A1:

a) <u>Kontigl.:</u> $\operatorname{div}\vec{j} + \dot{\rho} = 0$

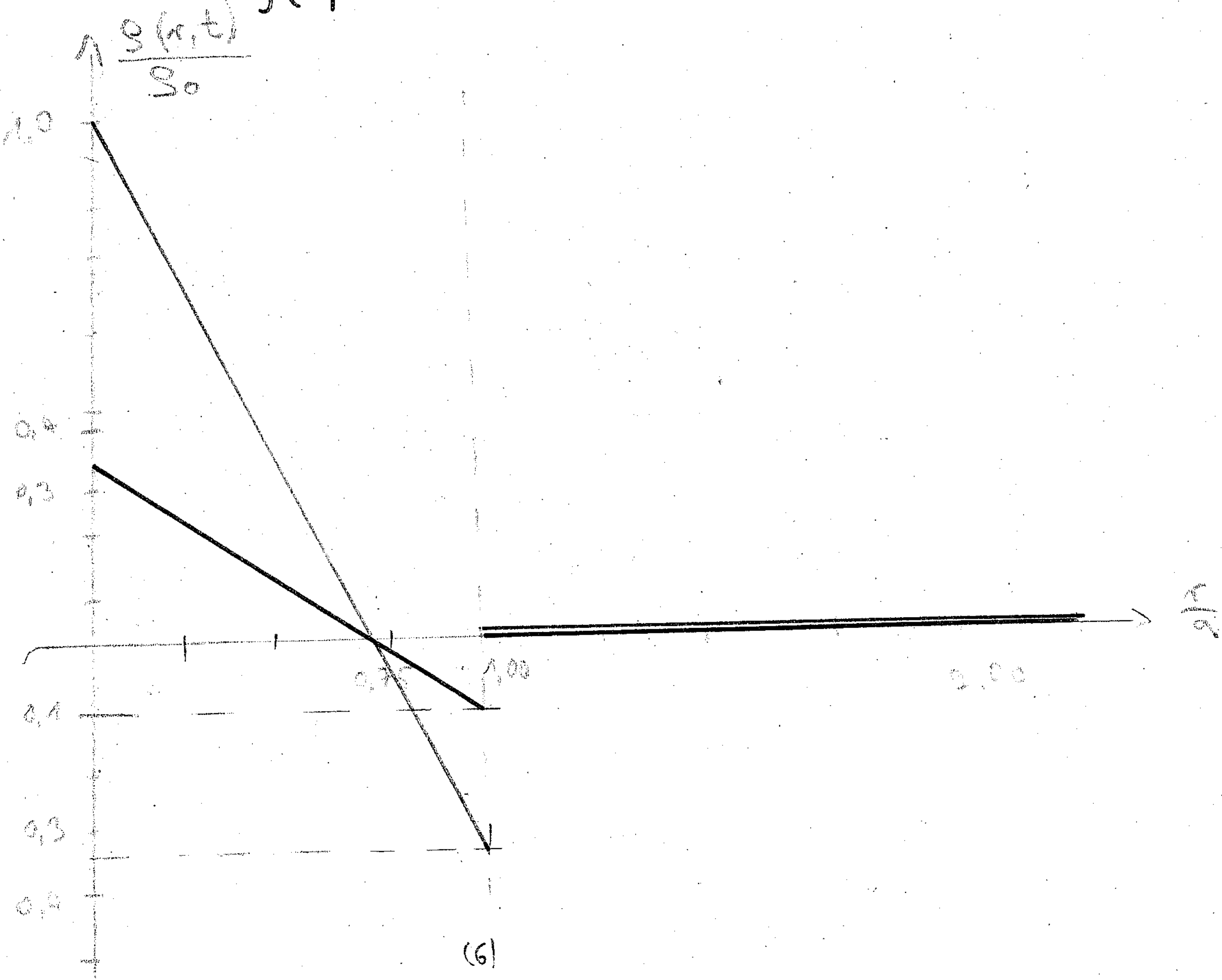
$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D} \quad \Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\operatorname{div}\vec{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

$$\dot{\rho} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho = 0$$

<u>Lsg.:</u> $\rho(r,t) = \rho(r,0)\,e^{-t/\tau} \quad ; \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

$$\Rightarrow \rho(r,t) = \rho_0\left(1 - \frac{4r}{3a}\right)e^{-t/\tau} \quad ; \quad 0 \le r \le a \qquad (5)$$

$$\rho(r,t) \equiv 0 \quad ; \quad r > a \qquad (6)$$



b) $Q_2(t) = \int_{V_2} \rho(r,t)\,dV \overset{(6)}{=} \int_{V_0} \rho(r,t)\,dV$; V_0 = Kugel mit Radius a (8)

mit $dV = 4\pi r^2 dr$ und (5) folgt:

$$Q_2(t) = \varrho_0 e^{-t/\tau} \cdot 4\pi \int_0^a \left(1 - \frac{4r}{3a}\right) r^2 \, dr$$

$$= 4\pi \varrho_0 e^{-t/\tau} \int_0^a \left(r^2 - \frac{4r^3}{3a}\right) dr$$

$$= 4\pi \varrho_0 e^{-t/\tau} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{3a}\right]_0^a \qquad (9)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_2(t) \equiv 0} \qquad (10)$$

c) $\int_V \varrho \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV \underset{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{F}$ $\quad \partial V$: Oberfläche von V

hier wegen Kugelsymmetrie: $\vec{D} = D_r(r,t) \, \vec{e}_r$

mit V = Kugelvolumen gilt: $d\vec{F} = dF \, \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \int_V \varrho \, dV = \oint_{\text{Kugelfläche}} D_r(r,t) \, dF = D_r(r,t) \oint dF = 4\pi r^2 D_r(r,t)$$

$$\Rightarrow D_r(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_V \varrho \, dV$$

1) $V = V_1$ d.h. $r = r_1$ $(0 \le r_1 \le a)$:

$$\int_{V_1} \varrho \, dV \underset{(5),(8)}{=} 4\pi \varrho_0 e^{-t/\tau} \int_0^{r_1} \left(1 - \frac{4r}{3a}\right) r^2 \, dr$$

$$= 4\pi \varrho_0 e^{-t/\tau} \int_0^{r_1} \left(r^2 - \frac{4r^3}{3a}\right) dr$$

$$\underset{(9)}{=} 4\pi \varrho_0 e^{-t/\tau} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{3a}\right]_0^{r_1}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \varrho_0 \cancel{e^{-t/\tau}} \left(r_1^3 - \frac{r_1^4}{a}\right) e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow D_r(r_1,t) = \frac{1}{4\pi r_1^2} \int_{V_1} \varrho \, dV = \frac{\varrho_0}{3} \left(r_1 - \frac{r_1^2}{a}\right) e^{-t/\tau} \qquad (15)$$

