

Δ1

a) Außenraum feldfrei

→ Gesamtladung unter idealen Metallisierung 0

$$\int_{\text{Kugel 1}} \rho_+ dV + \int_{\text{Kugel 2}} \rho_- dV = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r_+^3 \rho_+ + \frac{4}{3}\pi r_a^3 \rho_- = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi \frac{r_a^3}{8} \rho_+ + \frac{4}{3}\pi r_a^3 \rho_- = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_+}{\rho_-} = -8$$

$$b) \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \quad | \operatorname{div}(\dots)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = 0 = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \dot{\vec{D}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$c) \vec{j} = \sigma_{\text{Kugel}} \cdot \vec{E} = \sigma_{\text{Kugel}} \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$$

K-Gl.

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{Kugel}} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{Kugel}} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\sigma_{\text{Kugel}}}{\epsilon} = -\tau^{-1} \quad ; \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma_{\text{Kugel}}}$$

Aus Gleichung V folgt $E_{\parallel} = (E_e - E_{r\parallel}) \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2}$
 Einsetzen von E_{\parallel} in Gleichung VI liefert:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (E_e + E_{r\parallel}) \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} = (E_e - E_{r\parallel}) \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2}$$

Auflösung nach der gesuchten Feldstärke $E_{r\parallel}$
 unter Verwendung von (*) liefert:

$$E_{r\parallel} = E_e \frac{1 - \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\sin \phi_1 \cos \phi_1}}{1 + \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\sin \phi_1 \cos \phi_1}}$$

$$e) E_{r\perp} = E_e \frac{1 - \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_2}{\sin \phi_2 \cos \phi_1}}{1 + \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_2}{\sin \phi_2 \cos \phi_1}} = E_e \frac{1 - \frac{\sqrt{\epsilon_2} \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2}}}{1 + \frac{\sqrt{\epsilon_2} \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2}}} = E_e \frac{1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

$$E_{r\parallel} = E_e \frac{1 - \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\sin \phi_1 \cos \phi_1}}{1 + \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\sin \phi_1 \cos \phi_1}} = E_e \frac{1 - \frac{\sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} \sqrt{\epsilon_1}}}{1 + \frac{\sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} \sqrt{\epsilon_1}}} = 0$$

Der reflektierte Teil der unter dem Brewster-Winkel einfallenden zirkular polarisierten Welle ist linear polarisiert.

2 Aus der Stetigkeitsbed. für \vec{H} folgt:

$$(I) \vec{H}_{ex} + \vec{H}_{rx} = \vec{H}_{dx} \Rightarrow \frac{1}{z_1} (E_e + E_{r||}) = \frac{1}{z_2} E_{d||}$$

$$(II) \vec{H}_{ez} + \vec{H}_{rz} = \vec{H}_{dz} \Rightarrow \frac{1}{z_1} (E_e - E_{r\perp}) \cos \phi_1 = \frac{1}{z_2} E_{d\perp} \cos \phi_2$$

Aus der Stetigkeitsbed. für \vec{B} folgt:

$$(III) \vec{B}_{ex} + \vec{B}_{rx} = \vec{B}_{dx} \Rightarrow \frac{1}{z_1} (E_e + E_{r\perp}) \sin \phi_1 = \frac{1}{z_2} E_{d\perp} \sin \phi_2$$

Aus der Stetigkeitsbed. für \vec{E} folgt:

$$(IV) \vec{E}_{ex} + \vec{E}_{rx} = \vec{E}_{dx} \Rightarrow E_e + E_{r\perp} = E_{d\perp}$$

$$(V) \vec{E}_{ez} + \vec{E}_{rz} = \vec{E}_{dz} \Rightarrow (E_e - E_{r||}) \cos \phi_1 = E_{d||} \cos \phi_2$$

Aus der Stetigkeitsbed. für \vec{D} folgt:

$$(VI) \epsilon_1 (\vec{E}_{ex} + \vec{E}_{rx}) = \epsilon_2 \vec{E}_{dx} \Rightarrow \epsilon_1 (E_e + E_{r||}) \sin \phi_1 = \epsilon_2 E_{d||} \sin \phi_2$$

Es gilt $z_1 = z_0 / \sqrt{\epsilon_1}$ und $z_2 = z_0 / \sqrt{\epsilon_2}$ und damit unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} (*)$$

$E_{d\perp}$ aus Gleichung IV wird in Gleichung II eingesetzt und es folgt:

$$\frac{1}{z_1} (E_e - E_{r\perp}) \cos \phi_1 = \frac{1}{z_2} (E_e + E_{r\perp}) \cos \phi_2$$

