H03

Aufgabe 1

a) allg $\vec{E} = Z\, \vec{H} \times \vec{n}$ und $\vec{H} = \frac{1}{Z}\, \vec{n} \times \vec{E}$

$\Rightarrow$

$$\vec{E}_e = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} -H_{e\parallel} \cos\varphi_1 \\ H_{e\perp} \\ -H_{e\parallel} \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \exp(-j\vec{k}_e \vec{r})$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} H_{e\perp} \cos\varphi_1 \\ H_{e\parallel} \\ + H_{e\perp} \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \exp(-jk_e r)$$

$$\vec{E}_r = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} H_{r\parallel} \cos\varphi_1 \\ H_{r\perp} \\ -H_{r\parallel} \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ -\cos\varphi_1 \end{pmatrix} \exp(-j\vec{k}_r \vec{r})$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} -H_{r\perp} \cos\varphi_1 \\ H_{r\parallel} \\ + H_{r\perp} \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \exp(-j\vec{k}_r \vec{r})$$

$$\vec{E}_d = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} \begin{pmatrix} -H_{d\parallel} \cos\varphi_2 \\ H_{d\perp} \\ -H_{d\parallel} \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi_2 \\ 0 \\ \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \exp(-j\vec{k}_d \vec{r})$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} \begin{pmatrix} H_{d\perp} \cos\varphi_2 \\ H_{d\parallel} \\ H_{d\perp} \sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

b) $\mathrm{Rot}\,\vec{E}\big|_{z=0} = \vec{e}_z \times [\vec{E}_e + \vec{E}_r - \vec{E}_d] = 0$

$\mathrm{Rot}\,\vec{H}\big|_{z=0} = \vec{e}_z \times (\vec{H}_e + \vec{H}_r - \vec{H}_d) = 0$

$\mathrm{Div}\,B\big|_{z=0} = \vec{e}_z \cdot (\vec{B}_d - (\vec{B}_r + \vec{B}_e)) = 0$

$\mathrm{Div}\,\vec{D}\big|_{z=0} = \vec{e}_z\,(\vec{D}_d - (\vec{D}_r + \vec{D}_e)) = 0$

c)

aus $\mathrm{Rot}\,\vec{E}=0$ und $\mathrm{Rot}\,\vec{H}=0$ folgt mit

~~exp~~ $\exp(-j\vec{k}_e\vec{r}) = \exp(-j\vec{k}_r\vec{r}) \stackrel{!}{=} \exp(-j\vec{k}_d\vec{r})$

~~und dem Brechungsgesetz:~~

und dem Brechungsgesetz folgt ~~da~~

$\cancel{-E_{r\parallel}}$ 1) $-H_{e\parallel}\cos\varphi_1 + H_{r\parallel}\cos\varphi_1 + H_{d\parallel}\cos\varphi_2 = 0$

2) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} H_{d\perp}\cos\varphi_2 = 0$

3) $H_{e\perp} + H_{r\perp} - H_{d\perp} = 0$

4) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\parallel} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\parallel} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} H_{d\parallel} = 0$

aus 4) $\Rightarrow$ $H_{d\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}}\,(H_{e\parallel} + H_{r\parallel})$

~~3) $\Rightarrow$ $\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}}\left(H_{e\perp}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\right.$~~

3) $\Rightarrow$ $H_{d\perp} = H_{e\perp} + H_{r\perp}$

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}(H_{e\perp} + H_{r\perp})\cos\varphi_2 = 0$

$\Rightarrow H_{e\perp}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\cos\varphi_2\right) = H_{r\perp}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\cos\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\cos\varphi_2\right)$

also $\frac{H_{r\perp}}{H_{e\perp}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\cos\varphi_2\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\cos\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\cos\varphi_2\right)}$

~~$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\parallel} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\parallel} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$~~

$-H_{e\parallel}\cos\varphi_1 + H_{r\parallel}\cos\varphi_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}}(H_{e\parallel} + H_{r\parallel})\cos\varphi_2 \Rightarrow$