2) $V = V_2$ d.h. $r = r_2$ $(r_2 > a)$:

$$\int_{V_2} \varrho \, dV = Q_2(t) \underset{(10)}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow D_r(r_2,t) = \frac{1}{4\pi r_2^2} \int_{V_2} \varrho \, dV \equiv 0 \qquad (16)$$

3) $|\vec{D}| \overset{!}{=} 0 \rightarrow D_r \overset{!}{=} 0$, aus (15):

$D_r(r_1, t) = 0$ für $\boxed{r_1 = 0}$ und $\boxed{r_1 = a}$ (17)

4) $|\vec{D}| \overset{!}{=} \text{maximal} \Rightarrow |D_r| \overset{!}{=} \text{maximal}$

$\Rightarrow D_r \underset{r(15)}{\overset{!}{=}} \text{maximal}$

$\Rightarrow 0 = \frac{\partial D_r}{\partial r_1} \underset{(15)}{=} \frac{\varrho_0}{3}\left(1 - \frac{2r_1}{a}\right) e^{-t/\tau}$

$\Rightarrow \boxed{r_1 = \frac{a}{2}}$ (18)

d) $p_{Joule} = \sigma \vec{E}^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \vec{D}^2 \underset{(10? 11?)}{=} \frac{\sigma}{\varepsilon^2} D_r^2$

$p_{Joule}(r_1, t) \underset{(15)}{=} \frac{\sigma \varrho_0^2}{9\varepsilon^2} \left(r_1 - \frac{r_1^2}{a}\right)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$; $0 \leq r_1 \leq a$ (20)

(21)

$p_{Joule}(r_2, t) \underset{(16)}{=} 0$; $r_2 > a$

$P_{Joule}(t) = \int_{V_2} p_{Joule}\, dV \underset{(21)}{=} \int p_{Joule}(r_1, t)\, dV$ (22)

$P_{Joule}(t) \underset{(8)(20)}{=} \frac{\sigma \varrho_0^2}{9\varepsilon^2} e^{-2t/\tau} \cdot 4\pi \underbrace{\int_0^a \left(r_1 - \frac{r_1^2}{a}\right)^2 r_1^2\, dr_1}_{:= A}$ (23)

$A = \int_0^a \left(r_1^2 - \frac{r_1^3}{a}\right)^2 dr_1 = \int_0^a \left(r_1^4 - 2\frac{r_1^5}{a} + \frac{r_1^6}{a^2}\right) dr_1$

$A = \left[\frac{r_1^5}{5} - \frac{r_1^6}{3a} + \frac{r_1^7}{7a^2}\right]_0^a = \frac{1}{105}\left(21a^5 - 35\frac{a^6}{a} + 15\frac{a^7}{a^2}\right) = \frac{a^5}{105}$ (24)

$P_{Joule}(t) = \frac{4\pi\sigma\varrho_0^2 a^5}{945\,\varepsilon^2} e^{-\frac{2t}{\tau}}$ (25)

$W_{Joule} = \int_0^\infty P_{Joule}(t)\, dt = \frac{4\pi\sigma\varrho_0^2 a^5}{945\,\varepsilon^2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-2t/\tau}\, dt}_{:= B}$ (26)

$B = -\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = \frac{\tau}{2} = \frac{\varepsilon}{2\sigma}$ (27)

$\Rightarrow \boxed{W_{Joule} = \frac{2\pi\varrho_0^2 a^5}{945\,\varepsilon}}$ (28)

F04

-A2-

-1-

a) $\Delta_t g + (k^2+\underline{\gamma}^2)\underline{g} = 0$ mit: $\underline{g} \sim e^{\mp \gamma z}$

bzw. hier: $\underline{g} \sim e^{\mp j\beta_1 z}$

d.h. $\underline{\gamma} = j\beta_1$

TEM: $k^2 + \underline{\gamma}^2 = 0 \Rightarrow k^2 = -\gamma^2 = -(j\beta_1)^2 = \beta_1^2$

$k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 \Rightarrow \beta_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 \Rightarrow \beta_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$

b) $\underline{g}_{1+} = y A_1 e^{-j\beta_1 z}$, $\underline{f}_{1+} = 0$; $\underline{g}_{1-} = y \beta_1 e^{j\beta_1 z}$; $\underline{f}_{1-} = 0$

$Z_{F_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$

mit dem Hinweis zur Berechnung des elektr. Feldes und

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \underline{g}_{1\pm} = 0$ und $(\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\underline{g}_{1\pm} = 0$

$\vec{\underline{E}}_{1+} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \underline{g}_{1+} \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \frac{-j\beta_1}{j\omega\varepsilon_1} A_1 e^{-j\beta_1 z}$

$= -\vec{e}_y \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\varepsilon_1} A_1 e^{-j\beta_1 z} = -\vec{e}_y \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} A_1 e^{-j\beta_1 z}$

$= -\vec{e}_y Z_{F_1} A_1 e^{-j\beta_1 z}$

$\vec{\underline{E}}_{1-} = \vec{e}_y Z_{F_1} \beta_1 e^{j\beta_1 z}$

$\vec{\underline{H}}_t = \pm \frac{1}{Z_F}(\vec{e}_z \times \vec{\underline{E}}_t)$ und $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$

$\vec{\underline{H}}_{1+} = +\frac{1}{Z_F}\left(-\vec{e}_x\left(-A_1 Z_{F_1} \cdot e^{-j\beta_1 z}\right)\right) = +A_1 e^{-j\beta_1 z} \vec{e}_x$

$\vec{\underline{H}}_{1-} = \frac{1}{Z_{F_1}}\left(-\vec{e}_x\left(\beta_1 Z_{F_1} e^{j\beta_1 z}\right)\right) = -\underline{B}_1 e^{+j\beta_1 z} \vec{e}_x$

c) $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ und $\vec{n} \times \vec{H} = 0$ bzw. E_{tan} stetig, H_{tan} stetig

für $z = 0$ und $z = d$.

d) $\underline{E}_2 = \underline{E}_{2+} + \underline{E}_{2-} = \vec{e}_y \, Z_{F2} \left(A_2 e^{-j\beta_2 z} + B_2 e^{j\beta_2 z} \right)$

$\vec{\underline{H}}_2 = \vec{\underline{H}}_{2+} + \vec{\underline{H}}_{2-} = -\vec{e}_x \left(A_2 e^{-j\beta_2 z} + B_2 e^{j\beta_2 z} \right)$

e) $\vec{n} = \vec{e}_z$

<u>$z=0$:</u>

$\vec{e}_z \times \vec{\underline{E}}_1 (z=0) = \vec{e}_z \times \vec{\underline{E}}_2 (z=0)$

