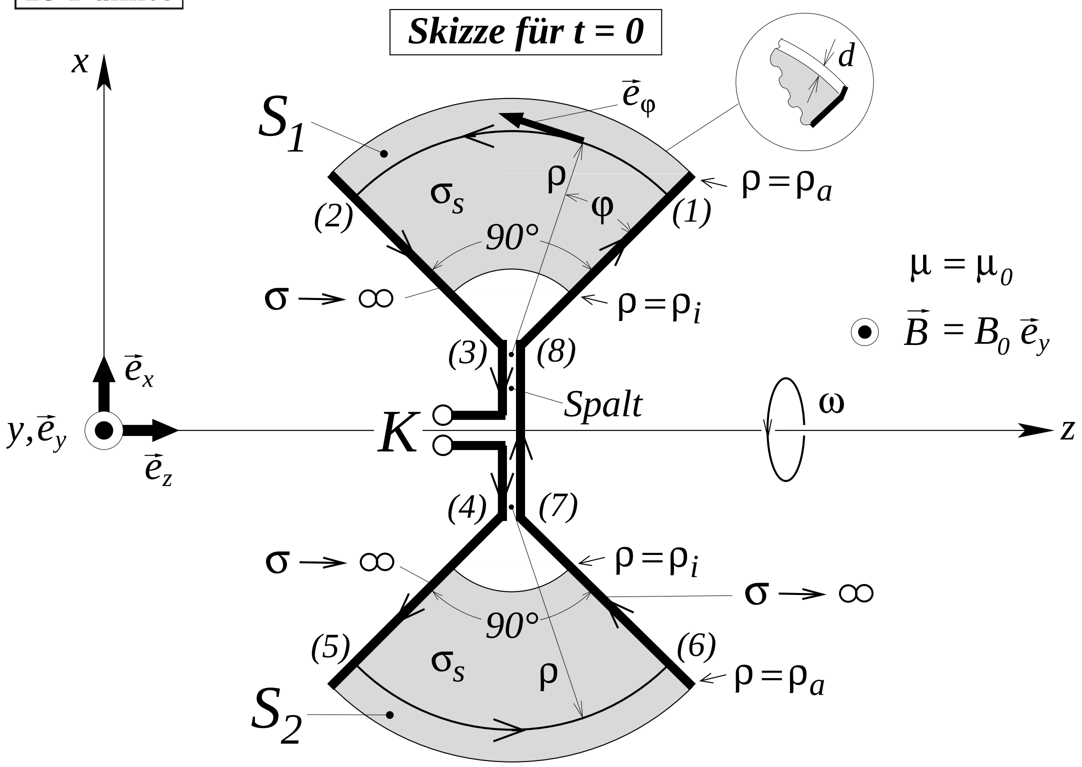
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.–Ing. Rolf H. Jansen

Herbst 2006

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1"

Aufgabe 1 $\boxed{\textbf{18 Punkte}}$



Zwei Kreisscheibensegmente S_1 und S_2 (90°) mit den Radien ρ_i und ρ_a bestehen aus einem leitenden Material mit der Dicke d ($d \ll \rho_a$) und der Leitfähigkeit σ_S. Die Schenkelseiten der Kreisscheibensegmente sind ideal leitend ($\sigma \to \infty$) und werden durch ideale Linienleiter gemäß Skizze verbunden bzw. zu dem Klemmenpaar K geführt. **Der Spalt zwischen diesen beiden Leitern ist vernachlässigbar klein.**
In positive y–Richtung wirkt das zeitlich konstante, homogene Magnetfeld $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_y$. Die Anordnung dreht sich um die $\vec{e}_z$–Richtung mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Zur Zeit $t = 0$ ist die Anordnung parallel zu der von $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_z$ aufgespannten Ebene, wie in der Abbildung gezeigt.
Es wird Rückwirkungsfreiheit angenommen, d.h. Rückwirkungen der sich in der Anordnung ausbildenden Stromverteilung auf das Feld $\vec{B}$ sind vernachlässigbar.

Das Klemmenpaar K ist zunächst kurzgeschlossen.

a) $\boxed{\text{3 Punkte}}$ Die Flächenvektoren haben zur Zeit $t = 0$ die Richtung $\vec{e}_y$. Berechnen Sie den magnetischen Fluss $\Phi(t = 0)$ durch die Fläche, die in der obigen Skizze durch den geschlossenen Pfad $(1)\,,(2)\,,(3)\,,\ldots\,,(8)\,,(1)$ aufgespannt wird.

b) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ Berechnen Sie entsprechend den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ für $t \neq 0$.