Die Auflösung nach $E_{r\perp}$ liefert unter Verwendung von (*):

$$E_{r\perp} = E_e \frac{1 - \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} \frac{\cos \phi_2}{\cos \phi_1}}{1 + \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} \frac{\cos \phi_2}{\cos \phi_1}}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_1} (\vec{n} \times \vec{E})$$

$$\vec{H}_e = \frac{1}{Z_1} (\vec{e}_x E_c (\sin^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_1) - \vec{e}_y j E_c \sin \phi_1 - \vec{e}_z j E_c \cos \phi_1) e^{-j \vec{k}_e \vec{r}}$$

$$= \frac{1}{Z_1} (\vec{e}_x E_c - \vec{e}_y j E_c \sin \phi_1 - \vec{e}_z j E_c \cos \phi_1) \exp(-j \vec{k}_e \vec{r})$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{Z_1} (\vec{e}_x E_{r11} (\sin^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_1) - \vec{e}_y j E_{r11} \sin \phi_1 + \vec{e}_z j E_{r11} \cos \phi_1) e^{-j \vec{k}_r \vec{r}}$$

$$= \frac{1}{Z_1} (\vec{e}_x E_{r11} - \vec{e}_y j E_{r11} \sin \phi_1 + \vec{e}_z j E_{r11} \cos \phi_1) \exp(-j \vec{k}_r \vec{r})$$

$$\vec{H}_d = \frac{1}{Z_2} (\vec{e}_x E_{d11} (\sin^2 \phi_2 + \cos^2 \phi_2) - \vec{e}_y j E_{d11} \sin \phi_2 - \vec{e}_z j E_{d11} \cos \phi_2) \exp(-j \vec{k}_d \vec{r})$$

$$= \frac{1}{Z_2} (\vec{e}_x E_{d11} - \vec{e}_y j E_{d11} \sin \phi_2 - \vec{e}_z j E_{d11} \cos \phi_2) \exp(-j \vec{k}_d \vec{r})$$

$$b) \phi_1 = 0 \text{ und } \gamma = -\frac{\lambda_c}{4} \Rightarrow \vec{n}_e = \vec{e}_y \text{ und } \vec{r} = -\frac{\lambda_c}{4} \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{k}_e \vec{r} \Rightarrow \vec{e}_y \text{ mit } \sqrt{\epsilon_1 \mu_0} \left(-\frac{\lambda_c}{4}\right) \vec{e}_y = \frac{2\pi}{\lambda_c} \left(-\frac{\lambda_c}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$t=0 : \omega t = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} [(\vec{e}_x j E_c + \vec{e}_z E_c) \exp(j\omega t - j \vec{k}_e \vec{r})]$$

$$= \operatorname{Re} [(\vec{e}_x j E_c + \vec{e}_z E_c) \exp(j\pi/2)] = \operatorname{Re} [(\vec{e}_x j E_c + \vec{e}_z E_c) j] = -\vec{e}_x E_c$$

$$t = \frac{T}{4} : \omega t = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} [(\vec{e}_x j E_c + \vec{e}_z E_c) \exp(j\omega t - j \vec{k}_e \vec{r})]$$

$$\operatorname{Re} [(\vec{e}_x j E_c + \vec{e}_z E_c) \exp(j\pi)] = \operatorname{Re} [(\vec{e}_x j E_c + \vec{e}_z E_c) (-1)] = -\vec{e}_z E_c$$

Die einfallende Welle ist zirkular polarisiert.

$$c) \operatorname{Rot} \vec{H} = \vec{J}_F = 0$$

$$\operatorname{Div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{Rot} \vec{E} = 0$$

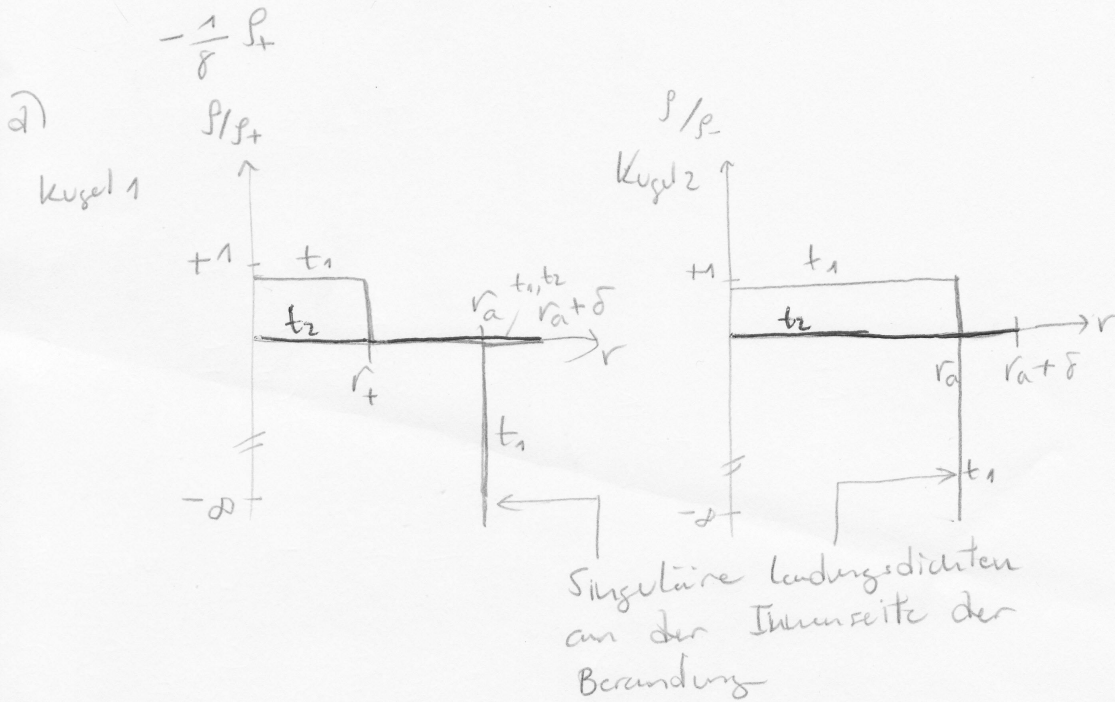
$$\operatorname{Div} \vec{D} = \rho_F = 0$$

