Abschrift der ITHE-Musterlösung

EMF I Aufgabe 1 F 2003

a) $\vec{H} = \frac{1}{Z}(\vec{n} \times \vec{E}) \qquad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$$\vec{H}_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} -\sin y_1 \\ 0 \\ \cos y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y_1 \\ 0 \\ \sin y_1 \end{pmatrix} E_{0e} e^{-j\vec{k}_e \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2 y_1 + \sin^2 y_1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 e^{-j\vec{k}_e \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \vec{e}_y E_{0e} e^{-j\vec{k}_e \vec{r}}$$

$$\vec{H}_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} -\sin y_1 \\ 0 \\ -\cos y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos y_1 \\ 0 \\ \sin y_1 \end{pmatrix} E_{0r} e^{-j\vec{k}_r \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2 y_1 + \sin^2 y_1 \\ 0 \end{pmatrix} E_{0r} e^{-j\vec{k}_r \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \vec{e}_y E_{0r} e^{-j\vec{k}_r \vec{r}}$$

$$\vec{H}_d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0}} \begin{pmatrix} -\sin y_2 \\ 0 \\ \cos y_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y_2 \\ 0 \\ \sin y_2 \end{pmatrix} E_{0d} e^{-j\vec{k}_d \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2 y_2 + \sin^2 y_2 \\ 0 \end{pmatrix} E_{0d} e^{-j\vec{k}_d \vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0}} \vec{e}_y E_{0d} e^{-j\vec{k}_d \vec{r}}$$

b) $(\vec{E}_e + \vec{E}_r) \times \vec{e}_z = \vec{E}_d \times \vec{e}_z$

$(\vec{H}_e + \vec{H}_r) \times \vec{e}_z = \vec{H}_d \times \vec{e}_z$

c)

$$\left[\vec{H}_e + \vec{H}_r - \vec{H}_d\right] \times \vec{e}_z = 0 \quad \text{mit } \vec{H}_i = \frac{1}{Z_i}\, \vec{n}_i \times \vec{E}_i \qquad i = e, r, d$$

also $$\left[\sqrt{\varepsilon_1}\left(\vec{n}_e \times \vec{E}_e + \vec{n}_r \times \vec{E}_r\right) - \sqrt{\varepsilon_2}\left(\vec{n}_d \times \vec{E}_d\right)\right] \times \vec{e}_z = 0 \quad *$$

mit $E_i = E_{0i}\, e^{-j\vec{k}_i\vec{r}} \cdot \vec{n}_i$

* nur dann gültig $\forall$ r in der z = 0 Ebene, falls die Phasen aller drei Summenthterme gleich sind, d.h.:

$$|\vec{k}_e|\,\vec{n}_e\,\vec{r} = |\vec{k}_r|\,\vec{n}_r\,\vec{r} = |\vec{k}_d|\,\vec{n}_d\,\vec{r} \qquad \forall\ \vec{e}_z\,\vec{r} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{n}_e - \vec{n}_r)\,\vec{r} &= 0 \\ \left[|\vec{k}_e|\vec{n}_e - |\vec{k}_d|\vec{n}_d\right]\vec{r} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{für } z=0,\ r_z = 0,\ r_x, r_y \text{ beliebig}$$

$$\left[|\vec{k}_e|\begin{pmatrix}-\sin y_1\\0\\\cos y_1\end{pmatrix} - |\vec{k}_d|\begin{pmatrix}-\sin y_2\\0\\\cos y_2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}r_x\\r_y\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$|\vec{k}_e|\,(-\sin y_1)\,r_x - |\vec{k}_d|\,(-\sin y_2)\,r_x = 0$$

d.h.

$$|\vec{k}_e|\sin y_1 = |\vec{k}_d|\sin y_2$$

$$\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0\varepsilon_0}\,\sin y_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_0\varepsilon_0}\,\sin y_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_1}\,\sin y_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\,\sin y_2$$

oder

$$\frac{\sin y_1}{\sin y_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad \frac{\sin y_2}{\sin y_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

2/4

F03 ①

Verhältnis $\frac{E_{0r}}{E_{0e}} = f(y_1, y_2)$

Ansatz: Stetigkeit von $\vec{E}$-Feld und $\vec{H}$-Feld in der $z=0$ Ebene:

$$\text{I} \quad (\vec{E}_e + \vec{E}_r) \times \vec{e}_z - \vec{E}_d \times \vec{e}_z = 0$$

$$\text{II} \quad \sqrt{\varepsilon_1}\left[\vec{n}_e \times \vec{E}_e + \vec{n}_r \times \vec{E}_r\right] \times \vec{e}_z - \sqrt{\varepsilon_2}\left[\vec{n}_d \times \vec{E}_d\right] \times \vec{e}_z = 0$$

