

L $\textcircled{707}$

a) Fläche \vec{F}

Unterschied zw. \vec{F} und \vec{F}^2

$$\vec{F} = \vec{e}_z \cdot \left(6 \frac{b^2}{4} + \overbrace{b \cdot \frac{b}{4}} \right) = 7 b^2 \vec{e}_z$$

(Abzählen von $\frac{b^2}{4}$ - Quadraten)

$$\Phi_0 = B_0 \cdot (\vec{e}_z)^2 \cdot \frac{7}{4} b^2 = \frac{7}{4} b^2 B_0$$

b) $\tilde{\Phi}_0 = B_0 (\vec{e}_z)^2 \frac{6}{4} b^2 = \frac{3}{2} b^2 B_0$
 analog

c) Da \vec{B} homogen und zeitlich konstant:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}_0 \cdot \cos(\omega t)$$

d) Da der Pfad $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H$
 nur in idealen Leitern verläuft, ist das Pfadintegral
 über $\vec{B} \equiv 0$

e) Bestimmung von $I(t)$:

Es gilt: $\vec{j} = \sigma_S \cdot \vec{E}$ in der Schicht S

In S bildet sich eine Stromverteilung

$$\vec{j}(y) = \vec{e}_x \cdot j_x(y) \text{ aus.}$$

$b/4$ siehe Richtung von $I(t)$ in Skizze.

$$I(t) = d \int_0^{b/4} \vec{e}_x \cdot j_x(y) \cdot (-\vec{e}_x) dy$$

$$= -d \cdot \int_0^{b/4} j_x(y) dy$$

$$j_x(y) = \sigma_S \cdot E_x(y)$$

Induktion: (Umlauf der geschlossenen Pfade beachten, siehe d))

$$\int_b^0 E_x(y) dy = -\dot{\Phi}(y) \quad \text{variiert linear in } y \text{ zwischen } \dot{\Phi}(t) \text{ und } \dot{\Phi}(t)$$

$$\Rightarrow E_x(y) = +\frac{1}{b} \cdot \dot{\Phi}(y) = B_0 \frac{1}{b} \cdot (-\omega) \cdot \sin(\omega t) \cdot \left[\frac{3}{2} b^2 + \left(\frac{y}{b} \right) \cdot \frac{b^2}{4} \right]$$

$$\Rightarrow \dot{j}_x(y) = -\sigma \frac{\omega}{b} B_0 \sin(\omega t) \cdot \left[\frac{3}{2} b^2 + y \cdot b \right]$$

e)

$$\begin{aligned} I(t) &= -d \cdot B_0 \int_0^{b/4} \frac{\omega}{b} \sin(\omega t) \left[\frac{3}{2} b^2 + y b \right] dy \\ &= B_0 d \cdot \sigma \frac{\omega}{b} \sin(\omega t) \left[\frac{3}{2} b^2 \frac{b}{4} + \frac{1}{2} b \cdot \frac{b^2}{16} \right] \\ &= B_0 d \sigma \frac{\omega}{b} \sin(\omega t) \left[\frac{3}{8} b^3 + \frac{1}{2} \frac{b^3}{16} \right] \\ &= B_0 d \sigma \omega \sin(\omega t) \cdot \frac{13}{32} b^2 \end{aligned}$$

$$a) \quad \vec{E}(z) = E_0 \exp(-jk_1 z) \vec{e}_z$$

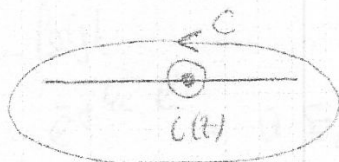
$$u(z) = \int_0^a \vec{E}(z) d\vec{r} = \int_0^a E_0 \exp(-jk_1 z) dz = E_0 \cdot a \cdot \exp(-jk_1 z)$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega \mu_0} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{-k_1}{\omega \mu_0} E_0 \exp(-jk_1 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \cdot E_0 \exp(-jk_1 z) \vec{e}_x = -\frac{1}{z_F} E_0 \exp(-jk_1 z) \vec{e}_x$$

$$\text{mit } z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}$$

untere Platte



$$\underline{i}(z) = \oint_C \vec{H} d\vec{r} = \int_0^a H_x(z) dx = -b \cdot H_x(z)$$

$$\underline{i}(z) = \frac{1}{z_F} \cdot b \cdot E_0 \cdot \exp(-jk_1 z)$$

$$z_L = \frac{u(z)}{\underline{i}(z)} = \frac{a}{b} \cdot z_F = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}$$

$$b) \quad \underline{z=0}: \quad H_{\text{tang}} = \text{stetig}, \quad E_{\text{tang}} = \text{stetig}$$

$$H_x = \text{stetig}, \quad E_y = \text{stetig}$$

$$\text{Somit} \quad E_{y1} = E_{y2} \Rightarrow u_1(0) = u_2(0)$$

$$H_{x1} = H_{x2} \Rightarrow \underline{i}_1(0) = \underline{i}_2(0)$$

Spannung stetig, Strom stetig

$$c) \quad \underline{z=l}: \quad E_{\text{tang}} = 0 \text{ an idealen Leiter} \Rightarrow E_{y2}(z=l) = 0 \\ \Rightarrow u(z=l) = 0$$

Bereich 1 ($z < 0$):

$$u_1(z) = a \cdot E_0 (\bar{e}^{jk_1 z} + r \cdot e^{jk_1 z})$$

$$i_1(z) = \frac{b}{Z_1} E_0 (\bar{e}^{jk_1 z} - r \cdot e^{jk_1 z})$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_0}$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}$$

