Herbst 2002

Aufgabe 1 Quasi TEM-Welle

A1 (1.1) a) Helmholtzgleichung für das Feld im Leiter (Gebiet 2):

H 2002

$$\left(\Delta + \underline{k}_2^2\right) \underline{\vec{H}}_2 = \vec{0}$$

mit $\underline{k}_2^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon - j\omega\mu_0\sigma_m$.

Ausnutzung der angegebenen Näherung $\sigma_m \gg \omega\varepsilon$:

$$\underline{k}_2^2 \approx -j\omega\mu_0\sigma_m$$

Uns interessiert nur die y-Komponente:

$$\frac{d^2 h_2(x)}{dx^2} + \underline{k}_2^2 h_2(x) + \underline{\gamma}^2 h_2(x) = 0$$

$$\frac{d^2 h_2(x)}{dx^2} + \left[\underline{k}_2^2 + \underline{\gamma}^2\right] h_2(x) = 0$$

mit $\underline{k}_2^2 + \underline{\gamma}^2 \approx j\omega\mu_0\sigma_m + \underline{\gamma}^2 \approx -j\omega\mu_0\sigma_m$ (Ausnutzung der gegebenen Näherung $\omega\mu_0\sigma_m \gg |\gamma|^2$). Also ist

$$\frac{d^2 h_2(x)}{dx^2} - j\omega\mu_0\sigma_m h_2(x) = 0$$

$$\frac{d^2 h_2(x)}{dx^2} - \frac{2j}{a^2} h_2(x) = 0$$

mit der Eindringtiefe $a = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_0\sigma_m}}$. Lösung:

$$h_2 = \underline{A}\exp\left(\sqrt{2j}\,\frac{x}{a}\right) + \underline{B}\exp\left(-\sqrt{2j}\,\frac{x}{a}\right)$$

$$h_2 = \underline{A}\exp\left[(1+j)\frac{x}{a}\right] + \underline{B}\exp\left(-(1+j)\frac{x}{a}\right)$$

Das Feld muss mit kleiner werdendem x abklingen.
Also ist

$$\underline{B} = 0$$

A1 (1.2)

H2002

Grenzbedingung bei $x=0$:

$$\vec{\underline{H}}_2 = \vec{\underline{H}}_1$$

Also ist

$$A = \underline{H}_{10}$$

Lösung für h_2 unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen

$$h_2 = \underline{H}_{10} \exp\left((1+j)\frac{x}{a}\right)$$

b) Stromdichte:

$$\vec{\underline{J}} = \nabla \times \vec{\underline{H}}$$

Nur die z-Komponente ist gefragt:

$$\underline{J}_{z2} = \frac{d\, h_2(x)}{dx} \exp(-\underline{\gamma} z)$$

$$\underline{J}_{z2} = \underline{H}_{10} \frac{1+j}{a} \exp\left((1+j)\frac{x}{a}\right) \exp(-\underline{\gamma} z)$$

Verlustleistungsdichte:

$$\bar{p}_{Verlust} = \frac{1}{2\sigma_m} |\underline{J}_{z2}|^2$$

Verlustleistung/Länge

Wie wurde Betrag gebildet

$$\bar{P}'_{Verl} = \frac{1}{2\sigma_m} \int_0^w \int_{-t}^0 |\underline{J}_{z2}|^2 \, dx\, dy$$

$$\bar{P}'_{Verl} = \frac{1}{2\sigma_m} |\underline{H}_{10}|^2 \frac{2}{a^2} \int_0^w \int_{-t}^0 \exp\left(2\frac{x}{a}\right) \exp(-2\alpha z)\, dx\, dy$$

$$\bar{P}'_{Verl} = |\underline{H}_{10}|^2 \frac{w}{\sigma_m a^2} \int_{-t}^0 \exp\left(2\frac{x}{a}\right) \exp(-2\alpha z)\, dx$$

A1 (1.3)

H2002

$$\bar{P}'_{Verl} = |\underline{H}_{10}|^2 \frac{\omega}{2\sigma_m a} \exp\left(2\frac{x}{a}\right) \exp(-2\alpha z)\Big|_{x=-t}^{x=0}$$

$$\bar{P}'_{Verl} = |\underline{H}_{10}|^2 \frac{\omega}{2\sigma_m a} \exp(-2\alpha z)\left[1 - \exp\left(-2\frac{t}{a}\right)\right]$$

$$\bar{P}'_{Verl} \approx |\underline{H}_{10}|^2 \frac{\omega}{2\sigma_m a} \exp(-2\alpha z)$$

wegen $a \ll t$

c) Poyntingvektor:

$$\vec{\underline{S}}_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\, \vec{\underline{H}}_1 \cdot \vec{\underline{H}}_1^* \, \vec{e}_z$$

$$\vec{\underline{S}}_1 = |\underline{H}_{10}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \exp(-(\alpha + j\beta)z) \exp(-(\alpha - j\beta)z)\, \vec{e}_z$$

$$\vec{\underline{S}}_1 = |\underline{H}_{10}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \exp(-2\alpha z)\, \vec{e}_z$$

