Aufgabe 1

a) $I(t)$ erzeugt $\vec{B}_G(t) = I(t)\mu_0 \frac{1}{2\pi r}\, \vec{e}_\varphi$

<u>hier</u>: $\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_z$; $r = x$

für $d \ll a$ gilt: $\Psi_{L1}(t) = \phi_{L1}(t) = \int\limits_{x=a}^{2a}\int\limits_{y=y_0}^{y_0+a} \vec{B}_G(t)\, \underbrace{dy\, dx\, \vec{e}_z}_{d\vec{F}_1}$

$$\phi_{L1}(t) = \int\limits_{x=a}^{2a}\int\limits_{y=y_0}^{y_0+a} I(t)\mu_0 \frac{1}{2\pi x}\, dy\, dx\, \underbrace{(-\vec{e}_z)\vec{e}_z}_{-1}$$

$$\phi_{L1}(t) = -I(t)\frac{\mu_0 a}{2\pi}\int\limits_{x=a}^{2a}\frac{1}{x}\,dx = -I(t)\frac{\mu_0 a}{2\pi}\Big[\ln x\Big]_a^{2a}$$

$$\underline{\phi_{L1}(t) = -I(t)\cdot\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 2}$$

b) $\oint\limits_{L1}\vec{E}\,d\vec{s} = -\dot{\phi}_{L1} = I_1 R_1$

$\Rightarrow I_1(t) = -\dot{\phi}_{L1} = I_1 R_1$

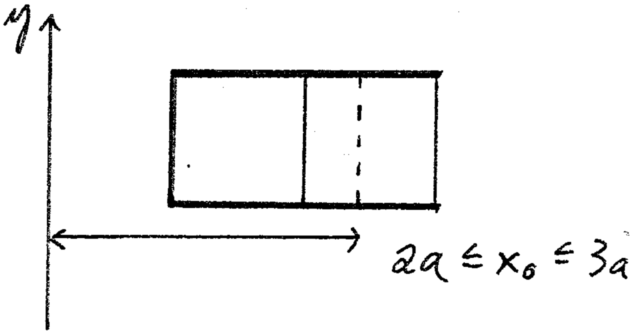
$\Rightarrow I_1(t) = -\frac{\dot{\phi}_{L1}}{R_1} = \dot{I}(t)\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 2$

$$\underline{I_1(t) = -I_0\,\omega \sin(\omega t)\,\frac{1}{R_1}\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 2}$$

c) Da $\vec{J}$ nur eine Komponente hat ($\vec{J} = J_y \vec{e}_y$) erhält man mit:

$\operatorname{div}\vec{J} = \frac{dJ_y}{dy} = 0 \Rightarrow \vec{J} = J_y(x)\,\vec{e}_y$

$\vec{J}(x) = \vec{E}(x)\sigma = E_y(x)\,\sigma\,\vec{e}_y$



analog zu a)

$$\Rightarrow \phi_{L2}(t) = -I(t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\int_{x=a}^{x_0}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \phi_{L2}(t) = -I(t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{x_0}{a}$$

$$\int_{\substack{\text{Stromröhre}\\ x=x_0}} \vec{E}\,d\vec{s} = -\dot{\phi}_{L2}(t, x=x_0) = -I_0\,\omega\sin(\omega t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{x_0}{a}$$

$\vec{E}$ nur auf Platte von Null verschieden

$$\Rightarrow \oint_{\substack{\text{Stromröhre}\\ x=x_0}} \vec{E}\,d\vec{s} = a E_y(x=x_0)$$

$$\Rightarrow E_y(x=x_0) = -\frac{\dot{\phi}_{L2}(t, x=x_0)}{a} \quad ; \text{allgemein: } E_y(x) = -\frac{\dot{\phi}_{L2}(t,x)}{a}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{J}(x) = -\frac{\sigma}{a} I_0\omega\sin(\omega t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{x}{a}\,\vec{e}_y} \quad ; 2a \le x \le 3a$$

$$I_2(t) = \int_{z=0}^{d}\int_{x=2a}^{3a} J_y(x)\,dx\,dz$$

$$I_2(t) = -d\,\frac{\sigma}{a}\,\omega I_0\sin(\omega t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\int_{x=2a}^{3a}\ln\frac{x}{a}\,dx$$

Substitution: $u = \frac{x}{a}$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow I_2(t) = -d\,\frac{\sigma\omega\mu_0}{2\pi} I_0\sin(\omega t)\int_{u=2}^{3} a\ln u\,du$$

$$= \underbrace{-ad\,\frac{\sigma\omega\mu_0}{2\pi} I_0\sin(\omega t)}_{\tilde{I}}\cdot\Big[u\ln u - u\Big]_{u=2}^{3}$$

$$= \tilde{I}\left[3\ln 3 - 3 - 2\ln 2 + 2\right]$$

$$= \tilde{I}\left[\ln\frac{3^3}{2^2} - 1\right]$$

$$= \underline{-ad\,\frac{\sigma\omega\mu_0}{2\pi} I_0\sin(\omega t)\left[\ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1\right]}$$

d) Flußverkettung Ψ_{L2} ist der mit $\frac{dI}{I}$ gewichtete Mittelwert der Bündelflüsse sämtlicher Stromröhren

$$\Rightarrow \Psi_{L2} = \frac{1}{I_2} \int_{x=2a}^{3a} \phi_{L2}(x,t) \cdot \underbrace{d \cdot J_y(x)\, dx}_{}$$

$$\Rightarrow \Psi_{L2} = \frac{\tilde{I}\left[-I_0 \cos(\omega t) \frac{\mu_0}{2\pi}\right]}{\tilde{I}\left[\ln\left(\frac{27}{4}\right)-1\right]} \cdot d\, I_2 \int_{x=2a}^{3a} \ln\frac{x}{a} \ln\frac{x}{a}$$

$$= -\frac{I_0 \cos(\omega t) \frac{\mu_0}{2\pi}}{\ln\left(\frac{27}{4}\right)-1} \int_{u=2}^{3} a (\ln u)^2\, du \quad \left[\text{Substitution}: u = \frac{x}{a};\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{a}\right]$$

$$= -I(t) \cdot \frac{\frac{\mu_0 a}{2\pi}}{\ln\left(\frac{27}{4}\right)-1} \cdot \left[u(\ln u)^2 - 2u \ln u + 2u\right]_{u=2}^{3}$$

$$= -I(t) \cdot \frac{\frac{\mu_0 a}{2\pi}}{\ln\left(\frac{27}{4}\right)-1} \left[3(\ln 3)^2 - 6\ln 3 + 6 - 2(\ln 2)^2 + 4\ln 2 - 4\right]$$

$$\Rightarrow \underline{\Psi_{L2} = -\frac{I(t)\mu_0 a}{2\pi} \cdot \frac{3(\ln 3)^2 - 2(\ln 2)^2 + 2 - 2\ln\left(\frac{27}{4}\right)}{\ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1}}$$

Aufgabe 2

a) $\underline{\vec{A}}_0 = \vec{e}_z \frac{j\omega\mu_0}{4\pi r} \underline{p} \cdot e^{-jk_0 r} \quad ; \; k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ (1)

$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cdot \cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta \cdot \sin\vartheta$ (Formelsammlung) (2)

$\Rightarrow \underline{\vec{A}}_0 = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \underline{p} \left(\vec{e}_r \frac{1}{r} e^{-jk_0 r} \cdot \cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-jk_0 r} \cdot \sin\vartheta \right)$ (3)

$\Rightarrow \underline{\vec{H}}_0 = \frac{1}{\mu_0} \cdot \operatorname{rot} \underline{\vec{A}}_0 = \frac{j\omega}{4\pi r} \underline{p} \cdot \vec{e}_\varphi \left(-\sin\vartheta \frac{d}{dr} \left(\cdot e^{-jk_0 r} \right) - \frac{1}{r} e^{-jk_0 r} \frac{d}{d\vartheta} (\cos\vartheta) \right)$

$\Rightarrow \underline{\vec{H}}_0 = \vec{e}_\varphi \frac{j\omega}{4\pi} \underline{p} \frac{1}{r} \left(jk_0 + \frac{1}{r} \right) e^{-jk_0 r} \cdot \sin\vartheta$

$\underline{\vec{H}}_0 = \vec{e}_\varphi \frac{j\omega}{4\pi} \underline{p} \frac{1}{r^2} \left(jk_0 r + 1 \right) \cdot e^{-jk_0 r} \cdot \sin\vartheta$ (5)

Fernfeld: $k_0 r \gg 1 \Rightarrow jk_0 r + 1 \approx jk_0 r$ (6)

$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{H}}_0 = -\vec{e}_\varphi \frac{\omega k_0}{4\pi r} \underline{p} \, e^{-jk_0 r} \cdot \sin\vartheta}$ (7)

b) TEM-Welle: $\underline{\vec{E}}_0 = -Z_0 \, \vec{n} \times \underline{\vec{H}}_0 \quad ; \; Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad ; \; \vec{n} = \vec{e}_r$ (8)

$-\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\vartheta$ (9)

$\Rightarrow \underline{\vec{E}}_0 = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega k_0 Z_0}{4\pi} \underline{p} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-jk_0 r}$ (10)

$\boxed{k_0 Z_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \omega\mu_0}$ (11)