Lösung Kugel 1:

$$\rho(t) = \rho_+ e^{-t/\tau} \quad \text{für} \quad 0 \leq r \leq r_+ \\ \rho(t) = 0 \quad \text{für} \quad r_+ < r < r_a$$

Kugel 2:

$$\rho(t) = \rho_- e^{-t/\tau} \quad \text{für} \quad 0 \leq r < r_a$$



e) Kugel 1:

$$I_1 = -\frac{d}{dt} \int_{\text{Kugel } r_F} \rho(r, t) dV = -\frac{d}{dt} \int_{r_+}^{\text{Kugel}} \rho(t) dV$$

$$= -\frac{4}{3} \pi r_+^3 \cdot \rho_+ \cdot \frac{d}{dt} (e^{-t/\tau}) = -\frac{4}{3} \pi r_+^3 \rho_+ \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{4}{3} \pi r_+^3 \frac{\rho_+}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{4}{3} \pi r_a^3 \cdot \frac{1}{8} \frac{\rho_+}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Kugel 2:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -\frac{d}{dt} \int_{\text{Kugel}} \rho(r,t) dV = -\frac{d}{dt} \left[\rho_+ e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \frac{4}{3} \pi r_F^3 \\
 &= \frac{1}{\tau} \rho_+ \frac{4}{3} \pi r_F^3 \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \\
 &= -\frac{\rho_+}{6} \pi r_F^3 \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{\rho_+}{6} \frac{\pi}{\tau} \left(\frac{27}{64} \right) r_a^3 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\
 I_1(t) / I_2(t) &= \left(\frac{4}{3} \pi r_a^3 \frac{1}{\tau} \frac{\rho_+}{\tau} \right) / \left(-\frac{\rho_+}{6} \frac{\pi}{\tau} r_a^3 \frac{27}{64} \right) = -\frac{64}{27}
 \end{aligned}$$

f) $I_m(t) \equiv 0$, da beide Kugeln zu allen Zeiten jeweils ladungsneutral

Aufg. 3

a) TE-Wellen

b) $(\Delta + k^2)\underline{g} = 0$

also $\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \underline{g}}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \beta^2) \underline{g} = 0$

c) Separationsansatz: $\underline{g}(s, \varphi) = \psi(s) K(\varphi)$

$\boxed{p^2 = k^2 - \beta^2}$
ap. bed. $0 = K(\varphi) \cdot \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \psi(s)}{\partial s} \right) + \psi(s) \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 K(\varphi)}{\partial \varphi^2} + p^2 \psi(s) K(\varphi)$

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} K(\varphi) + m^2 K(\varphi) = 0 \quad (*)$

und $0 = \frac{1}{\psi(s)} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \psi(s)}{\partial s} \right) + p^2 - \frac{m^2}{s^2} \quad (**)$

$(*) \Rightarrow m = 0 \quad K(\varphi) = C_1 \varphi + C_2$

$m \neq 0 \quad K(\varphi) = C_3 \sin(m\varphi) + C_4 \cos(m\varphi)$

$(**) \Rightarrow$ Besselsche Dgl. allg. Lsg $\psi_{pm}(s) = A J_m(p \cdot s) + B N_m(p \cdot s)$

4.13.5

d) G_1, G_2 : $\vec{a} \cdot \vec{H} = 0$, d.h. $H_\varphi = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/4$

$$\vec{H} = \vec{r} \times \vec{E} = \vec{r}_2 \times \vec{E} = \frac{1}{s} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_2 - \frac{\partial \tilde{E}}{\partial s} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$H_\varphi|_{\varphi=0} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial s} \Big|_{\varphi=0} \Rightarrow 0 = K(0) \\ \Rightarrow m=0 : C_2 = 0 \\ m \neq 0 : C_4 = 0$$

$$H_\varphi|_{\varphi=\pi/4} = 0 \Rightarrow 0 = K(\pi/4) \\ \Rightarrow m=0 : C_1 = 0 \\ m \neq 0 : m = 4, 8, 12, \dots$$

Also gibt es für $m=0$ keine Lösung außer $\tilde{E} \equiv 0$

und für $m \neq 0$ gilt $m = 4, 8, 12, \dots$ ($K(\varphi) = C_3 \sin(m\varphi)$)

e) Für $s \rightarrow 0$ divergiert $N_m(\rho s)$, daher muß $B = 0$ sein.

$$\text{Randbed. bei } s=a: H_{\varphi m} = 0 \Rightarrow H_\varphi|_{s=a} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial s} \Big|_{s=a} \Rightarrow J'_m(\rho_m \cdot a) = 0$$

$\rho_m \cdot a$ sind die m -te Nullstellen von $J'_m(\rho_m \cdot a)$

f) Grenzfrequenz $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow k^2 = \left(\frac{m+4}{\rho_m}\right)^2$

$$c = \lambda \cdot \frac{c_0}{\rho_m}$$

$\rho_4 \cdot a = 5,3175$ (siehe Tabelle); $c = 1,75 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

e) Für $s \rightarrow 0$ divergiert $N_m(p, s)$, daher muß $B=0$ sein.