$\vec{e}_z \times \vec{\underline{H}}_1 (z=0) = \vec{e}_z \times \vec{\underline{H}}_2 (z=0)$

<u>$z=d$:</u>

$\vec{e}_z \times \vec{\underline{E}}_2 (z=d) = \vec{e}_z \times \vec{\underline{E}}_3 (z=d)$

$\vec{e}_z \times \vec{\underline{H}}_2 (z=d) = \vec{e}_z \times \vec{\underline{H}}_3 (z=d)$

+ zusätzliche Bedingungen aus der Aufgabenstellung:

im Gebiet 1: keine rücklaufende Welle, d.h. $\vec{\underline{E}}_{1-} = 0$, $\vec{\underline{H}}_{1-} = 0$

G 3: — " — " —, d.h. $\vec{\underline{E}}_{3-} = 0$, $\vec{\underline{H}}_{3-} = 0$

Ferner sei $Z_{F_i} = Z_i$ für $i \in \{1,2,3\}$

es gilt: $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$; $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$

<u>$z=0$:</u>

$$\left.\begin{aligned} A_1 Z_1 &= A_2 Z_2 - B_2 Z_2 \\ -A_1 &= -A_2 - B_2 \qquad \mid \cdot Z_2 \end{aligned}\right] +$$

<u>$z=d$:</u>

$$\left.\begin{aligned} A_2 Z_2 e^{-j\beta_2 d} - B_2 Z_2 e^{j\beta_2 d} &= A_3 Z_3 e^{-j\beta_3 d} \\ -A_2 e^{-j\beta_2 d} - B_2 e^{j\beta_2 d} &= -A_3 e^{-j\beta_3 d} \qquad \mid \cdot Z_3 \end{aligned}\right] +$$

$$\left.\begin{aligned} A_2 (Z_2 - Z_1) &= B_2 (Z_2 + Z_1) \\ A_2 (Z_2 - Z_3) e^{-j\beta_2 d} &= B (Z_2 + Z_3) e^{j\beta_2 d} \end{aligned}\right] \div$$

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_3} \cdot e^{j\beta_2 d} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 + Z_3} e^{-j\beta_2 d}$$

$\boxed{-A2-}$

d.h. $e^{-j2\beta_2 d} = \dfrac{(Z_2 - Z_1)\cdot(Z_2 + Z_3)}{(Z_2 - Z_3)(Z_2 + Z_1)}$

mit $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}$ und $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \Rightarrow Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$

$\Rightarrow e^{-j2\beta_2 d} = \dfrac{Z_1 Z_2 - Z_2 Z_3}{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_2} = -1$

Damit die obige Gleichung, deren rechte Seite reell ist, erfüllt wird, muß auch die linke Seite reell sein.

d.h. $e^{-j2\beta_2 d} = -1$

$\Rightarrow 2\beta_2 d = (2n+1)\pi \iff d = \dfrac{2n+1}{2}\pi \dfrac{1}{\beta_2} = \dfrac{2n+1}{4}$

mit: $k_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda_2} = \beta_2$

EMF 1 F04 Aufgabe 3

a) Helmholtz-Gleichung $\Delta \underline{f} + k^2 \underline{f} = 0 \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon$

b) Separation in kartesischen Koordinaten

Produktansatz: $\underline{f} = f_x(x)\, f_y(y) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$f_x''(x) \cdot f_y(y) \cdot e^{-j\beta z} + f_x(x)\, f_y''(y)\, e^{-j\beta z} - \beta^2 f_x(x) \cdot f_y(y) \cdot e^{-j\beta z}$$
$$+ k^2 f_x(x) \cdot f_y(y) \cdot e^{-j\beta z} = 0$$

Multiplikation mit $\dfrac{1}{e^{-j\beta z} \cdot f_x(x)\, f_y(y)}$

$$\underbrace{\frac{1}{f_x(x)} \cdot \frac{\partial^2 f_x(x)}{\partial x^2}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{f_y(y)} \cdot \frac{\partial^2 f_y(y)}{\partial y^2}}_{-k_y^2} + (k^2 - \beta^2) = 0$$

Es ergeben sich 2 gewöhnliche Differentialgleichungen mit folgenden Elementarlösungen:

$$f_x''(x) + k_x^2 f_x(x) = 0 \Rightarrow f_x(x) = A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \sin(k_x \cdot x) \quad (k_x$$

$$f_y''(y) + k_y^2 f_y(y) = 0 \Rightarrow f_y(y) = C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \sin(k_y \cdot y) \quad (k_y =$$

$$\Rightarrow \underline{f}(x,y,z) = (A \cdot \cos(k_x x) + B \cdot \sin(k_x x)) \cdot (C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \sin(k_y \cdot y)) e$$

Separationsbedingung: $-k_x^2 - k_y^2 + k^2 - \beta^2 = 0$

$$\beta^2 = -k_x^2 - k_y^2 + k^2$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \cdot \varepsilon \mu_0 - k_x^2 - k_y^2}$$

c)

$$\underline{\vec{E}} = -\nabla \underline{f} \times \vec{e_z} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} & \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} & \frac{\partial \underline{f}}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \end{vmatrix} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} \cdot \vec{e_y} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} \cdot \vec{e_x}$$

Randbedingung bei G_4 $(y=0)$:

$\underline{\vec{E}}_{tan} = 0$ bzw. $\frac{\partial \underline{f}}{\partial n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} = 0$ für alle x

oder

$E_x|_{y=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = k_y \left(-C \cdot \sin(k_y \cdot y) + D \cdot \cos(k_y \cdot y)\right)$$

für $y=0$ $\quad -C \cdot \underbrace{\sin(k_y 0)}_{0} + D \underbrace{\cos(k_y \cdot 0)}_{1} \Rightarrow D = 0$

$f_y = C \cdot \cos(k_y \cdot y)$

d)

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left(k^2 \cdot \underline{f} \cdot \vec{e_z} + \nabla\left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial z}\right)\right) = \frac{1}{j\omega\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial y \partial z} \\ (k^2 - \beta^2) \cdot \underline{f} \end{pmatrix}$$

Randbedingung für G_2 $(y=h)$:

$\underline{\vec{H}}_{tan}|_{y=h} = 0 \Rightarrow H_z = 0, \; H_x = 0 \Rightarrow \underline{f}|_{y=h} = 0$

Denn für H_z folgt: $\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(k^2 \underline{f} + (-\beta^2) \cdot \underline{f}\right) \sim \underline{f} \Rightarrow f|_{y=h} = 0$,

Für H_x folgt: $\frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{1}{j\omega\mu_0} (-j\beta) \frac{\partial f_x}{\partial x} f_y(h) \cdot e^{-j\beta z} = 0$

$\Rightarrow f_y(h) = 0 = \cos(k_y \cdot h)$

für k_y folgt: $k_y h = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$f_y = C \cos\left(\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2h} \cdot y\right)$$

e) Randbedingungen für $G_3 (x=0)$ und $G_1 (x=w)$:

