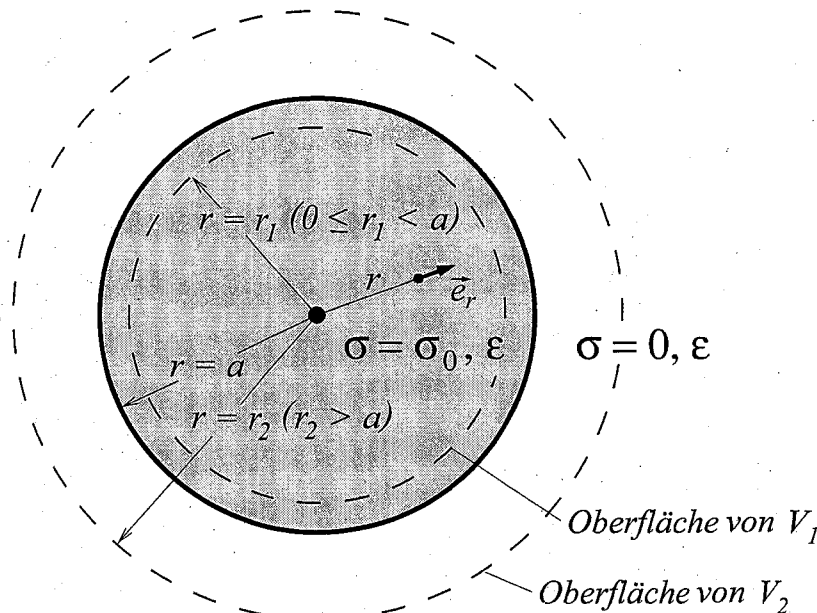


KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1" DPO 98

Aufgabe 1 21 Punkte



Eine Kugel (Radius a) mit der Leitfähigkeit σ_0 ist in ein unendlich ausgedehntes, homogenes, **nichtleitendes** ($\sigma = 0$) und **ladungsfreies** Medium eingebettet. Die Materialgröße ϵ ist konstant im ganzen Raum. Im Innern der Kugel (d.h. $0 \leq r < a$) befindet sich zur Zeit $t = 0$ die folgende kugelförmige Raumladungsverteilung:

$$\rho(r, t = 0) = \rho_0 \left(\frac{r}{a} \right)^2, \quad \rho_0 = \text{const.} \quad (r < a).$$

Ferner befindet sich zur Zeit $t = 0$ **auf der Kugeloberfläche** ($r = a$) die ebenfalls kugelsymmetrische, homogene Flächenladungsdichte

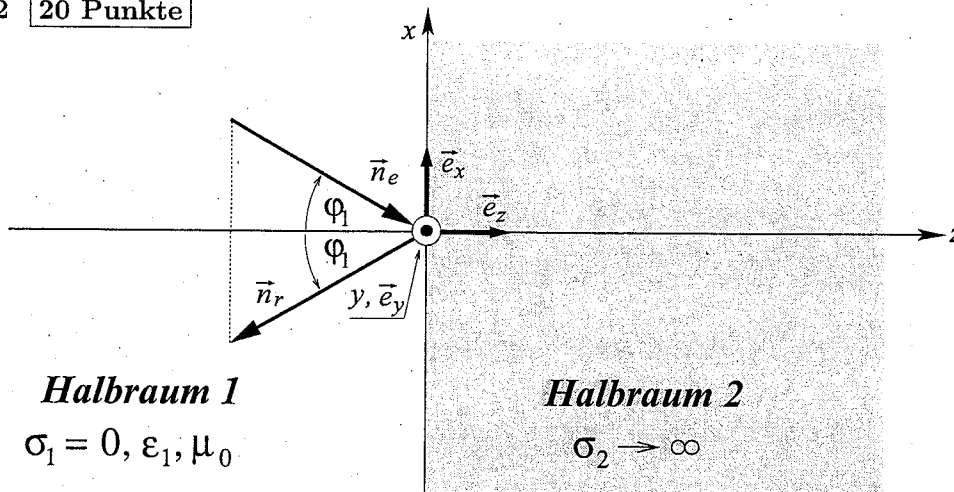
$$\rho_F(t = 0) = -\frac{a\rho_0}{5} \quad \text{mit obigem } \rho_0.$$

Im folgenden wird vorausgesetzt, dass Diffusionsvorgänge zu vernachlässigen sind.

- 2 Punkte Leiten Sie ausgehend von der Kontinuitätsgleichung $\text{div } \vec{J}(r, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) = 0$ eine Differenzialgleichung für die **zeitliche** Änderung der Raumladungsdichte $\rho(r, t)$ im Bereich $0 \leq r < a$ ab. Geben Sie die Lösung dieser Differenzialgleichung an.
- 2 Punkte Berechnen Sie die im kugelförmigen Volumen V_1 eingeschlossene Ladung $Q_1(r_1, t) = \int_{V_1} \rho(r, t) dV$ als Funktion des Radius r_1 ($r_1 < a$) und der Zeit t .
- 4 Punkte Berechnen Sie für den Bereich $0 \leq r < a$ die dielektrische Verschiebungsdichte \vec{D}_1 als Funktion des Radius' r_1 und der Zeit t , indem Sie die Feldgleichung $\text{div } \vec{D} = \rho$ über das kugelförmige Volumen V_1 (Radius r_1) integrieren. Beachten Sie dabei die **Kugelsymmetrie** der Raumladungsverteilung sowie den Unterpunkt b).
- 4 Punkte Geben Sie die Ladung $Q_1(r_1 = a - 0, t)$ an, also die gesamte Raumladung (**ohne die Flächenladung!**) in der Kugel zur Zeit t .
Berechnen und skizzieren Sie die Flächenladungsdichte $\rho_F(t)$ als Funktion der Zeit t .
- 3 Punkte Berechnen Sie die im kugelförmigen Volumen V_2 eingeschlossene Ladung $Q_2(r_2, t)$ (mit $r_2 > a$) sowie die dielektrische Verschiebungsdichte \vec{D}_2 im Bereich $r > a$ als Funktion des Radius' r_2 und der Zeit t .
- 3 Punkte Berechnen Sie unter Benutzung der Ergebnisse aus Unterpunkt c) die im Innern der Kugel $r = a$ erzeugte Joulesche Leistung $P_{\text{Joule}}(t)$ als Funktion der Zeit t .
Berechnen Sie die dort von $t = 0$ bis $t = \infty$ erzeugte Joulesche Wärmeenergie W_{Joule} .
- 3 Punkte Zeigen Sie, dass gilt: $W_{\text{Joule}} = W_{\text{el}}(t = 0)$.
Dabei ist $W_{\text{el}}(t = 0)$ die elektrische Feldenergie der **gesamten Anordnung** zur Zeit $t = 0$.

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1" DPO 98

Aufgabe 2 20 Punkte



Eine ebene, transversale, linear polarisierte *TEM*-Welle mit harmonischer Zeitabhängigkeit breitet sich im Halbraum 1 (Materialkonstanten $\sigma_1 = 0, \epsilon_1, \mu_0$) in Richtung des Einheitsvektors \vec{n}_e aus und trifft bei $z = 0$ unter dem Einfallswinkel φ_1 ($0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$) auf die Oberfläche des ideal leitenden ($\sigma_2 \rightarrow \infty$) Halbraums 2 auf und wird dort reflektiert.

Die komplexe elektrische Feldstärke \vec{E}_e der einfallenden Welle ist gegeben durch:

$$\vec{E}_e = \vec{e}_y E_{e0} \exp(-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}); \quad \vec{k}_e = \vec{n}_e \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_0}, \quad \vec{n}_e = -\vec{e}_x \sin \varphi_1 + \vec{e}_z \cos \varphi_1.$$

Für die komplexe elektrische Feldstärke \vec{E}_r der reflektierten Welle wird folgender Ansatz gemacht:

$$\vec{E}_r = \vec{e}_y E_{r0} \exp(-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}); \quad \vec{k}_r = \vec{n}_r \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_0}, \quad \vec{n}_r = -\vec{e}_x \sin \varphi_1 - \vec{e}_z \cos \varphi_1.$$

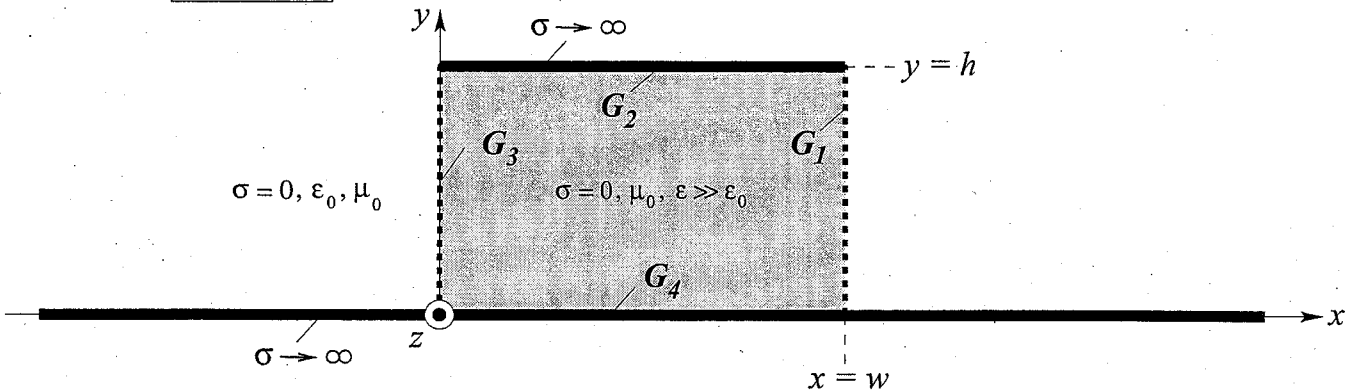
- 2 Punkte Bestimmen Sie die zugehörigen komplexen magnetischen Feldstärken \vec{H}_e und \vec{H}_r der einfallenden und der reflektierten Welle.
- 2 Punkte Geben Sie die Grenzbedingungen an, welche die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Feldstärke \vec{H} an der Grenzfläche bei $z = 0$ erfüllen müssen.
- 2 Punkte Bestimmen Sie aus der Grenzbedingung für die elektrische Feldstärke \vec{E} eine Beziehung zwischen der Amplitude E_{e0} der einfallenden Welle und der Amplitude E_{r0} der reflektierten Welle.

Für die folgenden Unterpunkte wird angenommen, dass sich die einfallende Welle in z -Richtung ausbreitet, d.h. es gilt $\varphi_1 = 0$.

- 1 Punkt Welche Beziehung ergibt sich in diesem Fall zwischen dem Wellenzahlvektor \vec{k}_e der einfallenden Welle und dem Wellenzahlvektor \vec{k}_r der reflektierten Welle?
- 3 Punkte Bestimmen Sie sowohl die resultierende reelle elektrische Feldstärke $\vec{E}(t)$ als auch die resultierende reelle magnetische Feldstärke $\vec{H}(t)$ im Halbraum 1 allein in Abhängigkeit von der Amplitude E_{e0} und von dem Betrag des Wellenzahlvektors $|\vec{k}_e|$ der einfallenden Welle. Fassen Sie die Ergebnisse so zusammen, dass sie keine Exponentialfunktionen mehr enthalten.
- 7 Punkte Zeigen Sie, dass im Falle des hier betrachteten senkrechten Einfalls im Halbraum 1 im Zeitmittel keine elektromagnetische Energie transportiert wird.
Bestimmen Sie im Gebiet 1 den zeitlichen Mittelwert der ortsabhängigen elektromagnetischen Energiedichte $w(t) = w(t)_{el} + w(t)_{mag}$.
- 3 Punkte Bestimmen Sie die reelle Flächenstromdichte $\vec{J}_F(t)$ auf der Oberfläche des ideal leitenden Halbraums (d.h. bei $z = 0$).

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1" DPO 98

Aufgabe 3 19 Punkte



Die obige Abbildung zeigt den Querschnitt einer in z -Richtung unendlich ausgedehnten Anordnung. Auf der ideal leitenden ($\sigma \rightarrow \infty$) xz -Ebene liegt ein dielektrisches Material (Materialkonstanten $\sigma = 0$, μ_0 und $\epsilon \gg \epsilon_0$) mit rechteckigem Querschnitt (Breite w , Höhe h), dessen Oberseite (Grenzfläche G_2) mit einer ideal leitenden ($\sigma \rightarrow \infty$) Schicht vernachlässigbarer Dicke versehen ist. Der Außenraum besitzt die Materialkonstanten $\sigma = 0$, μ_0 und ϵ_0 . Wegen $\epsilon \gg \epsilon_0$ können die Grenzflächen G_1 und G_3 für die vorliegende Aufgabe näherungsweise als magnetische Wände (d.h. es gilt $H_{\text{tan}} = 0$) aufgefasst werden.

Es sollen hier TE -Wellentypen betrachtet werden, die sich in dem dielektrischen Material in positiver z -Richtung ausbreiten. Die Felder besitzen harmonische Zeitabhängigkeit, es gilt also $\vec{E}(t) = \Re \{ \vec{E} e^{j\omega t} \}$, $\vec{H}(t) = \Re \{ \vec{H} e^{j\omega t} \}$.

Die Klasse der TE -Wellen erhält man durch einen Ansatz der Vektorwellenpotenziale \vec{F} , \vec{G} gemäß

$$\vec{G} = \vec{0}, \quad \vec{F} = f(x, y, z) \vec{e}_z,$$

- a) 2 Punkte Geben Sie die Differenzialgleichung für die skalare Potenzialfunktion $f(x, y, z)$ an.
- b) 5 Punkte Ermitteln Sie durch den Separationsansatz $f(x, y, z) = \varphi(x) \psi(y) \exp\{-j\beta z\}$ die Elementarlösungen der unter a) aufgestellten Differenzialgleichung für von Null verschiedene Werte der Separationskonstanten.
- Was folgt für β aus der Separationsbedingung?

Hinweis für die folgenden Unterpunkte:

Für die Felder gilt

$$\vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(k^2 f \vec{e}_z + \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right),$$

$$\vec{E} = -\nabla f \times \vec{e}_z.$$

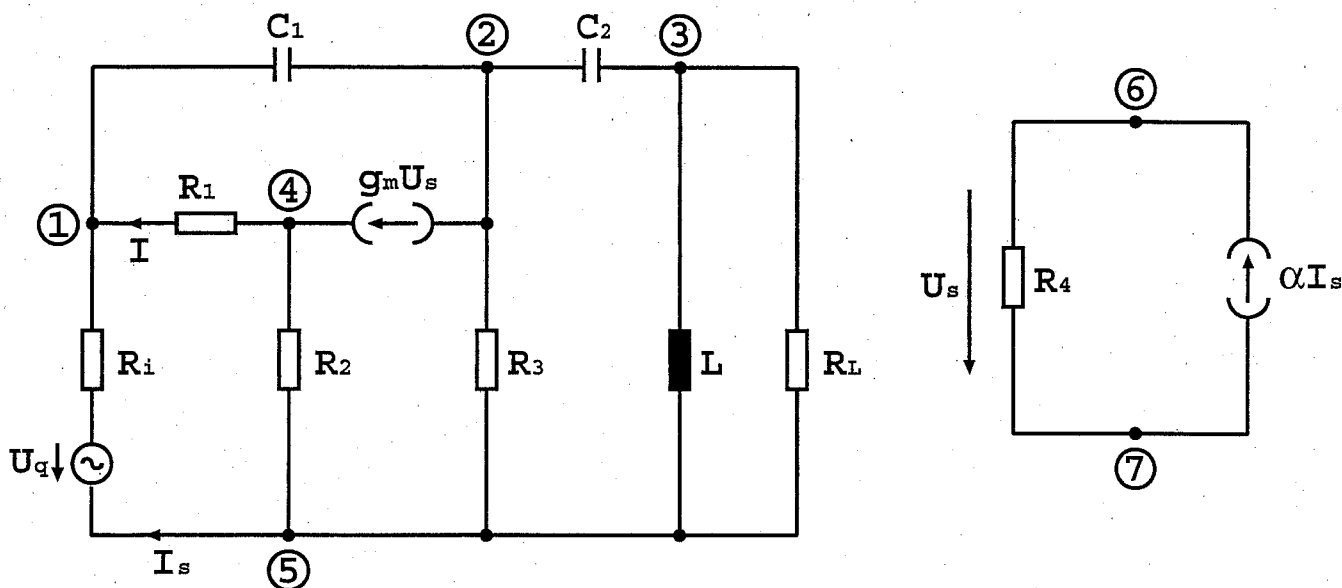
- c) 4 Punkte Schränken Sie die Elementarlösungen so ein, dass die Grenzbedingungen für die Felder im Gebiet 1 sowohl auf der Fläche G_2 als auch auf der Fläche G_4 erfüllt sind.
- d) 4 Punkte Schränken Sie die Elementarlösungen weiter derart ein, dass die Grenzbedingungen für die Felder sowohl auf der Fläche G_1 als auch auf der Fläche G_3 erfüllt sind.
- e) 2 Punkte Geben Sie diejenigen Werte von β explizit einschließlich der ω -Abhängigkeit an, die den jeweils erhaltenen Elementarlösungen als charakteristische Werte zuzuordnen sind.
- f) 2 Punkte Geben Sie die Grenzfrequenzen für die berechneten TE -Wellentypen an.