Randbed. bei $s=a$: $H_{+m}=0 \Rightarrow H_{\varphi}|_{s=a}=0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial s} \Big|_{s=a} \Rightarrow J'_m(p, s) \Big|_{s=a} = 0$$

$p_m^{\text{m.}} \cdot a$ sei die m -te Nullstelle von $J'_m(p_m^{\text{m.}} \cdot a)$

f) Grenzfrequenz: $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow k^2 = (p_m^{\text{m.}})^2$

$$f_{\text{grenz}} = \frac{1}{2\pi} \frac{p_m^{\text{m.}}}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}}$$

$p_m^{\text{m.}} \cdot a = 5,3195$ (siehe Tabelle); $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}}$
 ϵ_r nicht angegeben

$$\Rightarrow a = \frac{5,3195}{2\pi} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{10} \cdot 9 \text{ s}^{-1}} = 5,3195 \cdot \frac{3}{\pi} \text{ cm} \approx 5,3195 \text{ cm}$$

Aufg. 4

Solution Sheet: Problem 1

Part a)

- Due to the symmetry of the structure and since $\underline{V}_{g1} = \underline{V}_{g2}$ and $Z_{g1} = Z_{g2}$ the following holds:

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_1$$

with $\underline{V}_1 = V_1 \sin(\omega t)$, then:

$$P_{RP2} = P_{RP1} = \frac{1}{2} V_2^2 / Z_0 = \frac{1}{2} V_1^2 / Z_0 \quad (P_{RPi} \text{ power flowing into RPi, } i=1, 2, \dots)$$

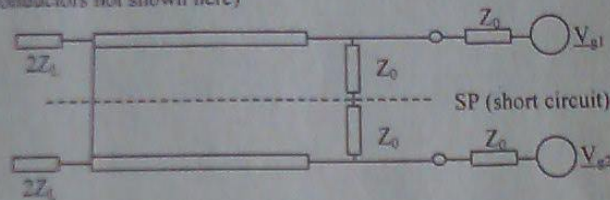
$$P_{RP1} = 2 \times P_{RP2} = 2 \times \frac{1}{2} V_1^2 / Z_0 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} \times V_1)^2 / Z_0 = \frac{1}{2} V_1^2 / Z_0 \quad (\lambda/4 \text{ implies } \exp(-j\pi/2) = -j)$$

$$\therefore \underline{V}_1 = -j\sqrt{2} \times \underline{V}_2$$

$$\underline{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{V}_{g1} = 1V \sin(\omega t) \text{ and } P_{RP2} = \frac{1}{2} V_2^2 / Z_0 = \frac{1}{2} 1^2 / 50 \text{ W} = 10 \text{ mW}$$

$$\therefore P_L = P_{RP1} = 2 \times P_{RP2} = 20 \text{ mW}$$

- In this case $\underline{V}_{g1} = -\underline{V}_{g2}$. The structure can be divided into 2 pieces at each side of the SP as shown (ground conductors not shown here)



$$\therefore \underline{V}_2 = 0 \quad \text{due to short at port 1 and therefore no power is delivered to the load}$$

$$P_L = 0$$

- It can be seen that:

$$\underline{V}_{g1} = 1V \sin(\omega t) = 2V \sin(\omega t) - 1V \sin(\omega t)$$

$$\underline{V}_{g2} = 3V \sin(\omega t) = 2V \sin(\omega t) + 1V \sin(\omega t)$$

1

2

Applying superposition with the set of voltages 1 and 2

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_1^1 + \underline{V}_1^2 = \sqrt{2} \times \underline{V}_1^1 + 0 = \sqrt{2} V \sin(\omega t)$$

with $\underline{V}_2^1 = 1V \sin(\omega t)$ and using the results in subsections 1 and 2.

$$\therefore P_L = 20 \text{ mW}$$

$$P_{\text{INPUT}} = (\frac{1}{2} V_2^2 / Z_0 + \frac{1}{2} V_1^2 / Z_0) \text{ W} = \frac{1}{2} (1.5^2 + 0.5^2) / 50 \text{ W} \text{ since } V_2 = V_{g1} / 2 \text{ and } V_1 = V_{g2} / 2$$

$$\therefore P_{\text{INPUT}} = 25 \text{ mW}$$

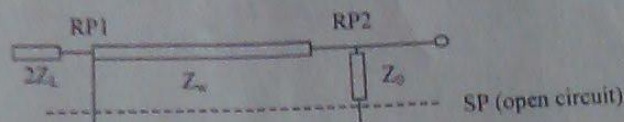
- From subsection 3 it can be seen that something is lost in the combiner, this power is dissipated in the resistor of value $2Z_0$. 5 mW are lost in the combiner.
- For the Wilkinson combiner to work as a lossless network: $V_{g1} = V_{g2}$ and $\theta_{g1} = \theta_{g2}$ where $\underline{V}_1 = V_1 \exp(j\theta_1)$

Part b)

θ : phase introduced by line
 $\theta = (2\pi/\lambda)L$ where $L = \lambda_0/4$ at f_0
 $\theta = (2\pi/\lambda) \cdot (\lambda_0/4)$ with $\lambda = c/f$ and $\lambda_0 = c/f_0$ then
 $\theta = (\pi/2)(f/f_0)$

① $2f_0 \rightarrow \theta = \pi$

Open circuit at SP



Using $\begin{bmatrix} Y_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$ with $\theta = \pi$