$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{E}}_0 = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega^2\mu_0}{4\cdot\pi} \underline{p} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-jk_0 r}}$ (12)

c) $\overline{\vec{S}_0(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \underline{\vec{E}}_0 \times \underline{\vec{H}}_0^* \right\} \quad ; \; \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi = +\vec{e}_r$ (13)

$\Rightarrow \underline{\vec{E}}_0 \times \underline{\vec{H}}_0^* = \vec{e}_r \frac{\omega^2 k_0^2}{16\pi^2} Z_0 \underline{p}\underline{p}^* \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} = \vec{e}_r \frac{\omega^3 \mu_0 \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{16\pi^2} |\underline{p}|^2 \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}$

$\Rightarrow \boxed{\overline{\vec{S}_0(t)} = \vec{e}_r \frac{\omega^2 k_0^2 Z_0}{32\pi^2} |\underline{p}|^2 \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} = \vec{e}_r \frac{\omega^4 \mu_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{32\pi^2} |\underline{p}|^2 \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}}$ (15)

d) $$\underline{\vec{H}}_r = \vec{e}_\varphi \frac{\omega k_0}{4\pi r} \underline{p}_r e^{jk_0 r} \sin\vartheta \qquad (16)$$

Bei der rücklaufenden Welle gilt analog zu b) $\underline{\vec{E}}_r = -Z_0 \vec{n}_r \times \underline{\vec{H}}_r$

mit $\boxed{\vec{n}_r = -\vec{e}_r}$ (17)

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{E}}_r = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega k_0 Z_0}{4\pi} \underline{p}_r \frac{\sin\vartheta}{r} e^{jk_0 r} \underset{(11)}{=} -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi} \underline{p}_r \frac{\sin\vartheta}{r} e^{jk_0 r}} \qquad (1$$

e) Man erhält $\underline{\vec{H}}_1$ und $\underline{\vec{E}}_1$, indem man in (7) und (10) bzw. (12) ε_0 durch ε_1, k_0 durch k_1, Z_0 durch Z_1 und $\underline{p}$ durch $\underline{p}_1$ ersetzt.

$$\boxed{\underline{\vec{H}}_1 = -\vec{e}_\varphi \frac{\omega k_1}{4\pi r} \underline{p}_1 e^{-jk_1 r} \cdot \sin\vartheta \quad ; k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}} \qquad (19)$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_1 = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega k_1 Z_1}{4\pi} \underline{p}_1 \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-jk_1 r} = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi} \underline{p}_1 \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot e^{-jk_1 r}} \qquad (20)$$

mit $Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$; $Z_1 k_1 = \omega\mu_0$ (analog zu (11)) (21)

f) Bei $r=a$ gilt:

1) $\vec{E}_{tang}$ stetig $\Rightarrow \underline{E}_{\vartheta,\text{Gebiet}0}(r=a) = \underline{E}_{\vartheta,\text{Gebiet}1}(r=a)$ (22)

$\vec{H}_{tang}$ stetig $\Rightarrow \underline{H}_{\varphi,\text{Gebiet}0}(r=a) = \underline{H}_{\varphi,\text{Gebiet}1}(r=a)$ (23)

g) Es gilt $\underline{\vec{E}}_{\text{Gebiet}0} = \underline{\vec{E}}_0 + \underline{\vec{E}}_r$; $\underline{\vec{H}}_{\text{Gebiet}0} = \underline{\vec{H}}_0 + \underline{\vec{H}}_r$ (24)

Dann folgt aus (22), (12), (18), (20)

$$\underline{p} \cdot e^{-jk_0 a} + \underline{p}_r \cdot e^{jk_0 a} = \underline{p}_1 \cdot e^{-jk_1 a} \qquad (25)$$

Analog aus (23), (7), (16), (19):

$$-\underline{p}\, k_0 e^{-jk_0 a} + \underline{p}_r k_0 \cdot e^{jk_0 a} = -\underline{p}_1 k_1 e^{-jk_1 a} \qquad (26)$$

$$\Rightarrow \underline{p} e^{-jk_0 a} - \underline{p}_r e^{jk_0 a} = \frac{k_1}{k_0} \underline{p}_1 e^{-jk_1 a} \qquad (27)$$

(25)+(27): $$2\underline{p} \cdot e^{-jk_0 a} = \underline{p}_1 \left(1 + \frac{k_1}{k_0}\right) \cdot e^{-jk_1 a} = \underline{p}_1 \frac{k_0 + k_1}{k_0} e^{-jk_1 a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{p}_1 = \frac{2\cdot k_0}{k_0+k_1}\,\underline{p}\cdot e^{ja(k_1-k_0)}} \qquad (28)$$

$$(25)-(27):\quad 2\underline{p}_r\cdot e^{jk_0 a} = \underline{p}_1\left(1-\frac{k_1}{k_0}\right)e^{-jk_1 a} = p_1\,\frac{k_0-k_1}{k_0}\,e^{-jk_1 a}$$

$$\underset{(28)}{\Rightarrow}\; 2\underline{p}_r e^{jk_0 a} = 2\,\frac{k_0-k_1}{k_0+k_1}\,\underline{p}\cdot e^{-jk_0 a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{p}_r = \frac{k_0-k_1}{k_0+k_1}\,\underline{p}\cdot e^{-2jk_0 a}} \qquad (29)$$

h) Man erhält $\overline{\vec{S}_1(t)}$ aus $\overline{\vec{S}_0(t)}$ [siehe (15)], indem man in (15) ε_0 durch ε_1, k_0 durch k_1, z_0 durch z_1 und $\underline{p}$ durch $\underline{p}_1$ ersetzt:

$$\boxed{\overline{\vec{S}_1(t)} = \vec{e}_r\,\frac{\omega^2 k_1^2 z_1}{32\pi^2}\,|\underline{p}_1|^2\,\frac{\sin^2\vartheta}{r^2} = \vec{e}_r\,\frac{\omega^4\mu_0\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}}{32\pi^2}\,|\underline{p}_1|^2\,\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}} \quad (30)$$

$$f = \frac{|\overline{\vec{S}_1(t)}|}{|\overline{\vec{S}_0(t)}|} = \frac{|\underline{p}_1|^2}{|\underline{p}|^2}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \quad ; \quad \eta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \qquad (31)$$

$$\Rightarrow f = \eta\,\frac{|\underline{p}_1|^2}{|\underline{p}|^2} \underset{(28)}{=} \eta\,\frac{4k_0^2}{(k_0+k_1)^2} = \frac{4\eta}{\left(1+\frac{k_1}{k_0}\right)^2} \qquad (32)$$

$$\frac{k_1}{k_0} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} = \eta$$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{4\eta}{(1+\eta)^2}} \quad ; \text{ wegen } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0 \text{ gilt } \eta \geq 1 \qquad (33)$$

Spezialfall: $\varepsilon_1 = 9\varepsilon_0 \Rightarrow \eta = 3 \Rightarrow \left[f = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 75\%\right]$ (34)

Es dringt nur 75% der Leistung in den Raum 1 ein, die der Dipol im freien Raum abstrahlen würde.

Aufgabe 3

a) Helmholtz-Gleichung: $\underline{\Delta \underline{f}(x,y,z)\vec{e}_z + k^2 \underline{f}(x,y,z)\vec{e}_z = 0}$

b) Separationsansatz: $\underline{f}(x,y,z) = u(x)\cdot v(y)\; e^{-j\beta z}$

$$\frac{\Delta \underline{f}(x,y,z)}{\underline{f}(x,y,z)} = \frac{1}{u(x)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x)\right) + \frac{1}{v(y)}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y)\right) - \beta^2 = -k^2$$

$$= -k_x^2 - k_y^2 - k_z^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x) + k_x^2 u(x) = 0 \;;\; \frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y) + k_y^2 v(y) = 0;$$

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \Rightarrow \beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_x^2 - k_y^2}$$

$$\underline{\Rightarrow u(x) = A_1\cos(k_x x) + A_2\sin(k_x x)\;;\; v(y) = A_3\cos(k_y y) + A_4\sin(k_y y)}$$

c) Auf G_1 bis G_4 gilt: $\vec{E}\times\vec{n} = 0$, also:

$$E_x\big|_{y=0} = 0\;;\; E_x\big|_{y=b} = 0\;;\; E_y\big|_{x=0} = 0;\; E_y\big|_{x=a} = 0$$

sowie $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$, also:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0 \Rightarrow A_4 = 0\;;\; \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{y=b} = 0 \Rightarrow k_y = \frac{l\pi}{b};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0 \Rightarrow A_2 = 0\;;\; \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0 \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a};$$

$$n, l \in [0;1;2;3;\ldots] = \mathbb{N}_0$$

$$\underline{\underline{f}(x,y,z) = A'_{n,l}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\left[\omega^2\varepsilon\mu - \frac{n\pi}{a} - \frac{l\pi}{b}\right]^{\frac{1}{2}} z\right)}$$

d) $\vec{\underline{E}} = -\nabla \times \underline{f}\,\vec{e_z} = -\frac{\partial \underline{f}}{\partial y} \cdot \vec{e_x} + \frac{\partial \underline{f}}{\partial x}\,\vec{e_y} + 0 \cdot \vec{e_z}$

$\Rightarrow \underline{E}_{x,nl} = -\frac{\partial \underline{f}}{\partial y} = A'_{n,l} \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \frac{l\pi}{b} \cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right) \exp\left(-j\beta_{nl} z\right)$

$= \underline{l A_{n,l} \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right) \exp\left(-j\beta_{nl} z\right)}$

für $A_{n,l} = A'_{n,l}\frac{\pi}{b}$, analog für $\underline{E}_{y,nl} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial x}$

e) Auf G_5 gilt: $\vec{E} \times \vec{n} = 0$, also $E_{tan} = 0$, d.h.