Aufgabe 1

a) $\vec{e}_z \times \sum_i \vec{H}_i = 0$:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -H_{e\parallel}\cos\varphi_1 + H_{r\parallel}\cos\varphi_1 + H_{d\parallel}\cos\varphi_2 \\ H_{e\perp} + H_{r\perp} - H_{d\perp} \\ -H_{e\parallel}\sin\varphi_1 - H_{r\parallel}\sin\varphi_1 + H_{d\parallel}\sin\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$e_z \times \sum_i \vec{E}_i = 0$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\perp}\cos\varphi_2 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\parallel} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\parallel} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\parallel} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\sin\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\sin\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\perp}\sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

I) $-(H_{e\perp} + H_{r\perp} - H_{d\perp}) = 0$

$-H_{e\parallel}\cos\varphi_1 + H_{r\parallel}\cos\varphi_1 + H_{d\parallel}\cos\varphi_2 = 0$

II) $-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\parallel} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\parallel} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\parallel} = 0$

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\perp}\cos\varphi_2 =$

I) $H_{r\perp} = H_{d\perp} - H_{e\perp}$

$H_{d\parallel} = (H_{e\parallel} - H_{r\parallel})\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$

II) $H_{r\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} H_{d\parallel} - H_{e\parallel}$

$H_{d\perp} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cdot H_{r\perp}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$

$$H_{r\perp} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - H_{e\perp}$$

$$H_{r\parallel} + H_{r\parallel}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} H_{e\parallel}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - H_{e\parallel}$$

$$\frac{H_{r\perp}}{H_{e\perp}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} + 1} \quad ; \quad \frac{H_{r\parallel}}{H_{e\parallel}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} + 1}$$

mit Brechungsgesetz =>

$$\frac{H_{r\perp}}{H_{e\perp}} = \frac{\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - 1}{\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} + 1} \qquad \frac{H_{r\parallel}}{H_{e\parallel}} = \frac{\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - 1}{\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} + 1}$$

$$= \frac{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_2}{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_2} \qquad = \frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2}$$

oder als Fkt. von φ_1 $\quad \cos\varphi_2 = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2\varphi_1}$

$$\frac{H_{r\perp}}{H_{e\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\varphi_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\varphi_1}}$$

$$\frac{H_{r\parallel}}{H_{e\parallel}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\varphi_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\varphi_1}}$$

d) $H_{e\perp} = 0 \quad H_{r\perp} = 0 \qquad 0 = \sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2$

Brechungsgesetz: $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} \Rightarrow \sin^2\varphi_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1$

$$\varepsilon_2 \cos^2\varphi_1 = \varepsilon_1 \cos^2\varphi_2 = \varepsilon_1(1 - \sin^2\varphi_2)$$

$$= \varepsilon_1\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1\right)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos^2\varphi_1 = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos^2\varphi_1 = \cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1$$

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)\cos^2\varphi_1 = \sin^2\varphi_1\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$$

$$\frac{\sin^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} = \frac{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}}{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Rightarrow \tan\varphi_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$H_{E\parallel}, H_{T\parallel} = 0$

$0 = \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_2$

$\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_2$

$\cos^2\varphi_2 = 1 - \sin^2\varphi_2 = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1$

$\varepsilon_1\cos^2\varphi_1 = \varepsilon_2\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1\right)$

$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cos^2\varphi_1 = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1$

$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1\right) = 1$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

d.h. für $H_{E\parallel}$ tritt nur dann keine Reflexion ein, falls beide Medien gleichen Brechungsindex besitzen

Aufgabe 2

Ausbreitung der Hybridwelle in z-Richtung mit noch unbekannter Ausbreitungskonstante γ:

$$\vec{\underline{F}}_i(x,y,z) = \underbrace{\hat{\underline{f}}_i(x,y)\, e^{-\gamma z}}_{\underline{f}_i(x,y,z)} \vec{e}_x \qquad \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$$

