LÖSUNG ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1
HERBST 2001

Dies ist keine offizielle Musterlösung vom ITHE.

Aufgabe 1

a). Da es sich um eine TEM-Welle handelt, können wir $\underline{\vec{H}}_{1e}$ mit dem Ansatz $\underline{\vec{H}} = \frac{1}{Z}\vec{n} \times \underline{\vec{E}}$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}}_{1e} &= \frac{1}{Z_1}\vec{n}_{1e} \times \underline{\vec{E}}_{1e} \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\,\underline{E}_{1e0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{1e}\vec{r}}\left(\cos(\varphi_1)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_1)\,\vec{e}_z\right)
\end{aligned}$$

Für $\underline{\vec{E}}_{1r}$ wählen wir den Ansatz

$$\underline{\vec{E}}_{1r} = \underline{E}_{1r0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{1r}\vec{r}}\,\vec{e}_x$$

Warum nicht $e^{+j \vec{k}_{1r}\vec{r}}$

und erhalten daraus die magnetische Feldstärke

$$\underline{\vec{H}}_{1r} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\,\underline{E}_{1r0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{1r}\vec{r}}\left(-\cos(\varphi_1)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_1)\,\vec{e}_z\right)$$

b). Wir erhalten analog zu Punkt a):

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}}_{2e} &= \underline{E}_{2e0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{2e}\vec{r}}\,\vec{e}_x \\
\underline{\vec{E}}_{2r} &= \underline{E}_{2r0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{2r}\vec{r}}\,\vec{e}_x \\
\underline{\vec{H}}_{2e} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\,\underline{E}_{2e0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{2e}\vec{r}}\left(\cos(\varphi_2)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_2)\,\vec{e}_z\right) \\
\underline{\vec{H}}_{2r} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\,\underline{E}_{2r0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{2r}\vec{r}}\left(-\cos(\varphi_2)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_2)\,\vec{e}_z\right)
\end{aligned}$$

c).

GF1:	$\mathrm{Rot}\,\underline{\vec{E}} = \vec{0}$	$\Rightarrow$	$\underline{E}_x$ stetig	$\mathrm{Rot}\,\underline{\vec{H}} = \vec{0}$	$\Rightarrow$	$\underline{H}_y$ stetig
GF2:	$\mathrm{Rot}\,\underline{\vec{E}} = \vec{0}$	$\Rightarrow$	$\underline{E}_x$ stetig	$\mathrm{Rot}\,\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_F$		

d). Da in einem idealen Leiter $\underline{\vec{E}} \equiv \vec{0}$ ist, und $\underline{\vec{E}}_{tang}$ an der Grenzfläche stetig ist, folgt mit $\vec{r} = a\,\vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}
& \underline{E}_{2ex}\big|_{z=a} + \underline{E}_{2rx}\big|_{z=a} = 0 \\
\Rightarrow\quad & \underline{E}_{2e0}\,\mathrm{e}^{-j\,k_2\,a\cos(\varphi_2)} + \underline{E}_{2r0}\,\mathrm{e}^{j\,k_2\,a\cos(\varphi_2)} = 0 \\
\Rightarrow\quad & \underline{E}_{2e0} = -\underline{E}_{2r0}\,\mathrm{e}^{2j\,k_2\,a\cos(\varphi_2)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a). Die Helmholtzgleichung für $\underline{g}(x,y,z)$ lautet:

$$\Delta \underline{g}(x,y,z) + k^2 \underline{g}(x,y,z) = 0$$

mit $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Daraus folgt mit dem gegebenen Ansatz:

$$\underline{u}''(x)\underline{v}(y)\underline{w}(z) + \underline{u}(x)\underline{v}''(y)\underline{w}(z) + \underline{u}(x)\underline{v}(y)\underline{w}''(z) + k^2\underline{u}(x)\underline{v}(y)\underline{w}(z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{u}''(x)}{\underline{u}(x)} + \frac{\underline{v}''(y)}{\underline{v}(y)} + \frac{\underline{w}''(z)}{\underline{w}(z)} + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{u}''(x)}{\underline{u}(x)} = -k_x^2 \qquad \frac{\underline{v}''(y)}{\underline{v}(y)} = -k_y^2 \qquad \frac{\underline{w}''(z)}{\underline{w}(z)} = -k_z^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u}''(x) + k_x^2\,\underline{u}(x) = 0 \qquad \underline{v}''(y) + k_y^2\,\underline{v}(y) = 0 \qquad \underline{w}''(z) + k_z^2\,\underline{w}(z) = 0$$

b).