$\vec{E} \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underline{E_x - E_y = 0}$

f) Auf G_5 gilt: $\underline{E}_{x,nl} = \underline{E}_{y,nl}$ für $y = b - x$

$\Rightarrow l \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}(b-x)\right) = -n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \cos\left(\frac{l\pi}{b}(b-x)\right)$

$\Rightarrow l \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \underbrace{\sin\left(l\pi - \frac{l\pi}{b}x\right)}_{(-1)^l \cdot \left(-\sin\left(\frac{l\pi}{b}x\right)\right)} = -n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \underbrace{\cos\left(l\pi - \frac{l\pi}{b}x\right)}_{(-1)^l \cdot \left(\cos\left(\frac{l\pi}{b}x\right)\right)}$

$\Rightarrow l \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}x\right) = n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \cos\left(\frac{l\pi}{b}x\right)$

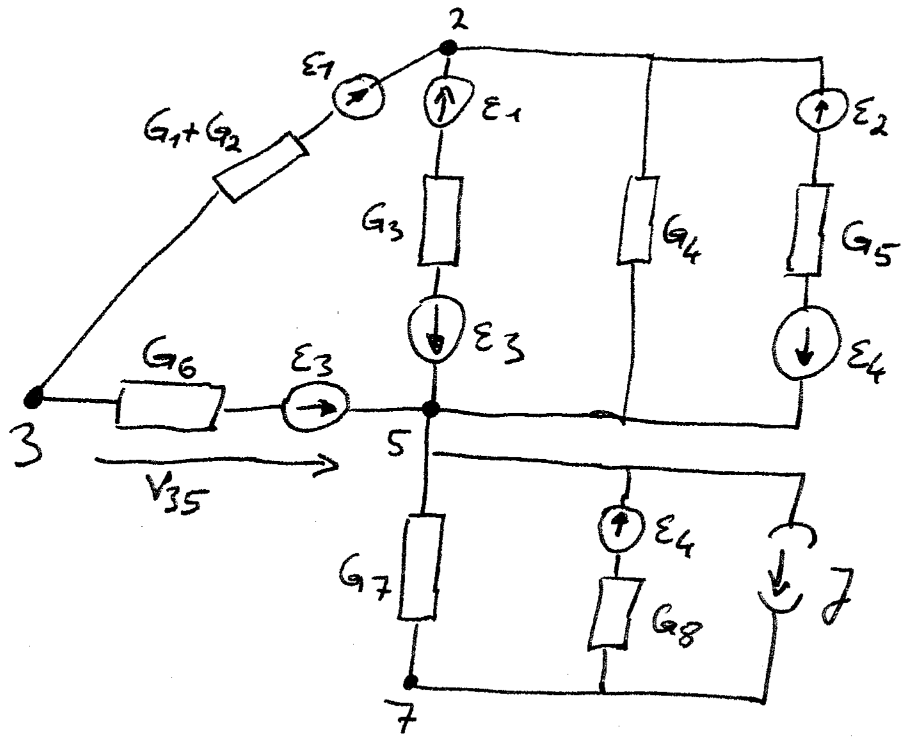
Dies ist erfüllt für $l = n$.

$\underline{E}_{x,nn} = n A_{nn} \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp\left(-j\beta_{nn} z\right)$

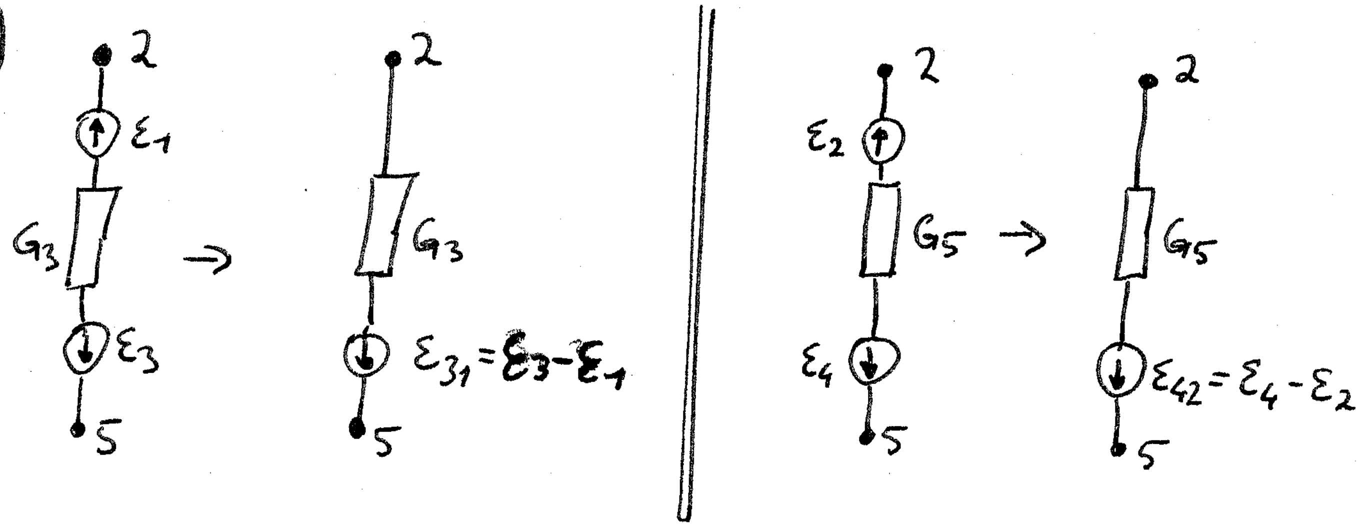
$\underline{E}_{y,nn} = -n A_{nn} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp\left(-j\beta_{nn} z\right)$

$\beta_{nn} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - 2\frac{n\pi}{b}}$

a)

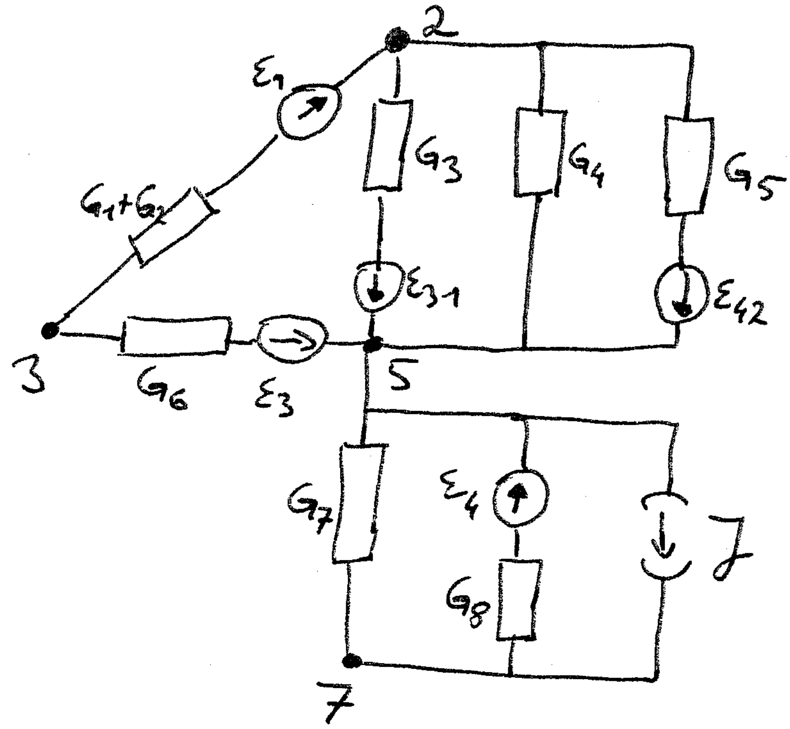


b)