$\underline{\underline{H}} \, t_{an} \big|_{x=0,\, x=w} = 0 \Rightarrow H_z = 0, \; H_y = 0$

aus Unterpunkt d) folgt für $H_z = 0 \Rightarrow \underline{f} = 0$

Für $G_3 (x=0)$ und $G_1 (x=w)$ folgt:

$\underline{f}\big|_{x=0} = 0, \quad \underline{f}\big|_{x=w} = 0$

$\Rightarrow f_x(0) = 0 \qquad$ und $\qquad \Rightarrow f_x(w) = 0$

$f_x(x) = A \cdot \cos(k_x x) + B \cdot \sin(k_x x)$

für $x = 0$ folgt $A = 0$ und für $x = w$ $\sin(k_x w) = 0$

$k_x w = l \cdot \pi, \; k_x = \frac{l\pi}{w}$

$l = 1, 2, 3 \ldots$

$f_x(x) = B \cdot \sin\left(\frac{l \cdot \pi}{w} \cdot x\right)$

$\underline{f} = A' \sin\left(\frac{l \cdot \pi}{w} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2h} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta_{nl} z}$; $A' = B \cdot C$

f)

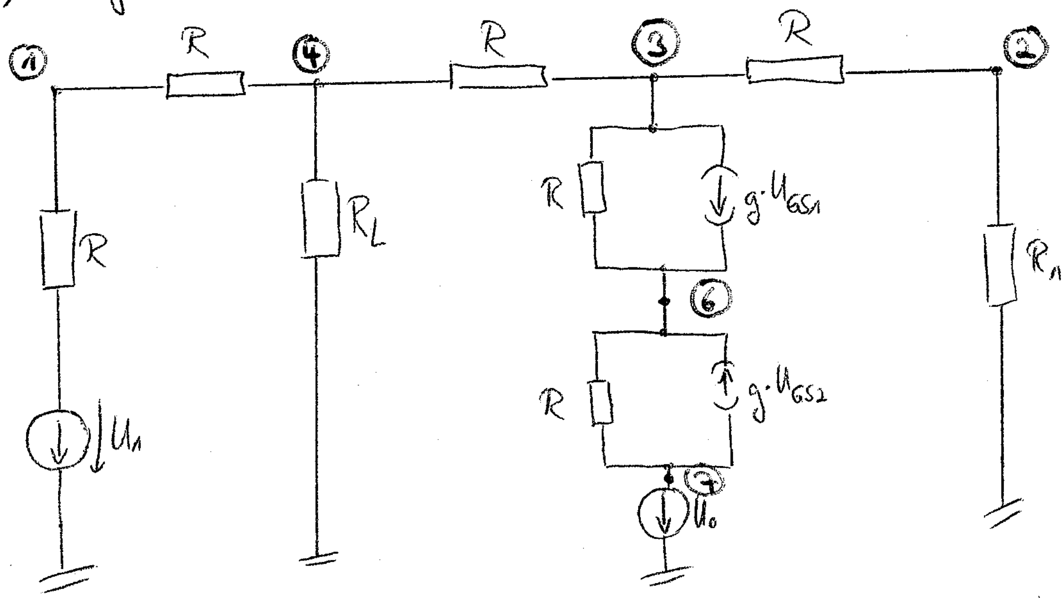
$$\beta_{nl} = \sqrt{\omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu_0 - \left(\frac{l\,\pi}{w}\right)^2 - \left(\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2h}\right)^2}$$

$l = 1, 2, 3$

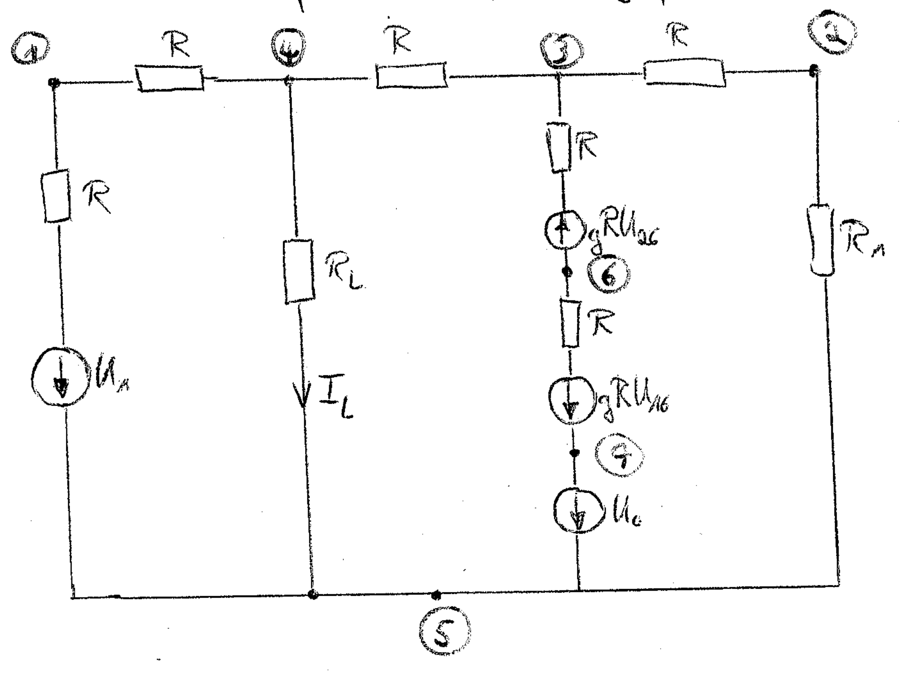
$n = 0, 1, 2, 3$

Aufgabe 4):

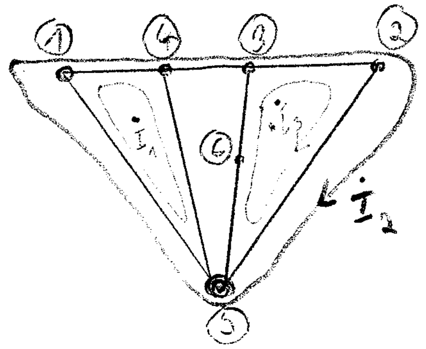
a) Einfügen der Transistor-ESB's:



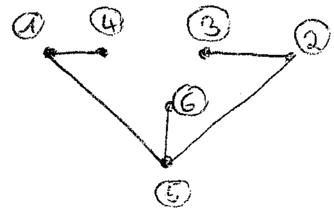
Mit $U_{GS1} = U_{26}$ und $U_{GS2} = U_{16}$ und der Verschiebung der Quelle U_0 entfällt der Knoten 7. Vorbereitung zur Anwendung des Maschenimpedanzverfahrens: Umwandlung der Stromquellen in Spannungsquellen.