Bereich 2 ($z > 0$):

$$u_2(z) = a \cdot E_2^h \cdot \bar{e}^{jk_2 z} + a \cdot E_2^r \cdot e^{jk_2 z}$$

$$i_2(z) = \frac{b}{Z_2} E_2^h \cdot \bar{e}^{jk_2 z} - \frac{b}{Z_2} E_2^r \cdot e^{jk_2 z}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_0}$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}}$$

mit Randpunkt c) folgt:

$$u_2(l) = a \cdot E_2^h \cdot \bar{e}^{jk_2 l} + a \cdot E_2^r \cdot e^{jk_2 l} = 0$$

$$\Rightarrow E_2^r = -E_2^h \cdot \bar{e}^{2jk_2 l}$$

$$\Rightarrow u_2(z) = a \cdot E_2^h (\bar{e}^{-jk_2 z} - \bar{e}^{jk_2 (z-l)}) \quad | \cdot \bar{e}^{jk_2 l}$$

$$\Rightarrow u_2(z) = a \cdot E_2^h (\bar{e}^{-jk_2 l}) \cdot (\bar{e}^{-jk_2 (z-l)} - \bar{e}^{jk_2 (z-l)})$$

$$\Rightarrow u_2(z) = 2 \cdot j \cdot a \cdot E_2^h \cdot \bar{e}^{-jk_2 l} \sin(k_2 (l-z))$$

ausklammern

analog:

$$\Rightarrow i_2(z) = \frac{b}{Z_2} E_2^h \cdot \bar{e}^{jk_2 l} (\bar{e}^{-jk_2 (z-l)} + \bar{e}^{jk_2 (z-l)})$$

$$\Rightarrow i_2(z) = 2 \cdot \frac{b}{Z_2} E_2^h \cdot \bar{e}^{jk_2 l} \cos(k_2 (l-z))$$

mit Randpunkt b) folgt:

$$u_1(0) = a \cdot E_0 (1+r) = 2 \cdot j \cdot a \cdot E_2^h \bar{e}^{jk_2 l} \sin(k_2 l) = u_2(0)$$

$$i_1(0) = \frac{b}{Z_1} E_0 (1-r) = 2 \cdot \frac{b}{Z_2} E_2^h \bar{e}^{jk_2 l} \cos(k_2 l) = i_2(0)$$

$$\Rightarrow \frac{u_1(0)}{i_1(0)} = \frac{u_2(0)}{i_2(0)} = j \cdot a \cdot \frac{Z_2}{b} \tan(k_2 l) = j Z_{L2} \tan(k_2 l)$$

$$k_1 \cdot l = 0 \Rightarrow \tan(k_2 \cdot l) = 0 \Rightarrow \frac{u_2(0)}{u_1(0)} = 0 \quad (\text{Kurzschluss})$$

$$f) \quad k_2 \cdot l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \infty \quad \frac{u_2(0)}{u_1(0)} \rightarrow \infty \quad (\text{Leerlauf})$$

707 (A.3)

$$a) \quad \Delta \underline{\vec{E}}_{12} + \underbrace{\omega^2 \epsilon_{12} \mu_0}_{k^2} \underline{\vec{E}}_{12} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow f_1''(y) + (\epsilon_1 \mu_0 \omega^2 - \epsilon_{\text{eff}} \mu_0 \omega^2) f_1(y) = 0$$

$$\Rightarrow f_1''(y) + p_1^2 f_1(y) = 0 \quad \text{mit } p_1^2 = \omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_{\text{eff}}) = \omega^2 \mu_0 (3\epsilon_0 - \epsilon_{\text{eff}})$$

$$\text{analog: } f_2''(y) - p_2^2 f_2(y) = 0 \quad \text{mit } p_2^2 = \omega^2 \mu_0 (\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_2) = \omega^2 \mu_0 (\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_0)$$

$$\text{beachte: } \epsilon_0 < \epsilon_{\text{eff}} < 3\epsilon_0 \Rightarrow p_1^2 > 0 \quad p_2^2 > 0 \Rightarrow p_1, p_2 = \text{reell}$$

$$\text{Lösungen: } f_1(y) = A_1 \cos(p_1 y) + B_1 \sin(p_1 y)$$

$$f_2(y) = A_2 \cdot e^{p_2 y} + B_2 \cdot e^{-p_2 y}$$

$$b) \quad \text{Grenzbedingung bei } y=0: \quad E_{\text{tang}} = 0 \quad (\text{idealer Leiter!})$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{x1}(y=0) = 0}$$

$$\underline{\vec{E}}_1 = -e^{-j k_{\text{eff}} z} \frac{\partial f_1}{\partial y} \vec{e}_y \times \vec{e}_z = -e^{-j k_{\text{eff}} z} \frac{\partial f_1}{\partial y} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = 0} \Rightarrow \boxed{f_1(y) = A_1 \cos(p_1 y)}$$

$$\underline{\vec{E}}_2 = -e^{-j k_{\text{eff}} z} \frac{\partial f_2}{\partial y} \vec{e}_x = -e^{-j k_{\text{eff}} z} p_2 (A_2 e^{p_2 y} - B_2 e^{-p_2 y}) \cdot \vec{e}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } y \rightarrow \infty \Rightarrow \boxed{A_2 = 0} \Rightarrow \boxed{f_2(y) = B_2 e^{-p_2 y}}$$