$Y_1 = -Y_2$ and $I_1 = I_2$

$Z_1 = Y_2/I_2 = Y_1/(-I_1) = 2Z_0 = 2Z_0$ and $Y_2 = Y_{sc} \cdot 2Z_0/(2Z_0 + Z_0) = 2Y_{sc}/3 \therefore Y_1 = -2Y_{sc}/3$

② $3f_0 \rightarrow \theta = 3\pi/2$

$\begin{bmatrix} Y_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -jZ_0 \\ -jY_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} Y_2 = jZ_0 I_1 \\ I_2 = -jY_0 Y_1 \\ \text{and } Y_1/(-I_1) = 2Z_0 \end{matrix}$

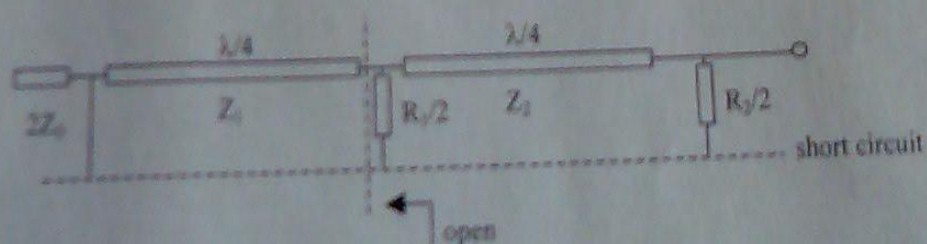
$\therefore Y_2 = jZ_0 I_1 = jZ_0 (-Y_1/2Z_0)$ and $Y_1 = j2Z_0 Y_2/Z_0$

$Z_1 = Y_2/I_1 = Z_0^2/Z_1 = Z_0 \therefore Y_2 = Y_{sc}/2$ and $Y_1 = jZ_0 Y_{sc}/Z_0 = jY_{sc}/\sqrt{2}$

Part c)

The even-odd-mode technique can be used in this case.

For the even-mode the resistors play no role. For the odd-mode the circuit is divided as shown below:



The admittance seen at RP2 is:

$1/Z_{RP2} = 2/R_2 + R_2/2Z_1^2$

where $Z_{RP2} = Z_0$ in order for the Wilkinson to be matched for the odd-mode case

$R_1 = 2Z_1^2 (1/Z_0 - 2/R_2)$

Das Maximum von S_{21} erfolgt bei Leistungsanpassung. Leistungsanpassung erfolgt für gleich große Kapazitäten C_{opt} bei einer Leitungslänge $l < \lambda/2$ also einer Drehung im Smithchart um weniger als 360° . Bei $l = \lambda/2$ erfolgt eine ganze Drehung im Smithchart. Für eine feste Frequenz würde Leistungsanpassung schon bei einer kürzeren Leitungslänge erreicht. Bei fester Länge ist also ist die Frequenz bei der $l = \lambda/2$ höher als die für Leistungsanpassung.

f) Lösung zu f)

$$f_0 = 500 \text{ MHz ablesen}$$

$$\lambda = 2l = \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$f = \frac{c}{\lambda_{\text{eff}}}$$

$$\sqrt{\epsilon_r} = \frac{c}{\lambda f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0,333 \cdot 5 \cdot 10^8 \text{ Hz}} = 3$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = 9$$

$$\tan \delta = \frac{1}{Q} = \frac{1}{3} = \frac{29}{3}$$

$$\delta f \text{ ist 3dB Bandbreite} = 5,0075 \cdot 10^8 - 4,9925 \cdot 10^8 = 0,015 \cdot 10^8 \Rightarrow \tan \delta = \frac{0,015 \cdot 10^8}{5,0075 \cdot 10^8} = 0,003$$

$$\alpha_d = \frac{2 \cdot 100 \text{ dB}}{3} = \frac{20 \sqrt{\epsilon_r}}{20} \tan \delta = \frac{1}{3} k \tan \delta$$

Aufg 5

Lösung zu Aufgabe 0

Entwurf, Stand: 14. April 2008 17:01

a) Lösung zu a)

Einzeichnen E und H Feld. E-Feld wie Kapazitäten, H-Feld umschließt zentralen Leiter (rund)

$$C_p = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \rightarrow \frac{C_p}{L} = C_p' = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{w}{(b/2 - a/2)} = 2\epsilon_0 \epsilon_r \frac{w}{(b-a)}$$

$$C' = 4C_p' + 2C_p'$$

b) Lösung zu b)

$$Z_L = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\sqrt{L} = \frac{\lambda}{\sqrt{C}}$$

$$\Rightarrow Z_L = \frac{\lambda}{\sqrt{C}} \text{ mit } \omega = 2\pi f \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{\lambda}{\omega} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\Rightarrow Z_L = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega \sqrt{C}} = \frac{\sqrt{L}}{j\omega C}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

c) Lösung zu c)

$$Z_{in} = U_1/I_1 = \frac{1}{j\omega C_{ges}} + Z_{in}$$

$$Z_{in} = U_1/I_1 = \frac{1}{j\omega C_{ges}} + Z_{in} = \frac{\frac{L}{Z_0} \cosh(\gamma l) + Z_L \sinh(\gamma l)}{\frac{L}{Z_0} \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)} \neq Z_{in}$$

$$Z_0 \frac{L}{Z_L} = \frac{1}{j\omega C_{ges}} + Z_0 \text{ oder } U_0 = U_2 - \frac{L}{j\omega C}$$

$$\Rightarrow Z_{in} = \frac{1}{j\omega C_{ges}} + \frac{(\frac{1}{j\omega C_{ges}} + Z_0) \cosh(\gamma l) + Z_L \sinh(\gamma l)}{(\frac{1}{j\omega C_{ges}} + Z_0) \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)}$$

d) Lösung zu d)

