Aufg. 3

a) ~~A~~ TE-Wellen

b) $(\Delta + k^2)\underline{G} = 0$

also $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\tilde{\underline{g}}}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\tilde{\underline{g}}}{\partial\varphi^2} + (k^2-\beta^2)\tilde{\underline{g}} = 0$

c) Seperationsansatz:

$\tilde{\underline{g}}(\rho,\varphi) = \Psi(\rho)\cdot K(\varphi)$

$\boxed{p^2 = k^2-\beta^2}$ Sep. Bed

$0 = K(\varphi)\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\frac{\partial\Psi(\rho)}{\partial\rho}\right) + \Psi(\rho)\cdot\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 K(\varphi)}{\partial\varphi^2} + p^2\Psi\cdot K$

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}K(\varphi) + m^2 K(\varphi) = 0 \quad (*)$

und $0 = \frac{1}{\Psi(\rho)}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi(\rho)}{\partial\rho}\right) + p^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \quad (**)$

$(*) \Rightarrow \quad m=0 \quad K(\varphi) = C_1\cdot\varphi + C_2$

$m\neq 0 \quad K(\varphi) = C_3\cdot\sin(m\varphi) + C_4\cdot\cos(m\varphi)$

$(**) \Rightarrow$ Bessel'sche DGL: allg. Lsg $\Psi_{pm}(\rho) = A\cdot J_m(p\cdot\rho) + B\, N_m(p\cdot\rho)$

6

d) $G_1, G_2: \vec{n} \cdot \vec{H} = 0$, d.h. $H_\varphi = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/4$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{\nabla}\tilde{g} \times \vec{e}_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\rho - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$H_\varphi \Big|_{\varphi=0} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \rho}\Big|_{\varphi=0} \Rightarrow 0 = K(0) \Rightarrow \begin{array}{l} m=0: C_2 = 0 \\ m \neq 0: C_4 = 0 \end{array}$$

$$H_\varphi \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = 0 \Rightarrow 0 = K(\pi/4) \Rightarrow \begin{array}{l} m=0: C_1 = 0 \\ m \neq 0: m = 4, 8, 12 \ldots \end{array}$$

Also gibt es für $m=0$ keine Lösung ausser $\tilde{g} \equiv 0$
und für $m \neq 0$ gilt $m = 4, 8, 12, \ldots$ $(K(\varphi) = C_3 \cdot \sin(m\varphi))$

e) Für $\rho \to 0$ divergiert $N_m(p \cdot \rho)$, daher muss $B = 0$ sein.

Randbed. bei $\rho = a$: $H_{tan} = 0 \Rightarrow H_\varphi \big|_{\rho=a} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} \Rightarrow J_m'(p \cdot \rho)\Big|_{\rho=a} = 0$$

$p_n^m \cdot a$ sei die n-te Nullstelle von $J_m'(p_n^m \cdot a)$

f) Grenzfreq.: $\beta \to 0 \Rightarrow k^2 = (p_n^{m=4})^2$

$$f_{grenz} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{p_n^{m=4}}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}} \quad p_n^{m=4} \cdot a = 5{,}3175 \text{ (siehe Tabelle } \underset{n=3 \text{ nach Vorgabe}}{\uparrow}\text{)} \; ; \; c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5{,}3175}{2\pi} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{\sqrt{2}\, 5 \cdot 10^9 \cdot s^{-1}} = 5{,}3175 \cdot \frac{3}{\pi} cm \approx 5{,}3175 \, cm$$