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Aufgabe 4 20 Punkte

In dem vorliegenden Problem sind alle elektrischen Größen komplexe Wechselstromgrößen, d.h. es liegt harmonische Zeitabhängigkeit vor. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind diese Größen jedoch nicht unterstrichen.

Das unten abgebildete Netzwerk mit den Widerständen R_i , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_L , den Kapazitäten C_1 , C_2 , der Induktivität L , der Spannungsquelle U_q und den gesteuerten Stromquellen αI_S und $g_m U_S$ soll mit dem Maschenimpedanzverfahren analysiert werden.



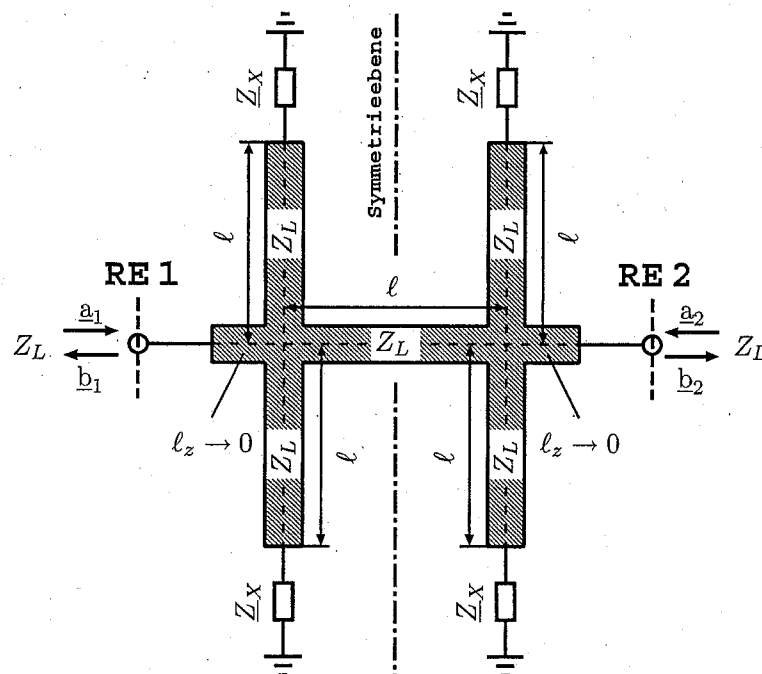
- 3 Punkte Bereiten Sie das abgebildete Wechselstromnetzwerk durch die notwendigen topologischen Umformungen für die Bearbeitung mit dem Maschenimpedanzverfahren vor. Die angegebene Knotenkennzeichnung von 1 bis 7 soll hierbei beibehalten werden. Skizzieren Sie das aus der Umwandlung resultierende Netzwerk.
- 5 Punkte Zeichnen Sie den Graphen des im Unterpunkt a) bestimmten Wechselstromnetzwerks. Bestimmen Sie die erste Bettische Zahl m und den Rang p dieses Netzwerks. Wählen Sie einen Baum, in dem die Ströme in den Zweigen $5 \rightarrow 4$, $5 \rightarrow 1$ und $3 \rightarrow 5$ (mit dieser Orientierung) unabhängige Maschenströme sind. Skizzieren Sie diesen Baum und zeichnen sie die Maschenströme in den Graphen ein.
- 8 Punkte Bestimmen Sie zu dem unter Unterpunkt b) gezeichneten Graphen und festgelegten Baum den Spaltenvektor der unabhängigen Maschenurspannungen \vec{U} , den Spaltenvektor der Kreisströme \vec{I} und die Maschenimpedanzmatrix \vec{Z} und stellen Sie die Maschengleichungen in Matrixform dar.
- 4 Punkte Berechnen Sie mit Hilfe der unter c) aufgestellten Maschengleichungen in Matrixform den Strom I durch den Widerstand R_1 . Dabei soll gelten $\frac{1}{g_m} = R_i = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ sowie $\alpha = 1$.

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Aufgabe 5 20 Punkte

Es wird gemäß untenstehender Abbildung (Layout) ein **verlustloses und reziprokes** Filter bei seiner Mittenfrequenz f_0 (harmonische Zeitabhängigkeit) betrachtet. Dieses besteht aus einer Streifenleitung zwischen den Referenzebenen RE1 und RE2 und vier Stichleitungen mit dem jeweiligen Leitungswellenwiderstand Z_L sowie der jeweiligen Ausbreitungskonstanten $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ = Wellenlänge auf der jeweiligen Leitung). Die Stichleitungen sind mit einer unbekannten Impedanz Z_X abgeschlossen.

Das Filter wird als Zweitor mit den Referenzebenen RE1 und RE2 betrachtet. Die Bezugsimpedanz auf beiden Seiten ist Z_L . Die Länge der einzelnen Leitungsabschnitte bei der Mittenfrequenz f_0 beträgt jeweils $\ell = \frac{\lambda}{4}$ (Diskontinuität der Leitungskreuzungen vernachlässigt). Die Länge ℓ_z der Zuführungsleitungen an den beiden Toren 1 und 2 kann vernachlässigt werden ($\ell_z \rightarrow 0$, s. Skizze).



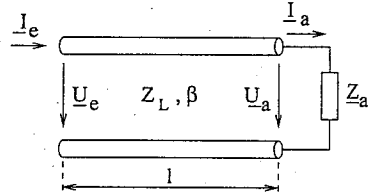
Layout mit Abmessungen (Mikrostreifentechnik)

- 3 Punkte** Welche Beziehungen gelten zwischen den Streuparametern des Filters aufgrund der vorliegenden Symmetrie, Reziprozität und Verlustfreiheit? Geben Sie dabei explizit an, welche Beziehungen sich aus Symmetrie- und Reziprozitätsbedingungen sowie der Verlustlosigkeit ergeben.
- 3 Punkte** Unter Ausnutzung der Symmetrie des Filters sollen die Streuparameter berechnet werden. Hierbei genügt es, nur eine Hälfte des Filters als Eintor zu betrachten, wobei in der Symmetrieebene ein geeigneter Abschluß einzufügen ist. Geben Sie zwei geeignete Anregungsfälle $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^{(1)}$ und $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^{(2)}$ sowie die zugehörigen Abschlüsse in der Symmetrieebene an und skizzieren Sie jeweils ein Leitungsersatzschaltbild der betreffenden Eintor-Ersatzschaltung unter Angabe der Leitungslängen.

(Fortsetzung der Aufgabenstellung auf der folgenden Seite)

- c) **6 Punkte** Berechnen Sie für beide Anregungsfälle den Reflexionsfaktor der jeweiligen Eintor-Ersatzschaltung $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$ anhand der unter b) skizzierten Ersatzschaltungen.

Hinweis:



Leitungsgleichungen

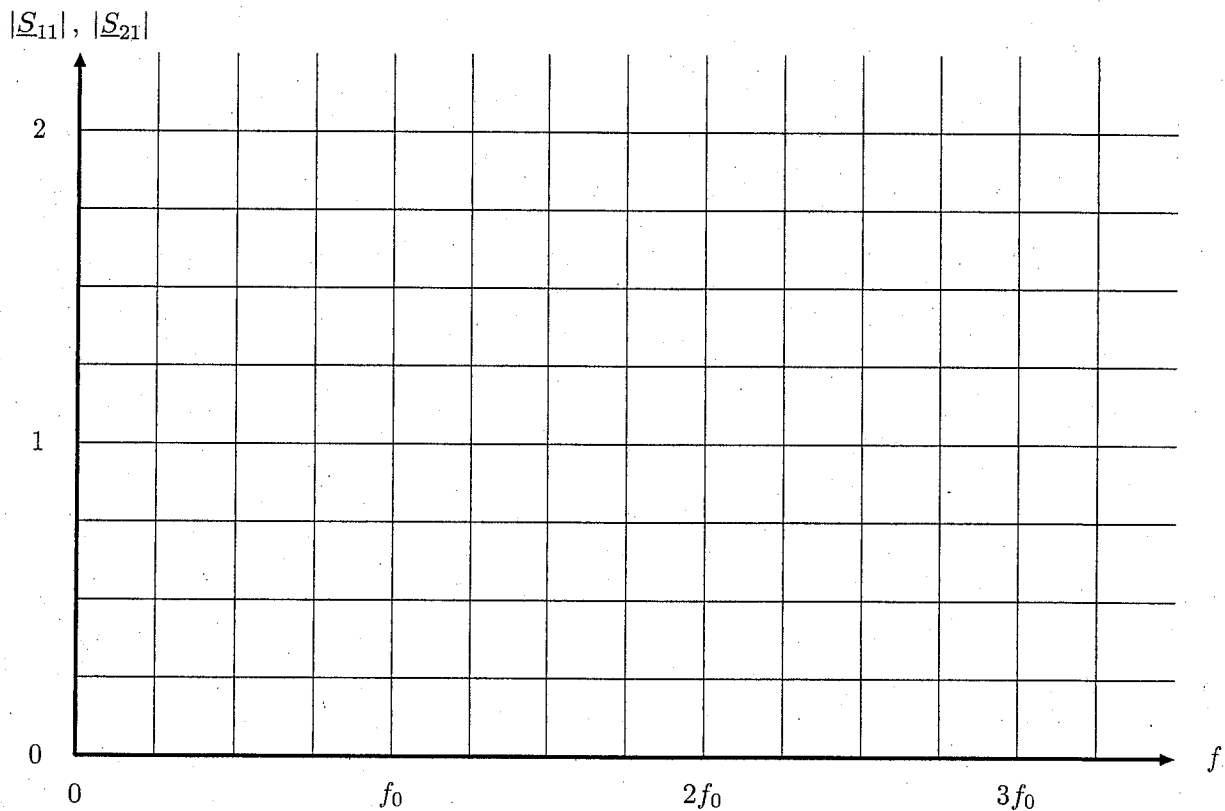
$$\begin{bmatrix} U_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l & j Z_L \sin \beta l \\ j Z_L \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ I_a \end{bmatrix}$$

Für die folgenden beiden Unterpunkte gilt: $Z_X = 0$.

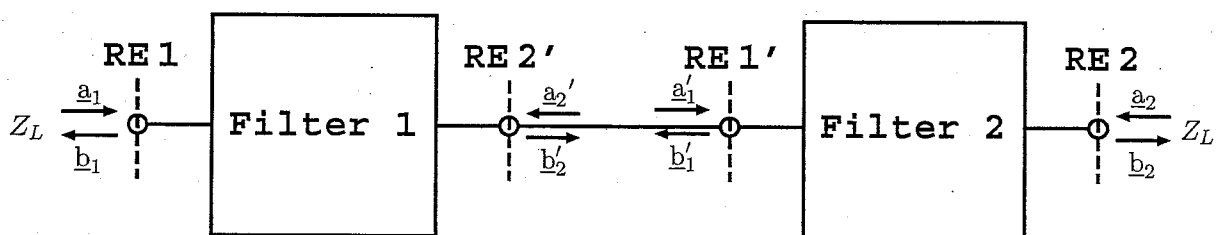
- d) **3 Punkte** Berechnen Sie explizit die Streuparameter \underline{S}_{11} und \underline{S}_{21} des Filters aus den unter c) berechneten Reflexionsfaktoren $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$.
- e) **2 Punkte** Skizzieren Sie den Verlauf von $|\underline{S}_{11}|$ und $|\underline{S}_{21}|$ des Filters über der Frequenz (mindestens 3 Punkte exakt in das Diagramm eintragen). Kennzeichnen Sie, welche Kurve zu $|\underline{S}_{11}|$ und welche Kurve zu $|\underline{S}_{21}|$ gehört.

Name: _____

Matr.Nr.: _____

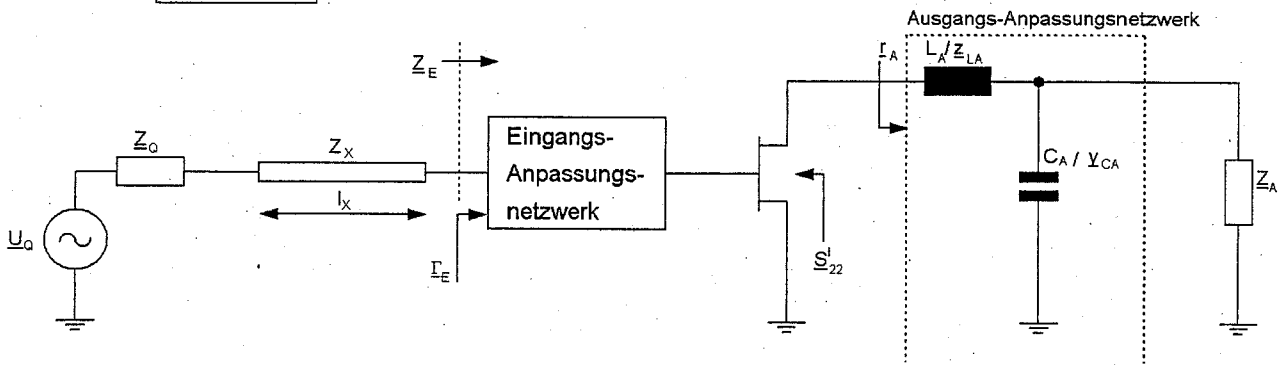


- f) **3 Punkte** Es werden nun zwei identische Exemplare des Filters gemäß folgender Abbildung in Kette geschaltet. Berechnen Sie die Streuparameter der Gesamtschaltung in Abhängigkeit der Streuparameter des Filters. Gehen Sie hierbei vom allgemeinen Fall $Z_X \neq 0$ aus und setzen Sie nicht die unter d) erhaltenen expliziten Ergebnisse ein.



KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Aufgabe 6 20 Punkte

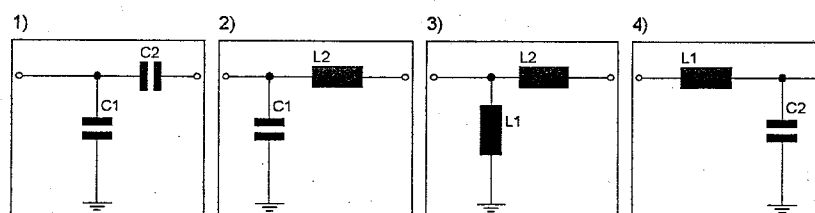


Betrachtet wird ein einstufiger Verstärker mit einem Feldeffekt-Transistor (FET) in Common-Source-Anordnung (s. Abbildung). Folgende, auf $Z_0 = 50 \Omega$ bezogene Parameter sind bei der Betriebsfrequenz f (harmonische Zeitabhängigkeit) bekannt:

$$\Gamma_E = 0, \underline{S}_{11} = 0.8/(-130)^\circ, \underline{S}_{12} = 0, \underline{S}_{21} = 1.681/(26)^\circ, \underline{y}_{CA} = j0.65, \underline{z}_{LA} = j1.05, \underline{z}_A = 1.$$

- 3 Punkte** Geben Sie das vereinfachte Hochfrequenz(HF)-Ersatzschaltbild des FET's bestehend aus C_{GS} , R_G , g_m , C_{DS} und R_{DS} an. In welcher Weise hängt der ausgangsseitige Reflexionsfaktor \underline{S}'_{22} des FET vom Eingangs-Anpassungsnetzwerk ab? (Begründung)
- 4 Punkte** Beim gegebenen Ausgangs-Anpassungsnetzwerk liegt Leistungsanpassung vor. Bestimmen Sie mit Hilfe des Smith-Charts (Hilfsblatt 1) den Streuparameter \underline{S}_{22} des FET!
- 4 Punkte** Die konzentrierten Bauelemente des Ausgangs-Anpassungsnetzwerkes sollen durch ein Netzwerk bestehend aus einer Serien- und einer Stichleitung ($Z_L = 50 \Omega$) mit den elektrischen Längen l_s/λ bzw. l_p/λ ersetzt werden. Bestimmen Sie in Hilfsblatt 2 l_s/λ und l_p/λ nebst Abschluss der Stichleitung (Short oder Open) so, dass diese Längen so kurz wie möglich werden! (Bemaßte Skizze!)
- 2 Punkte** In Hilfsblatt 3 sind Ortskurven \underline{r}_A eingetragen, für die die Verstärkung $G_{TU}(\underline{r}_A)$ konstant ist.
 - Welche Verstärkung hätte der Verstärker ohne Ausgangs-Anpassungsnetzwerk?
 - Um wieviel dB steigt die Verstärkung, wenn nur Z_A und L_A in Reihe an den Ausgang des FET geschaltet werden?
- 2 Punkte** Die Quelle habe den Innenwiderstand $\underline{Z}_Q = 72 \Omega$ und soll mittels eines als verlustlos angenommenen Streifenleitungsabschnitts l_x an die eingangsseitige Impedanz \underline{Z}_E angepasst werden (s. Abbildung). Wie lang muss die elektrische Länge l_x/λ hierfür sein? Welchen Wellenwiderstand Z_x muss die Streifenleitung der Länge l_x haben?