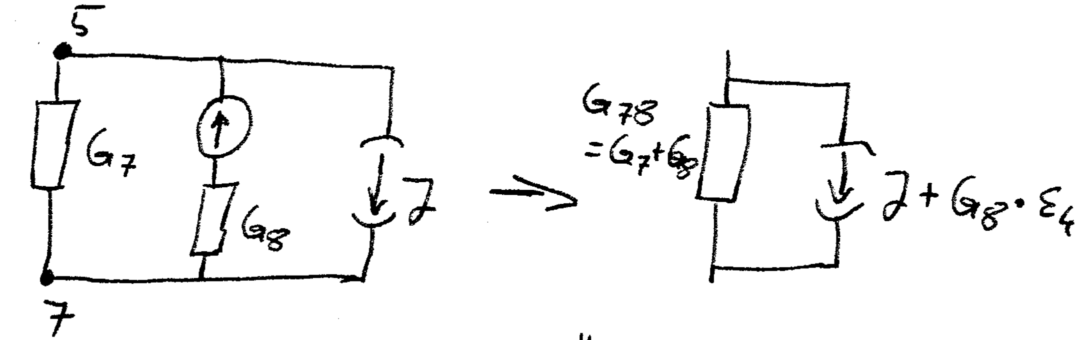


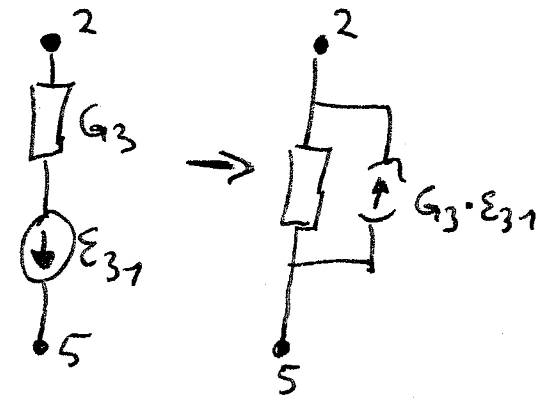
$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$$

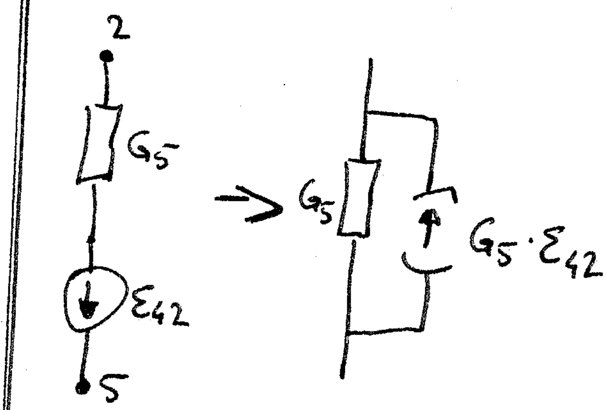
$$\varepsilon_{42} = \varepsilon_4 - \varepsilon_2$$

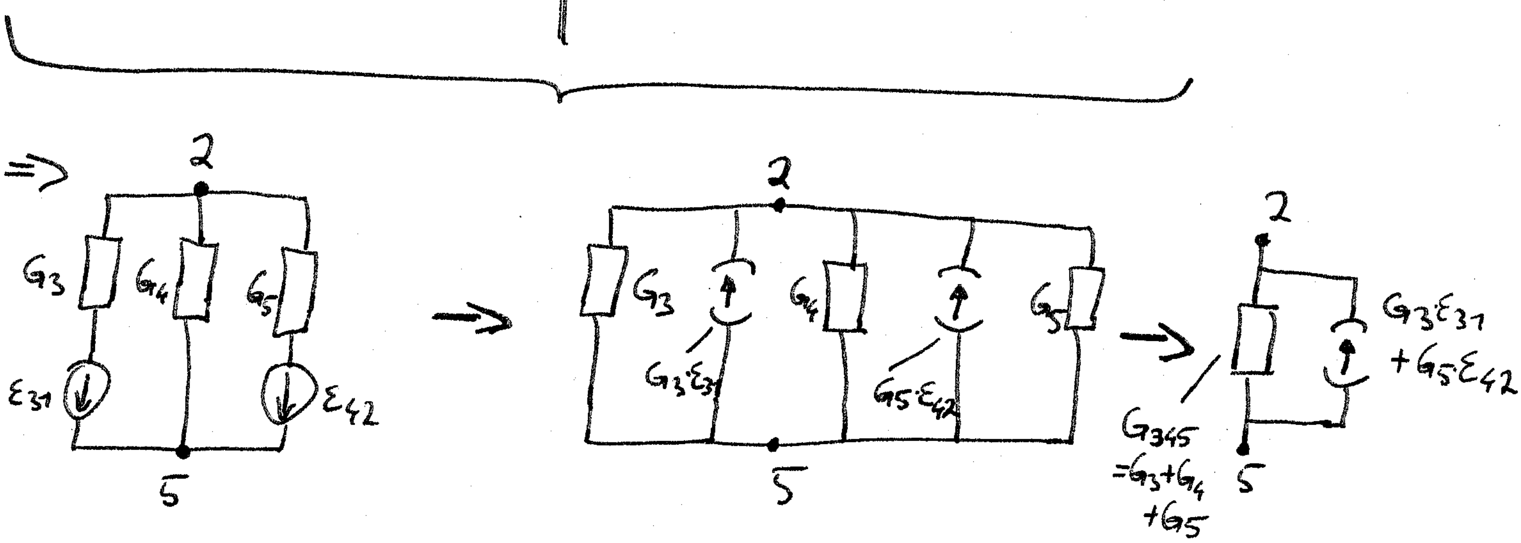


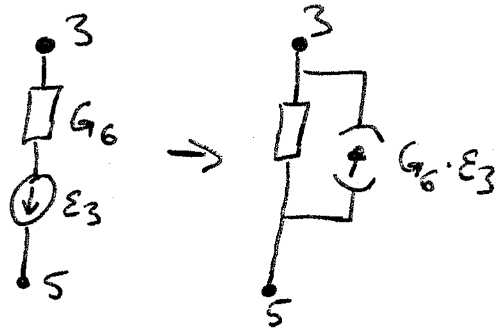
Fortsetzung Aufgabe 4:)

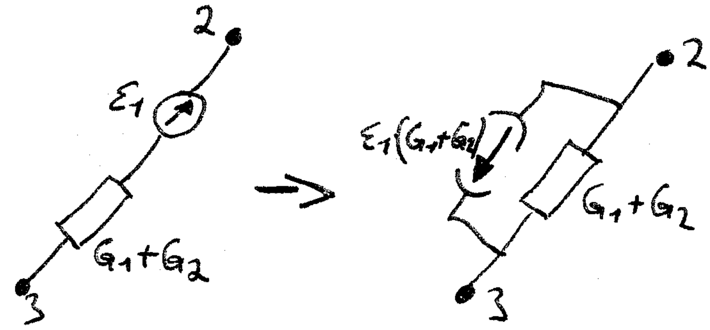


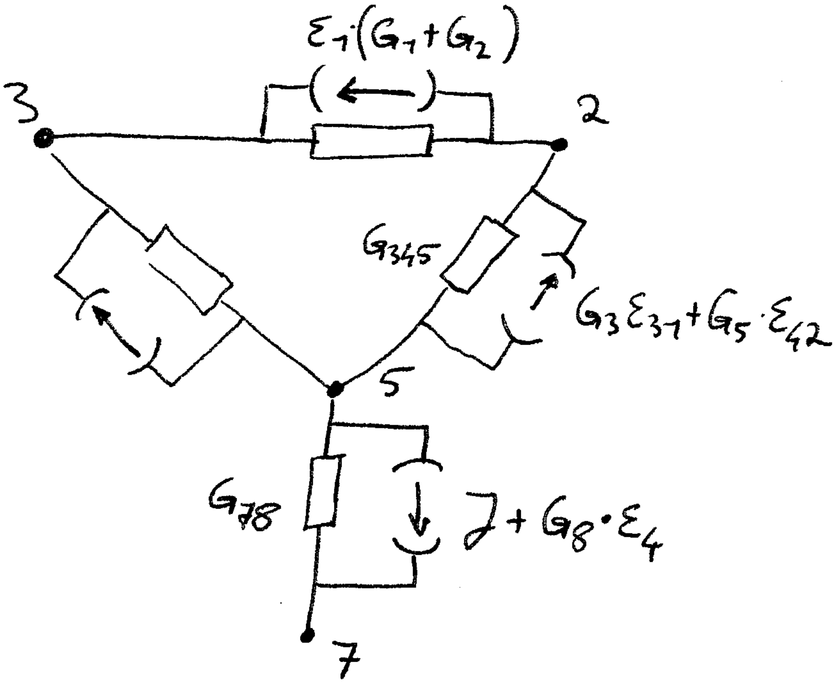


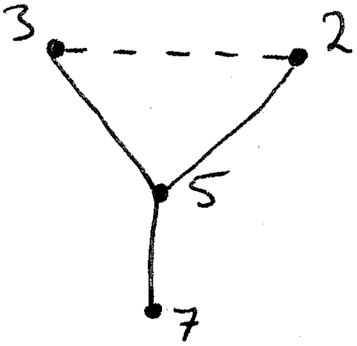












c) Vollständig: nein

Zweige $z=4$ Knoten $k=4$

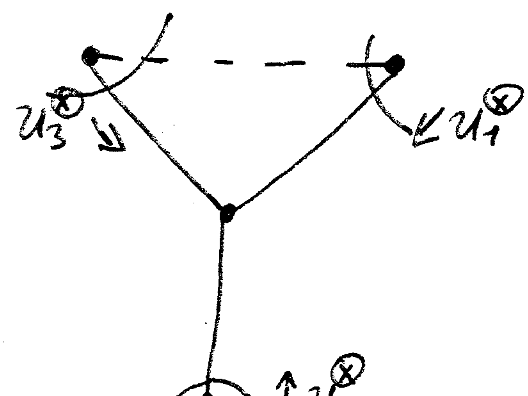
Anzahl der linear unabhängigen Schnittmengengleichungen

