EMF I F10

A1

a) $\vec{k}_1 = \vec{n}_1 \cdot k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

$\vec{k}_2 = \vec{n}_2 \cdot k_2 = \vec{n}_2 \cdot k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

$\underline{\vec{E}}(x,y,z) = \vec{e}_x E_{re} \left[\exp(-j \vec{k}_1 \vec{r}) + \underbrace{\exp(j\varphi)}_{-1 \text{ bei } \varphi_1 = \pi \text{ (siehe b)}} \exp(-j \vec{k}_2 \vec{r}) \right]$

b)

$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left\{ e^{j\omega t} \cdot \underline{\vec{E}} \right\}$

$= \vec{e}_x E_{re} \cdot Re\left\{ \left[\exp(j\omega t - j\vec{k}_1 \vec{r}) + \exp(j\varphi + j\omega t - j\vec{k}_2 \vec{r}) \right] \right\}$

$= \vec{e}_x E_{re} \cdot \left[\cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}) + \cos(\omega t + \varphi - \vec{k}_2 \vec{r}) \right]$

Bed. $\vec{E}(\vec{r},t) = 0$ f. $y = 0$

$\Rightarrow \vec{E}(y=0,t) = 0$

$\Rightarrow \cos\left(\omega t - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \cdot z\right) = -\cos\left(\omega t + \varphi - \underbrace{k_2}_{=k_1} \frac{z}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow$ (Phasendiff. $(2n+1)\pi$, $n = 0, 1, 2 \ldots$) $\Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \pi}$

$E(\vec{r},t) = \vec{e}_x E_{re} \left[\cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) - \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}) \right)$

c)

$\exp(-j\vec{k}_1 \vec{r}) = \exp\left(-j\, k_1 \frac{y+z}{\sqrt{2}}\right)$

$\exp(-j\vec{k}_2 \vec{r}) = \exp\left(-j\, \underbrace{k_2}_{=k_1} \frac{(-y+z)}{\sqrt{2}}\right)$

$\text{rot } \underline{\vec{E}} = -\mu_0 (j\omega) \underline{\vec{H}}$

$\Rightarrow \underline{\vec{H}} = \frac{\text{rot} E}{\mu_0 \cdot \omega} \cdot j$

$\Rightarrow \underline{\vec{H}} = \frac{j}{\mu_0 \omega} \cdot \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{j}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial z E_x \\ -\partial y \underline{E}_x \end{pmatrix} = \frac{j E_{re}}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \left[\exp(-j\vec{k}_1 \vec{r}) \cdot (-j \frac{k_1}{\sqrt{2}}) - \exp(-j\vec{k}_2 \vec{r})(-j \frac{k_1}{\sqrt{2}}) \right] \\ -\left[\exp(-j\vec{k}_1 \vec{r})(-j \frac{k_1}{\sqrt{2}}) + \exp(-j\vec{k}_2 \vec{r})(+j \frac{k_1}{\sqrt{2}}) \right] \end{pmatrix}$

$= \frac{j E_{re}}{\mu_0 \omega} \left(-j \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-j\vec{k}_1 \vec{r}) - \exp(-j \vec{k}_2 \vec{r}) \\ -\exp(-j\vec{k}_1 \vec{r}) - \exp(-j \vec{k}_2 \vec{r}) \end{pmatrix}$

$= \underbrace{\frac{k_1 E_{re}}{\mu_0 \omega}}_{E_{re} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-j\vec{k}_1 \vec{r}) - \exp(-j \vec{k}_2 \vec{r}) \\ -\exp(-j\vec{k}_1 \vec{r}) - \exp(-j \vec{k}_2 \vec{r}) \end{pmatrix}$

$\vec{H} = Re\left\{ \exp(j\omega t) \cdot \underline{\vec{H}} \right\} =$

$= \underbrace{\frac{k_1 \cdot E_{re}}{\mu_0 \omega \sqrt{2}}}_{E_{re} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}) - \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}) \\ -\cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}) - \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) \end{pmatrix}$