Stromverteilung bei $y=h$: $E_{\text{tang}} = \text{stetig}$, $H_{\text{tang}} = \text{stetig}$

$$\Rightarrow \underline{E}_{x1}(y=h) = \underline{E}_{x2}(y=h); \quad \underline{H}_{z1}(y=h) = \underline{H}_{z2}(y=h);$$

$$\underline{H}_{x1}(y=h) = \underline{H}_{x2}(y=h).$$

$$\underline{E}_{x1}(y=h) = \underline{E}_{x2}(y=h) \Rightarrow e^{jk_{\text{eff}}z} A_1 p_1 \sin(p_1 h) = e^{jk_{\text{eff}}z} B_2 p_2 e^{-p_2 h}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 p_1 \sin(p_1 h) = B_2 p_2 e^{-p_2 h}} \quad * \quad \text{erfüllt, da } \underline{H}_x \equiv 0$$

$$\underline{H}_{z1}(y=h) = \underline{H}_{z2}(y=h) = \frac{e^{jk_{\text{eff}}z}}{j\omega\mu_0} (k_1^2 - k_{\text{eff}}^2) A_1 \cos(p_1 h) =$$

$$= \frac{e^{jk_{\text{eff}}z}}{j\omega\mu_0} (k_2^2 - k_{\text{eff}}^2) B_2 e^{-p_2 h}$$

$$k_1^2 - k_{\text{eff}}^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 - \omega^2\mu_0\epsilon_{\text{eff}} = p_1^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1 p_1^2 \cos(p_1 h) = -B_2 p_2^2 e^{-p_2 h}} \quad **$$

$$k_2^2 - k_{\text{eff}}^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 - \omega^2\mu_0\epsilon_{\text{eff}} = -p_2^2$$

$$\frac{*}{**} \Rightarrow \frac{1}{p_1} \tan(p_1 h) = -\frac{1}{p_2} \Rightarrow \tan(p_1 h) = -\frac{p_1}{p_2} \quad \text{q. e. d.}$$

ab hier gilt: $p_1 h = \frac{3\pi}{4}$

$$a) \quad \tan(p_1 h) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 = p_2 = \frac{3\pi}{4h}}$$

$$p_1 = \omega \sqrt{\mu_0(\epsilon_0 - \epsilon_{\text{eff}})} = \frac{3\pi}{4h} \quad p_2 = \omega \sqrt{\mu_0(\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_0)} = \frac{3\pi}{4h}$$

$$\Rightarrow \omega \sqrt{\mu_0(\epsilon_0 - \epsilon_{\text{eff}})} = \omega \sqrt{\mu_0(\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_0)} \Rightarrow \epsilon_0 - \epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_{\text{eff}} = 2\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{\text{eff}} = \omega \sqrt{2\epsilon_0\mu_0}}$$

$$\Rightarrow p_1 = \omega \sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{3\pi}{4h} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3\pi}{4h} \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{3\pi}{4h} \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}}$$

$$\underline{\underline{E}}_1 = \underline{\underline{E}}_x \cdot A_1 \cdot e^{-j\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} z} \frac{3\alpha}{4h} \sinh\left(\frac{3\alpha}{4} \frac{y}{h}\right)$$

$$\underline{\underline{E}}_1 = \underline{\underline{E}}_x A_1 \frac{3\alpha}{4h} e^{-j\sqrt{2} \frac{\alpha}{4h} z} \sinh\left(\frac{3\alpha}{4} \frac{y}{h}\right)$$

$$\underline{\underline{E}}_2 = \underline{\underline{E}}_x B_2 e^{-j\omega \sqrt{2\epsilon_0 \mu_0} z} e^{-\frac{3\alpha}{4} \frac{y}{h}} \frac{3\alpha}{4h}$$

$$\underline{\underline{E}}_2 = \underline{\underline{E}}_x B_2 \frac{3\alpha}{4h} e^{-j\sqrt{2} \frac{\alpha}{4h} z} e^{-\frac{3\alpha}{4} \frac{y}{h}}$$

aus * : $B_2 = A_1 \frac{p_1}{p_2} e^{\frac{p_2 h}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}} \frac{\sinh(p_1 h)}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = A_1 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\alpha}{4}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E}}_2 = \underline{\underline{E}}_x \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 \cdot e^{-j\sqrt{2} \frac{\alpha}{4h} z} e^{\frac{3\alpha}{4} (1 - \frac{y}{h})}$$