Mit I und gleichen Phasenfaktoren in der $z=0$ Ebene

$$\Rightarrow \left[E_{0e}\begin{pmatrix}\cos y_1\\0\\\sin y_1\end{pmatrix} + E_{0r}\begin{pmatrix}-\cos y_1\\0\\\sin y_1\end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - E_{0d}\begin{pmatrix}\cos y_2\\0\\\sin y_2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$-\cos y_1 E_{0e}\vec{e}_y + \cos y_1 E_{0r}\vec{e}_y - (-\cos y_2)E_{0d}\vec{e}_y = 0$$

$$(\text{III}) \quad -E_{0e}\cos y_1 + E_{0r}\cos y_1 + E_{0d}\cos y_2 = 0$$

mit II und gleichen Phasenfaktoren in der $z=0$ Ebene

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_1}\left[E_{0e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + E_{0r}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \sqrt{\varepsilon_2}E_{0d}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\left[E_{0e}\vec{e}_x + E_{0r}\vec{e}_x\right] - \sqrt{\varepsilon_2}E_{0d}\vec{e}_x = 0$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}E_{0e} + \sqrt{\varepsilon_1}E_{0r} - \sqrt{\varepsilon_2}E_{0d} = 0$$

bzw. $$E_{0d} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}E_{0e} + \sqrt{\varepsilon_1}E_{0r}}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

Einsetzen in III):

$$-E_{0e}\cos y_1 + E_{0e}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos y_2 + E_{0r}\cos y_1 + E_{0r}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos y_2 = 0$$

$$E_{0r}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos y_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos y_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) = E_{0e}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos y_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos y_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)$$

3/4
703 1

$$\frac{E_{0r}}{E_{0e}} \quad \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2} \qquad (\overline{\underline{IV}})$$

d)

Brewster - Winkel: $E_{0r} = 0$

$$\frac{E_{0r}}{E_{0e}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2} \qquad (\text{vgl. } \overline{\underline{IV}})$$

mit $E_{0r} = 0$: $\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 = \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2$

$$\overset{\cos\varphi_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} \qquad \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Brechungsgesetz: $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

Mit Hinweis: $\tan\varphi_1 \overset{E_{0r}=0}{=} \tan\varphi_{10} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

by schäng

a)

Maxwell und Materialgleichungen:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = j\omega \underline{\vec{D}} + \underline{\vec{J}} = (j\omega\varepsilon + \sigma)\,\underline{\vec{E}}$$

$$\underline{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon + \sigma}\,\nabla \times \underline{\vec{H}}$$

Ansatz einsetzen:

$$\underline{\vec{E}} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon + \sigma}\,\underline{h}(\varrho)\,e^{(-\gamma z)}\,\vec{e}_\varrho$$

$$+ \frac{1}{j\omega\varepsilon + \sigma}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho\,\underline{h}(\varrho)\right]e^{(-\gamma z)}\cdot\vec{e}_z$$

Da TEM-Feld bzgl der z-Achse gesucht ist, muß die z-Komponente von $\underline{\vec{E}}$ verschwinden. Hieraus folgt die DGL:

$$\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho\,\underline{h}(\varrho)\right] = 0$$

Also ist $\varrho\,\underline{h}(\varrho)$ eine Konstante, und damit ist die allgemeine Lösung

$$\underline{h}(\varrho) = \frac{A}{\varrho}$$

---

b) Maxwell und Materialgleichungen:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = j\omega \underline{\vec{D}} + \underline{\vec{J}} = (j\omega\varepsilon + \sigma)\,\underline{\vec{E}}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\vec{H}}) = (j\omega\varepsilon + \sigma)\,\nabla \times \underline{\vec{E}}$$

mit $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$

und $\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega\mu\,\underline{\vec{H}}$:

$$\Rightarrow \quad \Delta\underline{\vec{H}} = j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)\,\underline{\vec{H}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta\underline{\vec{H}} - j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)\,\underline{\vec{H}} = 0$$

Dies ist die geforderte Helmholtzgleichung für

$$\underline{K}^2 = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)$$

Einsetzen von $\vec{\underline{H}}$ (wegen des Ansatzes nur ϱ-Komponente relevant)

$$\left\{ \underbrace{\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho\,\underline{A}(\varrho))\right]}_{=0 \text{ siehe oben}} + \underline{\gamma}^2 \underline{A}(\varrho) + \underline{K}^2 \underline{A}(\varrho) \right\} e^{-\underline{\gamma} z} = 0$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt für:

$$\underline{\gamma}^2 = -\underline{K}^2$$

---

c)

Grenzbedingung bei $\varrho = a$: $\vec{\underline{E}}_{tang} = \vec{0}$ (idealer Leiter)

Dies ist durch den Ansatz erfüllt, da $\vec{E}$ nur eine ϱ-Komponente hat.

Aus Symmetriegründen ist die Stromdichte gleichmäßig über die Leiteroberfläche verteilt:

$$\vec{\underline{J}}_{Fa} = \frac{I_0}{2\pi a}\, e^{(-\underline{\gamma} z)}\, \vec{e}_z$$

Grenzbedingung für $\vec{\underline{H}}$ bei $\varrho = a$:

$$\vec{\underline{H}}_{tang} = \vec{n} \times \vec{\underline{J}}_{Fa} = \frac{I_0}{2\pi a}\, e^{(-\underline{\gamma} z)}\, \vec{e}_\varphi$$

Einsetzen von $\vec{\underline{H}}$ ergibt

$$\underline{A} = \frac{I_0}{2\pi}$$

Analog folgt aus der Grenzbedingung für $\vec{H}$ bei $\varrho = b$

$$\underline{\vec{J}}_{Fb} = -\frac{\underline{I}_0}{2\pi b} e^{(-\gamma z)} \vec{e}_z$$