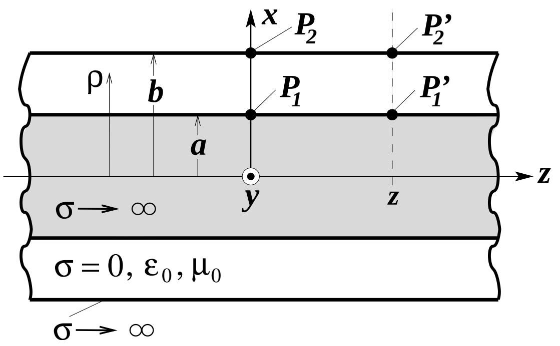
c) $\boxed{\text{9 Punkte}}$ Zeigen Sie, dass die Stromdichte $\vec{J}$ in den Kreisscheibensegmenten quellenfrei ist. Berechnen Sie den Strom $I_K(t)$, der durch das Klemmenpaar K fließt (Zählpfeilrichtung siehe Abbildung).
Hinweis: Die Stromdichte $\vec{J}$ sei bei dem gegebenen ω innerhalb eines Kreisscheibensegments nur vom Radius ρ (mit $\rho_i \le \rho \le \rho_a$) abhängig und besitzt nur eine φ–Komponente.

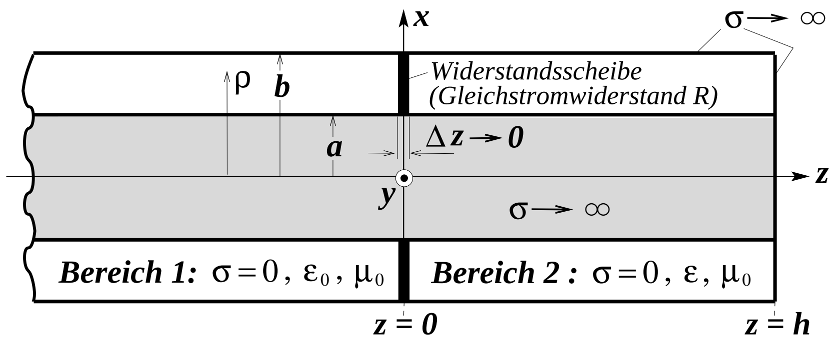
Am Klemmenpaar K wird nun eine äußere Spannung $U_K(t)$ eingeprägt.

d) $\boxed{\text{5 Punkte}}$ **Bestimmen Sie** $U_K(t)$ derart, dass der Strom $I_K(t)$ durch das Klemmenpaar identisch verschwindet. (**Achtung!** Dies heißt nicht, dass die Stromdichte in den Kreisscheibensegmenten identisch verschwindet.)
Hinweis: Die durch $U_K(t)$ in den Kreisscheibensegmenten hervorgerufene zusätzliche Stromdichte ist wie die Stromdichte $\vec{J}$ unter c) nur vom Radius ρ abhängig und besitzt nur eine φ–Komponente.

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1"

Aufgabe 2 **21 Punkte**





Es wird in der obigen Abbildung links eine unendlich lange Koaxialleitung mit ideal leitender Berandung ($\sigma \to \infty$) betrachtet. Der Innenleiter hat den Radius a und der Außenleiter den Innenradius b. Der Zwischenraum ist mit einem homogenen, verlustfreien Medium (Materialkonstanten $\sigma = 0$, ε_0 und μ_0) gefüllt. In dieser Koaxialleitung breitet sich eine harmonische TEM–Welle (Kreisfrequenz ω) in **positiver z–Richtung** aus. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}(t)$ und die magnetische Feldstärke $\vec{H}(t)$ werden beschrieben durch

$$\vec{E}(t) = \Re e\left\{\underline{\vec{E}}(\rho,z)\,\exp(j\omega t)\right\},\ \underline{\vec{E}}(\rho,z) = E(\rho)\,\exp(-jk_0\,z)\,\vec{e}_\rho\,;\ \vec{H}(t) = \Re e\left\{\underline{\vec{H}}(\rho,z)\,\exp(j\omega t)\right\};\ k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,.$$

Die Festlegung der Amplitude von $\underline{\vec{E}}(\rho,z)$ erfolgt in der Ebene $z=0$ durch: $\int_{P_1}^{P_2}\underline{\vec{E}}(\rho,z=0)\cdot d\vec{r} = U_0$. Dabei gilt: U_0 reell; P_1 = Punkt auf der Oberfläche des Innenleiters, P_2 = Punkt auf der Innenseite des Außenleiters.