Rang des Graphen: $p=k-s=4-1=3$

Anzahl der linear unabhängigen Maschengleichungen:

erste Bettische Zahl: $m=z-p=\cancel{z}-k+s=4-4+1=1$

d)



$$\vec{\overset{\otimes}{J}} = \begin{pmatrix} \overset{\otimes}{J}_1 \\ \overset{\otimes}{J}_2 \\ \overset{\otimes}{J}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_3 \mathcal{E}_{31} + G_5 \mathcal{E}_{42} - \mathcal{E}_1 (G_1 + G_2) \\ J + G_8 \cdot \mathcal{E}_4 \\ G_6 \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 (G_1 + G_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_3(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1) + G_5(\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_2) - \mathcal{E}_1(G_1 + G_2) \\ J + G_8 \cdot \mathcal{E}_4 \\ G_6 \cdot \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 (G_1 + G_2) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\otimes}{Y} = \begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 & 0 & -G_1 - G_2 \\ 0 & G_7 + G_8 & 0 \\ -G_1 - G_2 & 0 & G_1 + G_2 + G_6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\overset{\otimes}{U}} = \begin{pmatrix} \overset{\otimes}{U}_1 \\ \overset{\otimes}{U}_2 \\ \overset{\otimes}{U}_3 \end{pmatrix}$$

e) $U_{35} = 0 = \overset{\otimes}{U}_3$

$\mathcal{E}_1 = 0 \wedge \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 \wedge G_3 = G_5$

$$\overset{\otimes}{J} = \begin{pmatrix} G_5(\mathcal{E}_2 - 0) + G_5(\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_2) - 0 \\ J + G_8 \cdot \mathcal{E}_4 \\ G_6 \cdot \mathcal{E}_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_5 \cdot \mathcal{E}_4 \\ J + G_8 \cdot \mathcal{E}_4 \\ G_6 \cdot \mathcal{E}_3 \end{pmatrix}$$

$U_{35} = \overset{\otimes}{U}_3 = 0$ Kramarsche Regel:

$$\det \begin{pmatrix} G_1 + G_2 + 2 \cdot G_3 + G_4 & 0 & G_3 \mathcal{E}_4 \\ 0 & G_7 + G_8 & J + G_8 \mathcal{E}_4 \\ -G_1 - G_2 & 0 & G_6 \cdot \mathcal{E}_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(G_1 + G_2 + 2G_3 + G_4)(G_7 + G_8) G_6 \cdot \mathcal{E}_3 - G_3 \cdot \mathcal{E}_4 (G_7 + G_8) \cdot (-(G_1 + G_2)) = 0$$

$$\mathcal{E}_3 = -\mathcal{E}_4 \frac{(G_1 + G_2) G_3}{(G_1 + G_2 + 2G_3 + G_4) G_6}$$

Aufgabe 5

a) Symmetrie: $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} = \underline{S}_{33}$

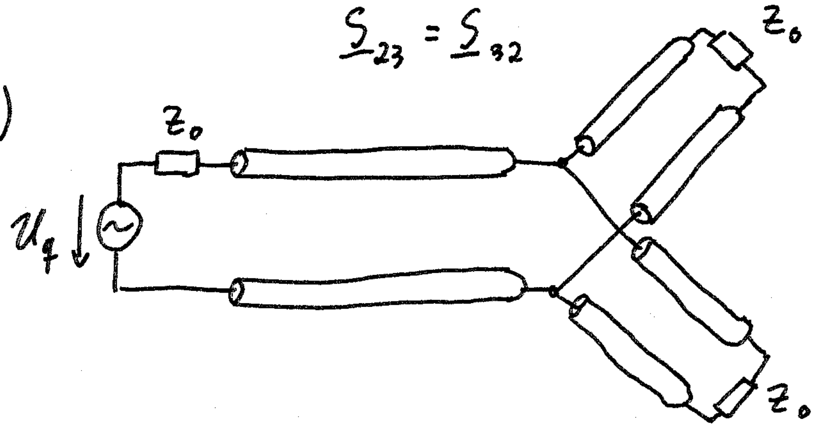
$\underline{S}_{12} = \underline{S}_{13} = \underline{S}_{23}$

Reziprokität: $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$

$\underline{S}_{13} = \underline{S}_{31}$

$\underline{S}_{23} = \underline{S}_{32}$

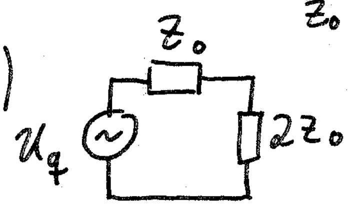
b)



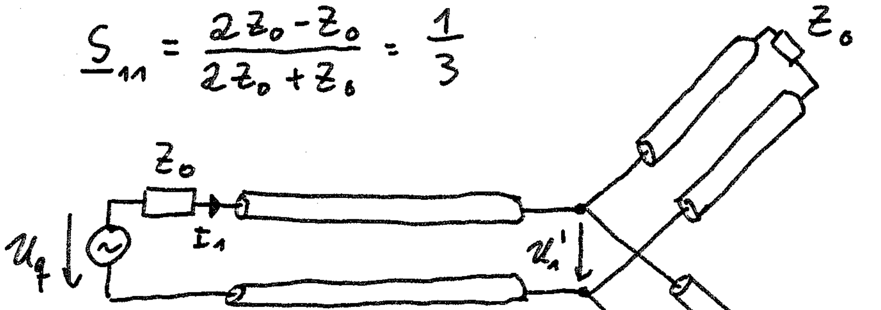
c) Transformation über $\frac{\lambda}{4}$ - Leitung:

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{jZ_0 I_2}{\frac{j}{Z_0} U_2} = \frac{Z_0^2}{Z_2} \Rightarrow Z_1 Z_2 = Z_0^2$$

d)



$$\underline{S}_{11} = \frac{2Z_0 - Z_0}{2Z_0 + Z_0} = \frac{1}{3}$$



$$\underline{S}_{21} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{U_1 + Z_0 I_1} = -\frac{2Z_0 I_2}{U_q}$$

$$I_2 = -I_2' = -\frac{U_1'}{jZ_0}$$

$$U_1' = -\frac{jZ_0}{I_1}$$

$$\Rightarrow I_2 = I_1$$

$$U_q = 3 Z_0 I_1$$

$$\Rightarrow \underline{S}_{21} = -\frac{2}{3}$$

e) $$S \cdot S^{*T} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -\frac{2}{3} \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f) Am Streuparameter $\underline{S}_{31} = \underline{S}_{21} = -\frac{2}{3}$ erkennt man, daß zwischen b_3 und a_1 ein Phasenunterschied von 180° besteht.
Anschauliche Deutung: Die Welle durchläuft zwischen Tor 1 und Tor 3 eine $\frac{\lambda}{2}$ lange Leitung.

g) Resultierende Streumatrix:

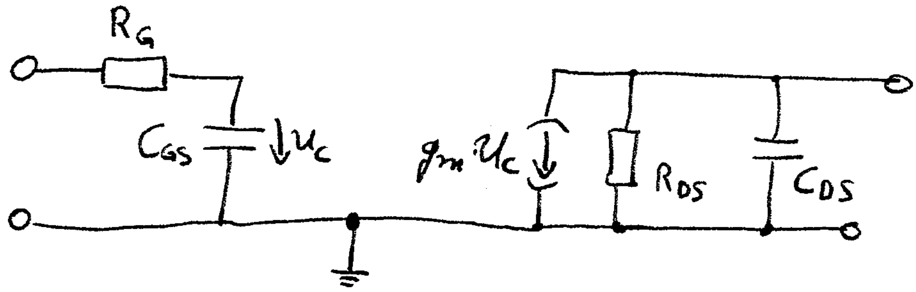
$$S' = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3\,a & -2/3 \\ -2/3\,a & 1/3\,a^{-2} & -2/3\,a \\ -2/3 & -2/3\,a & 1/3 \end{pmatrix}$$

h) $$(1 - |S'_{11}|^2) \cdot |\underline{S}'_{21}|^2 = \frac{4}{9}$$

i) Leerlauf im Kreuzungspunkt, also Kurzschluß an Ebene 3

Aufgabe 6:

a)



Da der Transistor unilateral ist, hängt $\underline{S}_{11}$ nur von R_G und C_{GS} und $\underline{S}_{22}$ nur von R_{DS} und C_{DS} ab.

Aus Smith Chart ablesen:

Zu $\underline{S}_{11}$ gehörige normierte Impedanz: $\underline{z}_{S11} = 0{,}43 - j0{,}40$ $(R_G + C_{GS})$

Zu $\underline{S}_{22}$ " " Admittanz: $\underline{y}_{S22} = 0{,}20 + j0{,}40$ $(R_{DS} \parallel C_{DS})$

Also ist

$$R_G = 0{,}43 \cdot 50\,\Omega = 21{,}5\,\Omega$$

$$\omega C_{GS} = \frac{1}{0{,}4 \cdot 50\,\Omega} = 0{,}05\,S$$

$$R_{DS} = \frac{50\,\Omega}{0{,}2} = 250\,\Omega$$

$$\omega C_{DS} = \frac{0{,}4}{50\,\Omega} = 0{,}008\,S$$

b) Für Leistungsanpassung müßte $\underline{\Gamma}_Q = \underline{S}_{11}^*$ gelten.
Die bestmögliche Annäherung ist daher derjenige Punkt $\underline{\Gamma}_Q$ auf dem Kreis $F = 3{,}4\,dB$, für den $\underline{\Gamma}_Q - \underline{S}_{11}^*$ minimal wird:

$$\underline{\Gamma}_Q = 0{,}4 \angle 152°$$

c) Die gezeigte Topologie des Anpassungsnetzwerks ist die einzige mögliche, da bei Anschluß der Stichleitung auf der Seite des Transistors die Serienleitung keinen Einfluß hätte (sie würde die Phase von 0 ändern), und mit einer Stichleitung alleine die benötigte Transformation nicht durchgeführt werden kann.