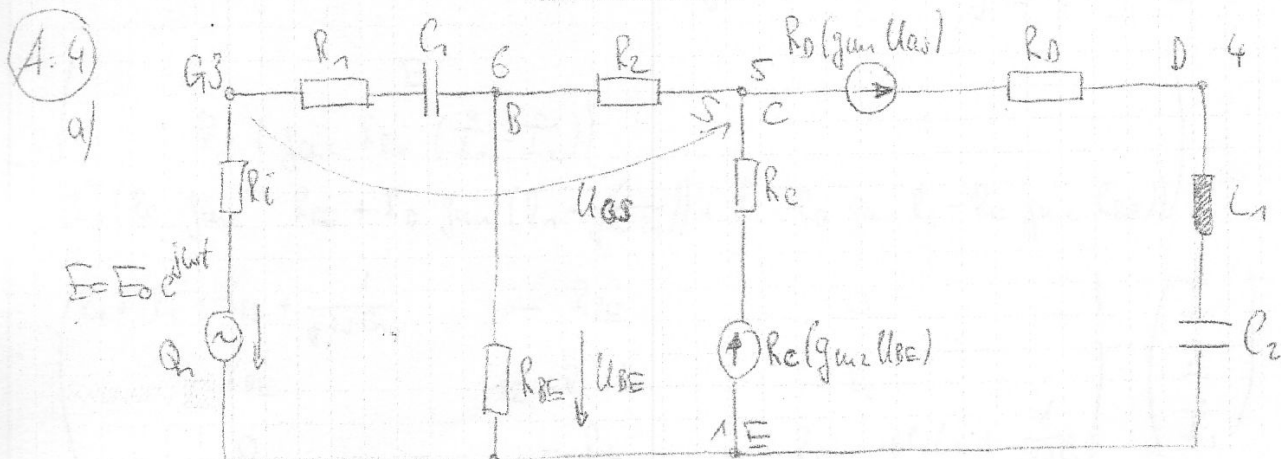
f) Forderung: $\left| \frac{\underline{\underline{E}}_{2x}(y=h)}{\underline{\underline{E}}_{2x}(y=h)} \right| \leq 10^{-2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3\alpha}{4} (1 - \frac{h}{h})}{e^{\frac{3\alpha}{4} (\frac{h}{h} - 1)}} \leq 10^{-2} \Rightarrow e^{\frac{3\alpha}{4} (\frac{h}{h} - 1)} \geq 10^2$$

$$\frac{3\alpha}{4} (\frac{h}{h} - 1) \geq \ln(10^2) \Rightarrow \frac{h}{h} \geq \frac{4}{3\alpha} \ln(10^2) + 1 \approx 3$$

~ 2 (siehe Aufgabenblatt)

$$\Rightarrow h \Rightarrow \frac{h}{h} \geq 3 \Rightarrow H_{min} = 3h$$



$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_i + R_{BE} + \frac{1}{j\omega C_1} & -R_{BE} & 0 \\ -R_{BE} - R_C R_{BE} j\omega C_2 & R_{BE} + R_2 + R_C R_{BE} j\omega C_2 & -R_C \\ -(R_C j\omega C_2 R_{BE} + R_C j\omega C_2 (R_1 + \frac{1}{j\omega C_1})) & -(R_C j\omega C_2 R_2 - R_C j\omega C_2 R_{BE}) - R_C & R_C + R_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{pmatrix}$$

d) $R = R_1 = R_{BE} = R_2 = R_C = R_3 = R_i = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j\omega C_2} \quad C = C_1 = C_2 \quad L = 0$

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3R + \frac{1}{j\omega C} & -R & 0 \\ -2R & 4R & -R \\ -(2R + \frac{1}{j\omega C}) & -R & 2R + \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{pmatrix}$$

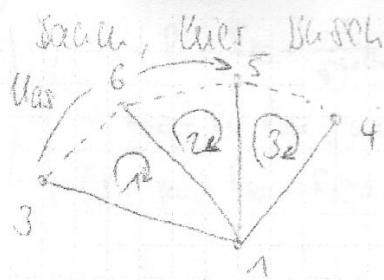
$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3R j\omega C + 1}{j\omega C} & -R & 0 \\ -2R & 4R & -R \\ -\frac{2R j\omega C + 1}{j\omega C} & -R & \frac{2R j\omega C + 1}{j\omega C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{pmatrix}$$

mit $\boxed{\omega \cdot C \ll \frac{1}{R}}$

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega C} & -R & 0 \\ -2R & 4R & -R \\ -\frac{1}{j\omega C} & -R & \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \end{pmatrix}$$

2)
$$\hat{I}_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{j\omega C} & E & 0 \\ -2R & 0 & -R \\ -\frac{1}{j\omega C} & 0 & \frac{1}{j\omega C} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{j\omega C} & -R & 0 \\ -2R & 4R & -R \\ -\frac{1}{j\omega C} & -R & \frac{1}{j\omega C} \end{vmatrix}$$



Knoten: $k=5$

Zweige: $z=7$

Komponenten: $S=1$

Rang $p = 5 - 1 = 4$ Anzahl linear unabhängiger Kanten
 Zeilenzahl $m = 7 - 5 + 1 = 3$ Anzahl linear unabh. Maschen

$$c) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{pmatrix}$$

$$z_{11} = R_1 + R_i + R_{BE} + \frac{1}{j\omega C_1} \quad z_{12} = -R_{BE} \quad z_{13} = 0$$

$$z_{21} = -R_{BE} \quad z_{22} = R_{BE} + R_2 + R_0 \quad z_{23} = -R_0$$

$$z_{31} = 0 \quad z_{32} = -R_0 \quad z_{33} = R_0 + R_D + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2}$$

$$u_{BE} = R_{BE} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) \quad u_{as} = \dot{I}_1 \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) + \dot{I}_2 R_2$$

$$\dot{u}_1 = E$$

$$\dot{u}_2 = R_0 (\text{gen. } u_{BE}) = R_0 (\text{gen. } R_{BE} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2))$$

$$\dot{u}_3 = R_0 (\text{gen. } R_{BE} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)) + R_D \text{ gen. } \left(\dot{I}_1 \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) + \dot{I}_2 R_2 \right)$$