Es soll ein Eingangs-Anpassungsnetzwerk entworfen werden, das für den gegebenen Transistor den Wert $\Gamma_E = 0$ realisiert. Dafür stehen die vier unten gezeigten möglichen Topologien zur Verfügung.



- 5 Punkte** Welche Topologien eignen sich in diesem Fall? Wählen Sie eine geeignete Topologie aus und bestimmen Sie die normierten Werte der benötigten Reaktanzen ($\omega L/Z_0$, $Z_0/\omega L$, $1/\omega C Z_0$ bzw. $\omega C Z_0$) mit Hilfe des Smith Charts (Hilfsblatt 4)!

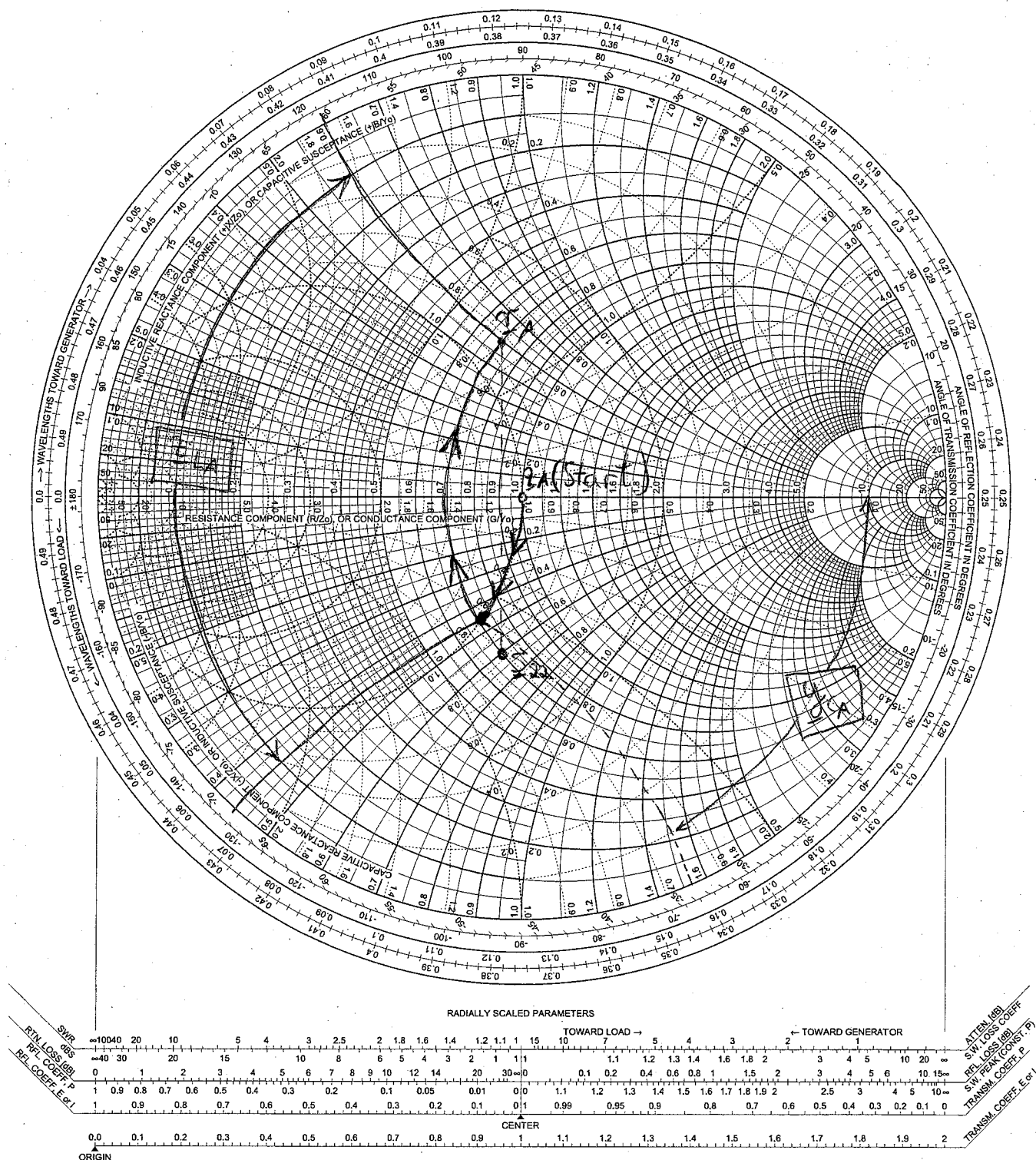
KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt b)

xy-Smith-Chart

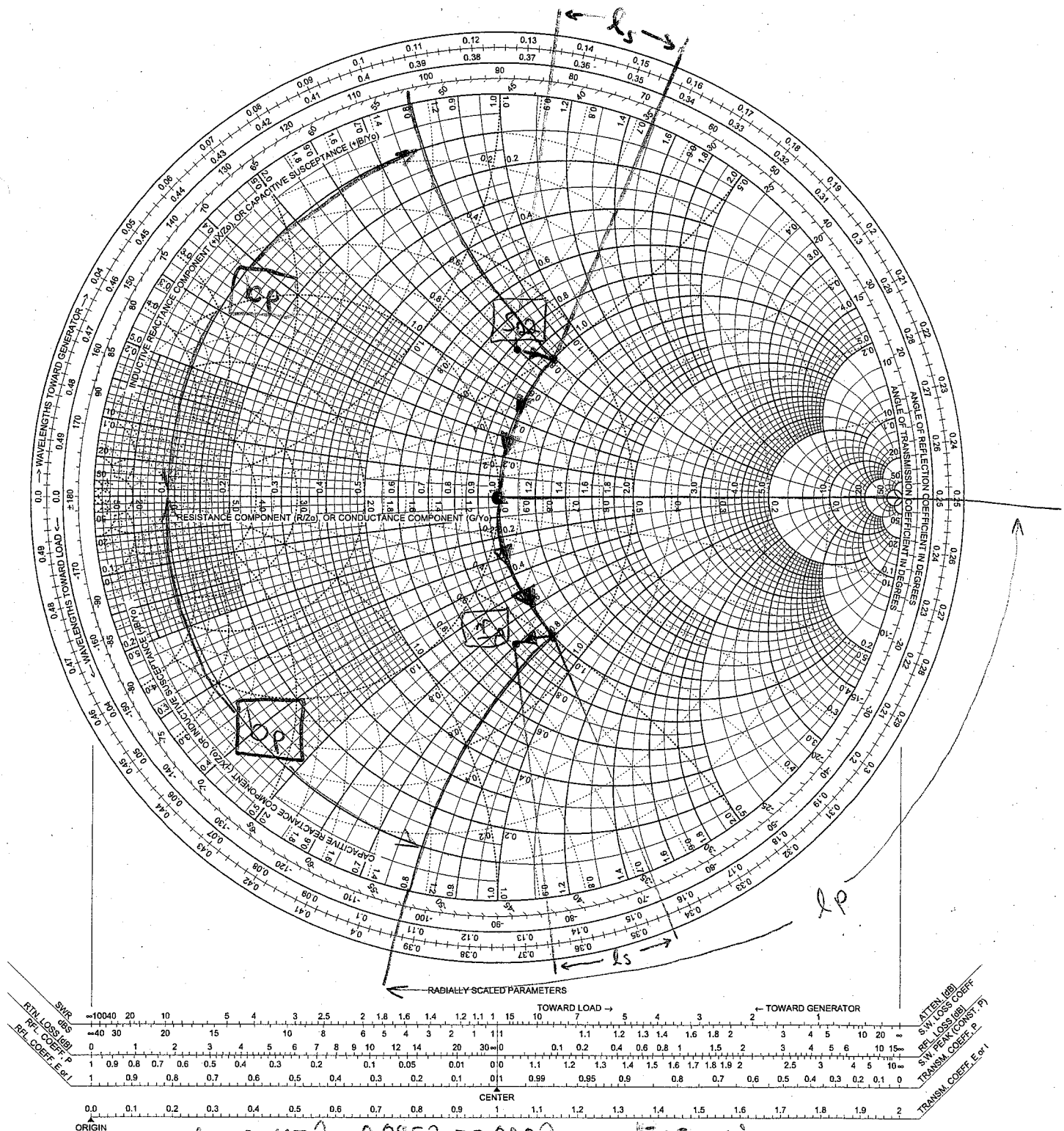
Name: _____

Matr.Nr.: _____



Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt c)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



alternatim:

$$b_p = -0.79$$

$$x_2 = 0,115\% - 0,055\% = 0,06\%$$

$$I_p = 0.1432$$

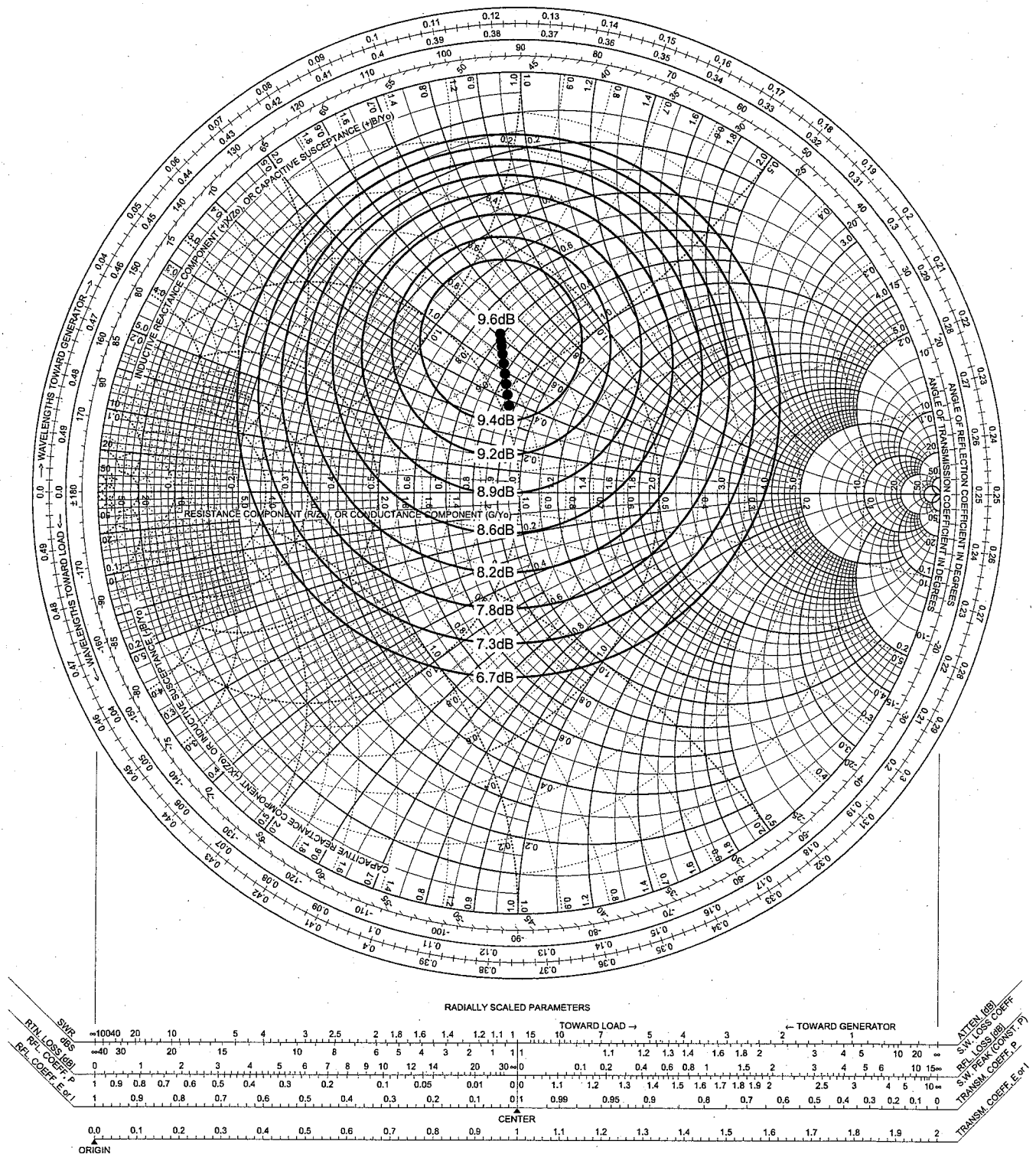
$$u_1 = -0.17$$

4-3882-0,202-0,432

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt d)

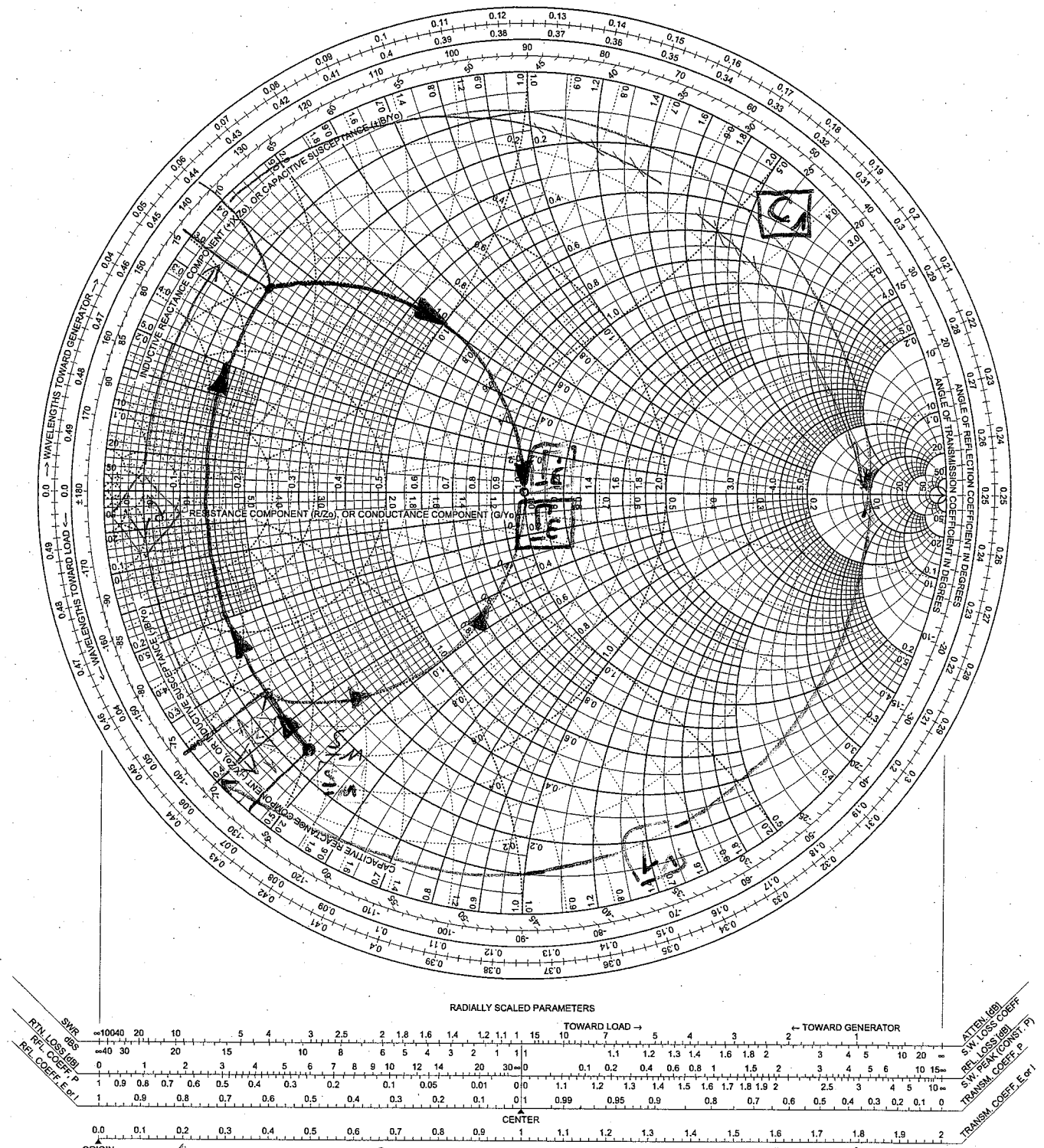
Name: _____ Matr.Nr.: _____



KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 4 zu Aufgabe 6, Unterpunkt f)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