Differentialgl.:

Gebiet 1

$$(\nabla^2 + k_1^2)\,\underline{\vec{E}}_1 = \vec{0} \quad \text{mit} \quad k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k_1^2 + \gamma^2)\right) \underline{f}_1 = \underline{0}$$

Gebiet 2

$$(\nabla^2 + k_2^2)\,\underline{\vec{E}}_2 = \vec{0} \quad \text{mit} \quad k_2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k_2^2 + \gamma^2)\right) \underline{f}_2 = \underline{0}$$

b) Prod.-Ansatz:

$$\underline{f}_1(x,y,z) = f_{1x}(x)\, f_{1y}(y)\, e^{-\gamma z}$$

in DGL:

$$f_{1y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{1x}\right) + f_{1x}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{1y} + (k_1^2 + \gamma^2) f_{1x} f_{1y} \,\underline{=}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f_{1x}} \frac{\partial^2 f_{1x}}{\partial x^2}}_{=:-k_{1x}^2} + \underbrace{\frac{1}{f_{1y}} \frac{\partial^2 f_{1y}}{\partial y^2}}_{:=-k_y^2} + (k_1^2 + \gamma^2) = 0$$

Allg. Lsg in Gebiet 1

$$f_1(x,y,z) = (A_1 \cos(k_{1x} x) + B_1 \sin(k_{1x} x)) \cdot (C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y))\, e^{-\gamma z}$$

Gebiet 2: analog, jedoch als Fkt. von $(a-x)$, damit die RB bei $x=a$ leichter zu erfüllen ist.

$$\underline{f}_2(x,y,z) = \left(A_2 \cos(k_{2x}(a-x)) + B_2 \sin(k_{2x}(a-x))\right)$$
$$\cdot \left(C_2 \cos(k_y y) + D_2 \sin(k_y y)\right) e^{-\gamma z}$$

Sep.-Bed. in Gebiet 2: $-k_{2x}^2 - k_y^2 + (k_2^2 + \gamma^2) = 0$

~~zusammen~~

Zusammenhang zw. $\underline{\vec{E}}$ und $\underline{f}$

$$\underline{\vec{E}}_i = -\nabla \underline{f}_i \times \vec{e}_x$$

$$= -\left(\underbrace{\frac{\partial \underline{f}_i}{\partial z}}_{-\gamma \underline{f}} \vec{e}_y - \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial y} \vec{e}_z\right)$$

$$= \gamma \underline{f}_i \vec{e}_y - \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial y} \vec{e}_z$$

RB bei $y=0, b$: $\underline{E}_{ta} = \underline{E}_{zi} \vec{e}_z \stackrel{!}{=} \vec{0}$ für alle x

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial y}(y=0) = \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial y}(y=b) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow k_y\left(-C_i \sin(k_y 0) + D_i \cos(k_y \cdot 0)\right) = 0$$

$$\Rightarrow D_i = 0$$

$$-k_y C_i \sin(k_y \cdot b) = 0$$

$$\Rightarrow k_y \cdot b = n\pi \qquad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

c) Randbed. bei $x=0$:

$$0 = \underline{\vec{E}}_{ta} = \underline{E}_y \cdot \vec{e}_y = \gamma \cdot f_1 \, \vec{e}_y \overset{!}{=} \vec{0}$$ parallel

$$\Rightarrow A_1 \cos(k_x \cdot 0) + B \sin(k_{1x} \cdot 0) = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = 0$$