Transformation im Smith Chart: Mit Admittanz $\underline{y}_P$ vom Ursprung aus, dann mit Serienleitung $\underline{\Gamma}_Q$.

Ablesen: $\underline{y}_P = j\,0{,}87$, $l_S = 0{,}539\lambda - 0{,}407\lambda = 0{,}132\lambda$

Also ist $\underline{y}_P$ kapazitiv, der Abschluß der Stichleitung offen und die Länge $l_P = 0{,}363\lambda - 0{,}25\lambda = 0{,}113\lambda$

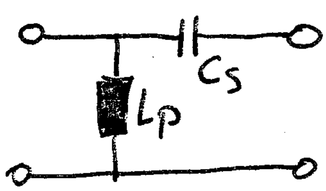
Alternativer Wert von $\underline{\Gamma}_Q$:

Transformation im Smith Chart: Mit Admittanz $\underline{y}_P$ vom Ursprung aus, dann mit Serienleitung bis $\underline{\Gamma}_Q$.

Ablesen: $\underline{y}_P = j\,1{,}95$, $l_S = 0{,}514\lambda - 0{,}437\lambda = 0{,}077\lambda$

Also ist $\underline{y}_P$ kapazitiv, der Abschluß der Stichleitung offen und die Länge $l_P = 0{,}425\lambda - 0{,}25\lambda = 0{,}175\lambda$

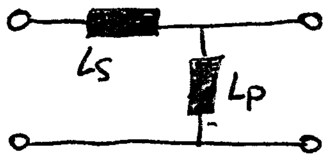
d) Variante 1:



$\underline{z}_{Cs} = -j\,2{,}01$

$\underline{y}_{Lp} = -j\,0{,}70$

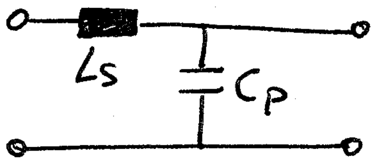
Variante 2:



$\underline{y}_{Lp} = -j0{,}61$

$\underline{Z}_{Ls} = j \cdot 1{,}26$

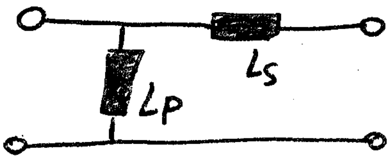
Variante 3:



$\underline{y}_{Cp} = j\,0{,}36$

$\underline{Z}_{Ls} = j\,2{,}76$

Variante 4:



$\underline{Z}_{Ls} = j\,2{,}61$

$\underline{y}_{Lp} = -j\,0{,}10$

e) Der Verstärker ist uneingeschränkt stabil. Hinreichende Bedingung für uneingeschränkte Stabilität des Transistors ist

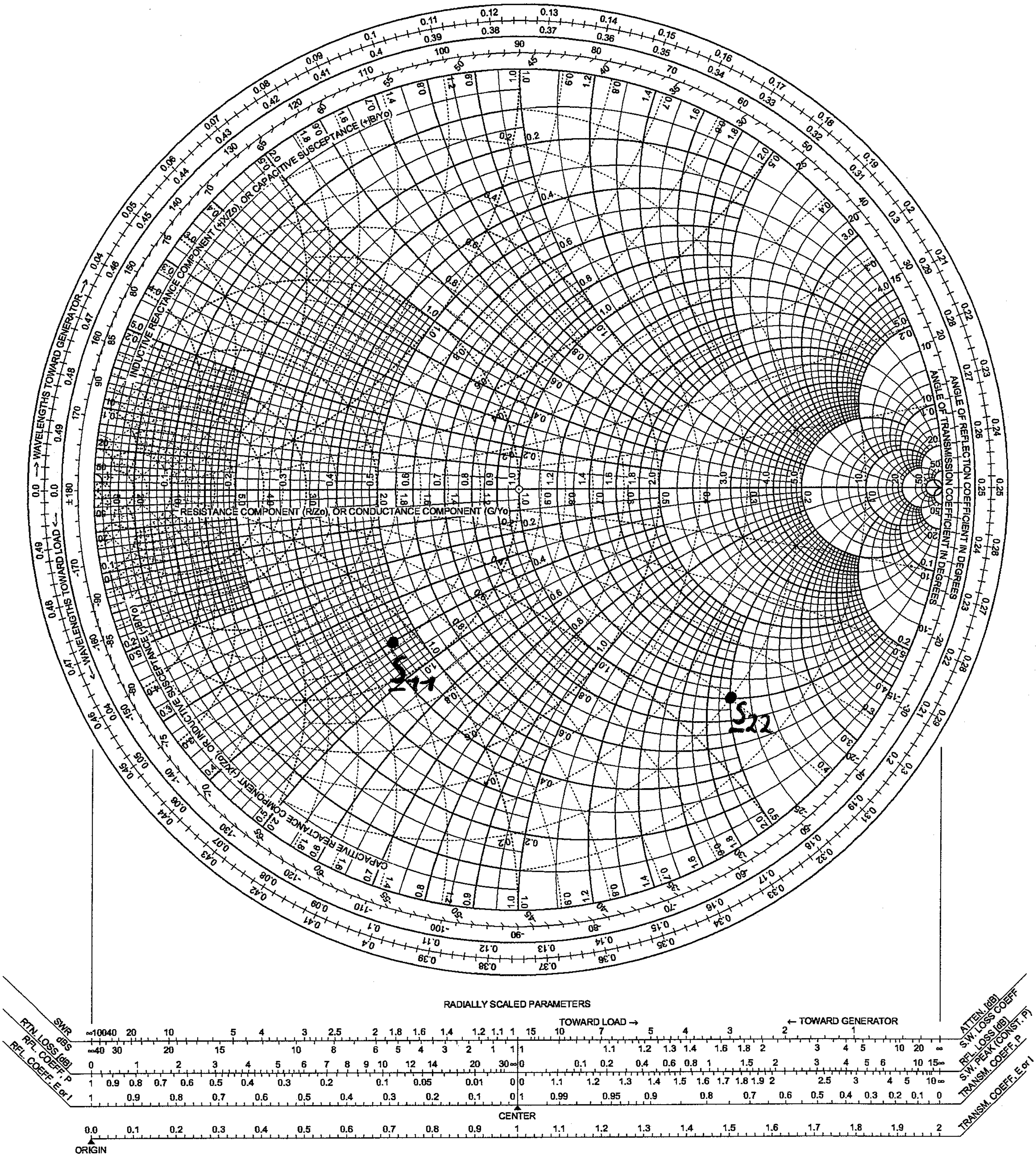
$$|\underline{\Gamma}_i| < 1 \;\wedge\; |\underline{\Gamma}_a| < 1$$

Hier: $|\underline{\Gamma}_i| = |\underline{S}_{11}| < 1$

$|\underline{\Gamma}_a| = |\underline{S}_{22}| < 1$ sind erfüllt laut Aufgabenstellung.