Transportierte Leistung im Gebiet 1 im zeitlichen Mittel:

$$\bar{P}_1(z) = \iint \frac{1}{2} R\left\{ \vec{\underline{S}}_1 \right\} dA$$

$$\bar{P}_1(z) = \frac{1}{2} |\underline{H}_{10}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \int_0^w \int_0^d \exp(-2\alpha z)\, dx\, dy$$

$$\bar{P}_1(z) = \frac{1}{2} |\underline{H}_{10}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\, dw \exp(-2\alpha z)$$

d) Abnahme der transportierten Leistung in z-Richtung:

$$\frac{d\bar{P}_1}{dz} = -|\underline{H}_{10}|^2 \alpha \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\, dw \exp(-2\alpha z)$$

Vergleich mit Verlusten im Leiter $\bar{P}'_{Verl}$:

$$\bar{P}'_{Verl} = -\frac{d\bar{P}_1}{dz}$$

$$|\underline{H}_{10}|^2 \alpha d w \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \exp(-2\alpha z) = |\underline{H}_{10}|^2 \frac{\omega}{2\sigma_m a} \exp(-2\alpha z)$$

$$\alpha d \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \frac{1}{2\sigma_m a}$$

$$\alpha = \frac{1}{2 d \sigma_m a} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}$$

A1 (1.4)

H 2001

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{\beta}$$

$$v_{Ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}$$

Herbst 2002

Aufgabe 1

A1 (1.1) a) Ausbreitung der Hybridwelle in z-Richtung mit noch unbekannter Ausbreitungskonstante γ:

$$\underline{\vec{G}}_i(x,y,z) = \underline{\tilde{g}}_i(x,y)\, e^{-\gamma z}\, \vec{e}_y \qquad \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$$

Differentialgleichungen:

Gebiet 1:
$$(\nabla^2 + k_1^2)\, \underline{\vec{G}}_1 = 0 \quad \text{mit } k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_1^2 + \gamma^2\right) \underline{g}_1 = 0$$

Gebiet 2:
$$(\nabla^2 + k_2^2)\, \underline{\vec{G}}_2 = 0 \quad \text{mit } k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_2^2 + \gamma^2\right) \underline{g}_2 = 0$$

b) Produktansatz

$$g_1(x,y,z) := g_{1x}(x) \cdot g_{1y}(y)\, e^{-\gamma z}$$

Einsetzen in DGL

$$\left(g_{1y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_{1x} + g_{1x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_{1y} + (k_1^2 + \gamma^2)\, g_{1x}\, g_{1y}\right) e^{-\gamma z} = 0$$

Multiplikation mit $\frac{1}{g_{1x}\, g_{1y}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{g_{1x}} \frac{\partial^2 g_{1x}}{\partial x^2}}_{:= -k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{g_{1y}} \frac{\partial^2 g_{1y}}{\partial y^2}}_{:= -k_y^2} + (k_1^2 + \gamma^2) = 0$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung in Gebiet 1:

$$g_1(x,y,z) = \Big[(A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)) \cdot (C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y))\Big]\, e^{-\gamma z}$$

Gebiet 2: Analog, jedoch als Funktion von $(b-y)$, damit die Randbedingung bei $y=b$ leichter zu erfüllen sind.

A2(2.3)
H2002

$$g_2(x,y,z) = \left(A_2 \cos(k_x x) + B_2 \sin(k_x x)\right) \cdot \left(C_2 \cos(k_{2y}(b-y)) + D_2 \sin(k_{2y}(b-y)\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

Separationsbedingung im Gebiet 2:

$$-k_x^2 - k_{2y}^2 + \left(k_2^2 + \gamma^2\right) = 0$$

Randbedingungen bei $x=0$, $x=a$:

$$\vec{E}_{ti}(x=0) = E_{yi}(x=0)\,\vec{e}_y \sim g_i(x=0) \overset{!}{=} 0 \qquad (i)$$

$$\vec{E}_{ti}(x=a) \sim g_i(x=a) = 0 \qquad (ii)$$

$(i) \Longrightarrow A_1 = A_2 = 0$

$(ii) \Longrightarrow \sin(k_x a) = 0 \longrightarrow k_x \cdot a = m \cdot \pi \longrightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}$