Randbed. bei $x=a$:

$$\underline{\vec{E}}_{ta} = \underline{E}_y \vec{e}_y = \gamma f_2 \vec{e}_y = 0$$

$$\Rightarrow A_2 \cos(k_{2x}(a-a)) + B_2 \sin(k_{2x}(a-a)) = 0$$

$$\Rightarrow A_2 = 0$$

Entsprechend: $E_z(x=0) = E_z(x=a) = 0$

liefert jeweils das gl. Ergebnis

Insgesamt

$$f_1(x,y,z) = C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin(k_{1x} x) e^{-\gamma z}$$

$$f_2(x,y,z) = C_2 \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin(k_{2x}(a-x)) e^{-\gamma z}$$

d) RB a der Grenzfläche ~~~~ $x=d$:

$$\underline{\vec{E}}_{t1}(x=d) = \underline{\vec{E}}_{t2}(x=d)$$

$$\Rightarrow E_{y1}(x=d) = E_{y2}(x=d) \quad (I)$$

$$E_{z1}(x=d) = E_{z2}(x=d) \quad (II)$$

$$\underline{\vec{H}}_{t1}(x=d) = \underline{\vec{H}}_{t2}(x=d)$$

$$\Rightarrow H_{y1}(x=d) = H_{y2}(x=d) \quad (III)$$

$$H_{z1}(x=d) = H_{z2}(x=d \quad (IV)$$

Zusammenhang zw. $\vec{H}_i$ und f_i

$$\vec{H}_i = \frac{1}{j\omega\mu}\left(k_i^2 f_i \vec{e}_x + \nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{j\omega\mu}\begin{pmatrix} \left(k_i^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f_i \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \\ -\gamma \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$x = d_i \quad \forall y$.

(I) $\quad E_{y_i} = \gamma f_i \sim f_i \Rightarrow C_1 \sin(k_{1x} d) = C_2 \sin(k_{2x}(a-d))$

(II) $\quad E_{z_i} = \frac{\partial f_i}{\partial y} \sim f_i \Rightarrow$ kein zusätzl. Information

(III) : $\quad H_{y_i} = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \sim \frac{\partial f_i}{\partial x} \Rightarrow C_1 k_{1x} \cos(k_{1x} d)$

$= -C_2 k_{2x} \cos(k_{2x}(a-d))$

(IV) $\quad H_{z_i} = -\frac{\gamma}{j\omega\mu} \frac{\partial f_i}{\partial x} \sim \frac{\partial f_i}{\partial x} \Rightarrow$ kein Information

(I) durch (III) teilen:

$\Rightarrow k_{1x} \cot(k_{1x} d) = -k_{2x} \cot(k_{2x}(a-d))$ (*)

Sep.-Bed.

$$\left.\begin{aligned} k_{1x}^2 &= \omega^2 \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 + \gamma^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\ k_{2x}^2 &= \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + \gamma^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned}\right\}$$

(*) ist die Bed.-Gl., die als einzige Unbekannte γ enthält bei gegebener Kreisfrequenz ω

Aufgabe 3 HÜ3

a) $\underline{g} = \underline{g}(\rho, \varphi, z)\, e^{j\omega t}\, \vec{e}_z$

Helmholtzgl.: $\nabla^2 \underline{g} + k^2 \underline{g} = 0$ mit $k^2 = \omega^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0$

b) Separation in zylindr. Koordinatensystem:

Produktansatz: $\underline{g}(\rho, \varphi, z) = \underline{g}_1(\rho)\, \underline{g}_2(\varphi)\, \underline{g}_3(z)$

$$\nabla^2 \underline{g} + k^2 \underline{g} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \underline{g}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial z^2} + k^2 \underline{g} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial z^2} + k^2 \underline{g} = 0$$

Einsetzen des Produktansatzes:

$$g_1'' g_2 g_3 + \frac{1}{\rho} g_1' g_2 g_3 + \frac{1}{\rho^2} g_1 g_2'' g_3 + g_1 g_2 g_3'' + k^2 g_1 g_2 g_3 = 0$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{g_1 g_2 g_3}} \frac{g_1''}{g_1} + \frac{1}{\rho} \frac{g_1'}{g_1} + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\frac{g_2''}{g_2}}_{= -m^2} + \underbrace{\frac{g_3''}{g_3}}_{-k_z^2} + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{(i)}: \frac{\partial^2 g_3}{\partial z^2} + k_z^2 g_3 = 0$$