b)



Baum:



Rang $\rho = 5$

1. Bettische Zahl: $m = 3$

c) Maschenimpedanzmatrix mit abhängigen Urspannungen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_1 \\ U_0 + gR(U_{16}-U_{26}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2R+R_L & 2R & 0 \\ 2R & 4R+R_1 & R+R_1 \\ 0 & R+R_1 & 3R+R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathring{I}_1 \\ \mathring{I}_2 \\ \mathring{I}_3 \end{pmatrix}$$

mit $U_{16}-U_{26} = U_{12}$ folgt:

$$U_{12} = U_{14} + U_{43} + U_{32}$$
$$= R\cdot \mathring{I}_1 + R\mathring{I}_2 + R\mathring{I}_2 + R\mathring{I}_2 + R\mathring{I}_3$$
$$= R(\mathring{I}_1 + 3\mathring{I}_2 + \mathring{I}_3)$$

Und mit unabhängigen Urspannungen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_1 \\ U_0 \end{pmatrix}}_{\mathring{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2R+R_L & 2R & 0 \\ 2R & 4R+R_1 & R+R_1 \\ -gR^2 & R+R_1-3gR^2 & 3R+R_1-gR^2 \end{pmatrix}}_{\mathring{\underset{\sim}{Z}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathring{I}_1 \\ \mathring{I}_2 \\ \mathring{I}_3 \end{pmatrix}}_{\mathring{I}}$$

d) Jetzt mit $gR = 38$:

$$\mathring{\underset{\sim}{Z}} = \begin{pmatrix} 2R+R_L & 2R & 0 \\ 2R & 4R+R_1 & R+R_1 \\ -38R & -113R+R_1 & -35R+R_1 \end{pmatrix}$$

$$I_L = \mathring{I} = \frac{1}{\det \mathring{\underset{\sim}{Z}}} \begin{vmatrix} U_1 & 2R & 0 \\ U_1 & 4R+R_1 & R+R_1 \\ U_0 & -133R+R_1 & -35R+R_1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ Nur $\det \mathring{\underset{\sim}{Z}}$ hängt von R_L ab.

$\Rightarrow$ I_L ist unabhängig von R_L, für den Fall, das

$$\det \begin{pmatrix} 4R+R_1 & R+R_1 \\ -113R+R_1 & -35R+R_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow R_1 = \frac{1}{3}R$$

e) $\Rightarrow \det \mathring{\underset{\sim}{Z}} = -2R \begin{pmatrix} 2R & R+R_1 \\ -38 & -35R+R_1 \end{pmatrix}$ (entwickelt nach 1. Zeile)

und damit $R_1 = \frac{1}{3}R$ folgt:

$$\det \mathring{\underset{\sim}{Z}} = -2R \begin{pmatrix} 2R & \frac{4}{3}R \\ -38R & -\frac{104}{3}R \end{pmatrix} = -2R\left(-\frac{208}{3}R^2 + \frac{152}{3}R^2\right) = \frac{2}{3}R^3\,56$$

$$\begin{vmatrix} U_1 & 2R & 0 \\ U_1 & 4R+R_1 & R+R_1 \\ U_0 & -133R+R_1 & -35R+R_1 \end{vmatrix} = -2R \begin{vmatrix} U_1 & \frac{4}{3}R \\ U_0 & -\frac{104}{3}R \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(104U_1 + 4U_0)R^2$$

$$\Rightarrow I_L = \mathring{I}_1 = \frac{1}{56R}(104U_1 + 4U_0)$$

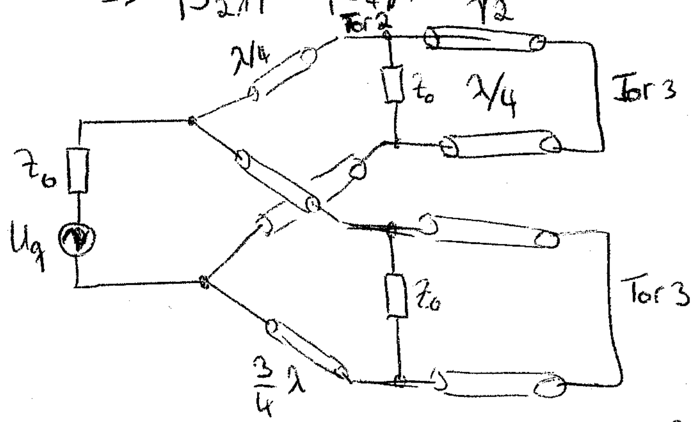
Aufgabe 5):

a) keine Leistungsabgabe am Tor 3 $\Rightarrow$ Tor 3 ist von Tor 1 isoliert.

* $S_{31} = 0$, Symmetrie $S_{24} = 0$ $\Rightarrow S_{13} = 0$, $S_{42} = 0$
* verlustlose 3dB Leistungsteiler $\rightarrow$ keine Reflexion am Eingang, d.h. $S_{11} = 0$, die Leistung wird halbiert:

$$\Rightarrow |S_{21}| = |S_{41}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b)

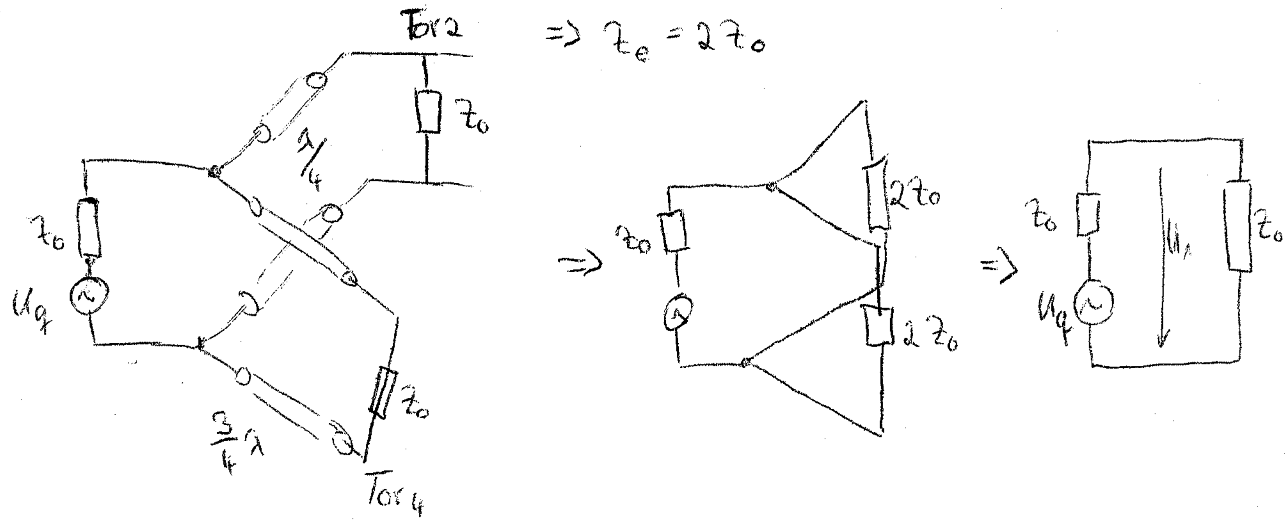


c) * Transf. über $\lambda/4$-Leitung $\Rightarrow Z_e = \frac{Z_L^2}{Z_a}$, Kurzschluss $Z_a = 0$