---

d)

Feldwellenwiderstand:

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\underline{Z}_F} (\vec{e}_z \times \underline{\vec{E}})$$

Einsetzen von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ ergibt

$$\underline{Z}_F = \frac{E_\varrho}{H_\varphi} = \frac{\sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}}{j\omega\varepsilon + \sigma}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}}$$

Poyntingvektor:

$$\underline{\vec{S}} = \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*$$

Einsetzen:

$$\underline{\vec{S}} = \underline{Z}_F \, |\underline{H}_\varphi|^2 \, \vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{S}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}} \, \frac{|\underline{I}_0|^2}{4\pi^2 \varrho^2} \, e^{(-2\alpha z)} \, \vec{e}_z$$

e) Ausbreitungs und Dämpfungskonstante

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{-\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu\sigma}$$

Mit Hinweis:

$$\underline{\gamma} \approx \underbrace{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}_{\beta} + \underbrace{\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}_{\alpha}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist

$$V_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Abschrift der ITHE-Musterlösung der Klausur

EMF I   Aufgabe 3   F 2003

a) Es handelt sich um einen Hohlleiter

-> Homogenes Dielektrikum

-> Kein Innen-/Rückleiter

=> Es existieren nur TE_z-Wellen und TM_z-Wellen aber keine TEM_z-Wellen

b) Es gilt die Helmholtz'sche Gleichung, d.h.

$$\nabla^2 \underline{\vec{F}} + k^2 \underline{\vec{F}} = \vec{0} \quad \text{mit } k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$$

$$\underline{\vec{F}} \sim e^{-j\beta z} \vec{e}_z \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla_t^2}_{\text{transversalteil des } \nabla\text{-Operators}} \underline{F} + (k^2 - \beta^2) \underline{F} = 0$$

c) Separation in zylindrische Koordinaten:

Produktansatz: $\underline{F}(\varrho, \varphi) = \underline{R}(\varrho) \cdot \Phi(\varphi)$

$$\underline{\vec{F}} = \underline{F}_z \vec{e}_z$$

Formelsammlung: $\Rightarrow \nabla^2 \underline{F} = \underbrace{\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \underline{F}_z}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \underline{F}_z}{\partial \varphi^2}}_{\nabla_t^2 \underline{F}} + \frac{\partial^2 \underline{F}_z}{\partial z^2}$

$$\underline{\nabla}_t^2 \underline{F} + (k^2 - \beta^2) \underline{F} = 0 \quad \text{und } F = R(\varrho)\,\Phi(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varrho}(R' + \varrho R'')\,\Phi + \frac{1}{\varrho^2} R\,\Phi'' + (k^2 - \beta^2) R\,\Phi = 0$$

1/3   mit $R' = \frac{\partial R}{\partial \varrho}$, $R'' = \frac{\partial^2 R}{\partial \varrho^2}$ und Φ', Φ'' analog

F03 (3)

Division durch $(R\Phi)$:

$$\Rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} + \frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{=-m^2} + (k^2-\beta^2) = 0 \quad \text{(Bessel'sche DGL)}$$

$\Rightarrow$ i) $\Phi'' + m^2\Phi = 0$

Allgemeine Lösung: $\Phi(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi)$

ii) $R'' + \frac{1}{\rho}R' + (\underbrace{k^2-\beta^2}_{=p^2} - \frac{m^2}{\rho^2})R = 0$

$\rightarrow$ Bessel'sche Dgl.

Allgemeine Lösung: $R(\rho) = C J_m(p\rho) + D N_m(p\rho)$

mit $p = \sqrt{k^2-\beta^2}$ (Separationsbedingung)

d)

$$\vec{E} = -\nabla\times\vec{F} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi}}_{E_\rho}\vec{e}_\rho + \underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial\rho}}_{E_\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Formelsammlung

Randbedingungen bei $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$:

$\vec{E}_{tan} = \vec{0} \Rightarrow E_\rho(\varphi=0) = E_\rho(\varphi=\varphi_0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial F_z}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

$\Rightarrow$ i) $-mA\sin(m\cdot 0) + mB\cos(m\cdot 0) = 0 \quad (\varphi=0)$

ii) $-mA\sin(m\varphi_0) + mB\cos(m\varphi_0) = 0 \quad (\varphi=\varphi_0)$

i) $\Rightarrow B = 0$

ii) $\Rightarrow \sin(m\varphi_0) = 0$

$$\Rightarrow m\,\phi_0 = n\cdot\pi$$

$$\Rightarrow m = m_n = \frac{n\pi}{\phi_0} = n\,\frac{\pi}{\pi/3} = 3n \quad ; n = 1, 2, \ldots$$

Insgesamt: $\Phi(\varphi) = A\cos\left(n\,\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\right)$

e) Randbedingung bei $\rho = a, \rho = b$:

$$\vec{E}_{tan} = \vec{0} \Rightarrow E_\varphi(\rho = a) = E_\varphi(\rho = b) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \Psi_z}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \left.\frac{\partial \Psi_z}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R(\rho=a)}{\partial \rho} = \frac{\partial R(\rho=b)}{\partial \rho} = 0$$

f)

$$\Rightarrow \underline{\rho = a}: \quad C\,J_m'(pa) + D\,N_m'(pa) = 0$$

$$\underline{\rho = b}: \quad C\,J_m'(pb) + D\,N_m'(pb) = 0$$

Als lineares homogenes Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{bmatrix} J_m'(pa) & N_m'(pa) \\ J_m'(pb) & N_m'(pb) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gl.:

Das homogene Gleichungssystem muß für $C \neq 0, D \neq 0$ eine Lsg. liefern

$\Rightarrow$ Die Determinante der Systemmatrix muß verschwinden

$$\Rightarrow J_m'(pa)\,N_m'(pb) - N_m'(pa)\,J_m'(pb) = 0$$

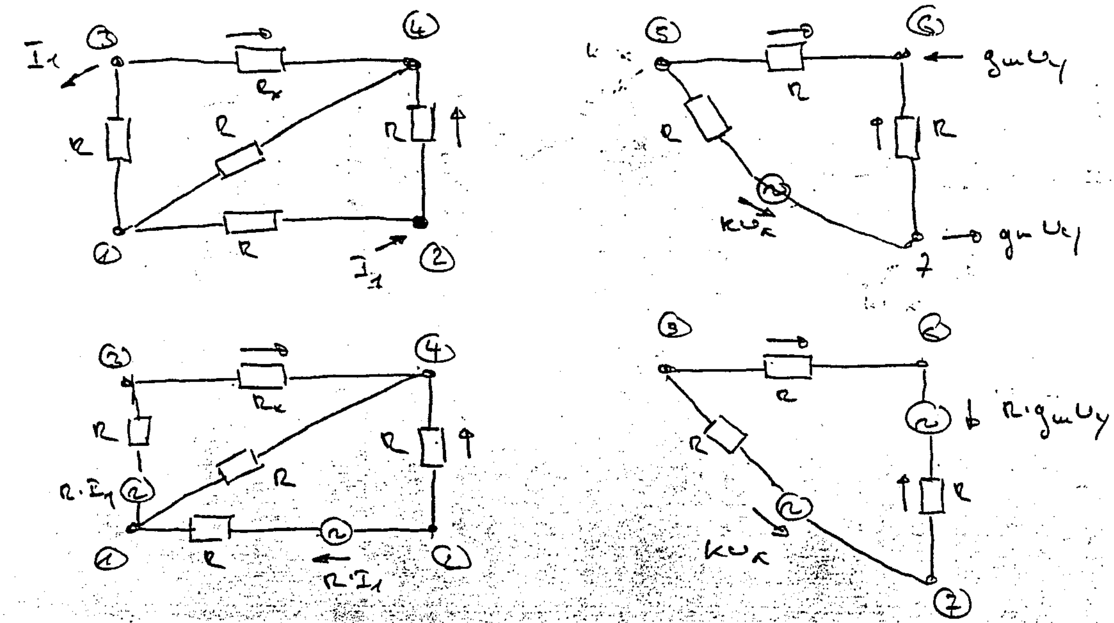
Grenzwellenzahl: $\beta = 0 \Rightarrow k = p := k_c$

Grenzfrequenz: $f_c = \frac{1}{2\pi}\frac{k_c}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{2\pi}\frac{p}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

by schäng

Aufgabe 4):

a)



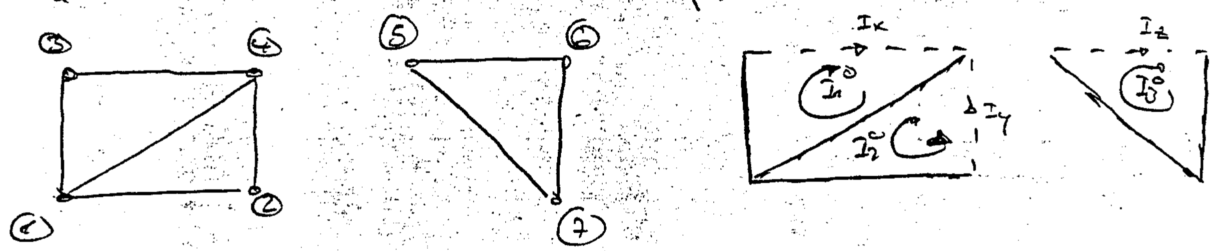
b) $p = k - s = 7 - 2 = 5$

$m = z - p = 8 - 5 = 3$

p Anzahl linear unabh. Gl. für Schnittmengenverfahren

m " " " " " Maschenimpedanzverfahren

c)



d) $\underline{I_1^0}$: $I_1^0 \cdot R_x + (I_1^0 + I_2^0) R + I_1^0 \cdot R + R \cdot I_1 = 0$

$\underline{I_2^0}$: $I_2^0 R + (I_1^0 + I_2^0) R + I_2^0 \cdot R - R \cdot I_1 = 0$