$$\begin{pmatrix} E \\ R_0 (\text{gen. } R_{BE} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)) \\ \dot{I}_1 (R_0 \text{ gen. } R_{BE} + R_D \text{ gen. } (R_1 + \frac{1}{j\omega C_1})) + \dot{I}_2 (R_0 \text{ gen. } R_2 - R_0 \text{ gen. } R_{BE}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_i + R_{BE} + \frac{1}{j\omega C_1} & -R_{BE} & 0 \\ -R_{BE} & R_{BE} + R_2 + R_0 & -R_0 \\ 0 & -R_0 & R_0 + R_D + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{E \left[\frac{3R}{j\omega C} \right]}{4R - 4R^2 \cdot j\omega C} = \frac{E (3R) (j\omega C)}{4R - 4R^2 \cdot j\omega C}$$

im Gleichstromfall ist $\omega = 0$. $\Rightarrow I_2 = \frac{0}{4R} = 0$

15

a)  gültig für $d \ll \lambda$

b) Admittanzparameter des Modells 0. Ordnung:

$$\underline{Y}_{11} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L}$$

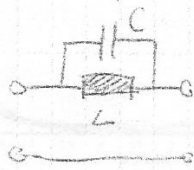
$$\underline{Y}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} = -\frac{1}{j\omega L} = \frac{j}{\omega L}$$

Ablese: $|\underline{Y}_{11}| \approx 0,2 \text{ S}$ bei $\omega = 0,2 \text{ GHz} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega |\underline{Y}_{11}|} = \frac{1}{0,25 \times 0,2 \text{ GHz}}$
 $= \frac{1}{0,05} \text{ nH} = 20 \text{ nH}$

c) Die Resonanz kann nur beobachtet werden, wenn eine Kapazität hinzugefügt wird. Physikalisch 2 Möglichkeiten sich voll

Variante a.

Kapazität zw. Leiter



$$\underline{Y}_{11} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\underline{Y}_{21} = -j\omega C - \frac{1}{j\omega L}$$

Diese Variante scheitert aus, weil sowohl \underline{Y}_{11} als auch \underline{Y}_{21} bei der Frequenz $\omega \cdot C = \frac{1}{\omega L}$ einen Vorzeichenwechsel besitzen, die wiederum sich gegenseitig aufheben. Jedoch nur für \underline{Y}_{11} einen Vorzeichenwechsel vorherzusagen.

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Aufgabe 5 [19 Punkte]

Gegeben ist in Abb. 1 das Zweitor in Mikrostreifenleiter-Technologie mit den Bezugsebenen BE1 und BE2. Das Bauelement besteht aus dem idealen Substrat-Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_{r1} sowie dem dielektrischen Verlustfaktor $\tan \delta_1 = 0$. Über dem Dielektrikum befindet sich Luft ($\epsilon_{r2} = 1, \sigma_2 = 0$), unter dem Dielektrikum eine ideale Massemetallisierung. In der Grenzschicht Dielektrikum/Luft befindet sich Dünnschicht-Metallisierung ($\sigma_1 \rightarrow \infty$) wie in Abb. 1 gezeigt. Der Einfluß der verlustlosen Zuleitungen (Länge l_z) wird vernachlässigt. Die feldtheoretisch (numerisch) berechneten Admittanzparameter Y_{11} und Y_{21} des Zweitors sind in Abb. 2 graphisch dargestellt. Es sind aus den numerisch berechneten Daten nach Abb. 2 sukzessive verbesserte lineare Ersatzschaltbildmodelle abzuleiten. Diese dürfen nur konzentrierte Elemente R, L, C und C als Modellparameter enthalten.

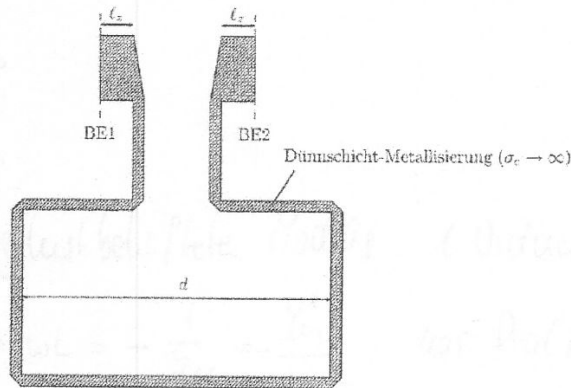


Abbildung 1: Zweitor (Layout)

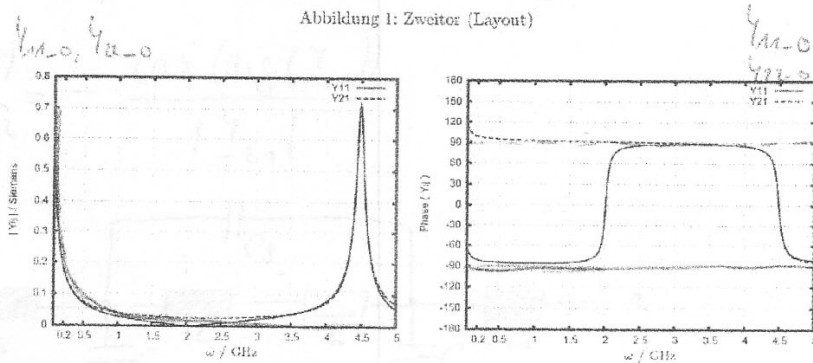
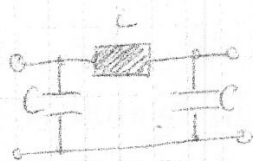


Abbildung 2: Admittanzparameter Y_{11} und Y_{21} (Betrag und Phase)

- a) [2 Punkte] Skizzieren Sie das Ersatzschaltbildmodell 0. Ordnung des Zweitors, bestehend aus einem einzigen konzentrierten Element. Unter welchen Voraussetzungen ist dieses Ersatzschaltbildmodell gültig?