F10\A1 c) (alternativ) (über TEM-Wellen einzeln)

$$\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{H}}_1 + \underline{\vec{H}}_2 = \frac{1}{Z}\left(\vec{n}_1 \times \underline{\vec{E}}_1 + \vec{n}_2 \times \underline{\vec{E}}_2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \underline{\vec{E}}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \underline{\vec{E}}_2 \right)$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\mu_0}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_{1x} \\ -\underline{E}_{1x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_{2x} \\ \underline{E}_{2x} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\mu_0}} E_{re} \left[\exp(-j\vec{k}_1 \vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \exp(-j\vec{k}_2 \vec{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

d) spätestens jetzt muss zusammengefasst werden

$$\underline{\vec{E}} = \vec{e}_x \cdot E_{re}\left[\exp(-j\vec{k}_1 \vec{r}) - \exp(-j\vec{k}_2 \vec{r})\right]$$

$$= \vec{e}_x E_{re}\left[\exp\left(-jk_1 \left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right)\right) - \exp\left(-jk_1 \cdot \frac{-y+z}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \vec{e}_x E_{re} \exp\left(-jk_1 \frac{z}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left[\underbrace{\exp\left(-j\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right) - \exp\left(-j\frac{k_1}{\sqrt{2}}(-y)\right)}\right]$$

$$\hookrightarrow -2j \sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right) = \left(\cos\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right) + j\sin\left(-\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right) - \cos\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right) + j\sin\left(-\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right)\right)$$

$$= \vec{e}_x E_{re}\left(\exp\left(-jk_1 \frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right) \cdot \left(-2j\sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right)\right)$$

$$= \vec{e}_x E_{re}(-2j)\sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right) \exp\left(-j\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}_{k} z\right)$$

$$\Rightarrow \vec{k} = \vec{e}_z \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{2}} = \vec{e}_z \frac{k_1}{\sqrt{2}}$$

Es handelt sich um eine TE-Welle, da es longitudinale $\underline{\vec{H}}$-Komponenten gibt, aber keine longitudiale E-Komponenten.

F10 | A1   e)

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{\vec{E}} = \vec{e}_x E_{re}(-2j)\sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right)\exp(-jkz)$$

$$= \underline{u}_F \cdot \vec{t}$$

$$\Rightarrow \vec{t} = \frac{1}{A}\vec{e}_x \sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right) \quad A: \text{Normierungsfaktor (noch zu bestimmen)}$$

$$\underline{u}_F = A\, E_{re}(-2j)\exp(-jkz)$$

Normierung: $\int(\vec{t}\cdot\vec{t})\,dF = 1$

$$\Rightarrow \int_0^a dx \cdot \int_0^{\frac{\pi\sqrt{2}}{k_1}} dy\, (\vec{t})^2 = 1$$

$$\Rightarrow a\,\frac{1}{A^2}\int_0^{\frac{\pi\sqrt{2}}{k_1}} \sin^2\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right)dy = 1$$

Substitution:

$$u = \frac{k_1}{\sqrt{2}}y$$

$$y(u) = \frac{u\sqrt{2}}{k_1}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{\sqrt{2}}{k_1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{A^2}\int_0^{\pi}\sin^2(u)\cdot\frac{\sqrt{2}}{k_1}\,du = 1$$

0 und 2π sind Nullstellen vom sin

$$\Rightarrow \frac{a}{A^2}\frac{\sqrt{2}}{k_1}\left[0 + \left[\frac{1}{2}\cdot u\right]_0^{\pi}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{A^2}\frac{\sqrt{2}}{k_1}\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{a\pi}{k_1\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{A = \pm\sqrt{\frac{a\pi}{k_1\sqrt{2}}}}}$$

EMF I F10

A2

a) Das Magnetfeld ist homogen und nur die Komponenten senkrecht zur Scheibe trägt zum Fluss durch selbige bei. Somit gilt:

$$\phi(t) = B_0 \pi R^2 \cos(\alpha(t)) = B_0 \pi R^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin(\omega t)\right)$$

b)
$$\nabla \vec{j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(r j_r) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

c) Die entlang einem Kreis mit Radius $\rho \leq R$ induzierte Spannung ist gleich der negativen Zeitableitung des diesen Kreis durchsetzenden magnetischen Flusses.