$\underline{I_3^0}$: $I_3^0 \cdot R + R g_m U_y + I_3^0 \cdot R - k U_x + R I_3^0 = 0$

mit $U_y = R \cdot I_y = R \cdot I_2^0$

$U_x = I_x \cdot R_x = I_1^0 R_x$

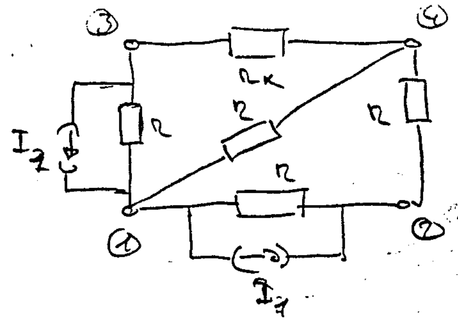
$$\rightarrow \begin{pmatrix} -R \cdot I_1 \\ R \cdot I_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x + 2R & R & 0 \\ R & 3R & 0 \\ -k R_x & R^2 g_m & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \\ I_3^0 \end{pmatrix}$$

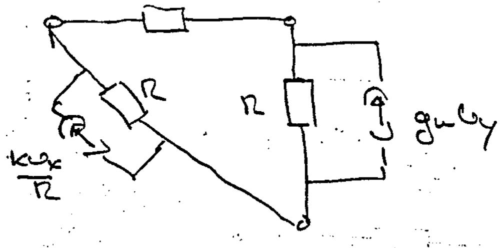
e) $I_z = I_3^0 \Rightarrow$

$$I_z = \frac{\det \begin{vmatrix} R_x + 2R & R & -R \cdot I_1 \\ R & 3R & R \cdot I_1 \\ -k R_x & R^2 g_m & 0 \end{vmatrix}}{\det (Z)}$$

$$= \frac{-(R \cdot I_1)\left[(R \cdot R^2 g_m) + 3RkR_x + (R_x + 2R)(R^2 g_m) + RkR_x\right]}{3R\left(3R(R_x + 2R) - R^2\right)}$$

-8)



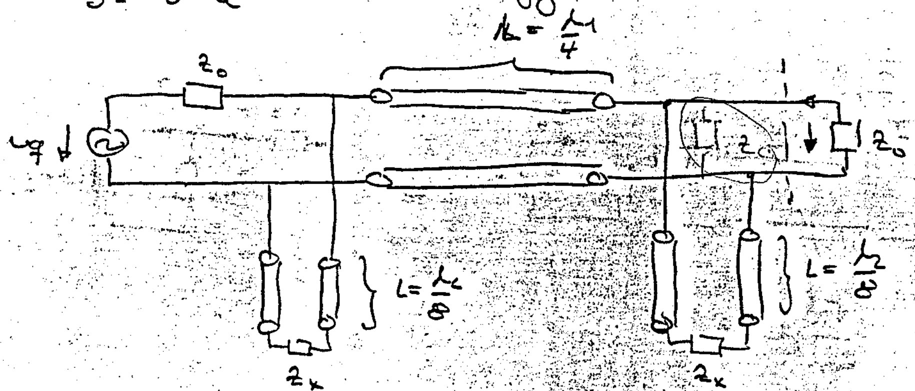


Aufgabe 5

a) $\overleftrightarrow{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{14} & S_{13} \\ S_{13} & S_{14} & S_{11} & S_{12} \\ S_{14} & S_{13} & S_{12} & S_{11} \end{pmatrix}$

b) $b = \overleftrightarrow{S}\, a$ siehe Aufgabenblatt!

c)



$Z_x = 0$ für EW → Gegentakt (Kurzschluss)
$Z_x = \infty$ " MW → Gleichtakt (Leerlauf)

d) $\Gamma_A = \left(\frac{b_1}{a}\right)_A$

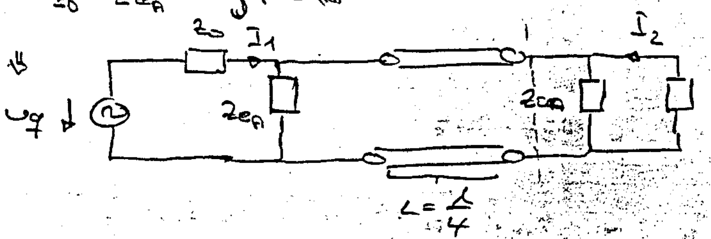
$Z_e = j Z_L \tan \beta L$ für Kurzschluss
$Z_e = \frac{-j Z_L}{\tan \beta L}$ für Leerlauf

Ausgangsfall A → $Z_x = \infty$ da Leerlauf

$\beta L = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Rightarrow Z_{eA} = -j Z_0$

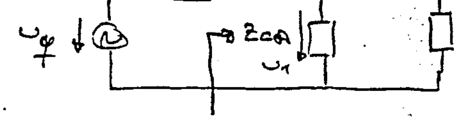
⇓



$Z_{eA} \| Z_0 = \frac{-j Z_0^2}{Z_0(1-j)} = -\frac{j}{1-j} Z_0$

$\beta L = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{U_e}{I_e} = \frac{j Z_L I_a}{\frac{j}{Z_L} U_a} = \frac{Z_L^2}{Z_a} = Z_{e2}$



$Z_{e2} = \frac{Z_L^2}{Z_a} = \frac{Z_L^2}{Z_{eA} \| Z_0} = -\frac{Z_0^2 (1-j)}{2\, Z_0\, j} = j\, \frac{Z_0(1-j)}{2}$