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{U_1 - Z_0 I_1}{I_1 + Z_0 I_1} = \frac{U_1 - Z_0 I_1}{I_1 (1 + Z_0)} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{U_1=0} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{I_1 + Z_0 I_1} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{I_1 (1 + Z_0)} = \frac{L_2 - Z_0 I_2}{I_1 (Z_{in} + Z_0)} \text{ mit } \frac{U_2}{I_2} = -Z_0, \frac{U_1}{I_1} = Z_{in}, \frac{L_2}{I_2} = -\frac{L_1}{I_1}$$

$$L_1 - L_2 \cosh(\gamma l) = \frac{L_1}{Z_0} \sinh(\gamma l)$$

$$\Rightarrow \frac{L_1}{Z_0} = \frac{L_2}{Z_0} \cosh(\gamma l) + \sinh(\gamma l)$$

in 1. Leitungsgleichung

$$U_1 = \frac{L_1}{Z_0} (L_1 - L_2 \cosh(\gamma l)) \cos(\beta l) + L_1 Z_0 \sinh(\gamma l)$$

$$U_2 = \frac{L_2}{Z_0} L_1 \cosh(\gamma l) - \frac{L_2}{Z_0} L_2 \cosh^2(\gamma l) + L_2 Z_0 \sinh(\gamma l) \quad /* \sinh(\gamma l)$$

$$U_1 \sinh(\gamma l) = Z_0 L_1 \cosh(\gamma l) - Z_0 L_2 \cosh^2(\gamma l) + L_2 Z_0 \sinh^2(\gamma l)$$

$$U_1 \sinh(\gamma l) - Z_0 L_1 \cosh(\gamma l) = -Z_0 L_2 (\cosh^2(\gamma l) - \sinh^2(\gamma l))$$

$$\Rightarrow \frac{U_1 \sinh(\gamma l)}{Z_0} - L_1 \cosh(\gamma l) = -L_2$$

$$\frac{L_1}{Z_0} = -\frac{L_2}{Z_0} \frac{\sinh(\gamma l)}{\cosh(\gamma l)} + \cosh(\gamma l)$$

$$-\frac{L_2}{Z_0} = Z_{in} \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_0} - \cosh(\gamma l) = \frac{L_2}{Z_0} \text{ mit } Z_{in} = Z_{in} - \frac{1}{j\omega C_{ges}}$$

alternativ

$$I_2 = \frac{1}{Z_0} U_2 \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)$$

$$I_2 = I_1 \left(\frac{1}{j\omega C_{ges}} + Z_0 \right) \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)$$

$$\Rightarrow \frac{L_2}{Z_0} = \frac{1}{j\omega C_{ges}} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l) = -\frac{L_1}{Z_0}$$

$$\Rightarrow Z_{21} = \left[\frac{Z_{in}}{Z_0} \sinh(\gamma l) - \cosh(\gamma l) \right] \frac{-2Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

$$\Rightarrow Z_{21} = \left[\frac{Z_{in} - \frac{1}{j\omega C_{ges}}}{Z_0} \sinh(\gamma l) - \cosh(\gamma l) \right] \frac{-2Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

$$Z_{21} = \left[\frac{(\frac{1}{j\omega C_{ges}} + Z_0) \cosh(\gamma l) + Z_L \sinh(\gamma l)}{(\frac{1}{j\omega C_{ges}} + Z_0) \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)} \sinh(\gamma l) - \cosh(\gamma l) \right] \frac{-2Z_0}{\frac{1}{j\omega C_{ges}} + (\frac{1}{j\omega C_{ges}} + Z_0) \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l) + Z_{in}}$$