a) **4 Punkte** Bestimmen Sie $E(\rho)$; betrachten Sie dazu die Lösung der Helmholtzgleichung für $\underline{\vec{E}}(\rho,z)$ in der Ebene $z=0$; beachten Sie dabei, dass $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}}(\rho,z) = 0$ gelten muss. Festlegung der Amplitude s.o.

b) **2 Punkte** Bestimmen Sie $\underline{\vec{H}}(\rho,z)$ unter Beachtung der Eigenschaften einer TEM–Welle.

c) **3 Punkte** Geben Sie die Spannung $\underline{u}_1^h(z) = \int_{P_1'}^{P_2'}\underline{\vec{E}}(\rho,z)\cdot d\vec{r}$ zwischen den beiden Elektroden an; dabei gilt: P_1' = Punkt auf der Oberfläche des Innenleiters, P_2' = Punkt auf der Innenseite des Außenleiters (siehe Abbidung). Bestimmen Sie ferner den Strom $\underline{i}_1^h(z)$, der durch den Innenleiter **in positiver z–Richtung** fließt, sowie den Leitungswellenwiderstand Z_L als Funktion der Leitungsgeometrie und der Materialkonstanten.

Im Folgenden wird nun der Fall betrachtet, dass sich die vorher betrachtete Koaxialleitung mit ideal leitender Berandung gemäß der rechten Abbildung im Bereich $-\infty < z < h$ erstreckt und bei $z=h$ von einer ideal leitenden Scheibe abgeschlossen wird. An der Stelle $z=0$ befindet sich eine Widerstandsscheibe, die zwischen Innen- und Außenleiter den Gleichstromwiderstand R besitzt. Die Widerstandsscheibe wird als vernachlässigbar dick angenommen ($\Delta z \to 0$).Das Medium im Zwischenraum der Leitung besitzt in den **Bereichen 1 und 2** die Materialkonstanten $\sigma = 0$, ε_0 und μ_0.
Im Bereich 1 breitet sich nun die zuvor beschriebene TEM–Welle (Spannung $\underline{u}_1^h(z)$, Strom $\underline{i}_1^h(z)$) sowie zusätzlich ein in negativer z–Richtung laufender TEM–Wellenanteil (Spannung $\underline{u}_1^r(z)$, Strom $\underline{i}_1^r(z)$) aus. Analog besitzt die Welle im Bereich 2 einen in positiver z–Richtung laufenden Anteil (Spannung $\underline{u}_2^h(z)$, Strom $\underline{i}_2^h(z)$) sowie einen in negativer z–Richtung laufenden Anteil (Spannung $\underline{u}_2^r(z)$, Strom $\underline{i}_2^r(z)$). Gleichzeitig fließt in dieser Anordnung vom Innen- zum Außenleiter durch die Widerstandsscheibe der Strom $\underline{i}_S$.

d) **3 Punkte** Geben Sie die Grenzbedingungen für die Gesamtspannungen $\underline{u}_1^{Ges}$ und $\underline{u}_2^{Ges}$ an den Stellen $z=0$ und $z=h$ an. Stellen Sie für $z=0$ eine Bilanz der Ströme $\underline{i}_1^{Ges}$, $\underline{i}_2^{Ges}$ und $\underline{i}_S$ auf.

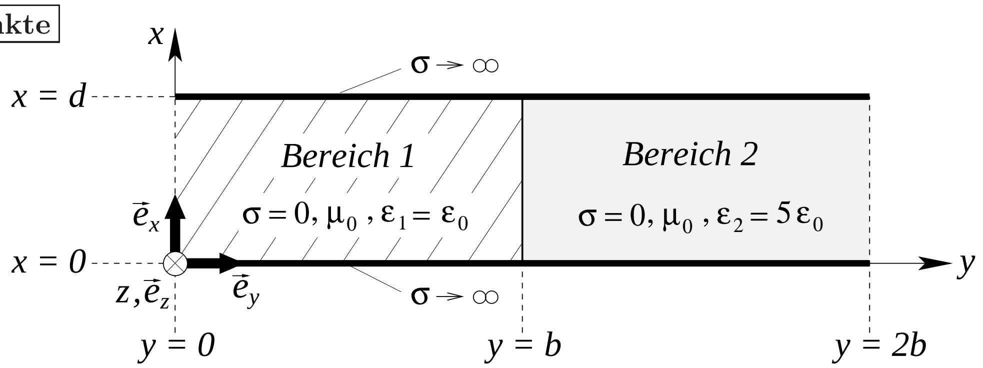
e) **6 Punkte** Zeigen Sie mit Hilfe der unter d) aufgestellten Verknüpfungen, dass sich die komplexe Amplitude $\underline{U}_1^r$ der rücklaufenden Welle im Gebiet 1 in Abhängigkeit von U_0 wie folgt ergibt:

$$\underline{U}_1^r = U_0\,\frac{1 - \frac{Z_L}{R} + j\,\cot(k_0 h)}{1 + \frac{Z_L}{R} - j\,\cot(k_0 h)}\,.$$

f) **3 Punkte** Wie müssen der Widerstand R der Scheibe und die Länge h der Koaxialleitung im Bereich 2 gewählt werden, damit bei $z=0$ keine Reflexion auftritt.