$\Rightarrow Z_e = \infty$, Leerlauf

* Transf. über $\frac{3}{4}\lambda$-Leitung $\Rightarrow Z_e = \frac{Z_L^2}{Z_a}$ mit $Z_a = Z_0$

$\Rightarrow Z_e = 2Z_0$

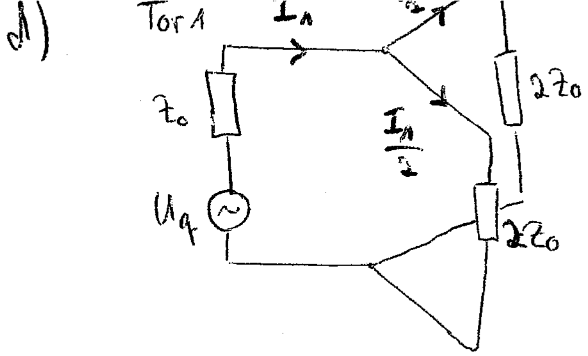


* Eingangsimpedanz am Tor 1: $2Z_0 \parallel 2Z_0 = Z_0$

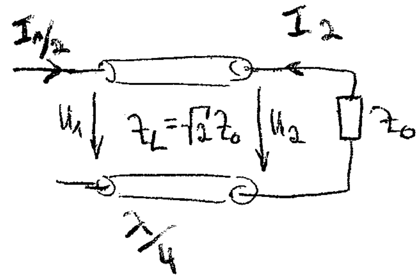
* $S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_2 = a_3 = a_4 = 0} = \frac{U_1 - Z_0 \cdot I_1}{U_1 + Z_0 \cdot I_1}$; mit $U_1 = Z_0 \cdot I_1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_{11} = 0}}$$

d)



$\Rightarrow$



$$* \; S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\bigg|_{a_2 = a_3 = a_4 = 0} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{U_1 + Z_0 I_1} = -\frac{I_2}{I_1}$$

mit $\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 Z_0$

$* \text{ für } l = \frac{\lambda}{4} \rightarrow \cos\beta l = 0 \;, \; \sin\beta l = 1$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \frac{I_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & jZ_L \\ j/Z_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{I_1}{2} = j \frac{U_2}{\sqrt{2} Z_0}$$

$$= j \frac{-I_2}{\sqrt{2}}$$

$$* \; S_{21} = -\frac{I_2}{I_1} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$$

<u>Analog zu S_2:</u>

$$S_{41} = \frac{b_4}{a_1}\bigg|_{a_2 = a_3 = a_4 = 0} = \frac{U_4 - Z_0 I_4}{U_1 + Z_0 I_1} = -\frac{I_4}{I_1}$$

$* \; l = \frac{3}{4}\lambda \quad ; \cos\beta l = 0 \;, \; \sin\beta l = 1$

$$* \; S_{41} = -\frac{I_4}{I_1} = \frac{j}{\sqrt{2}}$$

Aufgabe 6):

a) Weil es sich um einen unipolaren Transistor handelt ($S_{12}=0$). Anderenfalls müssten Eingang und Ausgang gleichzeitig angepasst werden.

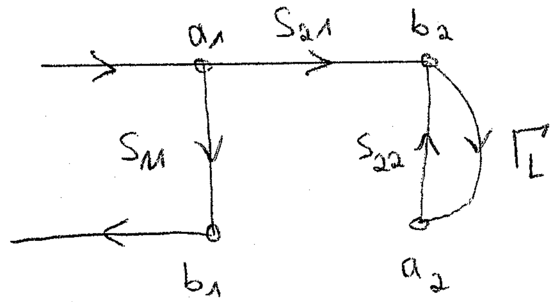
b) $l_s = 0{,}123\ \lambda$ → Da ~~l~~ $l_p < \frac{\lambda}{4}$ gefordert ist, muss die Stichleitung leerlaufend sein.

$l_p = 0{,}168\ \lambda$

Die Stichleitung könnte auch durch einen Kondensator mit der normierten Admittanz $y_c = j1{,}76$ ersetzt werden.

Skizze: s. Smith Chart

c) $P_{in} = \frac{1}{2}|a_1|^2 - \frac{1}{2}|b_1|^2 = \frac{1}{2}|a_1|^2 \cdot (1-|S_{11}|^2)$, da $\underline{S}_{12}=0$



$a_2 = \Gamma_L \underline{b}_2$; $\underline{b}_2 = \underline{S}_{21}\underline{a}_1 + \underline{S}_{22}\underline{\Gamma}_L b_2$

$\underline{b}_2(1-\underline{S}_{22}\Gamma_L) = \underline{S}_{21}\underline{a}_1$

$\underline{b}_2 = \frac{\underline{S}_{21}}{1-\underline{S}_{22}\Gamma_L}\underline{a}_1$

$$P_{Last} = \frac{1}{2}|\underline{b}_2|^2 - \frac{1}{2}|\underline{a}_2|^2 = \frac{1}{2}(1-|\Gamma_L|^2)\cdot|\underline{b}_2|^2$$

$$= \frac{1}{2}|\underline{S}_{21}|^2 \cdot \frac{1-|\Gamma_L|^2}{|1-\Gamma_L \underline{S}_{22}|} \cdot |a_1|^2$$

$$G_p = \frac{P_{Last}}{P_{in}} = \underbrace{\frac{1}{1-|S_{11}|^2}}_{G_Q} \cdot \underbrace{|\underline{S}_{21}|^2}_{G_0} \cdot \underbrace{\frac{1-|\Gamma_L|^2}{|1-\Gamma_L \underline{S}_{22}|^2}}_{G_L}$$