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

c). Für $\underline{u}(x)$ und $\underline{v}(y)$ sind trigonometrische Ansätze sinnvoll:

$$\underline{u}(x) = \underline{A}\sin(k_x x) + \underline{B}\cos(k_x x)$$
$$\underline{v}(y) = \underline{C}\sin(k_y y) + \underline{D}\cos(k_y y)$$

Für $\underline{w}(z)$ bietet sich hingegen ein Ansatz über e-Funktionen an:

$$\underline{w}(z) = \underline{E}\,\mathrm{e}^{-jk_z z} + \underline{F}\,\mathrm{e}^{jk_z z}$$

Dabei sind $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$ und $\underline{F}$ beliebige komplexe Konstanten.
(Diese Lösungsansätze setzen voraus, dass k_x, k_y und k_z alle $\neq 0$ sind, was im vorliegenden Fall erfüllt ist. Bei $k_x = 0$ beispielsweise wäre $\underline{u}(x) = \underline{A}x + \underline{B}$, was wegen $\underline{g} \sim \underline{E}_z$ ein in x−Richtung linear ansteigendes Feld $\underline{E}_z$ zur Folge hätte.)
Als allgemeinen Lösungsansatz erhalten wir also:

$$\underline{g}(x,y,z) = \left(\underline{A}\sin(k_x x) + \underline{B}\cos(k_x x)\right)\left(\underline{C}\sin(k_y y) + \underline{D}\cos(k_y y)\right)\left(\underline{E}\,\mathrm{e}^{-jk_z z} + \underline{F}\,\mathrm{e}^{jk_z z}\right)$$

d). Da auf idealen Leitern das $\vec{\underline{E}}$−Feld senkrecht steht, muss am Rand des Hohlleiters $\underline{E}_z = 0$ und damit $\underline{g} = 0$ sein.

$$\begin{aligned}
\underline{u}(x)\big|_{x=0} &= 0 & \Rightarrow \quad & \underline{B} = 0 \\
\underline{u}(x)\big|_{x=a} &= 0 & \Rightarrow \quad & k_x a = m\pi, \quad m \in \mathbb{N} \\
\underline{v}(y)\big|_{y=0} &= 0 & \Rightarrow \quad & \underline{D} = 0 \\
\underline{v}(y)\big|_{y=b} &= 0 & \Rightarrow \quad & k_y b = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Da sich die Welle in $+z$−Richtung ausbreitet, muss auch $\underline{F} = 0$ sein.
Der Wert der dritten Separationskonstanten ergibt sich aus den anderen beiden über die Gleichung aus Punkt b):

$$\beta_{mn} := k_z = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Wenn wir noch die Konstanten $\underline{A}$, $\underline{C}$ und $\underline{E}$ zusammenfassen, erhalten wir als Elementarlösung

$$\underline{g}_{mn}(x,y,z) = \underline{G}_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-j\beta_{mn}z}$$

und die allgemeine Lösung durch Superposition:

$$\underline{g}(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\underline{g}_{mn}(x,y,z)$$

e). Der TM-Wellentyp niedrigster Ordnung ist die E_{11}–Mode. Die Separationskonstanten lauten also

$$k_x = \frac{\pi}{a}$$
$$k_y = \frac{\pi}{b}$$

Die Ausbreitungskonstante ist folglich

$$k_z = \beta_{11} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

Die Welle ist nur ausbreitungsfähig, wenn β_{11} reell ist. Bei der Grenzfrequenz ist die Wurzel also gerade gleich 0:

$$\omega_c^2\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_c\sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad f_c = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Aufgabe 3

a).