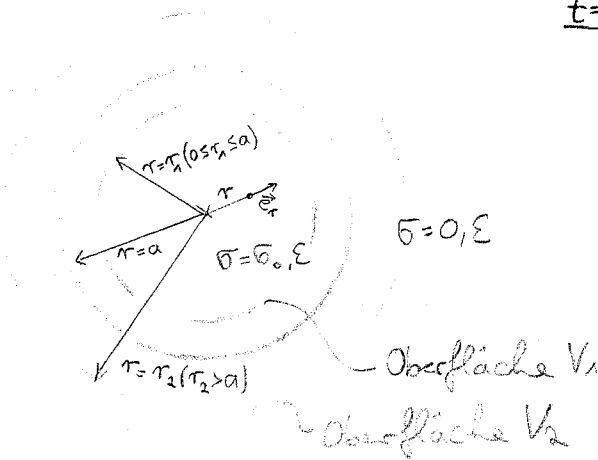
Topologie 2: $\omega C_1 Z_0 = 2,53 - 0 = 2,53$

$\frac{\omega L_2}{Z_0} = 0,34 - (-0,46) = 0,8$

Topologie 1: $\frac{\omega L_1}{Z_0} = 0 - 2,53 = -2,53$

$\frac{\omega C_2}{Z_0} = -0,34 - 0,46 = -0,8$

Aufgabe 1):



$$t=0: \quad S(r, t=0) = S_0 \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad S_0 = \text{const}, \quad r < a$$

$$E_r(t=0) = -\frac{a S_0}{\epsilon}$$

a) $\text{div } \vec{J}(r, t) + \frac{\partial}{\partial t} S(r, t) = 0$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \vec{D}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{J} = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \underbrace{\text{div } \vec{D}}_{=: S} = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot S$$

\Rightarrow DGL: $\frac{\sigma}{\epsilon} \cdot S(r, t) = 0$

Lösung: $S(r, t) = S(r, t=0) \cdot e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$
 $= S_0 \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}, \quad r < a$

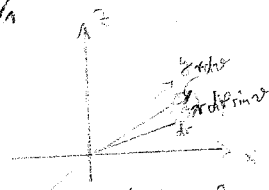
b) eingeschlossene Ladung:

$$Q_1(r_1, t) = \int_{V_1} S(r, t) dV, \quad r_1 < a$$

$$\Rightarrow Q_1(r_1, t) = \int_{V_1} S_0 \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-t/\tau} \cdot dV$$

$$= \frac{S_0}{a^2} e^{-t/\tau} \int_0^{r_1} 4\pi r^4 dr$$

$$= \frac{4}{5} \frac{\pi S_0}{a^2} e^{-t/\tau} r^5 \Big|_0^{r_1} = \frac{4}{5} \pi S_0 e^{-t/\tau} \frac{r_1^5}{a^2}$$



$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$= \underbrace{4\pi r^2}_{dA} dr$$

c) Verschiebungstromdichte \vec{D} für $0 \leq r < a$:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\oint_{\partial V_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{F} = \int_{V_1} \operatorname{div} \vec{D}_1 dV_1 = \int_{V_1} \rho dV_1 = Q_1 = \frac{4}{5} \pi S_0 \frac{r_1^5}{a^2} e^{-t/\tau}$$

↑
Gauß

$$\int_{V_1} \operatorname{div} \vec{D} dV_1 = \oint_{\partial V_1} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \int_{\partial V_1} D(r, t) \cdot dF$$

↑
Gauß

wg. Kugelsymmetrie:

$$\vec{D} = D(r, t) \cdot \vec{e}_r$$

$$d\vec{F} = dF \cdot \vec{e}_r$$

$$= D(r, t) \cdot \int_{\partial V_1} dF = 4\pi r_1^2 \cdot D(r_1, t)$$

$$\Rightarrow D(r_1, t) = \frac{1}{4\pi r_1^2} \cdot \frac{4}{5} \pi S_0 \frac{r_1^5}{a^2} e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{S_0 r_1^3}{5 a^2} e^{-t/\tau} \quad (*)$$

d) Ladung $Q_1(r_1 = a - 0, t)$:

$$Q_1(r_1 = a - 0, t) = \frac{4}{5} \pi S_0 a^3 e^{-t/\tau}$$

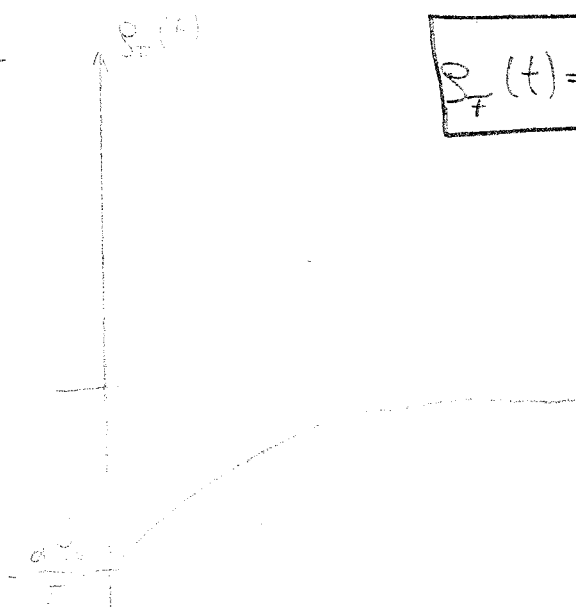
Da der Außenraum nicht leitend ist, muss die "verschwindende" Ladung $\Delta Q_1 = Q_1(r = a - 0, t = 0) - Q_1(r_1 = a - 0, t)$ als Flächenladung (zusätzlich zu der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen!) bei $r = a$ auftreten:

$$\Delta Q_1 = \frac{4\pi}{5} S_0 a^3 (1 - e^{-t/\tau})$$

$$S_{F_1}(t) = \frac{\Delta Q_1}{4\pi a^2} = \frac{S_0 a}{5} (1 - e^{-t/\tau}) \quad [S_{F_1}(0) = 0]$$

Stärke:

$$S_F(t) = -\frac{a S_0}{5} + S_{F_1}(t) = -\frac{S_0 a}{5} e^{-t/\tau}$$



e) Gesamtladung in V_2 :

$$Q_2(r_2, t) = Q_1(r_1 = a - 0, t) + S_F(t) \cdot 4\pi a^2$$

$$Q_2(r_2, t) = \frac{4\pi}{5} S_0 a^3 e^{-t/\tau} - \frac{4\pi}{5} S_0 a^3 e^{-t/\tau} = 0$$

alternativ: wegen $\sigma = 0$ außen gilt $Q_2(r_2, t) = Q_2(r_1, 0)$

$$\Rightarrow Q_2(r_2, 0) = -\frac{a S_0}{5} \cdot 4\pi a^2 + Q_1(a, 0) = -\frac{a S_0}{5} 4\pi a^2 + \frac{4\pi}{5} S_0 a^3 = 0$$

analog zu c): $\oint_{\partial V_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{F} = Q_2 = 0$

$$D_{2r}(r_2, t) \cdot 4\pi r_2^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} D_{2r} = 0 \\ \vec{D}_2 = \vec{0} \end{cases}$$

f) $P_{12} = \sigma_0 E_r^2 = \frac{\sigma_0}{\epsilon^2} D_{r1}^2 = \frac{\sigma_0 r_1^6}{25 \epsilon^2 a^4} S_0^2 e^{-2t/\tau}$

$$P_{12}(t) = \int_{V_1} P_{12} dV = \frac{\sigma_0 S_0^2 4\pi}{25 \epsilon^2 a^4} e^{-2t/\tau} \int_0^a r_1^8 dr_1$$

$$P_{12}(t) = \frac{4\pi \sigma_0}{225 \epsilon^2} a^5 S_0^2 e^{-2t/\tau}$$

$$W_{12} = \int_0^\infty P_{12}(t) dt = \frac{4\pi \sigma_0}{225 \epsilon^2} a^5 S_0^2 \underbrace{\int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt}_{= \tau/2}$$

$$W_{12} = \tau \cdot \frac{2\pi \sigma_0}{225 \epsilon^2} a^5 S_0^2 = \frac{2\pi}{225 \epsilon} a^5 S_0^2 \quad (**)$$

$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma_0}$

g) $W_{el}(t=0) = \int_{V_{\infty}} w_{el}(t=0) dV$; $w_{el}(t=0) = \frac{1}{2} \epsilon E_r^2(t=0) = \frac{1}{2\epsilon} D_r^2(t=0)$

$$D_r(t=0) = 0 \text{ für } r > a$$

$$D_{1r}(t=0) = \frac{r^3}{5a^2} S_0$$

(*)

$$W_{el}(t=0) = \frac{1}{2\epsilon} \int_{V_A} D_{nr}(t=0) dV = \frac{2\pi\omega_0}{25\epsilon a^4} \int_0^a r_A^2 dr_A$$

$$W_{el}(t=0) = \frac{2\pi}{25\epsilon} a^5 \rho_0^2 = W_{13}$$

(**)

Aufgabe 2):

a) $\vec{H}_e = \frac{1}{z_1} \vec{n}_e \times \vec{E}_e$; $\vec{H}_r = \frac{1}{z_1} \vec{n}_r \times \vec{E}_r$

$$\vec{H}_e = \frac{E_{oe}}{z_1} e^{-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{E_{oe}}{z_1} e^{-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}} (\vec{e}_x \cos\varphi_1 + \vec{e}_z \sin\varphi_1)$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_{or}}{z_1} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ -\cos\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_{or}}{z_1} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} (\vec{e}_x \cos\varphi_1 - \vec{e}_z \sin\varphi_1)$$

b) $\vec{n} \times \vec{E}_{12} = 0$ $\vec{n} \times \vec{H}_{12} = \vec{J}_F$

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}_{12} &= \vec{H}_2 - \vec{H}_1, \text{ wg. } r \rightarrow \infty: \vec{H}_2 = 0 \\ \vec{n} \times (-\vec{H}_1) &= \vec{J}_F \end{aligned} \right\}$$

c) x -Ebene als Grenzfläche: $z=0$, $\vec{n}_F = \vec{e}_z$: $\vec{n}_F \cdot \vec{r} = 0$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

Die Stetigkeitsbed. ist nur erfüllt, falls die Phasenfaktoren gleich sind:

$$e^{-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}_0} = e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}_0} \rightarrow e^{-j\omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}(-x\sin\varphi_1)} = e^{-j\omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}(-x\sin\varphi_1)}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_z \times \vec{e}_y \cdot [E_{oh} + E_{or}] e^{j\omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}x\sin\varphi_1} = 0$$

$$\Rightarrow -\vec{e}_x \cdot [E_{oh} + E_{or}] = 0 \quad \Rightarrow E_{oh} = -E_{or}$$

d) $\varphi_1 = 0$, d.h. nur Ausbreitung in pos. z -Richtung für die einlaufende Welle und in neg. z -Richtung für die refl. Welle

$$\varphi_1 = 0 \rightarrow \sin\varphi_1 = 0 \text{ und } \cos\varphi_1 = 1 \Rightarrow \vec{n}_n = \vec{e}_z \text{ und } \vec{n}_r = -\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{k}_n = \vec{n}_n \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0} = \vec{e}_z \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0} \text{ und } \vec{k}_r = \vec{n}_r \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0} = -\vec{e}_z \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}$$

$$\Rightarrow \vec{k}_n = \vec{k}_r = (\vec{e}_z - \vec{e}_z) \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_1} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k}_n = -\vec{k}_r$$

$$e) \vec{E}_g = E_{oh} \vec{e}_y (e^{-jk_n z} - e^{jk_n z}) = -\vec{e}_y \cdot 2j E_{oh} \sin k_n z$$

$$\vec{H}_g = -\vec{e}_x \frac{E_{oh}}{Z_1} (e^{-jk_n z} + e^{jk_n z}) = -\vec{e}_x \cdot 2 \frac{E_{oh}}{Z_1} \cos k_n z$$

$$\vec{E}_g(t) = \text{Re}(\vec{E}_g \cdot e^{j\omega t}) = \text{Re}(\vec{E}_g \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t)) = \vec{e}_y \cdot 2 E_{oh} \sin k_n z \cdot \sin \omega t$$

$$\vec{H}_g(t) = \text{Re}(\vec{H}_g e^{j\omega t}) = \text{Re}(\vec{H}_g (\cos \omega t + j \sin \omega t)) = -\vec{e}_x \cdot 2 \frac{E_{oh}}{Z_1} \cos k_n z \cdot \cos \omega t$$

$$f) \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* \rightarrow \langle \vec{S} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = 0 \text{ wegen}$$

$$\text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \text{Re}(\vec{e}_y \times \vec{e}_x \cdot 2j E_{oh} \sin k_n z \cdot 2 \frac{E_{oh}}{Z_1} \cos k_n z) = 0$$

$$\langle W \rangle_t = \langle W_{el} \rangle_t + \langle W_m \rangle_t; \text{ beachte: die Energiedichte ist immer reell und positiv}$$

$$W_{el} = \frac{\epsilon}{2} [E_y(t)]^2 = \frac{\epsilon}{2} (2j E_{oh} \sin k_n z \sin \omega t)^2 = 2\epsilon E_{oh}^2 \sin^2 k_n z \sin^2 \omega t$$

$$W_m = \frac{\mu}{2} [H_x(t)]^2 = \frac{\mu}{2} (2 \frac{E_{oh}}{Z_1} \cos k_n z \cos \omega t)^2 = 4\mu \frac{E_{oh}^2}{Z_1^2} \cos^2 k_n z \cos^2 \omega t$$

$$\langle W_{el} \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T dt' W_{el}(r, t') = \frac{1}{2} \{ 2\epsilon_1 E_{oh}^2 \sin^2 k_n z \} = \epsilon_1 E_{oh}^2 \sin^2 k_n z$$

$$\langle W_m \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T dt' W_m(r, t') = \frac{1}{2} \{ 2\epsilon_1 E_{oh}^2 \cos^2 k_n z \} = \epsilon_1 E_{oh}^2 \cos^2 k_n z$$

$$\Rightarrow \langle W \rangle_t = \epsilon_1 E_{oh}^2 \{ \sin^2 k_n z + \cos^2 k_n z \} = \epsilon_1 E_{oh}^2$$