(Fortsetzung der Aufgabenstellung auf der folgenden Seite)

Variante b
(Kapazität zur Masse -
Metallisierung)

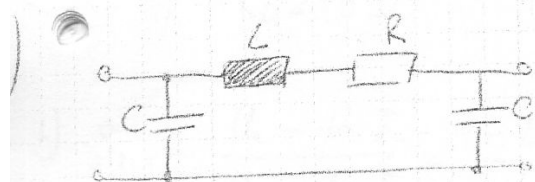


$$Y_{11} = j\omega L + \frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_{21} = -\frac{1}{j\omega L}$$

hier gibt es bei $\omega L = \frac{1}{\omega L}$ eine Unreinheit Wechsel nur bei Y_{11}

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4 \cdot 10^8 \text{ Hz}^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9} \text{ H}} = \frac{1}{10^{-11}} = 10 \text{ pF}$$

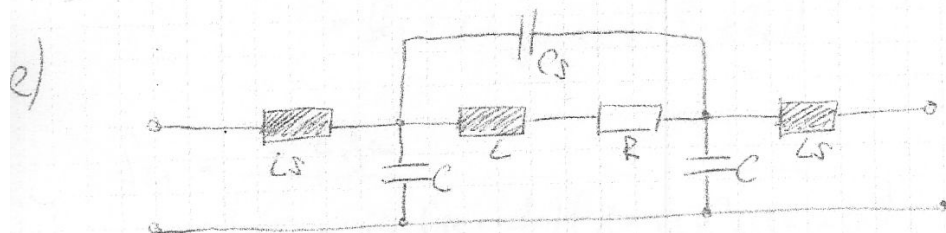


Admittanzparameter des verlustbehafteten Modells 1. Ordnung:

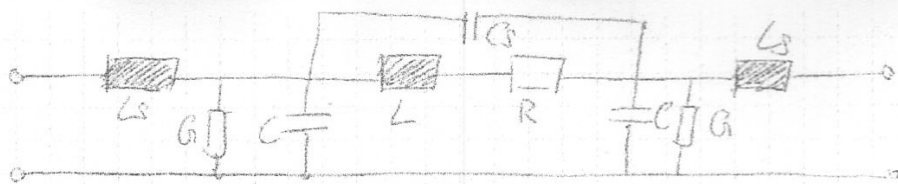
$$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{1}{R+j\omega L} \Rightarrow R+j\omega L = -\frac{1}{Y_{21}} = -\frac{Y_{21}^*}{|Y_{21}|^2}$$

aus Realteil benötigt

$$\Rightarrow R = -\frac{2 \operatorname{Re}(Y_{21})}{|Y_{21}|^2} = -\frac{\cos(\arg(Y_{21}))}{|Y_{21}|}$$



Die Resonanz bei $\omega = 4,5 \text{ GHz}$ ist eine Parallelresonanz ($Y_{11}, Y_{21} \rightarrow \infty$)
Da aufgrund der leitenden Verbindung zwischen den Toren eine Serienkapazität physikalisch nicht zu voll ist, kommt es zu einer weiteren Parallelresonanz in Frage. Diese bildet aus der bisher nicht berücksichtigten Streukapazität zwischen den einzelnen Leiterabschnitten die Parallelresonanz.



Für ein allgemeingültiges Modell werden die durch $\tan \delta$ beschriebenen Polarisationsverluste der Dielektrika als komplexe Kapazitäten \underline{C} berücksichtigt werden (da proportional zur Frequenz). Für eine feste Frequenz kann dies immer als eine Parallelschaltung aus Leitwert G und reeller Kapazität C beschrieben werden.

4.6 a) $R_g = 20 \Omega$ $\omega C_{as} = \frac{1}{15} S$ $\omega C_{os} = 0,015 S$ $R_{os} = \frac{50}{0,3} \Omega$

b) $\underline{S}_{21} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{z}_0 \underline{I}_1}{\underline{U}_1 + \underline{z}_0 \underline{I}_1} = \frac{-2 \underline{z}_0 \underline{I}_2}{\underline{U}_1 + \underline{z}_0 \underline{I}_1}$

$-2 \underline{z}_0 \underline{I}_2 = -2 \frac{j\omega \underline{U}_g}{\frac{1}{R_g} + j\omega C_{os} + \frac{1}{\underline{z}_0}}$

$\underline{U}_1 + \underline{z}_0 \underline{I}_1 = \underline{U}_1 \left(1 + \frac{\underline{z}_0}{R_g + \frac{1}{j\omega C_{os}}} \right) = \underline{U}_g \left(1 + j\omega C_{as} R_g \right) \left(1 + \frac{\underline{z}_0}{R_g + \frac{1}{j\omega C_{os}}} \right) =$
 $= \underline{U}_g (1 + j\omega C_{os} (R_g + \underline{z}_0))$

$\underline{S}_{21} = \frac{-2 j\omega}{\left(\frac{1}{R_g} + j\omega C_{os} + \frac{1}{\underline{z}_0} \right) (1 + j\omega C_{os} (R_g + \underline{z}_0))}$

c) Transformation von \underline{S}_{22} zu \underline{z}_L^* :