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} &= -\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \underline{H}_\varphi)\vec{e}_z \\
&= -\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho}\underline{H}_\varphi + \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \rho}\right)\vec{e}_z \\
&= j\omega\varepsilon\, f(\rho)\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_\rho + \left(\frac{\omega\varepsilon}{\rho k} f(\rho)\,\mathrm{e}^{-jkz} + \frac{\omega\varepsilon}{k} f'(\rho)\,\mathrm{e}^{-jkz}\right)\vec{e}_z \\
&= j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{E}} = f(\rho)\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho}f(\rho) + f'(\rho)\right)\frac{1}{jk}\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_z$$

Da es sich um eine TEM-Welle handelt, muss $\underline{E}_z = 0$ sein. Daraus folgt die Differenzialgleichung

$$f'(\rho) + \frac{1}{\rho}f(\rho) = 0$$

mit der Lösung

$$f(\rho) = \frac{const}{\rho}$$

Mit der gegebenen Bedingung für $f(\rho = a)$ erhalten wir schließlich die Lösung

$$f(\rho) = \frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{\rho}$$

Durch Einsetzen verifiziert man leicht die in der Aufgabenstellung gegebenen Feldstärken.
Da die magnetische Feldstärke nur eine φ–Komponente besitzt, welche nur von ρ und z abhängt, vereinfacht sich der Laplace-Operator zu

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{\vec{H}} &= \left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \underline{H}_\varphi)\right) + \frac{\partial^2 \underline{H}_\varphi}{\partial z^2}\right]\vec{e}_\varphi \\
&= \frac{\partial^2 \underline{H}_\varphi}{\partial z^2}\vec{e}_\varphi \qquad\qquad \text{da } \frac{\partial}{\partial \rho}\rho \underline{H}_\varphi = 0 \\
&= -k^2 \underline{\vec{H}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \underline{\vec{H}} + k^2 \underline{\vec{H}} = \vec{0}$$

b).

$$\begin{aligned}
\underline{u}(z) &= \int_P^{P'} \underline{\vec{E}}\, d\vec{r} = \int_a^b \underline{E}_\rho\, d\rho = U_0\,\mathrm{e}^{-jkz} \\
\underline{i}(z) &= \oint_C \underline{\vec{H}}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \underline{H}_\varphi\big|_{\rho=a} a\, d\varphi = \frac{2\pi\,\omega\varepsilon\, U_0}{k\,\ln\frac{b}{a}}\,\mathrm{e}^{-jkz}
\end{aligned}$$

c).

$$\frac{d^2\underline{u}(z)}{dz^2} = -j\omega L'\frac{d\underline{i}(z)}{dz} = -\omega^2 L'C'\underline{u}(z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\underline{u}(z)}{dz^2} + \omega^2 L'C'\underline{u}(z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u}(z) = \underline{A}\,\mathrm{e}^{-j\omega\sqrt{L'C'}z} + \underline{B}\,\mathrm{e}^{j\omega\sqrt{L'C'}z}$$

Da sich die Welle in $+z-$Richtung ausbreitet, muss $\underline{B} = 0$ sein.
Aus $\underline{u}(0) = U_0$ folgt $\underline{A} = U_0$.

$$\underline{u}(z) = U_0\, e^{-j\omega\sqrt{L'C'}z}$$

$$\underline{i}(z) = \frac{1}{-j\omega L'}\frac{d\underline{u}(z)}{dz} = \sqrt{\frac{C'}{L'}}\,U_0\, e^{-j\omega\sqrt{L'C'}z}$$

d). Aus dem Vergleich der beiden Formeln für $\underline{u}(z)$ folgt

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \stackrel{!}{=} \omega\sqrt{L'C'} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\varepsilon\mu} \stackrel{!}{=} \sqrt{L'C'}$$

Außerdem folgt aus dem Vergleich der beiden Formeln für $\underline{i}(z)$

$$\frac{2\pi\,\omega\varepsilon}{k\,\ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi}{\ln\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{C'}{L'}}$$

Multiplikation bzw. Division der letzten beiden Gleichungen liefert schließlich das Ergebnis

$$C' = \frac{2\pi\,\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}} \qquad L' = \frac{\mu\,\ln\frac{b}{a}}{2\pi}$$