Bei Leistungsanpassung am Ausgang wird die Verstärkung G_L max., also ist:

$$G_{L max} = \frac{1-|\underline{S}_{22}^*|^2}{|1-\underline{S}_{22}^*\underline{S}_{22}|^2} = \frac{1-|\underline{S}_{22}|^2}{|1-|\underline{S}_{22}|^2|^2} = \frac{1-|\underline{S}_{22}|^2}{|1-|\underline{S}_{22}|^2|^2}$$

$$= \frac{1-|\underline{S}_{22}|^2}{(1-|\underline{S}_{22}|^2)^2} = \frac{1}{1-|S_{22}|^2}$$

d) s. SC

e) s. SC

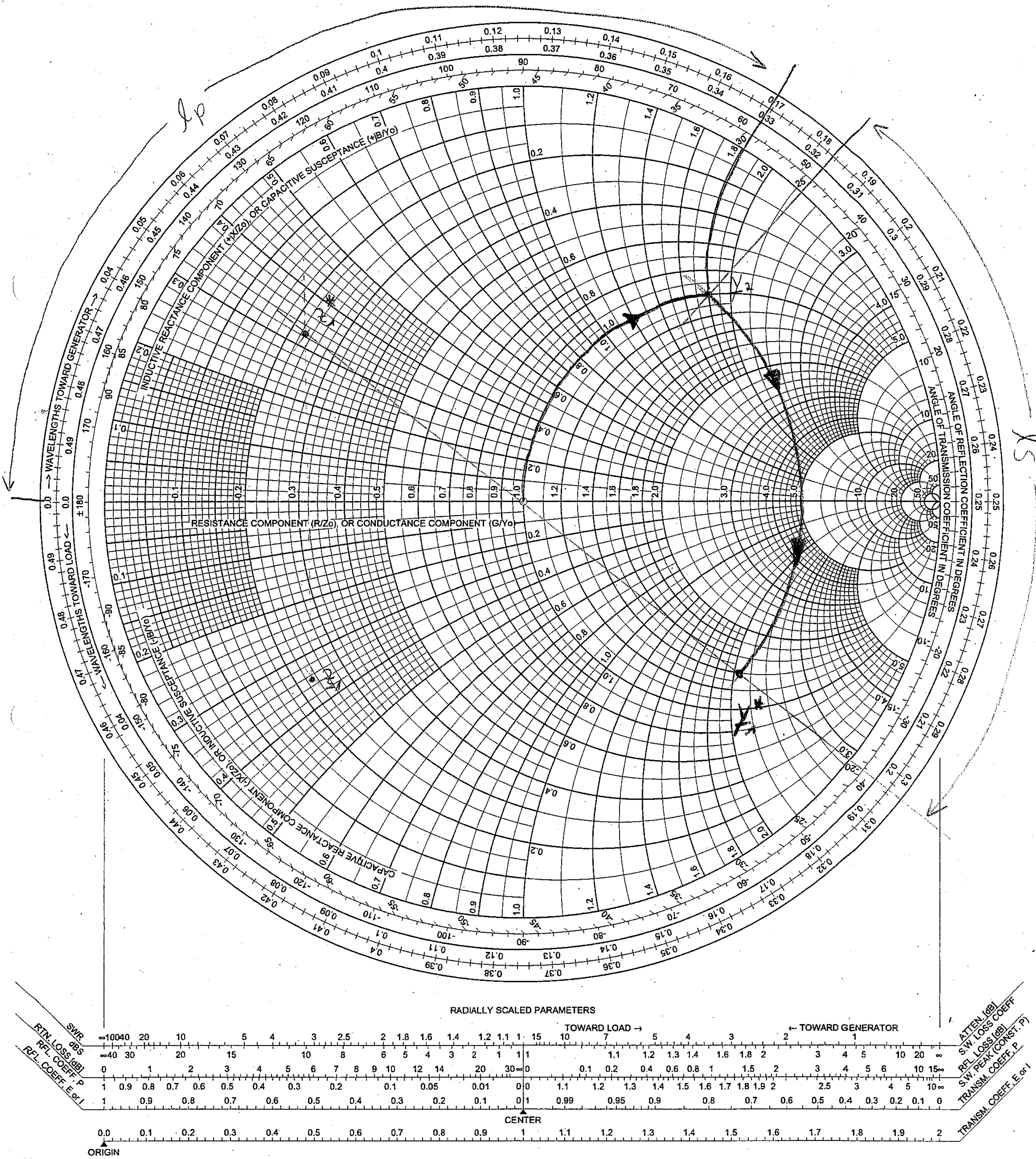
f) Der Verstärker ist uneingeschränkt stabil. Hinr. Bed. für uneingeschränkte Stabilität des Transistors ist $|r_i| < 1 \wedge |r_a| < 1$.

<u>Hier:</u> $\left.\begin{array}{l} |r_i| = |S_{11}| < 1 \\ |r_a| = |S_{22}| < 1 \end{array}\right\}$ sind erfüllt laut Aufgabenstellung. Die Anpassungsnetzwerke sind rein passiv, daher können Eingangs- und Ausgangsreflektoren des kompl. Verstärkers <u>nicht</u> größer als $|r_i|$ und $|r_a|$ sein!

F04

Aufg. 6: b)