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1"

Aufgabe 3 **21 Punkte**



Die Skizze zeigt den Querschnitt durch eine in z–Richtung unendlich lange Bandleitung mit idealen Bandleitern ($\sigma \to \infty$), welche die Breite $2b$ und eine vernachlässigbare Dicke besitzen. Der Bereich 1 ($0 < y < b$) besitzt die Materialkonstanten $\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, der Bereich 2 ($b < y < 2b$) besitzt die Materialkonstanten $\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_0$. **Es gilt $2b \gg d$,** so dass man das elektrische und magnetische Streufeld der Anordnung vernachlässigen **und somit bei $y = 0$ und bei $y = 2b$ ideale magnetische Wände** (d.h. $H_{tan} = 0$ und $E_{norm} = 0$) **mit guter Näherung annehmen kann.**
In der Anordnung breitet sich in positiver z–Richtung ungedämpft eine TE–Welle mit harmonischer Zeitabhängigkeit aus, die **eine von der x–Richtung unabhängige Feldverteilung** besitzt. Diese wird beschrieben durch folgenden Ansatz der Vektorwellenpotenziale in den Bereichen 1 und 2:

$$\underline{\vec{G}}_1 = \vec{0}\,,\; \underline{\vec{F}}_1 = \psi_1(y)\, e^{-j\beta z}\, \vec{e}_z\,;\; \underline{\vec{G}}_2 = \vec{0}\,,\; \underline{\vec{F}}_2 = \psi_2(y)\, e^{-j\beta z}\, \vec{e}_z \quad \text{mit} \quad \Delta \underline{\vec{F}}_{1/2} + k_{1/2}^2 \underline{\vec{F}}_{1/2} = \vec{0}.$$

Dabei gilt: $k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}$, $k_2 = \omega\sqrt{5\mu_0\,\varepsilon_0}$, $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_{\text{eff}}}$, $\varepsilon_{\text{eff}} =$ **reell und positiv**.
Die elektrische und die magnetische Feldstärke in den Bereichen 1 und 2 erhält man aus:

$$\underline{\vec{E}}_{1/2} = -e^{-j\beta z}\, \nabla\psi_{1/2} \times \vec{e}_z\,,\; \underline{\vec{H}}_{1/2} = -\frac{e^{-j\beta z}}{\mu_0\,\omega}\left(\beta\, \nabla\psi_{1/2} + j\, p_{1/2}^2\, \psi_{1/2}\, \vec{e}_z\right),$$

$$p_{1/2} = \sqrt{k_{1/2}^2 - \beta^2} = \sqrt{k_{1/2}^2 - \omega^2 \mu_0\,\varepsilon_{\text{eff}}}\,.$$

Die so angesetzte Welle erfüllt bereits die Grenzbedingungen für $\underline{\vec{E}}_{1/2}$ bei $x = 0,\ d$ sowie bei $y = 0,\ 2b$.

a) **4 Punkte** Bestimmen Sie die Differenzialgleichungen für die Funktionen ψ_1 und ψ_2. Geben Sie die allgemeine Lösung für ψ_1 und ψ_2 an; **stellen Sie hierbei die Lösung für ψ_2 als Funktion der Variablen $2b - y$ dar!** (Lokale Koordinaten in den Bereichen 1 und 2)

b) **5 Punkte** Schränken Sie die unter a) gefundenen Lösungen für ψ_1 und ψ_2 so ein, dass die Grenzbedingung für $\underline{\vec{H}}_1$ bei $y = 0$ und die Grenzbedingung für $\underline{\vec{H}}_2$ bei $y = 2b$ erfüllt werden. Geben Sie die Gleichungen für die elektrische Feldstärke $\underline{\vec{E}}_1$ sowie die magnetische Feldstärke $\underline{\vec{H}}_1$ an der Stelle $y = b$ an.