$m = 1, 2, \ldots$

c)

$$\vec{E}_i = \frac{1}{j\omega\varepsilon_i}\left(k_i^2\, g_i\, \vec{e}_y + \nabla \frac{\partial g_i}{\partial y}\right) \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

$$\vec{H}_i = \nabla g_i \times \vec{e}_y$$

Gebiet 1:

$$\Longrightarrow \vec{H}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & -\gamma g_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{vmatrix} = \frac{\partial g_1}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial g_1}{\partial x}\vec{e}_z$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{j\omega\varepsilon_1}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y} \\ \left(k_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g_1 \\ -\gamma \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

⑥

Gebiet 2: Analog

Randbedingung bei $y=0$:

AI(2.4) H2002

$$\underline{\vec{E}}_{t_1}(y=0) = \underline{E}_{1x}(y=0)\,\vec{e}_x \sim \frac{\partial g_1}{\partial y} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall x$$

$$+\underline{E}_{1z}(y=0)\,\vec{e}_z \qquad = 0$$

$$\longrightarrow \quad k_{1y}\cdot\Big(-C_1\underbrace{\sin(k_{1y}\cdot 0)}_{0} + D_1\underbrace{\cos(k_1 0)}_{1}\Big) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \quad D_1 = 0$$

Randbedingung bei $y=b$:

$$\underline{\vec{E}}_{t_2}(y=b) = \underline{E}_{2x}(y=b)\,\vec{e}_x \sim \frac{\partial g_2}{\partial y} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall x$$

$$+\underline{E}_{2z}(y=0)\,\vec{e}_z \qquad = 0$$

$$\Longrightarrow \quad D_2 = 0$$

$$g_1(x,y,z) = C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos(k_{1y}y)\,e^{-\gamma z}$$

$$g_2(x,y,z) = C_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\big(k_{2y}(b-y)\big)\,e^{-\gamma z}$$

d)

Randbedingungen an der dielektrischen Grenzfläche $y=h$:

$$\forall x \quad \underline{\vec{E}}_{t_1}(y=h) = \underline{\vec{E}}_{t_2}(y=h) \longrightarrow \quad E_{x_1}(y=h) = E_{x_2}(y=h) \quad \text{(I)}$$

$$E_{z_1}(y=h) = E_{z_2}(y=h) \quad \text{(II)}$$

$$\underline{\vec{H}}_{t_1}(y=h) = \underline{\vec{H}}_{t_2}(y=h) \longrightarrow \quad H_{x_1}(y=h) = H_{x_2}(y=h) \quad \text{(III)}$$

$$H_{z_1}(y=h) = H_{z_2}(y=h) \quad \text{(IV)}$$

$$(\mathrm{I}): \rightarrow \underline{E}_{x_i} \sim \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial^2 g_i}{\partial y \partial x} \Rightarrow \boxed{-\frac{C_1}{\varepsilon_r} k_{1y} \sin(k_{1y} \cdot h) = -C_2 k_{2y} \sin(k_{2y}(b-h))}$$ ①

~~[illegible]~~

A2 (2.2)

H2002

$$(\mathrm{II}): \rightarrow \underline{E}_{z_i} \sim \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial g_i}{\partial y} \rightarrow \text{keine zusätzliche Information}$$

$$(\mathrm{III}): \rightarrow \underline{H}_{x_i} \sim \underline{g}_i \Rightarrow \boxed{C_2 \cos(k_{1y} h) = C_2 \cos(k_{2y}(b-h))}$$ ②

$$(\mathrm{IV}): \rightarrow \underline{H}_{z_i} \sim \frac{\partial g_i}{\partial x} \Rightarrow \text{keine zusätzliche Information}$$

① durch ② teilen:

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{k_{1y}}{\varepsilon_r} \tan(k_{1y} h) = k_{2y} \tan(k_{2y}(b-h))} \quad *$$

Separationsbedingungen:

$$k_{1y}^2 = \omega^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

$$k_{2y}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

$\Rightarrow$ (*) ist eine Bestimmungsgleichung, die als einzige Unbekannte γ enthält bei gegebener Frequenz ω

Herbst 2002

Aufgabe 3

A3 (3.1) H2002

a) $\underline{\vec{A}} = \underline{A}_z \vec{e}_z$ Kugelkoordinaten: $\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta$

$$\underline{\vec{A}}_z = \frac{\mu_0 j\omega \ell}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r}$$

$$\underline{\vec{A}} = \underbrace{\frac{\mu_0 j\omega \ell}{4\pi}}_{C} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} (\vec{e}_r \cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta)$$

$$\underline{\vec{A}} = C \cdot \frac{e^{-jk_0 r}}{r} (\vec{e}_r \cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta)$$

b) $\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{B}} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{\vec{A}}$

$$\operatorname{rot}\underline{\vec{A}} = \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, \underline{A}_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\underline{A}_\vartheta\right]$$
$$+ \vec{e}_\vartheta \left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\underline{A}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\underline{A}_\varphi)\right]$$
$$+ \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\underline{A}_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\underline{A}_r\right]$$