Stand: 14. April 2008 17:01

Lösung zu Aufgabe 6

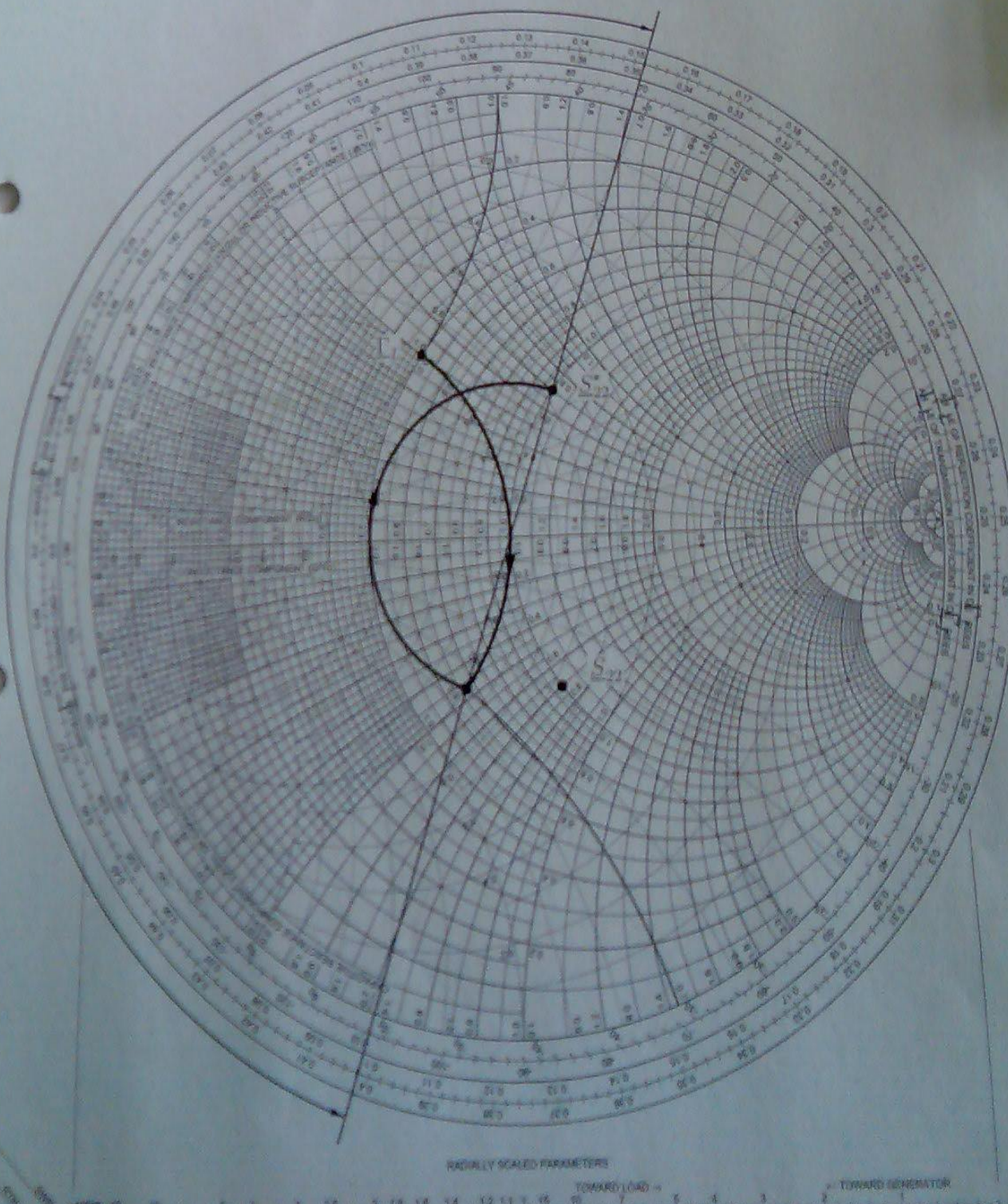
Frühjahr 2008

a) Lösung zum ersten und zweiten Unterpunkt

$$Z_0 = 100 \Omega$$

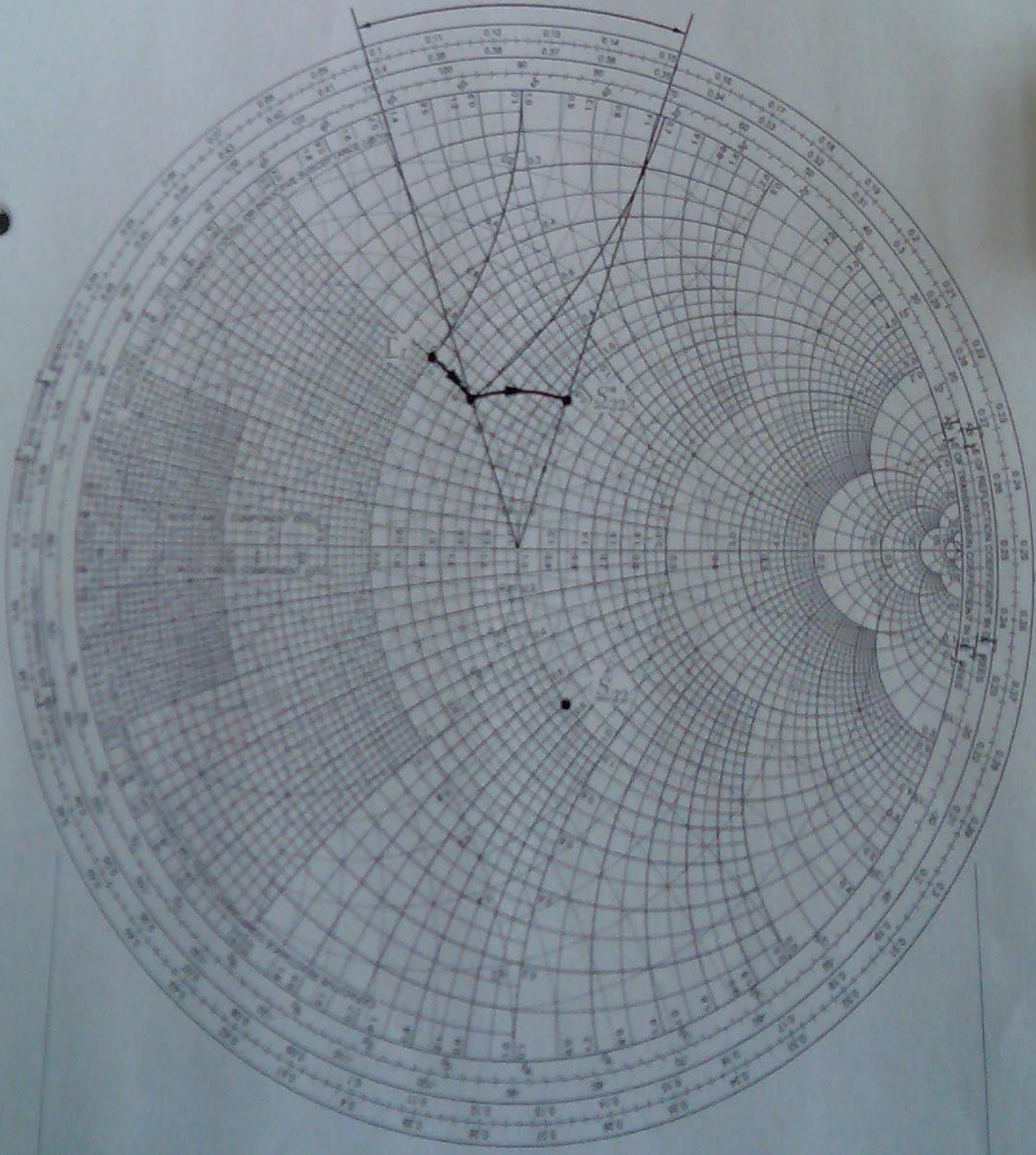
$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{1 - j - 1}{1 - j + 1} = \frac{-j}{2 - j} = \frac{1 - j}{2 - j} = \frac{1 - j}{2 - j} = \frac{1 - j}{2 - j} = \frac{1 - j}{2 - j} = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$l_a = 0,25\lambda$$