c) **4 Punkte** Geben Sie die Grenzbedingungen für die elektrische und die magnetische Feldstärke bei $y = b$ sowie die daraus folgenden Bedingungen für ψ_1 und ψ_2 an. Zeigen Sie, dass daraus die folgende Eigenwertgleichung zur Bestimmung des Parameters ε_{eff} folgt: $p_1 \tan(p_1 b) + p_2 \tan(p_2 b) = 0$ (p_1, p_2 siehe oben**).**

Im Folgenden gilt $k_1\, b = b\omega\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0} = 10^{-2}$.

d) **7 Punkte** Zeigen Sie, dass unter der Annahme $0 < \varepsilon_{\text{eff}} < 5\varepsilon_0$ gilt: $|\, p_1 b \,| \ll 1$, $|\, p_2 b \,| \ll 1$. Bestimmen Sie unter dieser Annahme den Parameter ε_{eff} aus der Eigenwertgleichung (Hinweis: $\tan\varphi \approx \varphi$ für $|\,\varphi\,| \ll 1$) und zeigen Sie, dass die Annahme erfüllt ist. Geben Sie die resultierenden Werte für p_1, p_2 und β **in Abhängigkeit von b alleine** an.
Zeigen Sie, dass die Phasengeschwindigkeit v_{Ph} der Welle unter den gemachten Annahmen nur von den Materialkonstanten und nicht von ω abhängt (Quasi-TEM-Welle).

e) **1 Punkt** Geben Sie die für den Fall $b = 1$ mm aus $k_1\, b = 10^{-2}$ folgende Kreisfrequenz ω_0 an (Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

Aufgabe 1

a) $\Phi = \int\limits_{\text{Fläche}(1),(2)\dots(8),(1)} \vec{B}\, d\vec{F} = 2 \cdot \int\limits_{\text{Fläche}(1),(2),(3),(8)} \vec{B}\, d\vec{F}$

$\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_y$ || Alternativ : $\frac{1}{4}$ Kreisfläche $= \frac{\pi}{4}\varrho^2$

$d\vec{F} = \vec{e}_y\, \varrho\, d\varphi\, d\varrho$

$\Phi = 2 \cdot B_0 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot d\varphi \int\limits_0^{\varrho} \varrho\, d\varrho$

$= 2 \cdot B_0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varrho^2}{2} = \frac{1}{2}\pi \cdot B_0 \cdot \varrho^2$

b) $\Phi(t) = \frac{\pi}{2} \cdot B_0 \cdot \varrho^2 \cdot \cos(\omega t)$

c) $\vec{J} = \vec{e}_\varphi\, \vec{J}_\varphi(\varrho)$ Hinweis

$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho \underbrace{J_\rho}_{=0}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$

⊛ $I_K(t) = d \int\limits_{\varrho_i}^{\varrho_a} J_\varphi(\varrho)\, d\varrho$ $\vec{J} = \sigma_s \vec{E}$

$\oint\limits_{(1)\to(2)\to(3)\to(8)} \vec{E}\, d\vec{s} = \int\limits_{(1)\to(2)} \vec{E}\, d\vec{s} = -\dot{\phi} \cdot \frac{1}{2}$ Auf idealem Leiter verschwindet $\vec{B}$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{J_\varphi}{\sigma_s}\varrho\, d\varphi = -\dot{\phi} \cdot \frac{1}{2}$ (nur 1 Segment)

$\Rightarrow \cancel{\frac{\pi}{2}}\cancel{\varrho}\, J_\varphi = \sigma_s \cancel{\frac{\pi}{2}} \cdot B_0 \cdot \varrho^{\cancel{2}} \cdot \sin(\omega t)\,\omega \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow J_\varphi = \frac{1}{2}\sigma_s \cdot B_0 \cdot \varrho \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$

in ⊛ $I_K(t) = d\,\sigma_s \cdot \frac{1}{2} \cdot B_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{1}{2}(\varrho_a^2 - \varrho_i^2)$

$= \frac{\sigma_s \cdot d \cdot B \cdot \omega}{4} \cdot \sin(\omega t)\,(\varrho_a^2 - \varrho_i^2)$