The Complete Smith Chart



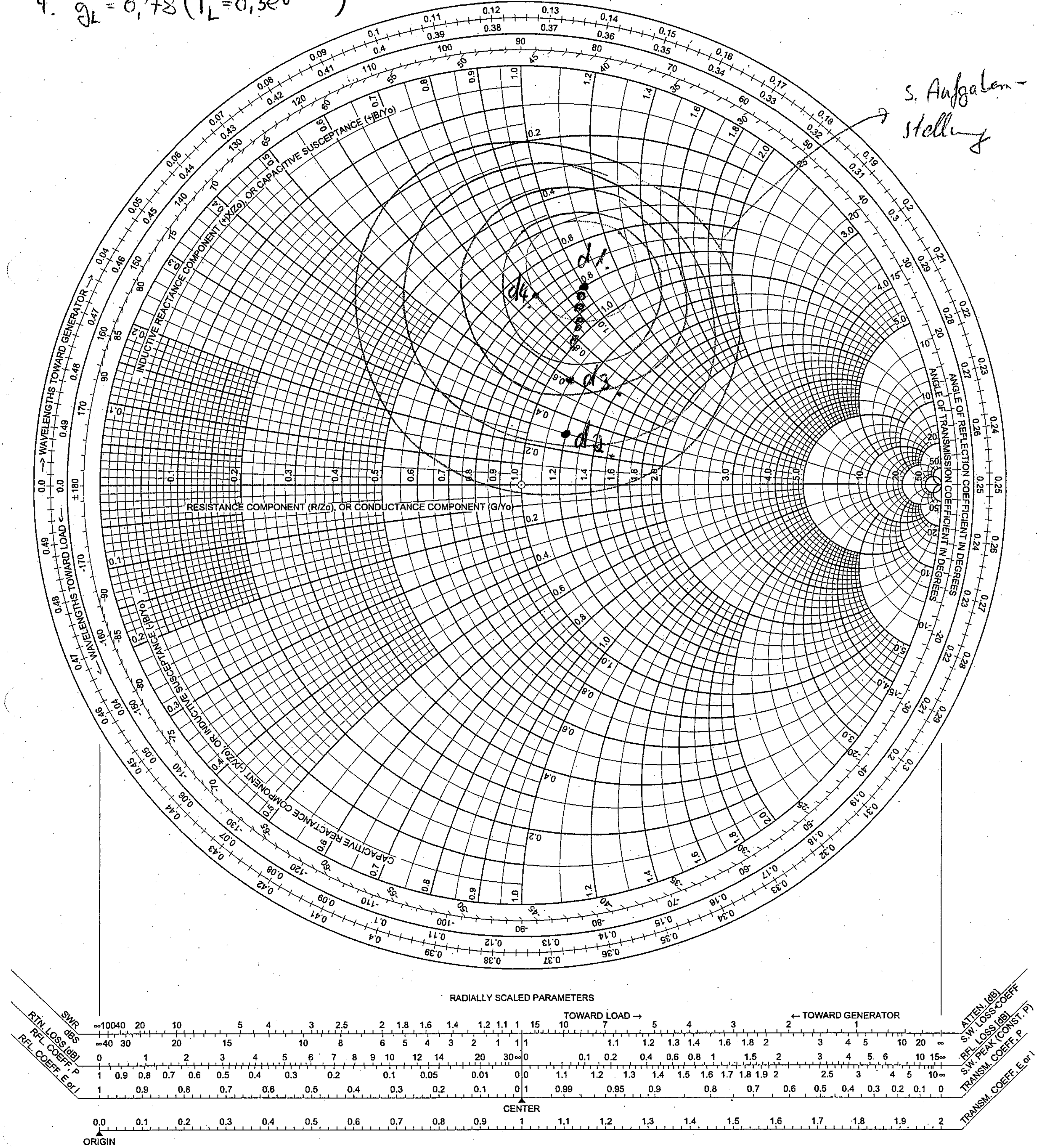
46

Aufg. 6d):

g_L wird im Smith Chart abgelese

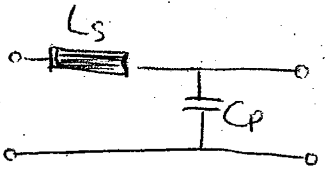
1. $g_L = 1$ da Leistungsanpassung
2. $g_L = 0{,}65$ ($\underline{Z}_L = 1 - j0{,}3$)
3. $g_L = 0{,}75$ (Kreis durch Ursprung)
4. $g_L = 0{,}78$ ($\Gamma_L' = 0{,}3e^{+j134°}$)

The Complete Smith Chart



Aufg. 6:

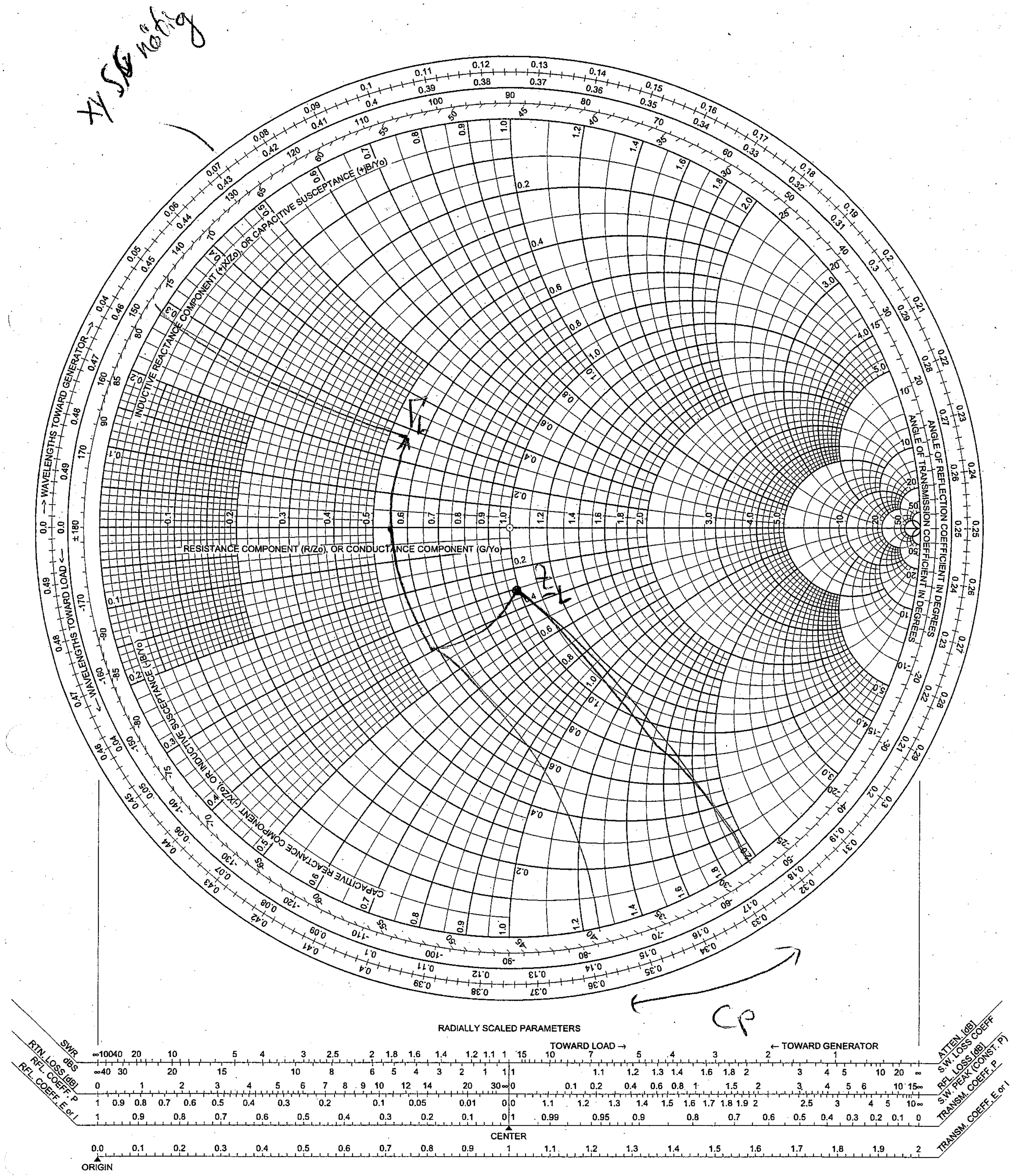
e) 1. Alternative



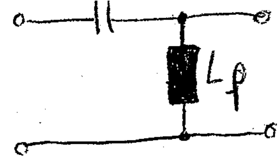
$Z_s = j0{,}83$

$Y_p = j0{,}55$

The Complete Smith Chart



Aufg. 6 e): 2. Alternative:



$z_s = -j0{,}26$

$y_p = -j1{,}1$

The Complete Smith Chart