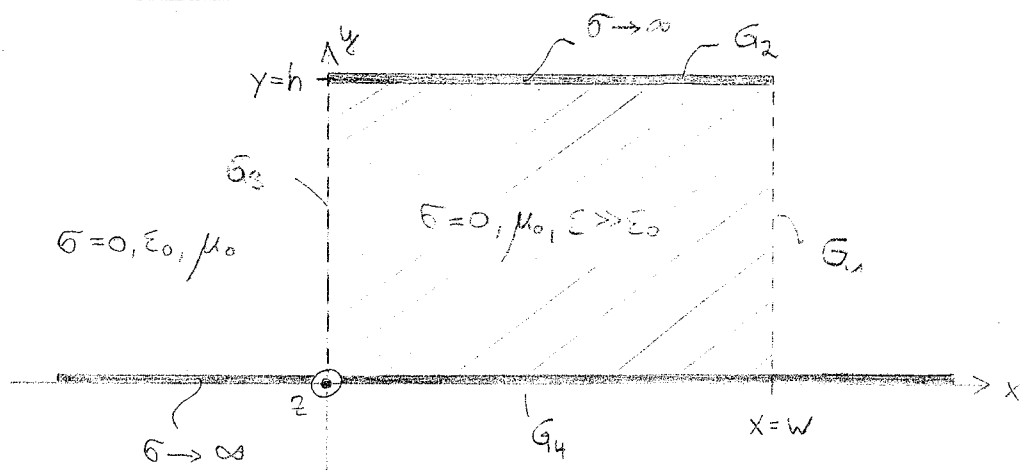
$$g) \vec{\mathcal{J}}_F = \vec{n} \times \vec{H}_{12} = \vec{n} \times (-\vec{H}_1) \text{ weil } \vec{H}_2 = 0 \text{ wg. } \sigma \rightarrow \infty$$

$$\vec{\mathcal{J}}_F = \vec{e}_z \times \vec{e}_x \left[- \left(- \frac{E_{oh}}{Z_1} \{ e^{-jk_n z} + e^{jk_n z} \} \right) \right] \Big|_{z=0} = 2\vec{e}_y \frac{E_{oh}}{Z_1}$$

$$\vec{\mathcal{J}}_F = \text{Re} \left(2\vec{e}_y \frac{E_{oh}}{Z_1} e^{j\omega t} \right) = 2\vec{e}_y \frac{E_{oh}}{Z_F} \cdot \cos \omega t$$

(erkl. $h = e$)

Aufgabe 3):



$G_1, G_3 \rightarrow$ magnetische Wände (d.h. $H_{tan} = 0$)

TE-Wellentypen mit harmonischer Zeitabhängigkeit:

$$\vec{E}(t) = \text{Re}\{\vec{E} e^{j\omega t}\} \quad ; \quad \vec{H}(t) = \text{Re}\{\vec{H} e^{j\omega t}\}$$

Vektorwellenpotentiale:

$$\vec{G} = \vec{0}$$

$$\vec{F} = f(x, y, z) \vec{e}_z$$

a) DGL für die skalare Potenzialfkt. $f(x, y, z)$:

Ansatz: ($H_z \neq 0, E_z = 0$)
Helmholtz-Gl.

$$(\nabla_{tr}^2 + k^2) f(x, y, z) = 0$$

$$p^2 = k^2 = [\omega \sqrt{\epsilon \mu_0}]^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0$$

Helmholtz-Gl.: $\Delta f + k^2 f = 0 \quad , \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon$

b) Elementarlösungen mit Hilfe der Separationsansatzes:

Produktansatz: $f(x, y, z) = \varphi(x) \cdot \psi(y) \cdot e^{-j\beta z}$

$$\Rightarrow \varphi(y) e^{-j\beta z} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + \varphi(x) e^{-j\beta z} \frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} - \varphi(x) \psi(y) \beta^2 e^{-j\beta z} + k^2 \varphi(x) \psi(y) e^{-j\beta z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} - \beta^2 + k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}}_{-k_y^2} + (k^2 - \beta^2) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{2. DG} \text{ s:}$$

$$\psi''(x) + k_x^2 \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi(x) = \underline{f_x(x)} = B \cdot \sin(k_x x) + A \cdot \cos(k_x x), k_x \neq 0$$

$$\psi''(y) + k_y^2 \psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \underline{f_y(y)} = D \sin(k_y y) + C \cos(k_y y), k_y \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{f(x, y, z) = \psi(x) \cdot \psi(y) \cdot e^{-j\beta z}} \\ = \underline{(B \sin(k_x x) + A \cos(k_x x)) \cdot (D \sin(k_y y) + C \cos(k_y y)) \cdot e^{-j\beta z}}, k_x, k_y \neq 0$$

Separationsbed.:

Bestimmung von β : $-k_x^2 - k_y^2 + k^2 - \beta^2 = 0$

$$\Rightarrow \beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0 - k_x^2 - k_y^2$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu_0 - k_x^2 - k_y^2}$$

Hinweis für die folgenden Unterpunkte:

$$\underline{H} = \frac{1}{j\omega \mu_0} \left(k^2 \underline{f} \underline{e}_z + \nabla \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial z} \right) \right)$$

$$\underline{E} = -\nabla \underline{f} \times \underline{e}_z$$

c) Grenzbedingungen bei G_2 und G_4 :

$$\underline{E} = -\nabla \underline{f} \times \underline{e}_z = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} & \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} & \frac{\partial \underline{f}}{\partial z} \\ \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \end{vmatrix} = - \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial y} \underline{e}_x - \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} \underline{e}_y \right) \\ = \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} \underline{e}_y - \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} \underline{e}_x$$

Randbedingungen: $\text{rot } \underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{E}_{\text{tan}} \text{ stetig} \Rightarrow \underline{E}_x = \underline{E}_z = 0$
($y=0$ \wedge $y=h$)

$$\Rightarrow - \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} \bigg|_{\substack{y=0 \\ y=h}} = 0 \Rightarrow \underline{f}_y = D k_y \cdot \cos(k_y y) - C k_y \sin(k_y y)$$

$$\underline{f}_y(y=0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\underline{f}_y(y=h) = -C k_y \sin(k_y h) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow k_y h = n \cdot \pi, n=1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow k_y = \frac{n \pi}{h}$$

$$\Rightarrow \underline{f(x, y, z)} = C \cdot \cos\left(\frac{n \pi}{h} y\right) \cdot (B \sin(k_x x) + A \cos(k_x x)) \cdot e^{-j\beta z}$$

d) Grenzbedingungen bei G_1 und G_3 :

$$\vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(k^2 \underline{E} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2 \partial z} \underline{\hat{x}} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2 \partial z} \underline{\hat{y}} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} \underline{\hat{z}} \right)$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2 \partial z} \\ \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2 \partial z} \\ (-\beta^2 + k^2) \underline{E} \end{bmatrix}$$

Randbedingungen:
($x=0, x=W$) $\text{rot } \vec{H} = \vec{0} \Rightarrow H_{\text{tan}} \text{ stetig} \Rightarrow H_z = H_y = 0$

$$1) H_y = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2 \partial z} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left[D \cdot \frac{n\pi}{h} \cos\left(\frac{n\pi}{h} y\right) \cdot (A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)) \cdot j\beta e^{-j\beta z} \right]$$

$$2) H_z = \frac{1}{j\omega\mu_0} (-\beta^2 + k^2) \cdot [B \sin(k_x x) + A \cos(k_x x)] e^{-j\beta z}$$

$$H_y|_{x=0} = H_z|_{x=0} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$H_y|_{x=W} = H_z|_{x=W} = 0 \Rightarrow k_x W = n\pi, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{W}$$

$$\Rightarrow \underline{E}(x, y, z) = C \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{h} y\right) \cdot B \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{W} x\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$= A' \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{h} y\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{W} x\right) \cdot e^{-j\beta z}, \quad A' = C \cdot B$$

e)

es war: $\beta = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu_0 - k_x^2 - k_y^2}$

$$\Rightarrow \beta_{n,l} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu_0 - \left(\frac{l\pi}{W}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}$$

$$n=0, 1, 2, \dots$$

$$l=0, 1, 2, \dots$$

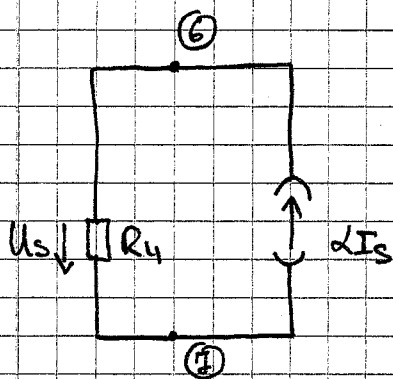
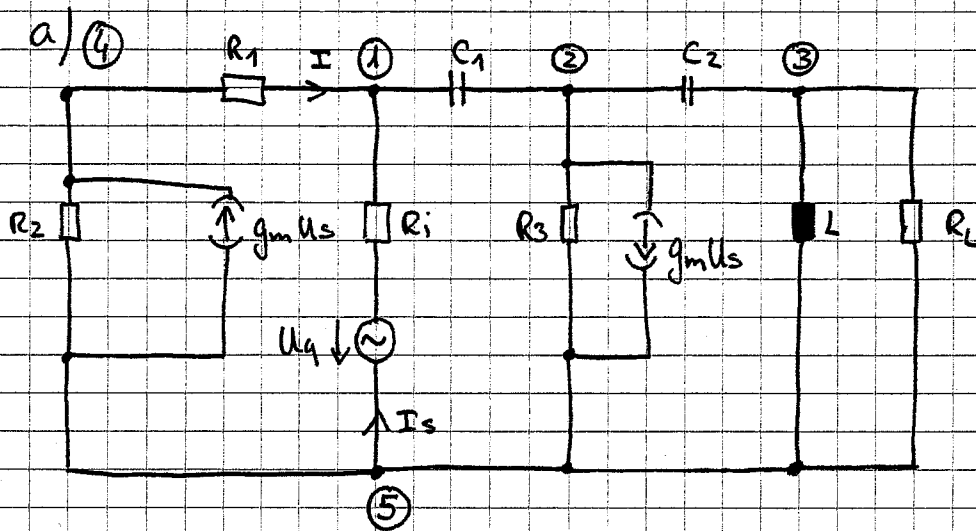
f) Grenzfrequenzen:

für $\beta = 0$:

$$\Rightarrow \omega^2 \epsilon \mu_0 = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{W}\right)^2$$

$$\Rightarrow \omega = \pi \cdot C \cdot \sqrt{\frac{(n \cdot h)^2 + (l \cdot W)^2}{h^2 + W^2}}$$

$$\text{mit } \epsilon/\mu_0 = \frac{1}{C^2}$$

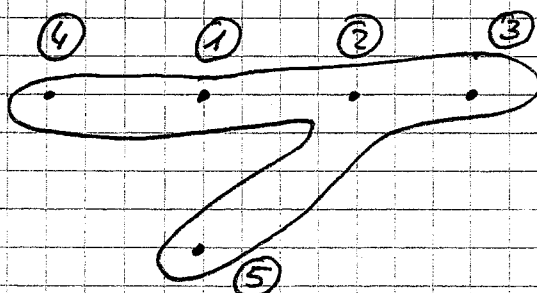
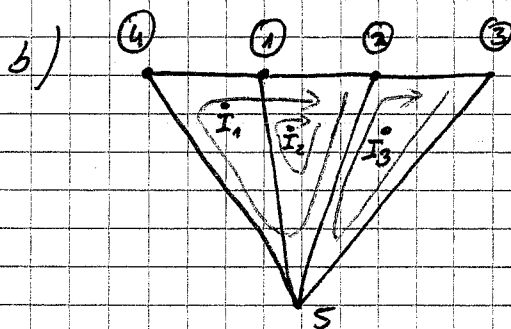


- Verschieben d. Stromquelle $g_m U_s$ in Zweige $(5 \rightarrow 4)$ und $(5 \rightarrow 2)$

- Zusammenfassung von $j\omega L$ und R_L

$$Z_L = \frac{j\omega L \cdot R_L}{j\omega L + R_L}$$

- (zur besseren Übersicht \rightarrow umzeichnen des Pfades $4 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ nach außen)



Zweige $z=8$

Komponenten $s=2$

Knoten $k=7$

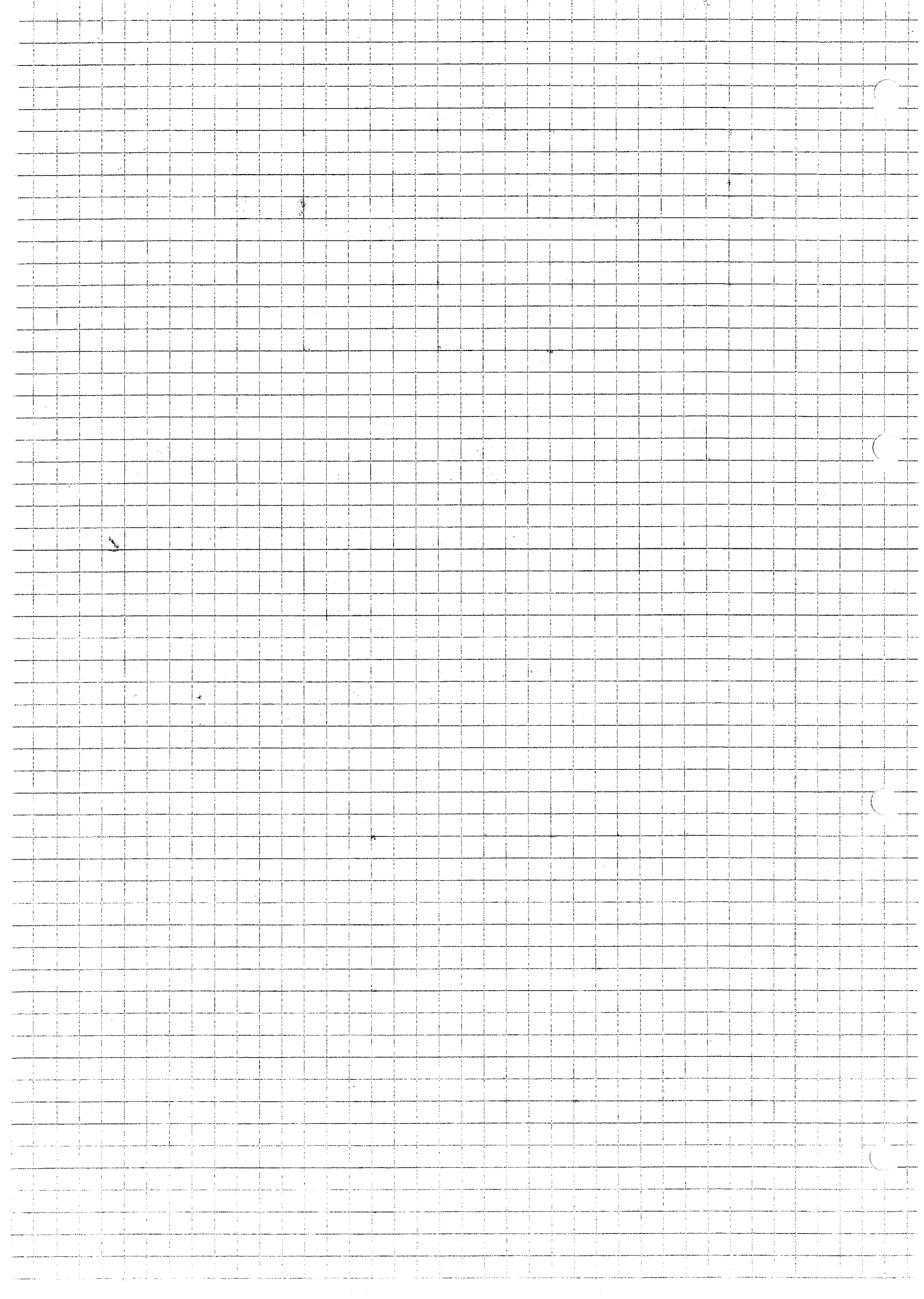
Rang des Netzwerk:

$$p = k - s = 5$$

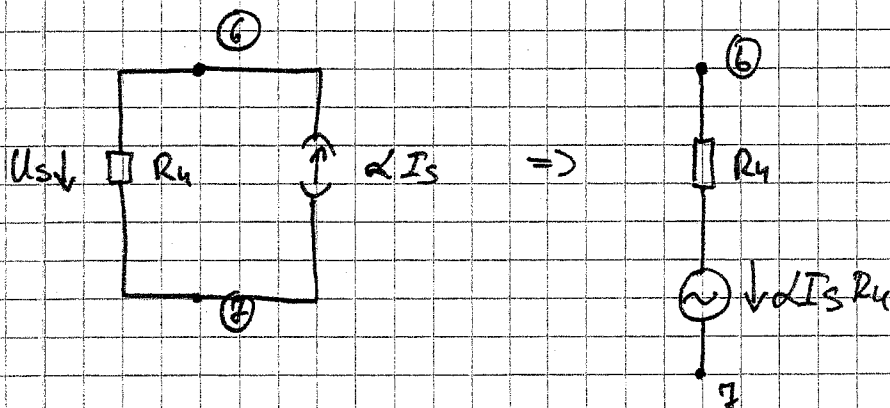
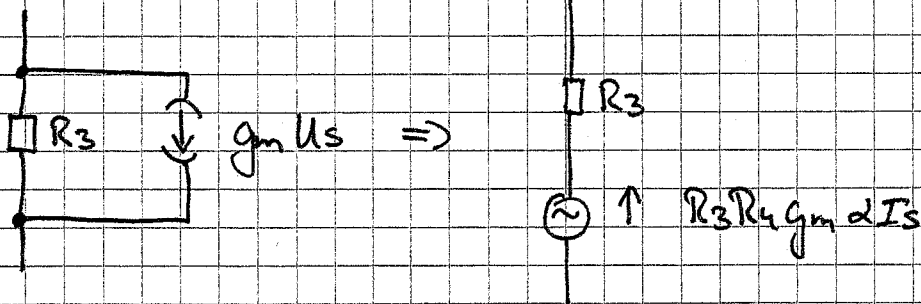
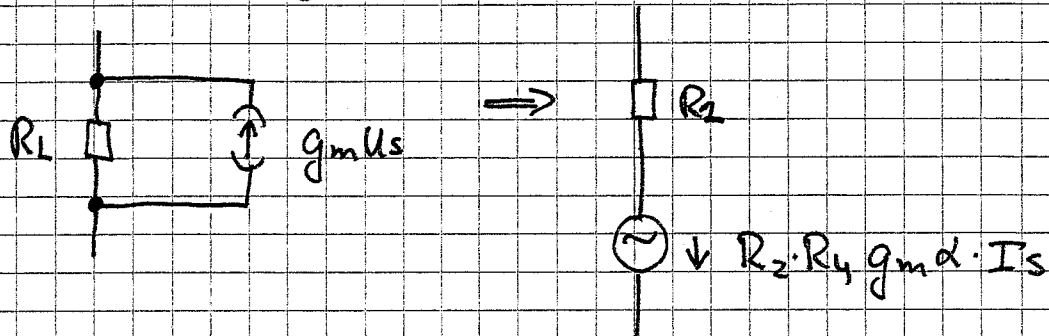
Rang d. Maschenimpedanzmatrix \leq 5