Mit dem Ergebnis aus Unterpunkt a folgt also:

$$\int_0^{2\pi} \rho E_\varphi \, d\varphi = 2\pi \rho E_\varphi = B_0 \pi \rho^2 \frac{\pi}{2} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = B_0 \rho \frac{\pi}{4} \omega \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin(\omega t)\right) \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \sigma_0 B_0 \rho \frac{\pi}{4} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin(\omega t)\right) \vec{e}_\varphi$$

d)
$$P(t) = d \int_0^R \int_0^{2\pi} \vec{j}\vec{E} \, d\rho \, d\varphi = 2\pi d \int_0^R j_\varphi E_\varphi \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$= d\, \sigma_0 B_0^2 \frac{\pi^3}{8} \omega^2 \cos^2(\omega t) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin(\omega t)\right) \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{=\frac{R^4}{4}}$$

e) Die y-Komponente des zusätzlichen Magnetfeldes induziert kein Feld in der Kreisscheibe, da sie parallel dazu verläuft. Die Superposition der x- und z-Komponente entspricht einem Magnetfeld vom Betrag $\sqrt{2}\,B_0$, das entlang der ersten Winkelhalbierenden der x-y-Ebene verläuft. Es muss also im Ergebnis des letzten Unterpunktes B_0 durch $\sqrt{2}\,B_0$ und $\alpha(t)$ durch $\alpha(t) + \frac{\pi}{4}$ ersetzt werden:

$$\underline{P(t) = d\, \sigma_0 B_0^2 \frac{\pi^3}{16} \omega^2 \cos^2(\omega t) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin(\omega t) + \frac{\pi}{4}\right) R^4}$$

EMFI F10

A3

TM-Welle: $\underline{H}_z = 0$ $\underline{H}_z \sim \underline{f} = 0$

$$\vec{G} = g(x,y,z)\vec{e}_z = \tilde{g}(x,y)\, e^{-j\beta z}\,\vec{e}_z \text{ und } \vec{\underline{F}} = 0$$

a)

Helmholtzgleichung: $(\nabla^2 + k^2)\, g = 0$ mit $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0$

$$\nabla^2 = \nabla_{tr}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$(\nabla_{tr}^2 + p^2)\,\tilde{g} = 0 \text{ mit } p^2 = k^2 - \beta^2$$

b)

Separationsansatz: $\tilde{g}(x,y) = \underline{\Phi}(x) \cdot \underline{\Psi}(y)$

$$\underline{\Phi}'' \cdot \underline{\Psi} + \underline{\Phi}\,\underline{\Psi}'' + p^2\,\underline{\Phi}\,\underline{\Psi} = 0 \quad | :(\underline{\Phi} \cdot \underline{\Psi})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{\Psi''}{\Psi}}_{-k_y^2} + p^2 = 0 \quad \text{also} \quad p^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\underline{\Phi}'' + k_x^2\,\underline{\Phi} = 0 \qquad \underline{\Psi}'' + k_y^2\,\underline{\Psi} = 0 \quad \text{mit } k_x \neq 0 \text{ und } k_y \neq 0$$

$$\underline{\Phi}(x) = \underline{A} \cdot \cos(k_x x) + \underline{B} \sin(k_x x)$$

$$\underline{\Psi}(y) = \underline{C} \cos(k_y y) + \underline{D} \sin(k_y y)$$

Separationsbed.: $-k_x^2 - k_y^2 + \underbrace{k^2 - \beta^2}_{p^2} = 0$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{k^2 - p^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu_0 - k_x^2 - k_y^2}$$

$$\underline{E}_x = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon}\, \underline{\Phi}'\,\underline{\Psi}\, e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon}\, \underline{\Phi}\,\underline{\Psi}'\, e^{-j\beta z}$$