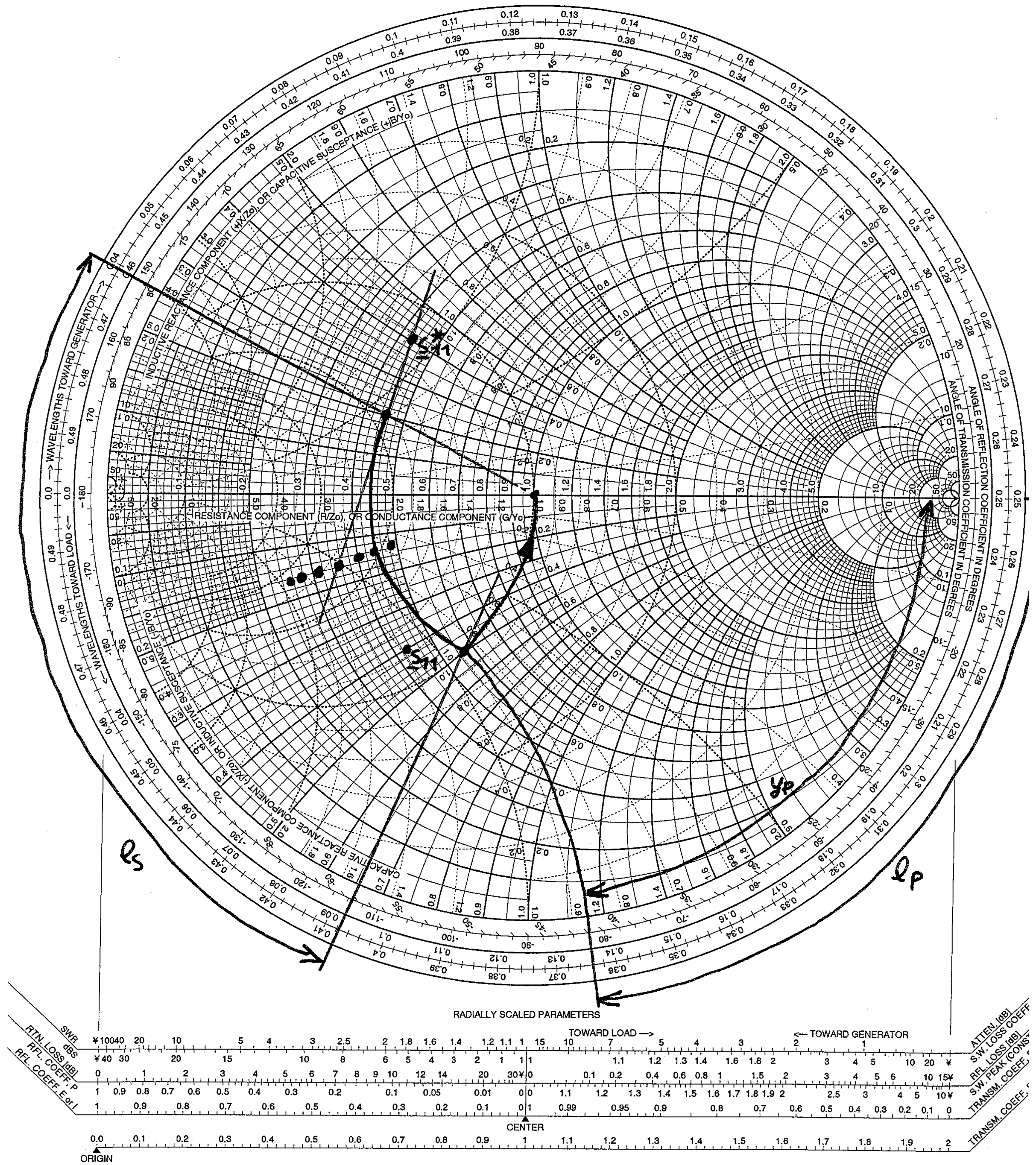
Die Anpassungsnetzwerke sind rein passiv, daher können die Eingangs- und Ausgangsreflexionsfaktoren des kompletten Verstärkers nicht größer als $|\underline{\Gamma}_i|$ und $|\underline{\Gamma}_a|$ des Transistors sein.

The Complete Smith Chart (ZY)



zu Aufgabe 6c):
(Lösung aus b))

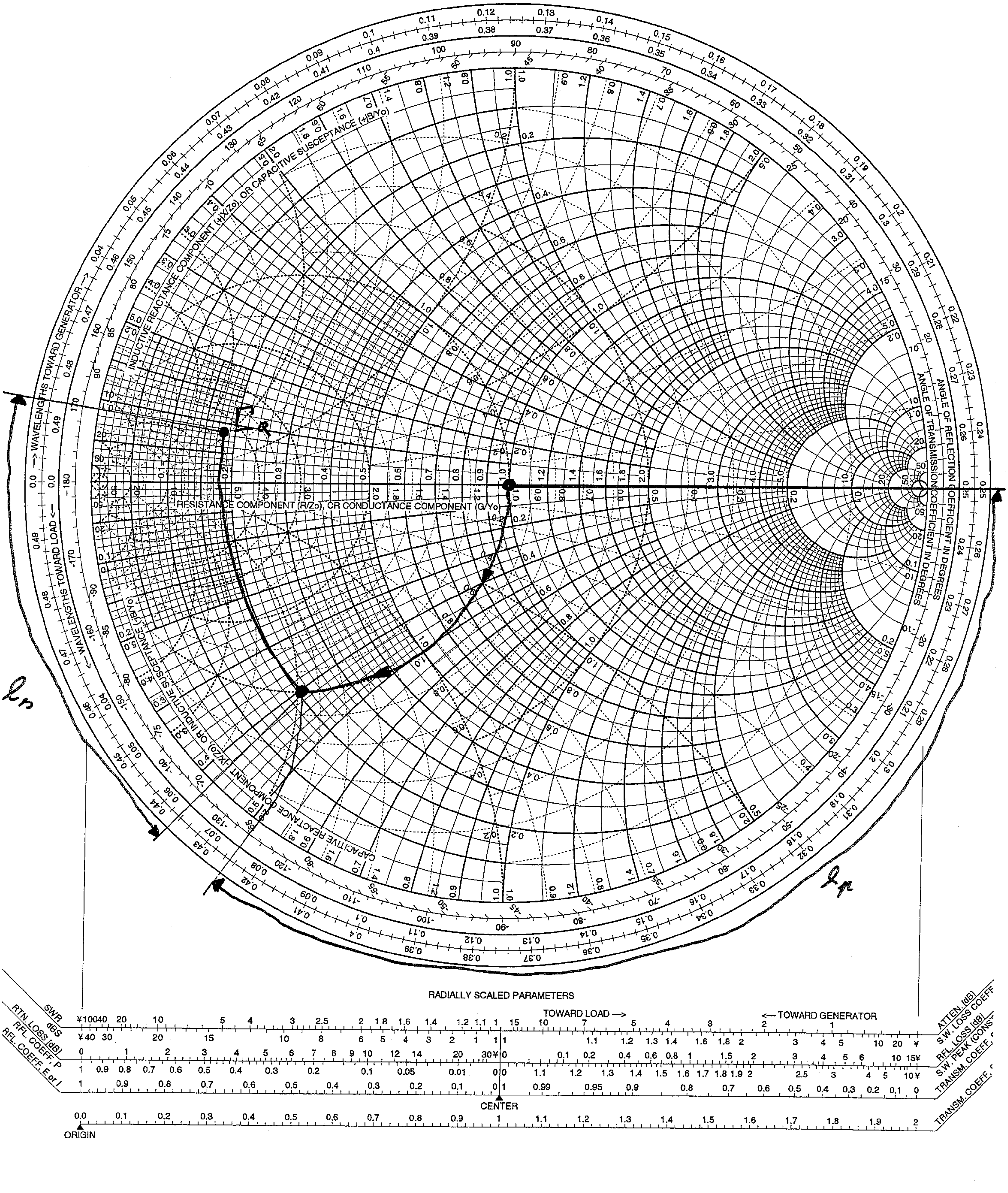
The Complete Smith Chart



zu Aufgabe 6c):
(Alternativlösung "ohne b)")

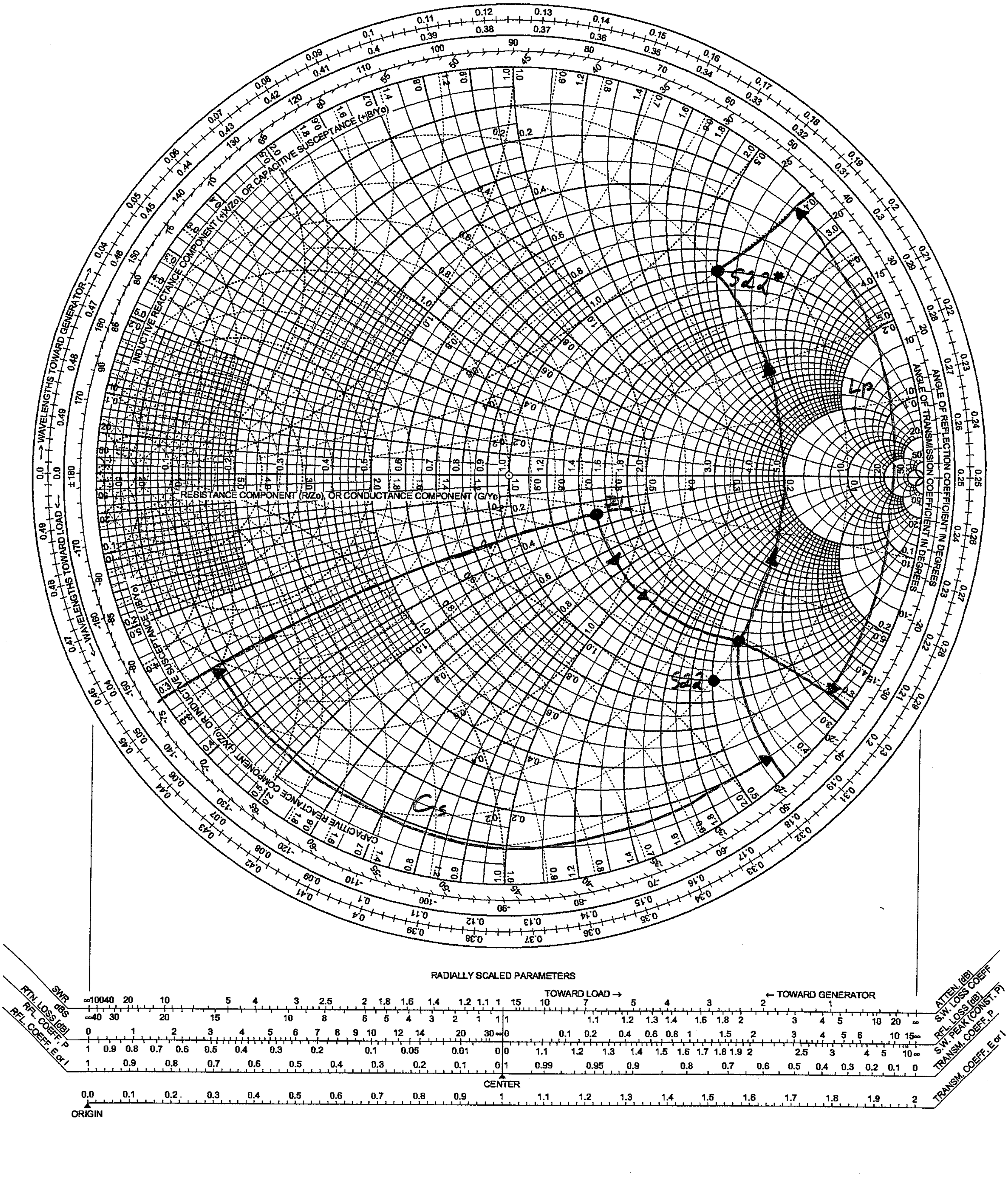
EMT HoS

The Complete Smith Chart



HO5
zu Aufgabe 6d)
Variante 1:

The Complete Smith Chart (ZY)

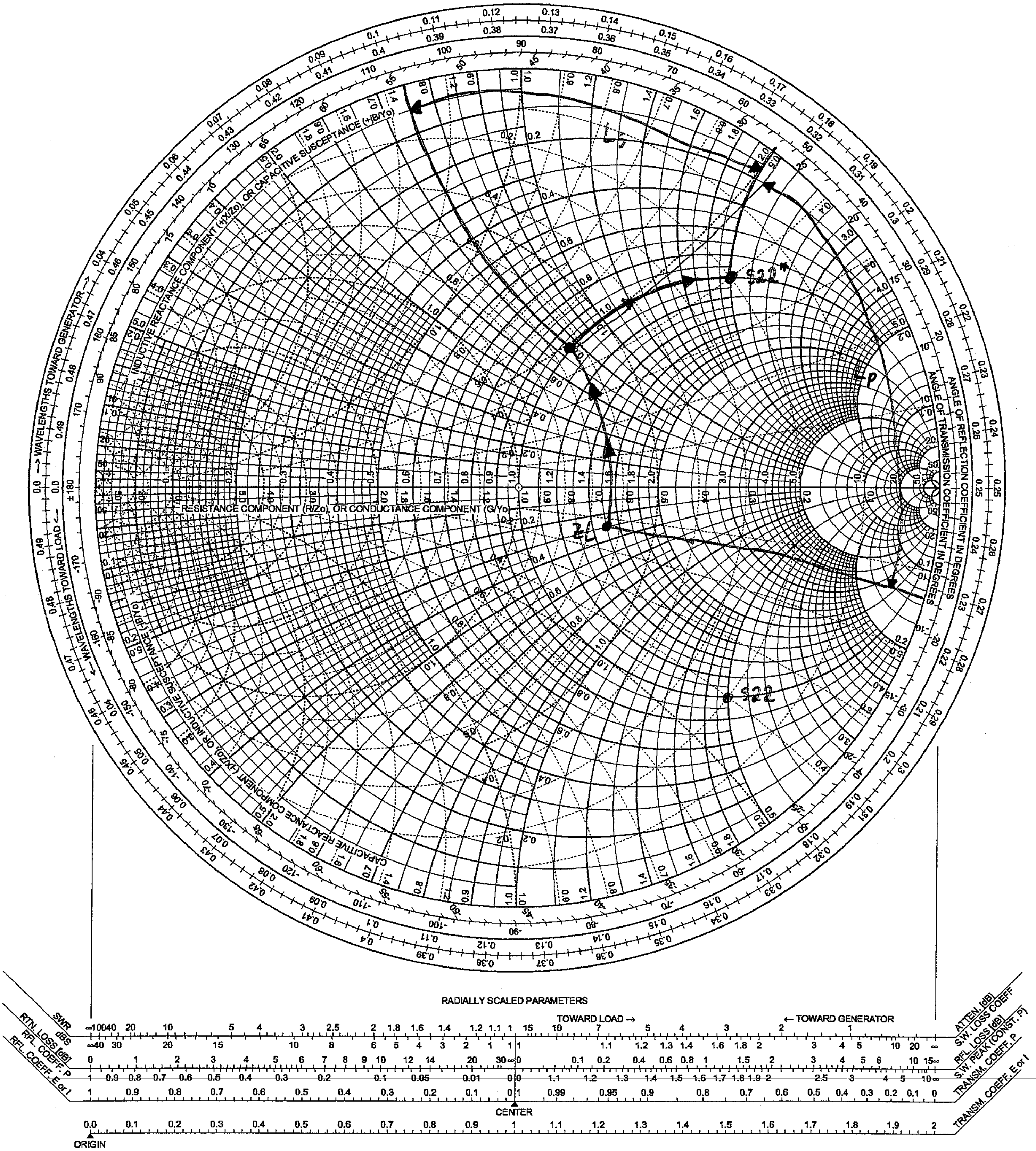


H05

zu Aufgabe 6 d)

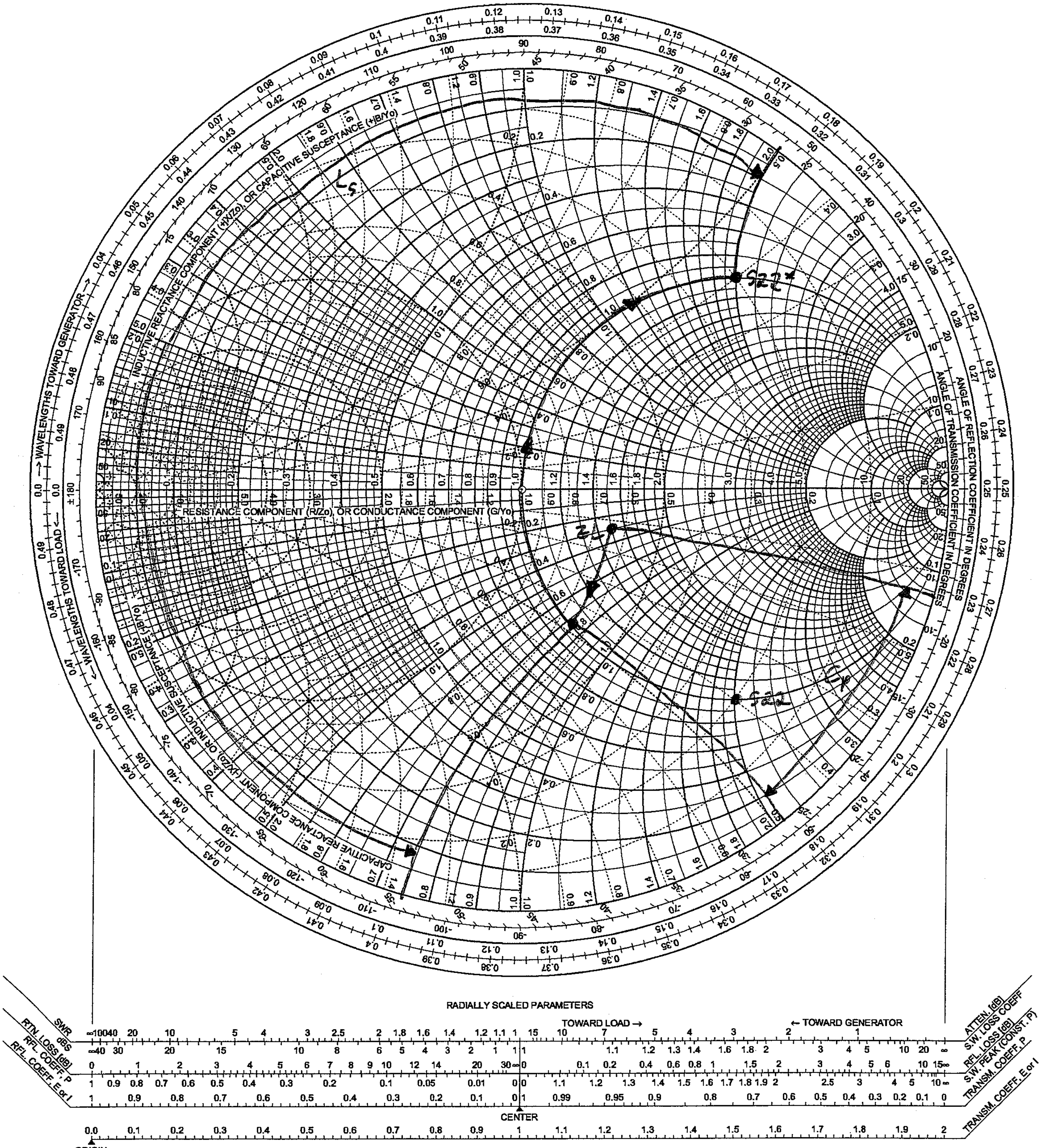
Variante 2:

The Complete Smith Chart (ZY)



H 05
zu Aufgabe 6d)
Variante 3:

The Complete Smith Chart (ZY)



H05
zu Aufgabe 6d)
Variante 4:

The Complete Smith Chart (ZY)