mit $\underline{A}_\varphi = 0$, $\frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial\varphi} = 0$ und $\frac{\partial \underline{A}_r}{\partial\varphi} = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\underline{\vec{A}} = \vec{e}_r \cdot 0 + \vec{e}_\vartheta \cdot 0 + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{1}{r} e^{-jk_0 r}(-\sin\vartheta)\right) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\cos\vartheta\right)\right]$$

$$\operatorname{rot}\underline{\vec{A}} = \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} C e^{-jk_0 r}\left(-jk_0(-\sin\vartheta) + \frac{1}{r}\sin\vartheta\right)$$
$$= \vec{e}_\varphi e^{-jk_0 r} \cdot C \sin\vartheta \left(\frac{jk_0}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{\vec{H}} = \vec{e}_\varphi \frac{j\omega \ell}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} (j k_0 \sin\vartheta)$$

A3 (3.2)
H2002

c) $\underline{\vec{H}} = \frac{1}{Z} (\vec{n} \times \underline{\vec{E}})$ also $\underline{\vec{E}} = Z(\underline{\vec{H}} \times \vec{n})$

mit $\vec{n} = \vec{e}_r$ beachte $\vec{H} \perp \vec{e}_r = \vec{n}$

und $\vec{E} \perp \vec{e}_r = \vec{n}$

$$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta$$

$$\underline{\vec{E}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{j\omega \ell}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} (j k_0 \sin\vartheta)(\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r)$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{j\omega \ell}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} (j k_0 \sin\vartheta)\ \vec{e}_\vartheta$$

$k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ bzw $\cancel{k_0 = \pm\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\,\omega}$ $k_0 = \pm\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\,\omega$

„+" Welle in Richtung von $\vec{e}_r$ $\hat{=}$ Abstrahlung

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\vec{E}} = \frac{\mu_0 j^2 \omega^2 \ell}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\vartheta\ \vec{e}_\vartheta$$

d) $\vec{\underline{A}} = \vec{\underline{A}}_a + \vec{\underline{A}}_b$ $\quad \vec{\underline{A}}_a$ Vektorpotential des Dipols in $x = h$

$\vec{\underline{A}}_b$ Vektorpotential des Dipols in $x = -h$

A3 (3.3)
H2002

$$\vec{\underline{A}}_a = \frac{\mu_0 j \omega \underline{I}}{4\pi} \, \frac{e^{-jk_0\sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}} \, \vec{e}_z \quad \text{mit } r_a = \sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{\underline{A}}_b = \frac{\mu_0 j \omega \underline{I}}{4\pi} \, \frac{e^{-jk_0\sqrt{(x+h)^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{(x+h)^2+y^2+z^2}} \, \vec{e}_z \quad \text{mit } r_b = \sqrt{(x+h)^2+y^2+z^2}$$

$$\text{also: } \vec{A} = \frac{\mu_0 j\omega}{4\pi} \left(\underline{p} \frac{e^{-jk_0 r_a}}{r_a} + \underline{p}' \frac{e^{-jk_0 r_b}}{r_b} \right) \vec{e}_z$$

Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{B}$ für $x = 0$

$$\vec{B}_{an}(x=0) = \vec{B}_{bn}(x=0) = 0 \Rightarrow \vec{B}(x=0) = 0$$

Bei der gegebenen Anordnung ist $\vec{n} = \vec{e}_x$ (Normalkomponen

Aus $\vec{\underline{B}} = \operatorname{rot} \vec{\underline{A}}$ folgt: $\underline{B}_x = \partial_y \underline{A}_z$

d.h. nur folgende Terme müssen berechnet werden

$$\partial_y r_a = \frac{y}{r_a} \quad , \quad \partial_y r_b = \frac{y}{r_b}$$

$$\partial_y e^{-jk_0 r_a} = -jk_0 y \frac{e^{-jk_0 r_a}}{r_a}$$

$$\partial_y e^{-jk_0 r_b} = -jk_0 y \frac{e^{-jk_0 r_b}}{r_b}$$

$$\text{also: } \partial_y \underline{A}_z = \frac{\mu_0 j\omega}{4\pi} \left(\underline{p} \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-jk_0 r_a}}{r_a} + \underline{p}' \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-jk_0 r_b}}{r_b} \right)$$

$$\underline{B}_x = \frac{\mu_0 j\omega}{4\pi} y \left(p \frac{e^{-jk_0 r_a}}{r_a^3} (-jk_0 r_a - 1) + p' \frac{e^{-jk_0 r_b}}{r_b^3} (-jk_0 r_b - 1) \right)$$

A3 (3.4) für $x=0$ gilt: $r_a(x=0) = r_b(x=0) = r_0$

H 2002 mit $\underline{B}_x = 0$ und $x=0$

$\Rightarrow p = -p'$