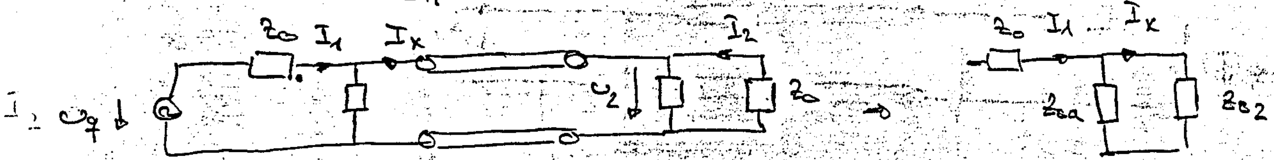
$\Rightarrow \Gamma_A = \left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \frac{1/2\left(\frac{U_1}{I_1} - Z_0\right)}{1/2\left(\frac{U_1}{I_1} + Z_0\right)} = \frac{Z_{eA} \| Z_{e2} - Z_0}{Z_{eA} \| Z_{e2} + Z_0}$

$$\Rightarrow \Gamma_A = \frac{Z_0 - Z_0}{2Z_0} = \underline{\underline{0}}$$

wo $$Z_{ea} \parallel Z_{e2} = \frac{-jZ_0 \cdot j\frac{Z_0(1-j)}{2}}{jZ_0\left(\frac{1-j}{2} - 1\right)} = -j\,\frac{Z_0(1-j)}{1-j-2} = -j\,\frac{Z_0(1-j)}{-1-j}$$

$$= \frac{Z_0(-j-1)}{-1-j} = \underline{\underline{Z_0}}$$

$$T_A = \frac{b_2}{a_1} = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{\frac{U_2}{I_2} - Z_0}{\frac{U_1}{I_1} + Z_0} \qquad \text{mit } \frac{U_2}{I_2} = -Z_0$$



$$I_x = U_2 \cdot \frac{j}{Z_L} = \frac{j\sqrt{2}}{Z_0} U_2$$

$$I_x = \frac{I_1 \cdot Z_{ea}}{Z_{ea} + Z_{e2}} = I_1 \cdot \frac{-jZ_0}{-jZ_0 + j\frac{Z_0(1-j)}{2}} = I_1 \frac{1}{1 - \frac{(1-j)}{2}} = I_1 \frac{2}{2-1+j} = I_1 \frac{2}{1+j}$$

$$\Rightarrow I_1 \frac{2}{1+j} = \frac{j\sqrt{2}}{Z_0} U_2 \qquad \Rightarrow I_2 = -U_2 \cdot \frac{1}{Z_0} \quad \Rightarrow \quad U_2 = -I_2 \cdot Z_0$$

$$\Rightarrow I_1 \frac{2}{1+j} = \frac{j\sqrt{2}}{Z_0}(-I_2 Z_0)$$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{2}{1+j} \cdot \frac{1}{j\sqrt{2}} I_1$$

$$\Rightarrow T_A = -\frac{2}{1+j}\,\frac{1}{j\sqrt{2}} \cdot \frac{-2Z_0}{2Z_0} = \frac{2}{(1+j)}\,\frac{1}{j\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-1+j} = \underline{\underline{\frac{-1-j}{\sqrt{2}}}}$$

e) $\Gamma_B = \left(\frac{b_1}{a}\right)_B = 0 \qquad T_B = \left(\frac{b_2}{a}\right)_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)$

$$\frac{b_1}{a_1} = (S_{11} + S_{14}) = \Gamma_A \qquad T_A = S_{12} + S_{13}$$

$$\Gamma_B = S_{11} + S_{14} \qquad T_B = S_{12} - S_{13}$$

$$\Rightarrow S_{11} = \Gamma_A - S_{14} \qquad S_{14} = S_{11} - \Gamma_B \quad \Rightarrow S_{11} = \Gamma_A - S_{11} + \Gamma_B \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2}(\Gamma_A + \Gamma_B)$$

$$\Rightarrow S_{14} = \frac{1}{2}(\Gamma_A - \Gamma_B)$$

$$S_{12} = T_A - S_{13} \qquad S_{13} = S_{12} - T_B \Rightarrow S_{12} = T_A - S_{12} + T_B \Rightarrow S_{12} = \frac{1}{2}(T_A + T_B)$$

$$S_{13} = \frac{1}{2}(T_A - T_B)$$

$$\Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2}(\Gamma_A + \Gamma_B) = 0 - 0 = \underline{0}$$

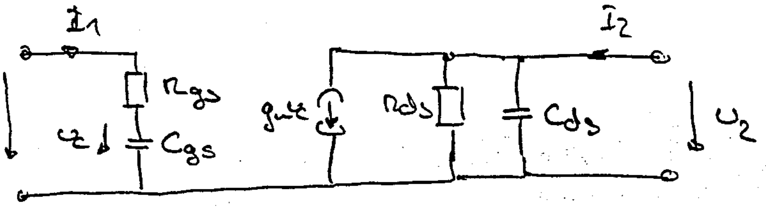
$$S_{14} = \frac{1}{2}(\Gamma_A - \Gamma_B) = \underline{0}$$

$$S_{12} = \frac{1}{2}(T_A + T_B) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1-j}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)\right) = \frac{1}{2}\,\frac{-2j}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{-j}{\sqrt{2}}}}$$