Beitische Zahl:

$$m = z - p = 3$$



- c) - Umwandlung d. Stromquellen in Sp.quellen (2)
- Umwandlung d. Spannungssteuerung in Stromsteuerung

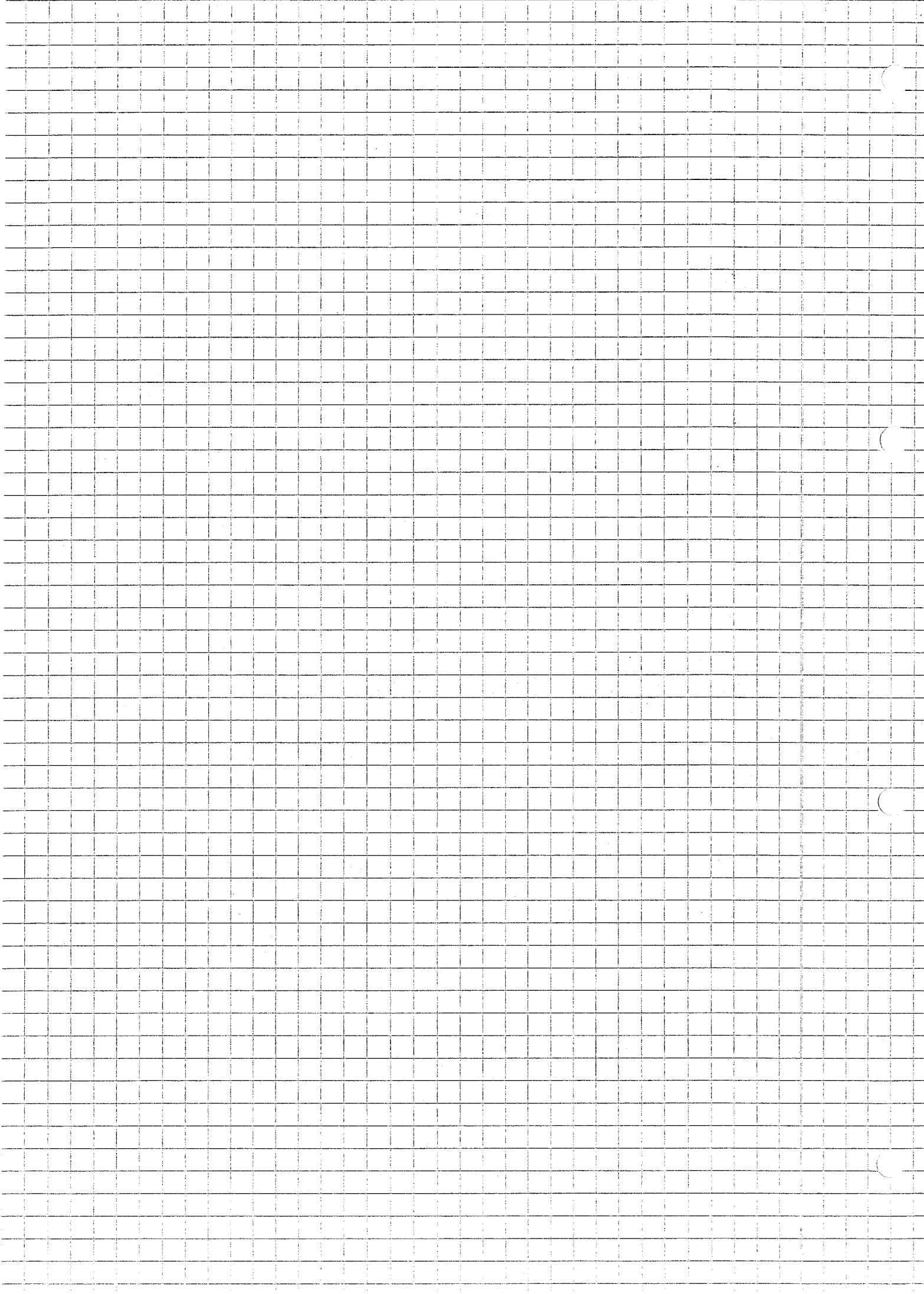


$$\begin{pmatrix} R_3 R_4 \alpha g_m I_s + R_2 R_4 \alpha g_m I_s \\ U_q + R_3 R_4 \alpha g_m I_s \\ -R_2 R_4 \alpha g_m I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} & R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} & -R_3 \\ R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} & R_1 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} & -R_3 \\ -R_3 & -R_3 & R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{pmatrix}$$

mit $I_s = \hat{I}_2$ folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ U_q \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} & R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} & -(R_2 + R_3)(R_4 \cdot g_m) \\ R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} & R_1 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} & -R_3 R_4 \alpha g_m \\ -R_3 & -R_3 + R_3 R_4 \alpha g_m & R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_4 \end{pmatrix}}_{\vec{Z}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{pmatrix}}_{\vec{I}}$$

$\vec{U} = \vec{Z} \cdot \vec{I}$



$$d) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ U_q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3R + \frac{1}{j\omega C_1} & R(1-\alpha) + \frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ R + \frac{1}{j\omega C_1} & R(2-\alpha) + \frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ -R & -R(1-\alpha) & R + \frac{1}{j\omega C_2} + Z_L \end{pmatrix} \vec{I} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ U_q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3R + \frac{1}{j\omega C_1} & -R + \frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ R + \frac{1}{j\omega C_1} & R + \frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ -R & 0 & R + \frac{1}{j\omega C_2} + Z_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{pmatrix}$$

$$\det \vec{Z} = \left(3R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \left(R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \left(R + \frac{1}{j\omega C_2} + Z_L\right) + \left(-R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) (-R) \cdot (-R) - (-R) \left(R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) (-R) - \left(R + \frac{1}{j\omega C_2} + Z_L\right) \left(R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \left(-R + \frac{1}{j\omega C_1}\right)$$

$$= \left(R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \left(R + \frac{1}{j\omega C_2} + Z_L\right) \left(3R + \frac{1}{j\omega C_1} + R - \frac{1}{j\omega C_1}\right) - 2R^3$$

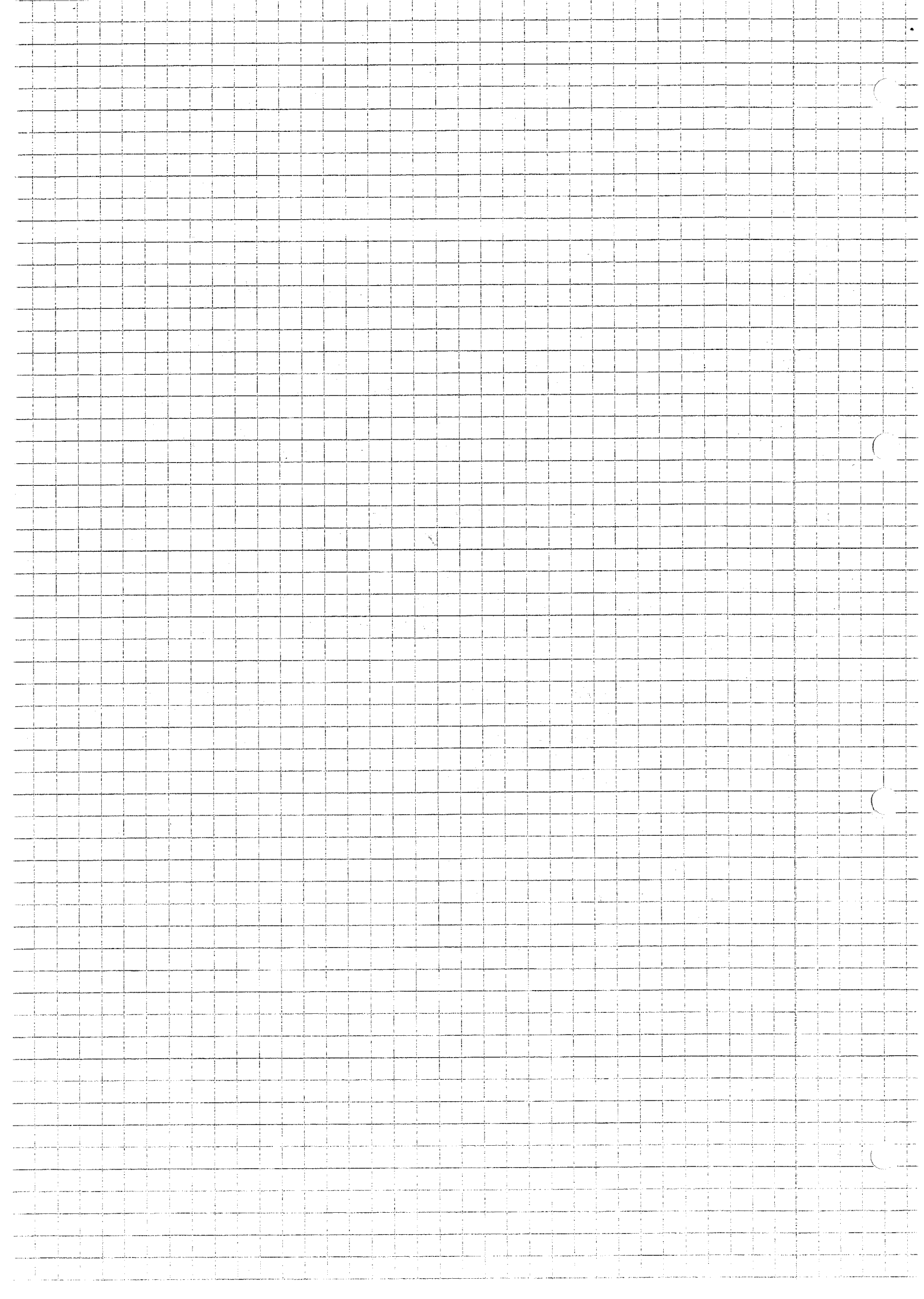
$$= R^2 + \frac{R}{j\omega C_2} + R \cdot Z_L + \frac{R}{j\omega C_1} - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2} + \frac{Z_L}{j\omega C_1} \Big| 4R - 2R^3$$

mit Cramersche Regel: $\boxed{I = \vec{I}_1}$

$$\Rightarrow I = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -R + \frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ U_q & R + \frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ 0 & 0 & R + \frac{1}{j\omega C_2} + Z_L \end{vmatrix}}{\det \vec{Z}}$$

$$I = \frac{- \left(R + \frac{1}{j\omega C_2} + Z_L\right) U_q \left(-R + \frac{1}{j\omega C_1}\right)}{\det \vec{Z}}$$

$$I = \frac{U_q}{4R} \frac{\left(R^2 + \frac{R}{j\omega C_2} + R \cdot Z_L - \frac{R}{j\omega C_1} + \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2} - \frac{Z_L}{j\omega C_1}\right)}{\left(\frac{R^2}{2} + \frac{R}{j\omega C_2} + R \cdot Z_L + \frac{R}{j\omega C_1} - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2} + \frac{Z_L}{j\omega C_1}\right)}$$



Aufgabe 5:

(a) Symmetrie: $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22}$, $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$

Reziprozität: $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$

Verlustlosigkeit: $\underline{P} = \underline{E} - \underline{S}^{*T} \underline{S} = 0$

$\underline{E} = \underline{S}^{*T} \underline{S}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}^* & \underline{S}_{12}^* \\ \underline{S}_{21}^* & \underline{S}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |\underline{S}_{11}| + \underline{S}_{12}^* \underline{S}_{21} & \underline{S}_{11}^* \underline{S}_{12} + \underline{S}_{12}^* \underline{S}_{22} \\ \underline{S}_{21}^* \underline{S}_{11} + \underline{S}_{22}^* \underline{S}_{21} & \underline{S}_{21}^* \underline{S}_{12} + |\underline{S}_{22}| \end{bmatrix}$$

Unter zusätzlicher Berücksichtigung der Symmetrie und der Reziprozität bleiben zwei Gleichungen:

$|\underline{S}_{11}|^2 + |\underline{S}_{21}|^2 = 1$

$\underline{S}_{11}^* \underline{S}_{21} + \underline{S}_{21}^* \underline{S}_{11} = 0$

(b) $\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{a} \end{bmatrix}$ (gerade Anregung)

$\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \underline{a} \\ -\underline{a} \end{bmatrix}$ (ungerade Anregung)

$\underline{Z}_s \rightarrow \infty$ bei gerader Anregung (magnetische Wand in Symm. Ebene)

$\underline{Z}_s = 0$ bei ungerader Anregung (elektrische Wand in Symm. Ebene)

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

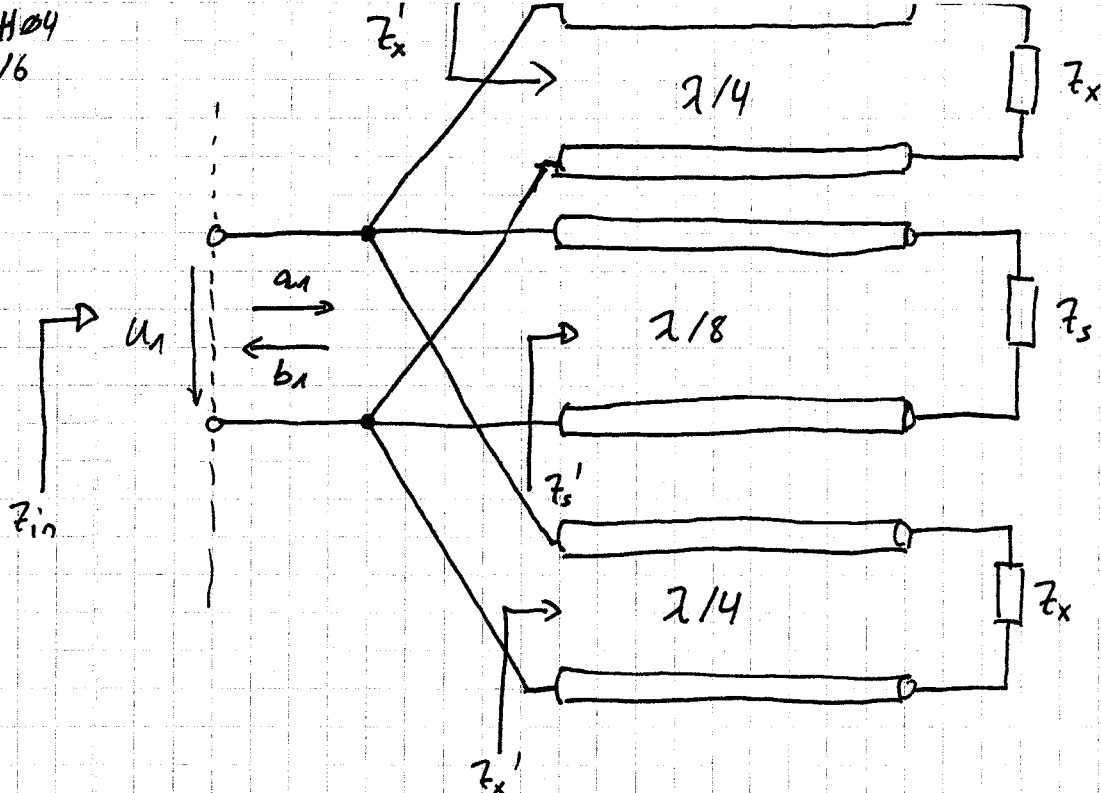
11

11

11

11

15/1104
5.2.16



(c) Impedanztransformation über $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung: $\underline{Z}_e = \frac{j \underline{Z}_L}{\frac{1}{\underline{Z}_a}} = \frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_a}$