$\rho_p = 0,2101$

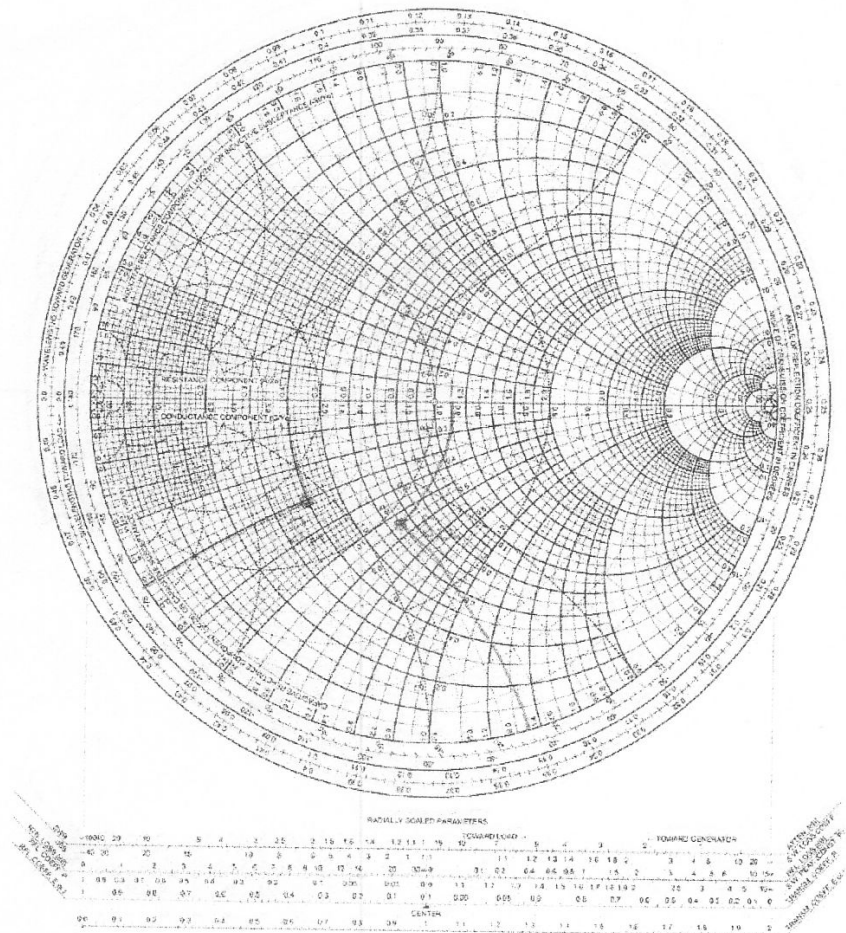
$\rho_s = 0,1451$

Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2007

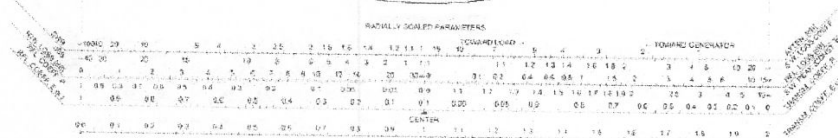
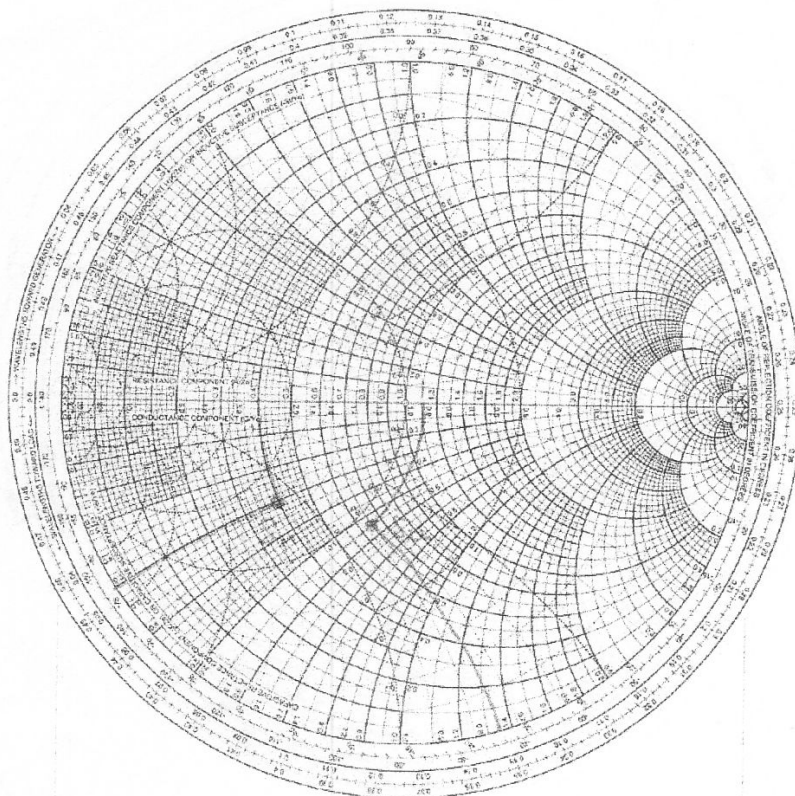
KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"
Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt a)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