$$S_{13} = \frac{1}{2}(T_A - T_B) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1-j}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)\right) = \frac{-2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Aufgabe 6

a)



$$Z_{11} = R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}} = R_{gs} - j\frac{1}{\omega C_{gs}} = 15\,\Omega - j\,18\,\Omega$$

$$z_{11} = (0{,}3 - j\,0{,}36)\,\Omega \quad \to S_{11} = 0{,}58 \exp(-j137^\circ)$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_{ds}} + j\omega C_{ds} = \frac{1}{125\,\Omega} + \frac{1}{62{,}5\,\Omega} = (0{,}4 + j\,0{,}8)\,S$$

mit Normierung

$$\to S_{22} = 0{,}62 \exp(-83^\circ)$$

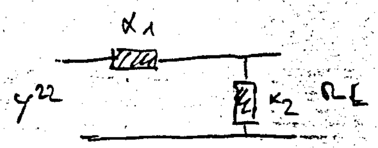
b) Eingangsanpassung $z_{11}^* = (0{,}3 + j\,0{,}36)\,\Omega$

$R_S = 1\,\Omega$

Ein Rest siehe Aufgabenblatt

c) $\Rightarrow$ L_{p2} wäre short und $\frac{L_{p2}}{\lambda} = -0{,}25 + 0{,}452 = \underline{0{,}202}$

d)



Ausgangsanpassung $y_{22}^* = (0{,}4 - j\,0{,}8)\,S$

$r_L = 1\,\Omega$

$$\Rightarrow x_1 = j\,0{,}5$$
$$x_2 = -j$$

e) $P_{IN} = 0{,}01\,mW$ $\quad P_{out}$?

$P_{g,IN} = I_g^2 \cdot R_{gs} \Rightarrow \sqrt{\frac{P_{IN}}{R_{gs}}} = I_g \qquad U_c = \frac{1}{j\omega C_{gs}} \cdot I_g$

$$P_{out} = \left(\frac{1}{2} g_m U_c\right)^2 \cdot R_{ds} = \frac{1}{2}\left(g_m \frac{I_g}{j\omega C_{gs}}\right)^2 R_{ds}$$

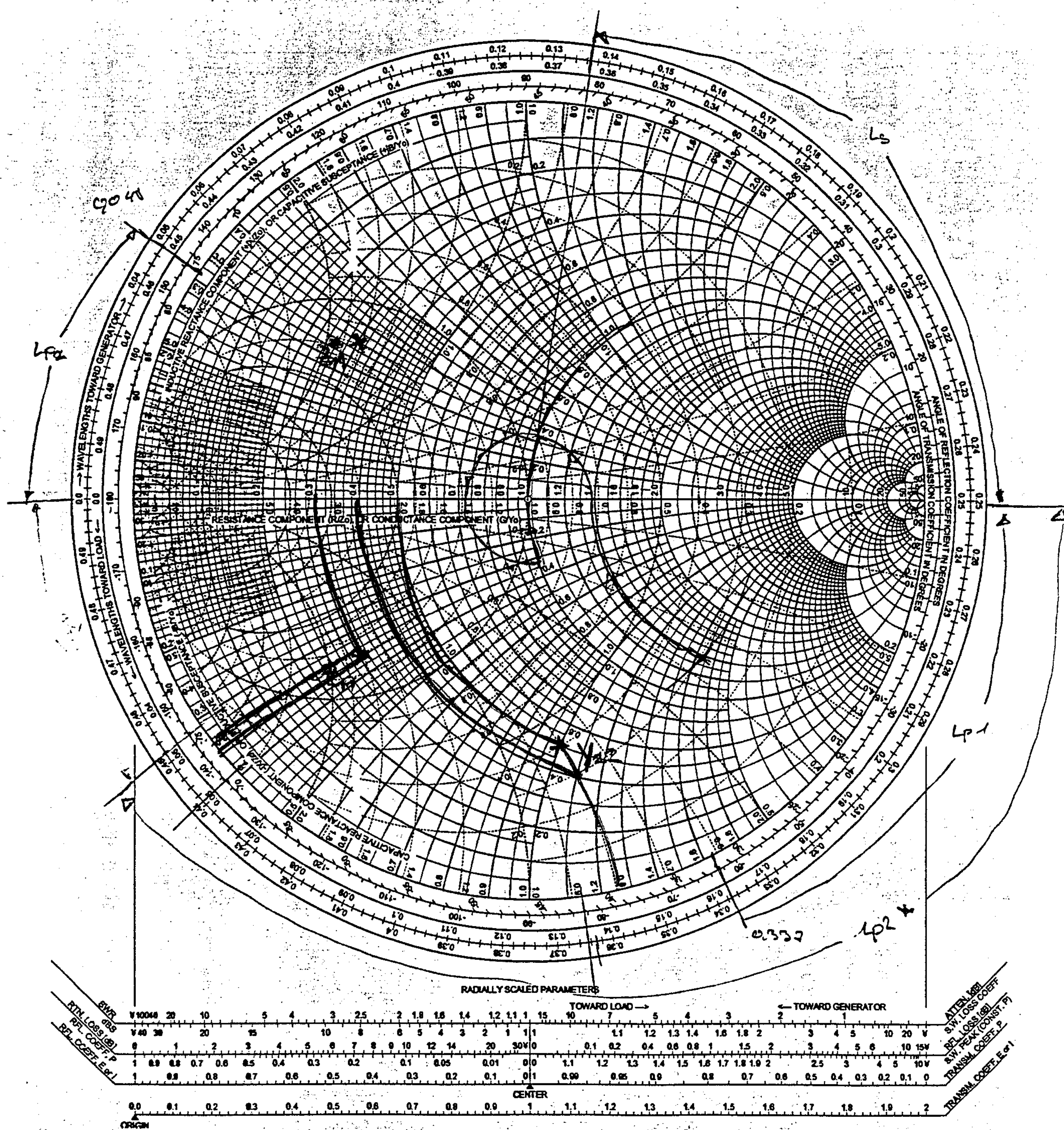
$$= \frac{1}{4} g_m^2 \frac{P_{IN}}{R_{gs}} \frac{R_{ds}}{\omega^2 C_{gs}^2} = \underline{0{,}27\,mW}$$

Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2003

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt ~~2~~ 1 zu Aufgabe 6 **Name:** ______________________ **Matr.Nr.:** __________



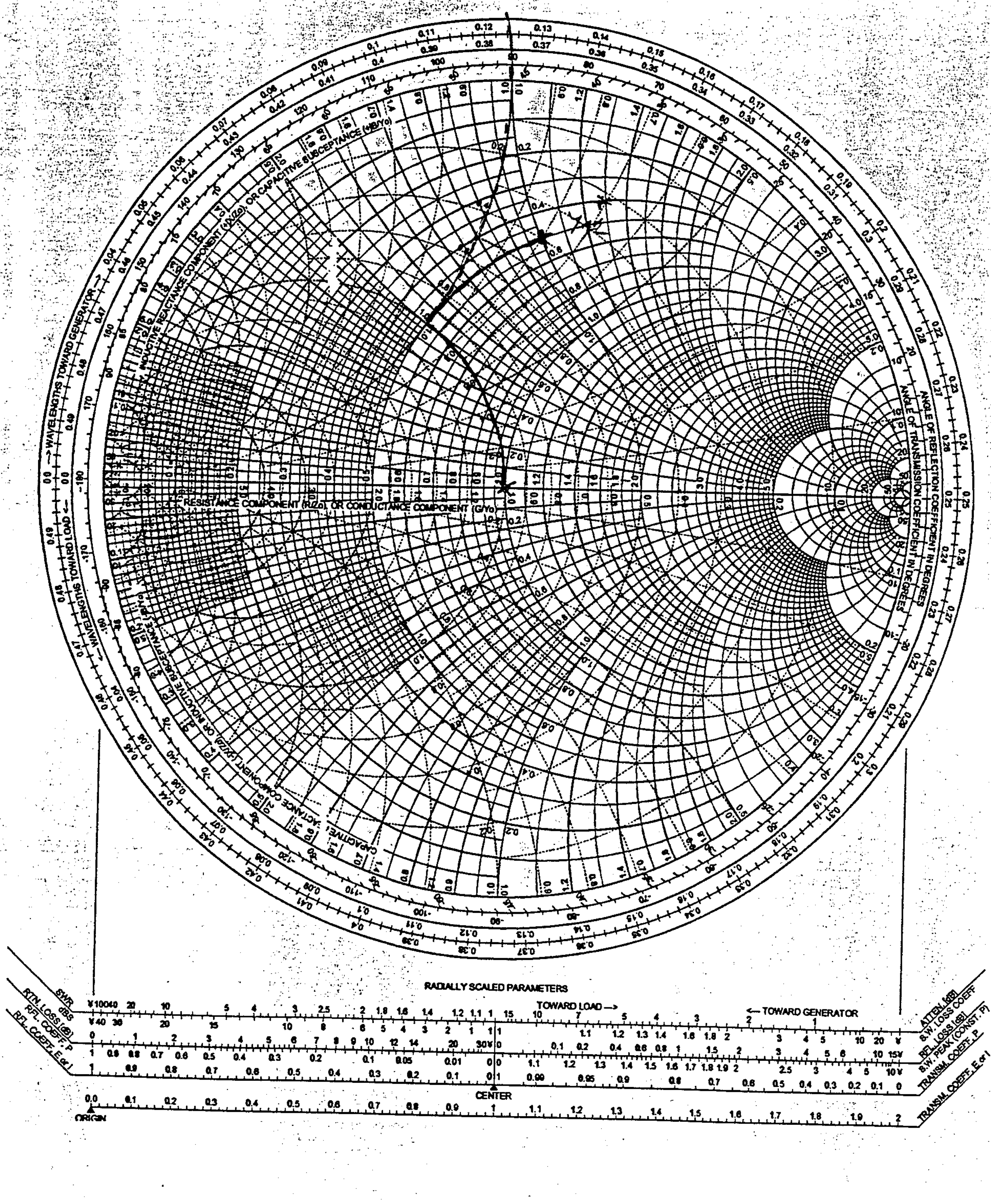
Institut für Theoretische Elektrotechni :
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2003

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6

Name: ____________________ **Matr.Nr.:** __________



The Complete Smith Chart (ZY)

FOR A6

c)