Aufgabe 1

d) $U_K(t)$ gesucht, so dass $I_K(t)=0$

$U_K(t)$ bedingt zusätzlich Stromdichte $\vec{J}_{U_K}$

$$\vec{J}_{U_K}(\rho) = \vec{e}_\varphi \, \vec{J}_{U_{K\rho}} \qquad E_K = \frac{U_K \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot \rho} \qquad (1 \text{ Segment})$$

$$\vec{J}_{U_{K\rho}} = \sigma_S \cdot E_K(\rho) = \sigma_S \cdot \frac{\frac{1}{2} U_K}{\frac{\pi}{2} \rho}$$

$$I_K(t) = 0 = \frac{\sigma_S \cdot d \cdot B \cdot \omega}{4} \sin(\omega t) \left(\rho_a^2 - \rho_i^2\right) + \int_{\rho_i}^{\rho_a} \frac{1}{\rho} \, d\rho \cdot d \cdot \sigma_S \cdot \frac{U_K}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{B_0 \cdot \omega}{4} \cdot \sin(\omega t) \cdot \left(\rho_a^2 - \rho_i^2\right)$$

$$= -\ln \frac{\rho_a}{\rho_i} \cdot \frac{U_K}{\pi}$$

$$\Rightarrow U_K(t) = -\frac{\pi}{4} \cdot B_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\left(\rho_a^2 - \rho_i^2\right)}{\ln \frac{\rho_a}{\rho_i}}$$

H06

Aufgabe 2

a) $\vec{\underline{E}}(\rho,z) = E(\rho)\cdot\exp(-jk_0z)\cdot\vec{e}_\rho = E_\rho\cdot\vec{e}_\rho$

Helmholtz-Gl. $(\Delta + k_0^2)\,\vec{\underline{E}}(\rho,z) = \vec{0}$

Da $\vec{\underline{E}}$ nur Funktion von ρ und z sowie $\vec{\underline{E}} \parallel \vec{e}_\rho$ ist, gilt in Zylinderkoordinaten

$$\Delta\vec{\underline{E}}(\rho,z) = \left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot E_\rho)\right) + \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2}\right]\vec{e}_\rho + 0$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot E_\rho)\right) - k_0^2 E_\rho\right]\cdot\vec{e}_\rho$$

Damit ergibt sich aus der Helmholtz-Gl.:

$$\vec{0} = (\Delta + k_0^2)\,\vec{\underline{E}}(\rho,z) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot E_\rho)\right)$$

mit Lösung $E_\rho \propto \rho$ und $E_\rho \propto \frac{1}{\rho}$

Wegen $\operatorname{div}\vec{\underline{E}}(\rho,z) = 0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\rho)$ bleibt nur $E_\rho \propto \frac{1}{\rho}$ als Lösung übrig.

Mit $U_0 = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\vec{\underline{E}}(\rho,z=0)\,d\rho = \int_a^b E(\rho)\,d\rho = \int_a^b \frac{A}{\rho}\,d\rho = A\cdot\ln\frac{b}{a}$

$\Rightarrow A = \frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}}$ folgt dann $E(\rho) = \frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}}\cdot\frac{1}{\rho}$

b) $\vec{\underline{H}}(\rho,z) = \frac{1}{Z}\cdot\vec{e}_z\times\vec{\underline{E}}(\rho,z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}}\cdot\frac{1}{\rho}\exp(-jk_0z)\,\vec{e}_\varphi$

H06

Aufgabe 2

c) $\underline{u}_1^h(z) = \int_{P_1'}^{P_2'} \underline{\vec{E}}(\rho, z)\, d\vec{r} = \frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}} \exp(-jk_0 z) \cdot \int_a^b \frac{1}{\rho}\, d\rho = U_0 \cdot \exp(-jk_0 z)$

$\underline{i}_1^h(z) = \oint_{C_0} \underline{\vec{H}}(\rho, z)\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} H_\phi(\rho = a, z) \cdot a\, d\phi = 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}} \exp(-jk_0 z)$

C_0 z.B. Kurve entlang der Oberfläche des Innenleiters

$\left(\Rightarrow \rho = a, \underline{\vec{H}}\, dr = 0 + (\underline{\vec{H}} \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot a \cdot d\phi \right)$

$Z_L = \frac{\underline{u}_1^h(z)}{\underline{i}_1^h(z)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi} = \frac{k_0}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi}$

d) $z = 0$

Nach Hinweis Aufgabentext

$\underline{u}_1^{Ges}(0) = \underline{u}_2^{Ges}(0) \iff \underline{u}_1^h(0) + \underline{u}_1^r(0) = \underline{u}_2^h(0) + \underline{u}_2^r(0)$ (*)

$\underline{i}_1(0) = \underline{i}_2(0) + \underline{i}_S(0) = \underline{i}_2(0) + u_1^{Ges}(0)/R$ (**)

$z = h$

$u_2^{Ges}(h) \equiv 0 \equiv \underline{u}_2^h(h) + \underline{u}_2^r(h)$ (***)

e) $\underline{u}_1^{Ges}(z) = \underline{u}_1^h(z) + \underline{u}_1^r(z) = \underline{U}_0 \exp(-jk_0 z) + \underline{U}_1^r \exp(+jk_0 z)$