Impedanztransformation über $\frac{\lambda}{8}$ -Leitung:

$$\underline{Z}_e = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \underline{Z}_a + j \underline{Z}_L \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{j}{\underline{Z}_L} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{Z}_a + \frac{1}{\sqrt{2}}} = j \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_a + j \underline{Z}_L}{-\underline{Z}_a + j \underline{Z}_L}$$

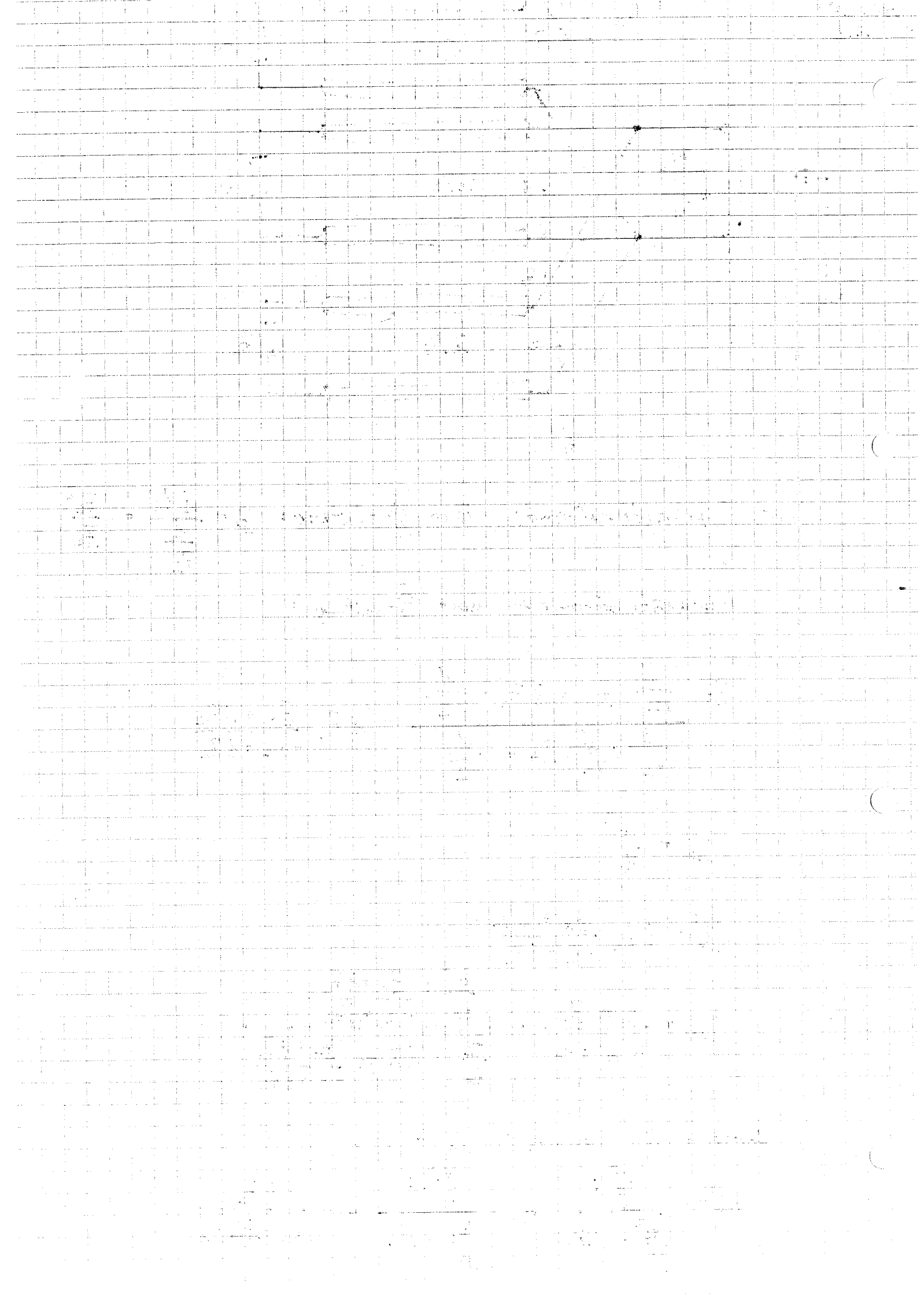
$$\underline{Z}_x' = \frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_x}$$

$$\underline{Z}_s' = j \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_s + j \underline{Z}_L}{-\underline{Z}_s + j \underline{Z}_L}$$

$$\underline{Z}_{IN} = \frac{\frac{1}{2} \underline{Z}_x' \underline{Z}_s'}{\frac{1}{2} \underline{Z}_x' + \underline{Z}_s'} = \frac{\frac{\underline{Z}_L^3}{\underline{Z}_x} j \frac{\underline{Z}_s + j \underline{Z}_L}{-\underline{Z}_s + j \underline{Z}_L}}{\frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_x} + j 2 \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_s + j \underline{Z}_L}{-\underline{Z}_s + j \underline{Z}_L}}$$

Anregung (1) (Gerade): $\underline{Z}_s \rightarrow (\infty)$

$$\underline{Z}_{IN}^{(1)} = - \frac{\frac{\underline{Z}_L^3}{\underline{Z}_x} j}{\frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_x} - j 2 \underline{Z}_L} = - \frac{\frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_x} \cdot j}{\frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_x} - j 2} = - \frac{j \underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_L - j 2 \underline{Z}_x}$$



Anregung (2) (ungesättigt):

$$\underline{z}_s = 0$$

$$\underline{z}_{IN}^{(2)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\underline{z}_L^3}{\underline{z}_x} i}{\frac{1}{2} \frac{\underline{z}_L^2}{\underline{z}_x} + i 2 \underline{z}_L} = \frac{\frac{\underline{z}_L^2}{\underline{z}_x} i}{\frac{\underline{z}_L}{\underline{z}_x} + i 2} = \frac{i \underline{z}_L^2}{\underline{z}_L + i 2 \underline{z}_x}$$

$$\underline{\Gamma}^{(1)} = \frac{\underline{z}_{IN}^{(1)} - \underline{z}_L}{\underline{z}_{IN}^{(1)} + \underline{z}_L} = \frac{-\frac{i \underline{z}_L}{\underline{z}_L - i 2 \underline{z}_x} - 1}{-\frac{i \underline{z}_L}{\underline{z}_L - i 2 \underline{z}_x} + 1}$$

$$= \frac{-i \underline{z}_L - \underline{z}_L + i 2 \underline{z}_x}{-i \underline{z}_L + \underline{z}_L + i 2 \underline{z}_x}$$

$$\underline{\Gamma}^{(2)} = \frac{\underline{z}_{IN}^{(2)} - \underline{z}_L}{\underline{z}_{IN}^{(2)} + \underline{z}_L} = \frac{\frac{i \underline{z}_L}{\underline{z}_L + i 2 \underline{z}_x} - 1}{\frac{i \underline{z}_L}{\underline{z}_L + i 2 \underline{z}_x} + 1} = \frac{i \underline{z}_L - \underline{z}_L - i 2 \underline{z}_x}{i \underline{z}_L + \underline{z}_L + i 2 \underline{z}_x}$$

(d) Schritt:

$$\underline{\Gamma}^{(1)} = \frac{-i - 1}{-i + 1}$$

$$\underline{\Gamma}^{(2)} = \frac{i - 1}{i + 1}$$

Anregung (1)

$$\begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{s}_{11} & \underline{s}_{12} \\ \underline{s}_{21} & \underline{s}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{a} \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = (\underline{s}_{11} + \underline{s}_{21}) \underline{a}$$

$$\underline{\Gamma}^{(1)} = \underline{s}_{11} + \underline{s}_{21}$$

Addition beider Gl.

$$\underline{s}_{11} = \frac{1}{2} (\underline{\Gamma}^{(1)} + \underline{\Gamma}^{(2)})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-i-1}{-i+1} + \frac{i-1}{i+1} \right)$$

Anregung (2)

$$\begin{bmatrix} \underline{b} \\ -\underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{s}_{11} & \underline{s}_{12} \\ \underline{s}_{21} & \underline{s}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ -\underline{a} \end{bmatrix}$$

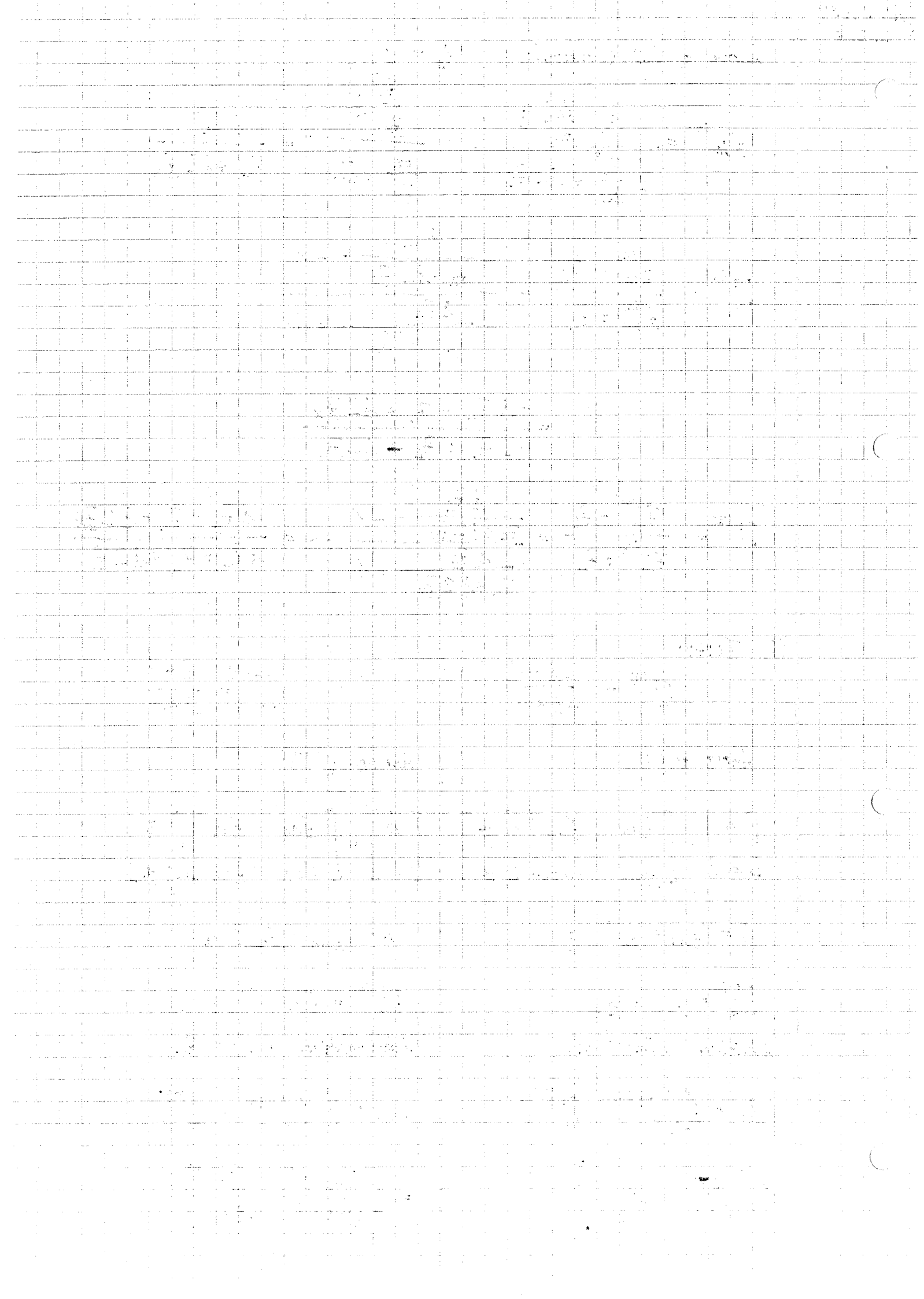
$$\underline{b} = (\underline{s}_{11} - \underline{s}_{21}) \underline{a}$$

$$\underline{\Gamma}^{(2)} = \underline{s}_{11} - \underline{s}_{21}$$

Subtraktion beider Gl.

$$\underline{s}_{21} = \frac{1}{2} (\underline{\Gamma}^{(1)} - \underline{\Gamma}^{(2)})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-i-1}{-i+1} - \frac{i-1}{i+1} \right)$$



AS/H04
S. 4/6

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(-j-1)(j+1) + (j-1)(-j+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-j-j-1+1+j+j-1}{2}$$

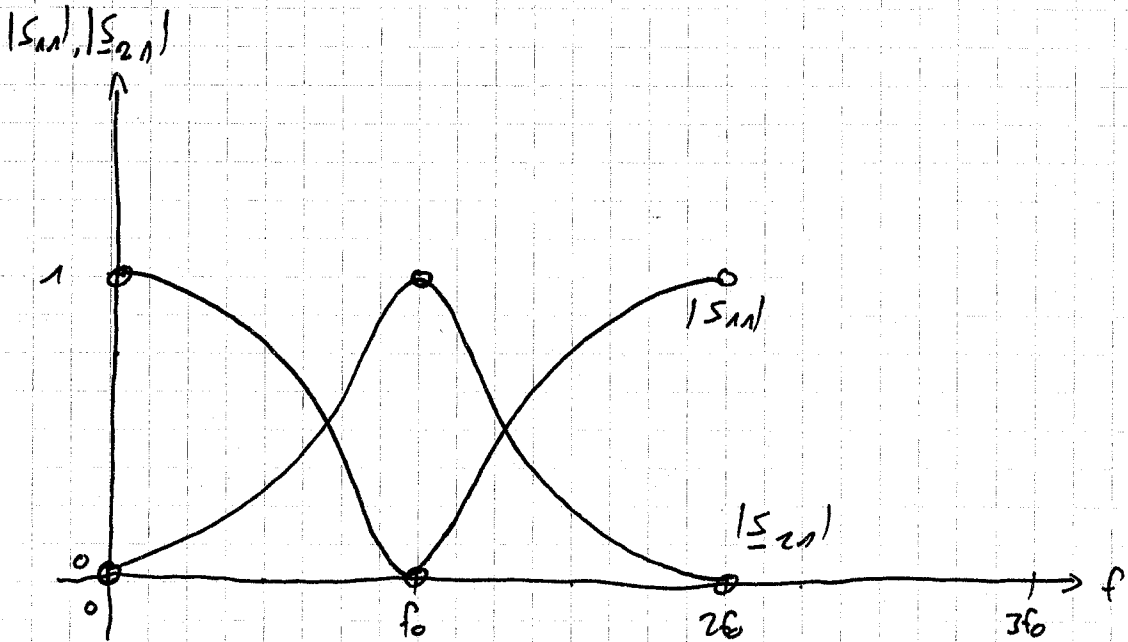
$$= \phi$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(-j-1)(j+1) - (j-1)(-j+1)}{2} \right)$$

