: $\quad \vec{\underline{S}} = \vec{\underline{E}} \times \vec{\underline{H}}^*$

Einsetzen: $\quad \vec{\underline{S}} = \underline{Z}_F\, |\underline{H}_\varphi|^2\, \vec{e}_z$

$$\underline{S} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}}\, \frac{|I_0|^2}{4\pi^2 \varrho^2} \exp(-2\alpha z)\, \vec{e}_z$$

→

Aufgabe 3

a) Es handelt sich um einen Hohlleiter

→ homogenes Dielektrikum

→ Kein Innen- / Rückleiter

⇒ Es existieren nur TE_z-Wellen und TM_z-Wellen aber keine TEM_z-Wellen

b) Es gilt die Helmholtz'sche Gleichung, d.h.

$$\nabla^2 \underline{\vec{F}} + k^2 \underline{\vec{F}} = \vec{0} \quad \text{mit } k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$$

$$\underline{\vec{F}} \sim e^{-j\beta z} \, \vec{e}_z \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla_t^2}_{\substack{\text{Transversal-} \\ \text{anteil des} \\ \nabla\text{-Operators}}} \underline{F} + (k^2 - \beta^2) \underline{F} = 0$$

c) Seperation in zylindrische Koordinaten:

Produktansatz: $\underline{F}(\varrho, \varphi) = \underline{R}(\varrho) \cdot \underline{\Phi}(\varphi)$

$\underline{\vec{F}} = \underline{F}_z \cdot \vec{e}_z$

Formelsammlung: $\Rightarrow \nabla^2 \underline{F} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \underline{F}_z}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \underline{F}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{F}_z}{\partial z^2}$

mit $\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \underline{F}_z}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \underline{F}_z}{\partial \varphi^2} = \nabla_t^2 \underline{F}$

$\nabla_t^2 \underline{F} + (k^2 - \beta^2) \underline{F} = 0$ und $F = R(\varrho)\, \phi(\varphi)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varrho} (R' + \varrho R'') \phi + \frac{1}{\varrho^2} R \phi'' + (k^2 - \beta^2) R \phi = 0$$

mit $R' = \frac{\partial R}{\partial \varrho}$, $R'' = \frac{\partial^2 R}{\partial \varrho^2}$ und ϕ', ϕ'' analog

Division durch $(R \cdot \phi)$:

$$\Rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{\varrho}\frac{R'}{R} + \frac{1}{\varrho^2}\underbrace{\frac{\phi''}{\phi}}_{=-m^2} + (k^2 - \beta^2) = 0 \quad \left(\text{Bessel'sche Dgl.}\right)$$

$\Rightarrow$ i) $\phi'' + m^2 \phi = 0$

allg. Lsg.: $\phi(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \cdot \sin(m\varphi)$

ii) $R'' + \frac{1}{\varrho} R' + \left(\frac{k^2 - \beta^2}{\varrho^2} - \frac{m^2}{\varrho^2}\right) R = 0$

$\rightarrow$ Bessel'sche Dgl.

allg. Lsg.: $R(\varrho) = C \cdot J_m(p \cdot \varrho) + D\, N_m(p \cdot \varrho)$

mit $p = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ (Separationsbedingung)

d) $\vec{E} = -\nabla \times \vec{F} \underset{\text{Formel-Sammlung}}{\overset{\uparrow}{=}} \underbrace{-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi}}_{E_\varrho} \vec{e}_\varrho + \underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial \varrho}}_{E_\varphi} \vec{e}_\varphi$

Randbedingung bei $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$:

$\vec{E}_{tan} = \vec{0} \Rightarrow E_\varrho(\varphi = 0) = E_\varrho(\varphi = \varphi_0) = 0$

$\Rightarrow \left.\frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\right|_{\varphi = 0} = \left.\frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\right|_{\varphi = \varphi_0} = 0$

i) $\Rightarrow$ $B = 0$

ii) $\Rightarrow \sin(m\varphi_0) = 0 \Rightarrow m\phi_0 = n \cdot \pi$

$\Rightarrow m = m_n = \frac{n \cdot \pi}{\varphi_0} = n \cdot \frac{\pi}{\pi/3} = 3n \quad ; n = 1, 2, \ldots$

Insgesamt: $\phi(\varphi) = A \cdot \cos\left(n \frac{\pi \varphi}{\varphi_0}\right)$

e) Randbedingungen bei $\varrho = a$, $\varrho = b$:

$$\vec{\underline{E}}_{tan} = \vec{0} \Rightarrow \underline{E}_\varphi(\varrho = a) = \underline{E}_\varphi(\varrho = b) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{F}_z}{\partial \varrho}\bigg|_{\varrho = a} = \frac{\partial \underline{F}_z}{\partial \varrho}\bigg|_{\varrho = b} = 0$$

f) $$\Rightarrow \frac{\partial R(\varrho = a)}{\partial \varrho} = \frac{\partial R(\varrho = b)}{\partial \varrho} = 0$$

$$\Rightarrow \varrho = a: \quad C \cdot J'_m(p \cdot a) + D \cdot N'_m(p \cdot a) = 0$$

$$\varrho = b: \quad C J'_m(p \cdot b) + D N'_m(p \cdot b) = 0$$

als lin. homogenes Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{bmatrix} J'_m(pa) & N'_m(pa) \\ J'_m(pb) & N'_m(pb) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

charakteristische Gl.:

Das homogene GS muss für $C \neq 0, D \neq 0$ eine Lösung liefern

$\Rightarrow$ Die Determinante der Systemmatrix muss ~~vor~~ verschwinden.

$$\Rightarrow J'_m(pa)\, N'_m(pb) - N'_m(pa)\, J'_m(pb) = 0$$

Grenzwellenzahl: $\beta = 0 \Rightarrow K = p := K_c$

Grenzfrequenz: $$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{K_c}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$