$$E_z = \frac{k^2 - \beta^2}{j\omega\varepsilon}\, g = \frac{p^2}{j\omega\varepsilon}\, \underline{\Phi}\,\underline{\Psi}\, e^{-j\beta z}$$

$$H_x = \frac{\partial g}{\partial y} = \underline{\Phi}\,\underline{\Psi}'\, e^{-j\beta z}$$

$$H_y = -\frac{\partial g}{\partial x} = -\underline{\Phi}'\,\underline{\Psi} \cdot e^{-j\beta z}$$

$\underline{H}_z = 0$ (TM-Welle)

F10 | A3 c)

$\underline{G}_4 (y=0)$ ist elektr. Wand: $\vec{E}_{tan} = \vec{0}$

$E_x(y=0) = 0$ und $E_z(y=0) = 0$

$\Rightarrow \underline{\Psi}(y=0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C = 0}}$

d)

$G_2 \ (y=h)$ ist magn. Wand: $\vec{H}_{tan} = \vec{0}$

$H_x(y=h) = 0$

$\Rightarrow \underline{\Psi}'(y=h) = 0 \Rightarrow k_y \underline{D} \cos(k_y \cdot h) = 0$

$\Rightarrow k_y \cdot h = (2m-1)\frac{\pi}{2}$ mit $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k_{ym} = \frac{(2m-1)\cdot\pi}{2h}}}$$

e)

$G_3 (x=0)$ ist magn. Wand $\vec{\underline{H}}_{tan} = \vec{0}$

$\underline{H}_y(x=0) = 0$

$\Rightarrow \underline{\Phi}'(x=0) = 0$

$\Rightarrow -k_x A \sin(k_x \cdot 0) + k_x \cdot B \cdot \cos(k_x \cdot 0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B = 0}}$

$G_1 (x=w)$ ist magn. Wand $\underline{\vec{H}}_{tan} = 0$

$H_y(x=w) = 0$

$\Rightarrow \underline{\Phi}'(x=w) = 0 \Rightarrow -k_x A \sin(k_x w) = 0$

$\Rightarrow k_x w = l \cdot \pi$ mit $l = 1, 2, 3 \ldots \quad (k_x \neq 0)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k_{xl} = \frac{l\pi}{w}}}$$

f) Fall $k_x = 0$ und $k_y \neq 0$

$\underline{\Phi}_0'' = 0$

$\underline{\Phi}_0(x) = A_0 + B_0 x$

$G_3 (x=0)$ ist magn. Wand: $H_y(x=0) = 0$

$\Rightarrow \underline{\Phi}_0'(x=0) = 0 \Rightarrow B_0 = 0$

$G_1 (x=w)$ ist magn. Wand $\underline{H}_y(x=w) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\underline{\Phi}'(x=w) = 0}}$

F 10|A3 g) Grundmode ($l=0, m=1$) $g_{01} = \Phi_0(x)\,\Psi_1(y)$

$$g_{01} = \underline{A}_0' \sin\left(\frac{\pi}{2h} y\right) e^{-j\beta_{01} z}$$

mit $\underline{A}_0' = \underline{A}_0 \cdot \underline{D}$ und $k_{y1} = \frac{\pi}{2h} = p_{01}$

$$H_x = \frac{\partial g_{01}}{\partial y} = \frac{\pi}{2h} \underline{A}_0' \cos\left(\frac{\pi}{2h} y\right) e^{-j\beta_{01} z}$$

Grenzfrequenz ω_c: $\beta(\omega_c) = 0$

$$\Rightarrow \beta^2 = \omega_c^2 \varepsilon \mu_0 - p_{01}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} p_{01} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} \frac{\pi}{2h}$$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\omega}{\beta}$ (Phase $\phi = \omega t - \beta z$)

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu_0 - \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2}}$$

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon \mu_0}\left(\frac{\pi}{2h\omega}\right)^2}}$$