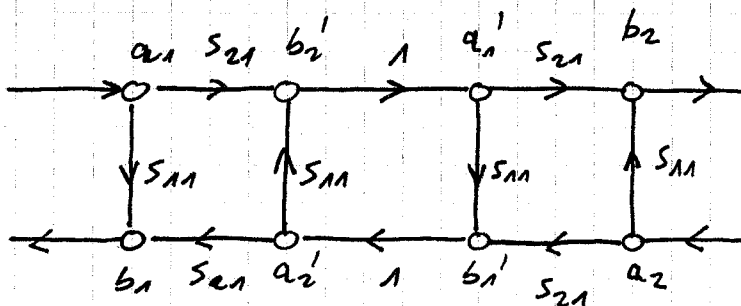
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-j-j-1-1-1-j-j+1}{2}$$

$$= -j$$

(e) Die exakt abgeborenen Punkte sind mit Kreisen gekennzeichnet:



(f) Lösung mit Signalflussdiagramm und Berücksichtigung der Symmetrie und Reziprozität:

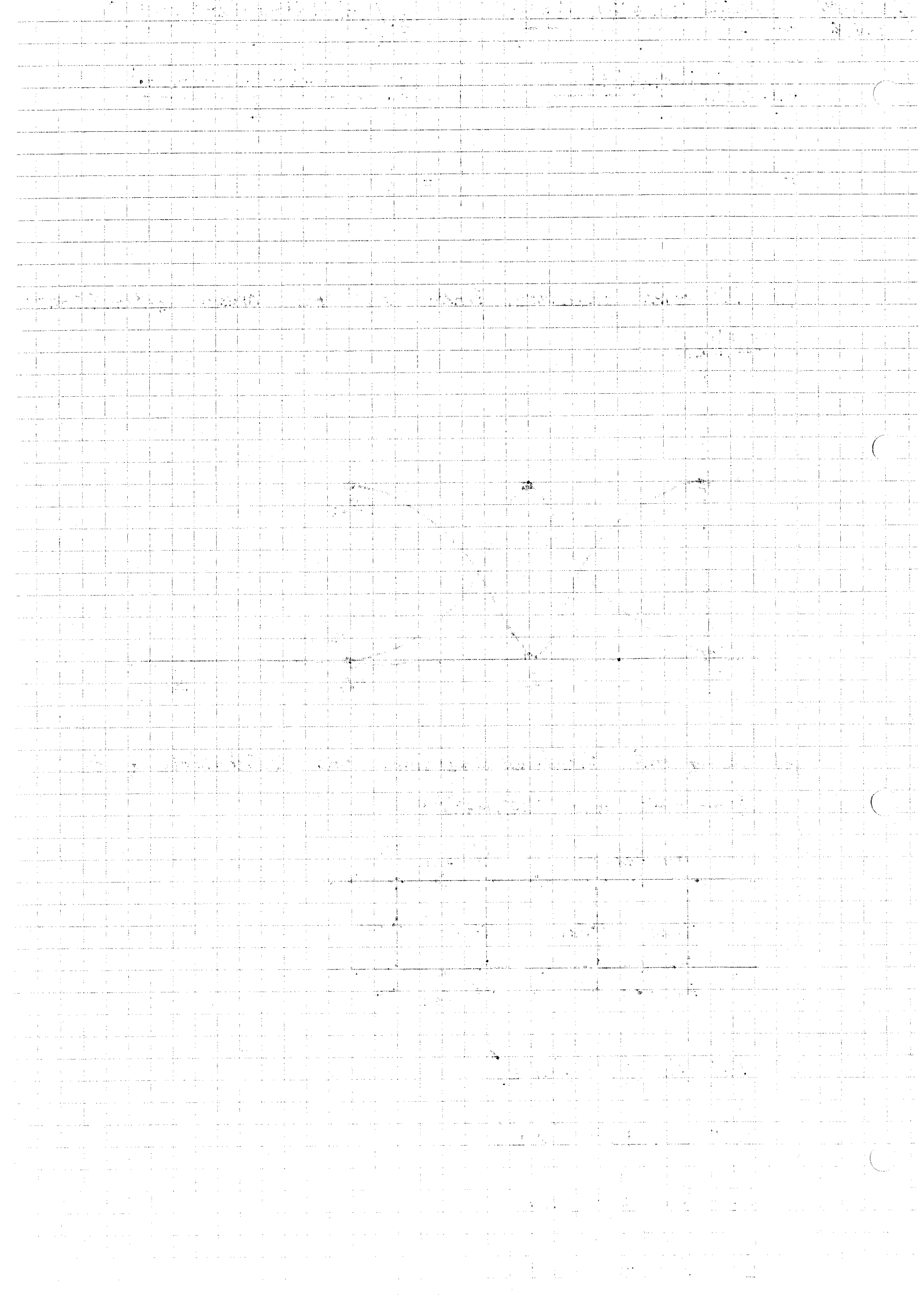


$$\underline{b}_1 = \underline{S}_{11} \underline{a}_1 + \underline{S}_{21} \underline{b}_1'$$

$$\underline{b}_1' = \underline{S}_{21} \underline{a}_2 + \underline{S}_{11} \underline{b}_2'$$

$$\underline{b}_2' = \underline{S}_{21} \underline{a}_1 + \underline{S}_{11} \underline{b}_1'$$

$$\underline{b}_2 = \underline{S}_{11} \underline{a}_2 + \underline{S}_{21} \underline{b}_2'$$



$$\begin{aligned}\underline{b}_1' &= \underline{S}_{21} \underline{a}_2 + \underline{S}_{11} (\underline{S}_{21} \underline{a}_1 + \underline{S}_{11} \underline{b}_1') \\ &= \underline{S}_{21} \frac{\underline{a}_2 + \underline{S}_{11} \underline{a}_1}{1 - \underline{S}_{11}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{b}_1 &= \underline{S}_{11} \underline{a}_1 + \underline{S}_{21}^2 \frac{\underline{a}_2 + \underline{S}_{11} \underline{a}_1}{1 - \underline{S}_{11}^2} \\ &= \underline{S}_{11} \left(1 + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \right) \underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \underline{a}_2\end{aligned}$$

Da das Filter reziprok und symmetrisch ist, ist auch die Kettenschaltung reziprok und symm., und es gilt:

$$\underline{S}_{SIS} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} \left(1 + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \right) & \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \\ \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} & \underline{S}_{11} \left(1 + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \right) \end{bmatrix}$$

Alternative Lösung mit Wellenkettensparametern und Berücksichtigung der Symmetrie und Reziprozität:

Strichparameter:

$$\underline{b}_1 = \underline{S}_{11} \underline{a}_1 + \underline{S}_{21} \underline{a}_2$$

$$\underline{b}_2 = \underline{S}_{21} \underline{a}_1 + \underline{S}_{11} \underline{a}_2$$

Wellenkettensparameter:

$$\underline{a}_1 = \underline{T}_{11} \underline{b}_2 + \underline{T}_{12} \underline{a}_2$$

$$\underline{b}_1 = \underline{T}_{21} \underline{b}_2 + \underline{T}_{22} \underline{a}_2$$

1950

1950

1950

1950

1950

1950

1950

1950

1950

1950

1950

1950

1950

1950

1950

Umsortieren der Wellenkettengleichungen:

$$\underline{b}_2 = \frac{\underline{a}_1 - \underline{T}_{12} \underline{a}_2}{\underline{T}_{11}}$$

Da das Filter reziprok und symmetrisch ist, ist auch die Ketten schaltung reziprok und symmetrisch, und es gilt:

$$\underline{S}_{gs} = \begin{bmatrix} -\frac{\underline{T}_{12} \underline{g}_{gs}}{\underline{T}_{11} \underline{g}_{gs}} & \frac{1}{\underline{T}_{11} \underline{g}_{gs}} \\ \frac{1}{\underline{T}_{11} \underline{g}_{gs}} & -\frac{\underline{T}_{12} \underline{g}_{gs}}{\underline{T}_{11} \underline{g}_{gs}} \end{bmatrix}$$

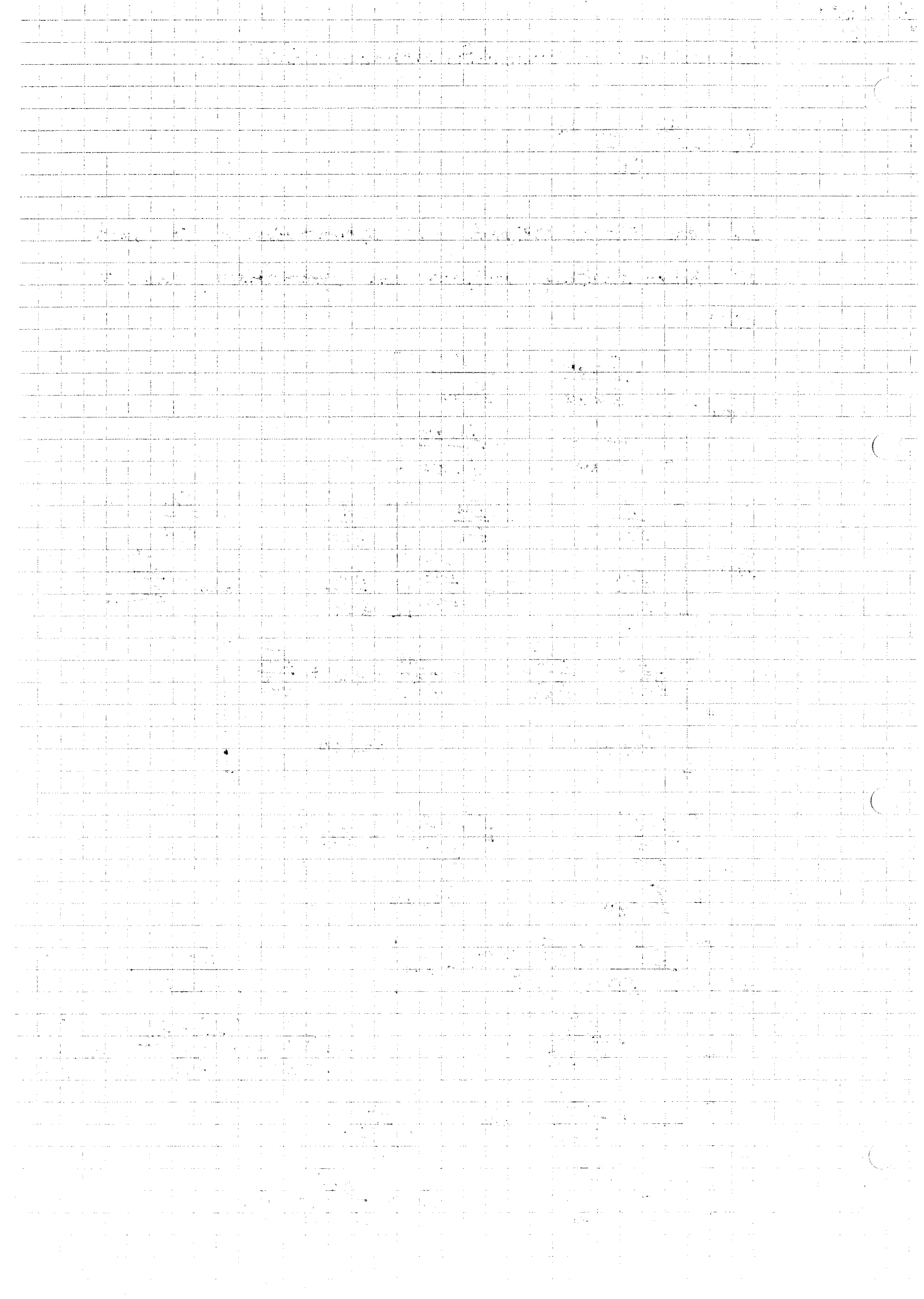
$$\underline{T}_{gs} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{S}_{21}} & -\frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}} \\ \frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}} & \underline{S}_{21} - \frac{\underline{S}_{11}^2}{\underline{S}_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{S}_{21}} & -\frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}} \\ \frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}} & \underline{S}_{21} - \frac{\underline{S}_{11}^2}{\underline{S}_{21}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{S}_{21}^2} - \frac{\underline{S}_{11}^2}{\underline{S}_{21}^2} & -\frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}^2} - \underline{S}_{11} + \frac{\underline{S}_{11}^3}{\underline{S}_{21}^2} \\ \underline{T}_{21} \underline{g}_{gs} & \underline{T}_{22} \underline{g}_{gs} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1 - \underline{S}_{11}^2}{\underline{S}_{21}^2} & \frac{\underline{S}_{11}^3 - \underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}^2} - \underline{S}_{11} \\ \underline{T}_{21} \underline{g}_{gs} & \underline{T}_{22} \underline{g}_{gs} \end{bmatrix}$$

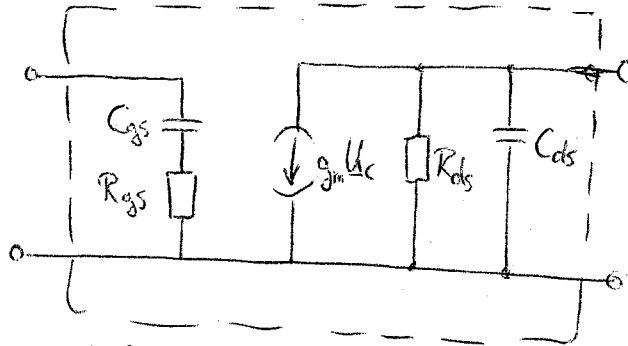
$$\underline{S}_{gs} = \begin{bmatrix} -\frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \left(\frac{\underline{S}_{11}^3 - \underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}^2} - \underline{S}_{11} \right) & \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \\ \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} & -\frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \left(\frac{\underline{S}_{11}^3 - \underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}^2} - \underline{S}_{11} \right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \underline{S}_{11} & \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \\ \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} & \underline{S}_{11} + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \underline{S}_{11} \end{bmatrix}$$



Aufgabe 6:

- a) $S'_{22} = S_{22}$ hängt nicht vom Eingangsnetzwerk ab, da $S_{12} = 0$ ist. Aus demselben Grund ist auch $S'_{11} = S_{11}$, wovon in den folgenden Unterpunkten Gebrauch gemacht wird.



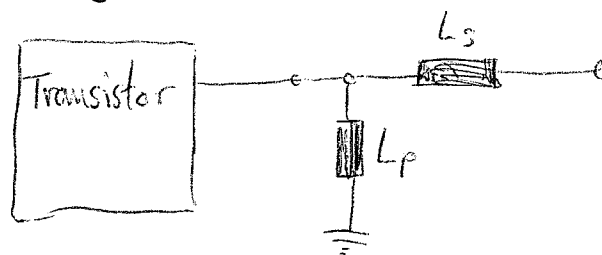
Die Reihenfolge von C_{gs} und R_{gs} ist vertauschbar!

b) s. Hilfsblatt

- c) Da Serienleitungen nur den Winkel und nicht den Betrag des Reflexionsfaktors verändern und $\Gamma_A = 1$ ist, muß sich die Serienleitung auf der Seite des Transistors befinden.

Verwendung des γ -Smith Charts ($Z\gamma$ -Smith Chart wäre auch möglich);
(s. Hilfsblatt)

\Rightarrow Da $b_p < 0$ ist (d.h. induktiv), muß für eine möglichst kurze ~~Streck~~ Länge l_p die Stichleitung kurzgeschlossen sein.



d) 1. Ohne Anpassungsnetzwerk: $\underline{r}_A = 0$, dieser Wert liegt auf dem Kreis $G_{TU} = 8,9 \text{ dB}$.

2. Nur \underline{z}_A und L_A in Reihe: $\underline{z}_A + \underline{z}_{L_A} = 1,0 + j 1,05$, dieser Wert liegt auf dem Kreis $G_{TU} = 9,2 \text{ dB}$, die Verstärkung steigt also um $0,3 \text{ dB}$.

e) Anpassung mit $\frac{1}{4}$ -Transformation: $l_x = 0,25 \lambda$, $\underline{z}_0 = \frac{\underline{z}_x^2}{\underline{z}_E}$, also ist
 $\underline{z}_x = \sqrt{\underline{z}_0 \underline{z}_E} = \sqrt{72 \cdot 50} \Omega = 60 \Omega$

f) s. Hilfsblatt

⇒ Anmerkung: Hier ist nicht Leistungsanpassung, sondern die Transformation $\underline{z}_M \rightarrow \underline{z}_E$ gefragt, deshalb sind die hier gezeigten Transformationswege die einzig möglichen.