$\underline{u}_2^{Ges}(z) = \underline{u}_2^h(z) + \underline{u}_2^r(z) = \underline{U}_2^h \exp(-jk_0 z) + \underline{U}_2^r \exp(+jk_0 z)$

$i_{Ges_1}(z) = \frac{U_0}{Z_L} \exp(-jk_0 z) - \frac{U_1^r}{Z_L} \cdot \exp(+jk_0 z)$

$i_{Ges_2}(z) = \frac{U_2^h}{Z_L} \exp(-jk_0 z) - \frac{U_2^r}{Z_L} \exp(+jk_0 z)$

(***) $\Rightarrow 0 = \underline{U}_2^h \cdot \exp(-jk_0 h) + \underline{U}_2^r \cdot \exp(+jk_0 h) \Rightarrow \underline{U}_2^r = -U_2^h \exp(-2jk_0 h)$

(*) $\Rightarrow \underline{U}_0 + \underline{U}_1^r = \underline{U}_2^h + \underline{U}_2^r = \underline{U}_2^h (1 - \exp(-2jk_0 h))$

(**) $\Rightarrow \underline{U}_0 - \underline{U}_1^r = \underline{U}_2^h + \underline{U}_2^r + \frac{Z_L}{R}(\underline{U}_0 + \underline{U}_1^r) \Rightarrow \underline{U}_0 \left(1 - \frac{Z_L}{R}\right) - \underline{U}_1^r \left(1 + \frac{Z_L}{R}\right)$

$= \underline{U}_2^h (1 + \exp(-2jk_0 h))$

einsetzen von $\underline{U}_2^h$ aus der vorherigen Zeile liefert

H06

Aufgabe 2

e)

$$\underline{U}_0 \left(1 - \frac{Z_L}{R}\right) - \underline{U}_1^r \left(1 + \frac{Z_L}{R}\right) = \frac{(1 + \exp(-2jk_0h))}{(1 - \exp(-2jk_0h))} (\underline{U}_0 - \underline{U}_1^r)$$

$$= \frac{\cos(k_0h)}{j\sin(k_0h)} (U_0 - U_1^r) = -j\cot(k_0h)(U_0 - U_r)$$

$$\underline{U}_1^r = \underline{U}_0 \frac{1 - \frac{Z_L}{R} + j\cot(k_0h)}{1 + \frac{Z_L}{R} - j\cot(k_0h)}$$

f) Reflektionsfaktor $\Gamma = 0$

$$0 = \Gamma = \frac{\underline{U}_1^r}{\underline{U}_0} \Rightarrow 0 = 1 - \frac{Z_L}{R} + j\cot(k_0h)$$

Ist erfüllt für $Z_L = R$ und $k_0h = (n + 1/2)\pi$; $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow h = \frac{n + 1/2}{k_0}\pi$$

H06

Aufgabe 3

a) $\underline{F}_{1/2} = \Psi_{1/2}(y)\, e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_z$ (1)

Helmholtz-Gl. $\Delta \underline{F}_{12} + k_{1/2}^2 \underline{F}_{12} = 0$ (2)

$\Rightarrow \Psi''_{1/2}(y) - \beta^2 \Psi_{1/2}(y) + k_{1/2}^2$; $k_{1/2} = \omega\sqrt{\mu\,\varepsilon_{1/2}}$ (3)

$\Rightarrow \Psi_1''(y) + p_1^2 \Psi_1(y) = 0$; $\Psi_2''(y) + p_2^2 \Psi(y) = 0$ (4)

mit $p_1 = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{eff}} = \omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_{eff})}$ (5)

$p_2 = \sqrt{k_2^2 - \beta^2} = \sqrt{5\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{eff}} = \omega\sqrt{\mu_0(5\varepsilon_0 - \varepsilon_{eff})}$ (6)

Lösung von (4): $\Psi_1(y) = A_1 \cdot \cos(p_1 y) + B_1 \sin(p_1 y)$ (7)

$\Psi_2(y) = A_2 \cdot \cos(p_2(2b-y)) + B_2 \sin(p_2(2b-y))$ (8)

b) $y = 0, 2b$: magnet. Wände $\Rightarrow H_{tang} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{H_z = 0 \text{ für } y = 0, 2b}$ (9)

$H_{z\,1/2} \sim \Psi_{1/2} \Rightarrow \Psi_1(y=0) = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = 0}$ (10)

$\Psi_2(y=2b) = 0 \Rightarrow \boxed{A_2 = 0}$ (11)