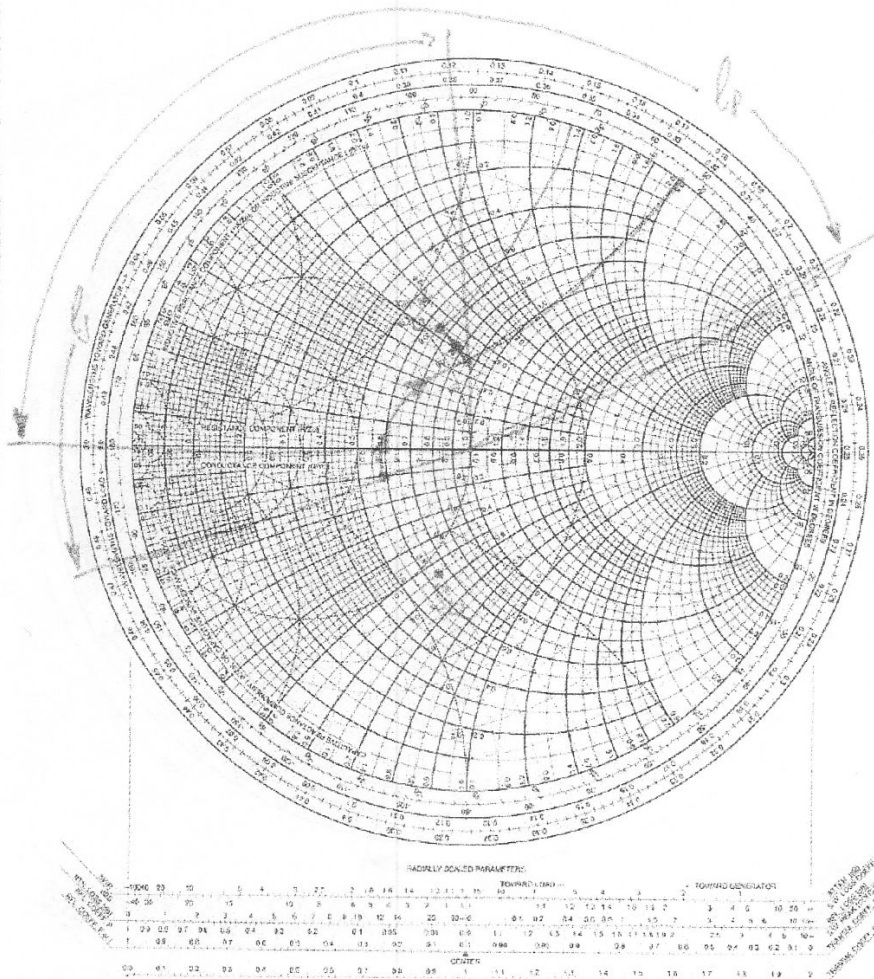
Frühjahr 2007

Name: _____ Matr.Nr.: _____



KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"
Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt c)

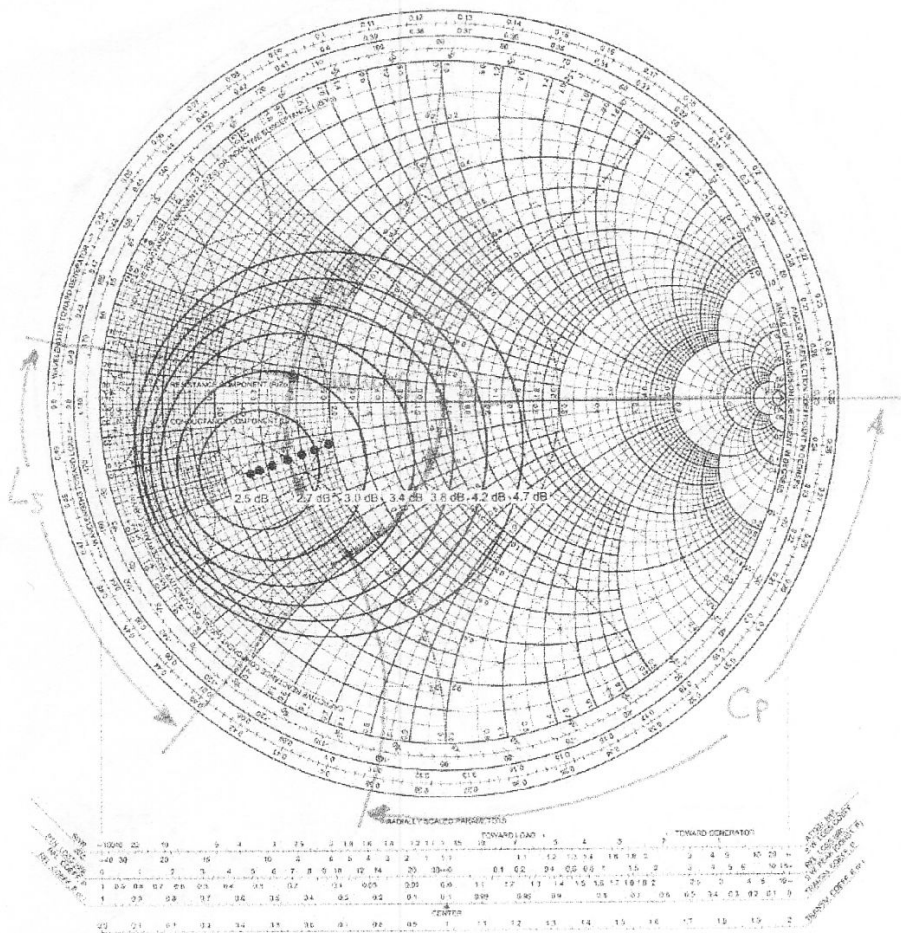
Name: _____ Matr.Nr.: _____



Frühjahr 2007

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt d), e)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



Frühjahr 2007

Name: _____ Matr.Nr.: _____