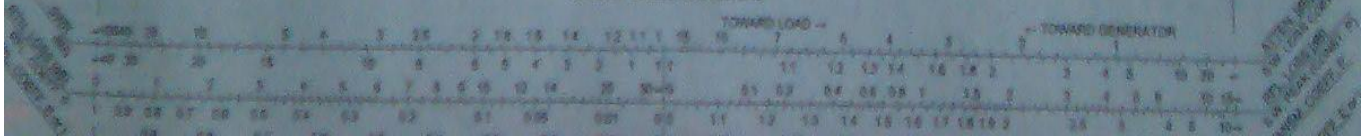


b) Lösung zum dritten Unterpunkt
 $Y_p = j 3 \text{ mS}$

$$I_a = 0,054 \text{ A}$$

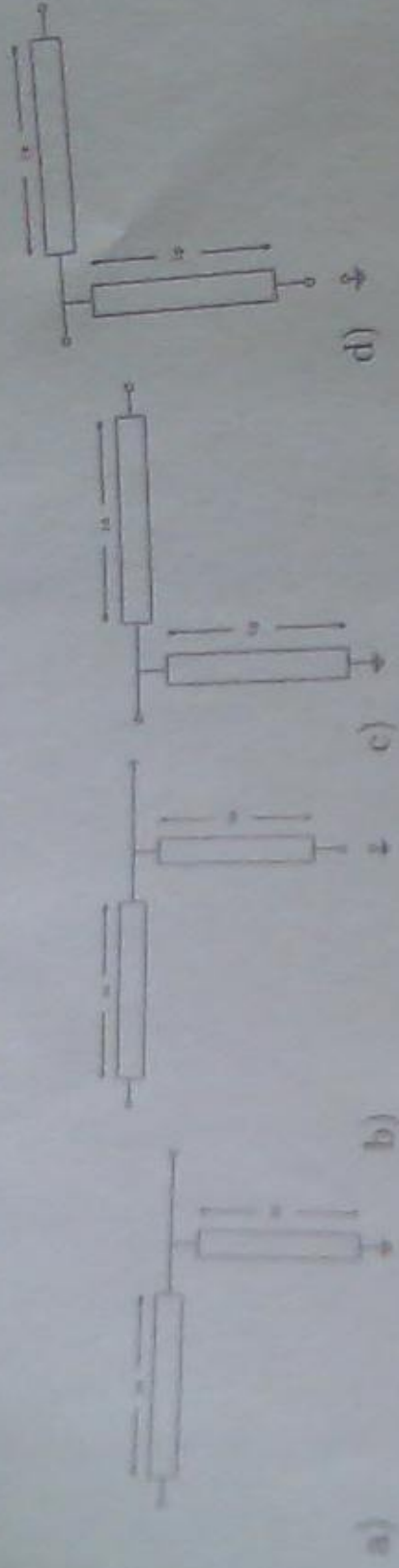


RADIALLY SCALED PARAMETERS



e) Lösung zum vierten und fünften Unterpunkt

$$F_1 = 2.7 \text{ dB}$$



Topologie a) und b) :

Nicht möglich, da sich der Kreis um den Ursprung (Serienleitung) ausgehend von y_Q nicht mit dem Kreis konstanten Realteils $Re\{y_{opt}\}$ schneidet.

Topologie c) :

Nicht möglich, da die Stichleitung bei $\frac{\lambda}{4} < l_p < \frac{\lambda}{2}$ und $f = f_0$ kapazitiv wirkt und die Serienleitung dadurch eine Länge $l_s < \frac{\lambda}{4}$ oder $l_s > \frac{\lambda}{2}$ haben müsste.

Topologie d) :

Möglich, da die Stichleitung bei $\frac{\lambda}{4} < l_p < \frac{\lambda}{2}$ und $f = f_0$ induktiv wirkt und die Serienleitung dadurch eine Länge $\frac{\lambda}{4} < l_s < \frac{\lambda}{2}$ hat.

Lösung zum sechsten Unterpunkt

$$I_p = 0,394A$$

$$I_s = 0,398A$$