$\vec{\underline{E}}_1\big|_{y=b} = -e^{-j\beta z} \cdot \frac{d\Psi_1}{dy}\vec{e}_x = -B_1 p_1 \cos(p_1 b) \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$ (12)

$\vec{\underline{H}}_1\big|_{y=b} = -\frac{e^{-j\beta z}}{\mu_0 \omega}\left(\beta_0 p_1 B_1 \cos(p_1 b)\vec{e}_y + j p_1^2 B_1 \sin(p_1 b)\vec{e}_z\right)$

$\boxed{\vec{\underline{H}}_1\big|_{y=b} = -\frac{B_1 \cdot p_1}{\mu_0 \omega} e^{-j\beta z} \cos(p_1 b)\left[\beta \vec{e}_y + j p_1 \tan(p_1 b)\vec{e}_z\right]}$ (13)

c) $y = b$: E_{tang} stetig $\Rightarrow E_x$ stetig $\Rightarrow \frac{d\Psi}{dy}$ stetig (14)

H_{tang} stetig $\Rightarrow H_z$ stetig $(H_x = 0!)$ $\Rightarrow p^2\Psi$ stetig (15)

Somit $\frac{d\Psi_1}{dy}\Big|_{y=b} = \frac{d\Psi_2}{dy}\Big|_{y=b}$; $p_1^2 \Psi_1(y=b) = p_2^2 \Psi_2(y=b)$ (16)

mit (7), (8), (10), (11) folgt aus (16):

$B_1 p_1 \cos(p_1 b) = -B_2 p_2 \cos(p_2 b)$ (17)

$B_2 p_1^2 \sin(p_1 b) = B_2 p_2^2 \sin(p_2 b)$ (18)

(18) : (17) liefert $\boxed{p_1 \tan(p_1 b) = -p_2 \tan(p_2 b)}$ (19)

oder $p_1 \tan(p_1 b) + p_2 \tan(p_2 b) = 0$ q.e.d

Aufgabe 3

H06

d) $k_1 b = b\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 10^{-2}$

$$\Rightarrow p_1 b \underset{(5)}{=} \omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon_0-\varepsilon_{ell})}\, b = \underbrace{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\, b}_{=k_1 b}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{ell}}{\varepsilon_0}} = 10^{-2}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{ell}}{\varepsilon_0}} \qquad (20)$$

$$p_2 b \underset{(6)}{=} \omega\sqrt{\mu_0(5\varepsilon_0-\varepsilon_{ell})}\, b = \underbrace{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\, b}_{=k_1 b}\sqrt{5-\frac{\varepsilon_{ell}}{\varepsilon_0}} = 10^{-2}\sqrt{5-\frac{\varepsilon_{ell}}{\varepsilon_0}} \qquad (21)$$

Annahme : $0 < \varepsilon_{ell} < 5\varepsilon_0$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{ell}}{\varepsilon_0}}\right| < \left|\sqrt{1-5}\right| = 2 \quad \Rightarrow \quad |p_1 b| < 2\cdot 10^{-2} \ll 1 \qquad (23)$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{5-\frac{\varepsilon_{ell}}{\varepsilon_0}}\right| < \left|\sqrt{5-0}\right| = \sqrt{5} \Rightarrow |p_2 b| < \sqrt{5}\cdot 10^{-2} \ll 1 \qquad (24)$$

mit (23), (24) und Hinweis folgt aus (19)

$$p_1 \tan(p_1 b) \approx p_1^2 b = -p_2\tan(p_2 b) \approx -p_2^2 b \Rightarrow p_1^2 b \approx p_2^2 b$$

also $k_1^2\left(1-\frac{\varepsilon_{ell}}{\varepsilon_0}\right) = -k_1^2\left(5-\frac{\varepsilon_{ell}}{\varepsilon_0}\right) \Rightarrow 6 = 2\frac{\varepsilon_{ell}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\varepsilon_{ell} = 3\varepsilon_0} \qquad (25)$$

Dies erfüllt die Annahme (22), so dass die Lösung konsistent ist.

Somit: $p_1 = \frac{1}{b}10^{-2}\sqrt{-2} = j\sqrt{2}\,10^{-2}\frac{1}{b}$ (26)

$p_2 = \frac{1}{b}10^{-2}\sqrt{2} = \sqrt{2}\,10^{-2}\frac{1}{b}$ (27)

$\beta = \omega\sqrt{\mu_0 3\varepsilon_0} = \frac{1}{b}\sqrt{3}\cdot 10^{-2}$ (28)

$v_{phase} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{3}}c$ (c = Vakuumlichtgeschwindigkeit) (29)