Elementarlösungen: $\underline{g}_3(z) = A \cos(k_z z) + B \sin(k_z z)$

$$\text{(ii)}: \frac{\partial^2 g_2}{\partial \varphi^2} + m^2 g_2 = 0$$

Elementarlösungen $\underline{g}_2(\varphi) = C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi)$

$$\text{(iii)}: \frac{\partial^2 g_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g_1}{\partial \rho} + \left(k^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) g_1 = 0 \quad \text{(Bessel-DGL)}$$

Elementarlösungen: $\underline{g}_3(\rho) = E J_m(k_\rho \rho) + F N_m(k_\rho \rho)$

Insgesamt: $$\underline{g}(\rho, \varphi, z) = \left(E J_m(k_\rho \rho) + F N_m(k_\rho \rho)\right) \cdot \left(C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi)\right) \cdot \left(A \cos(k_z z) + B \sin(k_z z)\right)$$

mit $k_\rho^2 = k^2 - k_z^2$

c) Zusammenhang zwischen Potentialfkt. und el. Feld:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(k^2 \underline{g}\,\vec{e}_z + \nabla\left(\frac{\partial \underline{g}}{\partial z}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{j\omega\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial\rho\,\partial z}\,\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial\varphi\,\partial z}\,\vec{e}_\varphi + \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\underline{g}\,\vec{e}_z\right)$$

RB bei $z=0$: $\quad \vec{E}_{tan} = \vec{0} = E_\rho = E_\varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \underline{g}}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow k_z\Big(-A\underbrace{\sin(k_z\cdot 0)}_{0} + B\underbrace{\cos(k_z\cdot 0)}_{1}\Big) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

RB bei $z = l_1$:

$\vec{E}_{norm} = \vec{0} \Rightarrow E_z = 0 \quad \Rightarrow \underline{g} = 0 \Rightarrow \cos(k_z l) = 0$

besser: $\vec{H}_{tan} = 0$ (einsichtiger)

$\Rightarrow k_z \cdot l = n\frac{\pi}{2}; \quad n = 1, 3, 5 \ldots$

$\Rightarrow k_z = \frac{n\pi}{2l_1}; \quad n = 1, 3, 5 \ldots$

RB bei $\rho \to 0$

$\underline{g}$ muß nicht-singulär bleiben

$N_m(k_\rho \rho)$ weist aber eine Singularität bei $\rho = 0$ auf $\Rightarrow F = 0$

RB bei $\rho = R$:

$\vec{E}_{norm} = \vec{0} \Rightarrow E_\rho = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \underline{g}}{\partial \rho} = 0$

besser $H_{tan} = 0$ betrachten

$$\Rightarrow \frac{\partial J_m(k_\rho R)}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J_m(k_\rho R)}{\partial (k_\rho R)} = 0$$

$\Rightarrow k_\rho = \frac{x'_{mn}}{R}$, wobei x'_{mn} die n-te Nullstelle von $J_m' = \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$ ist.

Insgesamt: $\underline{g}(\rho,\varphi,z) = J_m\left(x'_{mn}\frac{\rho}{R}\right)\left(C\cos(m\varphi) + D\sin(m\varphi)\right)$

$$\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2l_1} z\right) \quad n = 1, 3, 5$$

d) Separationsbedingung: $\quad x'_{ml}$ = l-te Nullstelle von J_m

$$k^2 = k_\rho^2 + k_z^2$$

$$= \left(\frac{x_{ml}}{R}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{2h}\right)^2 \hat{=} k_{mln}$$

Blick in den Verlauf der Besselfkt.:

$\Rightarrow J_1'$ weist die kleinste 1. Nullstelle auf.

$x'_{11} \approx 1{,}84$ Kleinste mögliche Axialordnung: $n=1$

Resonanzwellenzahl der TM^z_{111} - Eigenschwingung

($m=1$, $n=1$, 1. Radialordnung)

$$k_{111} = \sqrt{\left(\frac{x'_{111}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2}$$